Punctum est, cuius pars nulla.
Euclide

Indice

Introduzione

Oggetto di questa tesi è la “geometria elementare”, che studieremo come teoria assiomatica dal punto di vista della logica moderna.
Per ”geometria elementare“ si intendono quelle proprietà della geometria euclidea esprimibili in un opportuno linguaggio del prim'ordine. Ne analizzeremo quindi non solo la struttura assiomatica, ma anche le proprietà logiche di completezza e di decidibilità.
Per teoria T completa si intende un insieme di assiomi tale che, preso un qualsiasi enunciato ϕ, T dimostra ϕ o dimostra la sua negazione. E' una proprietà molto importante (oltre che rara, grazie a Gödel) di una teoria, soprattutto riguardo al problema della decidibilità. Se infatti gli assiomi della teoria sono dati in forma primitiva ricorsiva, e la teoria è completa, esiste un algoritmo di decidibilità che ha termine sia sull'insieme dei suoi teoremi e che sull'insieme dei suoi non-teoremi.
La tesi prende spunto da un articolo di Alfred Tarski, [T1], pubblicato negli atti di un convegno sul metodo assiomatico, tenuto a Berkeley negli anni '50. L'articolo espone in breve i principali risultati ottenuti dall'autore sulle proprietà logiche e assiomatiche della geometria elementare, frutto di un più generale studio sulla teoria dell'“algebra elementare”, ossia le proprietà dei numeri reali esprimibili al prim'ordine nel linguaggio dei campi ordinati. Scopo di questa tesi è di trattare nel dettaglio questi risultati, ampliando la trattazione a differenti possibili formulazioni (non equivalenti) della geometria elementare.

Nel primo capitolo è trattato il problema della scelta di un assiomatica adeguata a riassumere, in una teoria del prim'ordine, tutte le proprietà ben note della geometria euclidea classica.
Il linguaggio L adottato contiene due sole relazioni, una ternaria $B(abc)$, che esprime il concetto di 'essere tra due punti', e una quaternaria $\delta(abcd)$, che esprime la congruenza tra segmenti, individuati dai loro estremi. Nella scelta degli assiomi preferiamo concentrarci sull'evidenza del contenuto e sull'immediatezza delle conseguenze. Gli assiomi saranno quindi esposti in una forma più estesa della lista presentata da Tarski in [T1]. Accompagnati dalle opportune definizioni, essi permetteranno di derivare tutte le proposizioni presenti negli *Elementi*. La scelta degli assiomi è in certi casi legata a sole questioni di eleganza logica e di migliore leggibilità, mentre in altri si rivela decisiva per la validità delle proprietà logiche su cui stiamo indagando. Lasceremo infatti al capitolo finale la trattazione delle possibili formulazioni della continuità nel piano, utilizzando inizialmente il classico assioma di intersezione fra rette e cerchi.

Nel successivo capitolo viene esposto lo stretto legame tra la geometria elementare e la teoria dei campi.
In primo luogo, sfruttando la ben nota definizione di un aritmetica sui segmenti

(già presente in Euclide, e sviluppata nei dettagli da Hilbert ne *'I Fondamenti della Geometria'*) viene definita una struttura di gruppo additivo sull'insieme dei segmenti, opportunamente quozientato per la relazione di congruenza. Definendo opportunamente anche un'operazione prodotto su questo insieme, associeremo ad ogni modello $\mathcal{M}$ della geometria elementare un campo ordinato $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$. Sul prodotto cartesiano $\mathbb{F}_{\mathcal{M}} \times \mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ si definiscono in modo naturale due relazioni che interpretino B e δ, così da rendere anche $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}^2$ una L-struttura. A conclusione del capitolo dimostreremo il teorema di rappresentazione, che afferma che tutti i modelli della geometria elementare sono isomorfi al piano cartesiano sul loro campo associato.

Si prosegue allora nel terzo capitolo con lo studio di due classi particolari di campi ordinati, i campi euclidei e i campi reali chiusi. Questi ultimi verranno trattati in maniera più approfondita: ne verranno studiate le principali proprietà, enunciando e dimostrando il teorema di esistenza e unicità di una chiusura reale per ogni campo ordinato.
Grazie a queste proprietà si potrà dimostrare che la teoria dei campi reali chiusi è completa e decidibile. Viene qui utilizzato il metodo dell'eliminazione dei quantificatori, esposto in una sezione intermedia.

Forti di questi risultati, si passerà a studiare le varie possibili formulazioni dell'assioma di continuità.
Inizialmente viene considerato il consueto assioma di Dedekind di esistenza di un elemento separatore. Per formularlo è però necessario ampliare il linguaggio ad un linguaggio del second'ordine e si esce quindi dall'ambito della "geometria elementare".
Con l'assioma di Dedekind il teorema di rappresentazione determina ora un risultato di caratterizzazione unica. Infatti il campo associato risulta completo, e poichè l'unico campo ordinato e completo è, a meno di isomorfismo, il campo dei reali, l'unico modello di questa geometria euclidea "continua" è il piano reale $\mathbb{R}^2$.

Viene poi indebolita fortemente la nozione di continuità, restringendosi alla formulazione inizialmente data, l'assioma "classico" che postula l'intersezione di rette e cerchi. È noto fin dal lavoro di Hilbert che con questa formulazione tutti e soli i modelli della geometria elementare sono prodotti cartesiani su campi euclidei. Da questo teorema di caratterizzazione seguirà che la teoria è incompleta.

Volendo ottenere dei buoni risultati in fatto di completezza e decidibilità sarà utile, come noto dall'antichità, metterci in una posizione intermedia. Si può riformulare l'assioma di continuità di Dedekind al prim'ordine, postulando una sorta di "continuità per insiemi definibili". In questo modo si ottiene l'assiomatica enunciata e ampiamente studiata da Tarski in [T1], che risulta avere proprietà assai interessanti.
Verrà dimostrato che tutti e soli i modelli della geometria elementare, con questa forma dell'assioma di continuità, sono isomorfi al piano cartesiano su un campo reale chiuso. Inoltre, utilizzando i risultati ottenuti nel capitolo sui campi, verrà dimostrato che si ottiene una teoria completa e decidibile.

Viene poi studiata la possibilità di geometrie "intermedie", con formulazioni della continuità più deboli della continuità elementare, tra cui rientra quindi anche la "geometria per riga e compasso". Per quelle geometrie in cui si possa ottenere un teorema di caratterizzazione analogo a quelli precedenti ne verrà dedotta l'incompletezza logica, e ne verrà dimostrata una debole proprietà di decidibilità.

Per ognuna delle formulazioni sopracitate verranno studiate in breve le caratteristiche geometriche del piano che derivano dalle più o meno forti ipotesi di continuità.

La tesi si conclude enunciando le possibili generalizzazioni dei risultati ottenuti a geometrie di dimensione maggiore di due, e a geometrie non euclidee. Sono esposti inoltre alcuni interessanti possibili sviluppi, legati in parte allo studio del legame tra le estensioni di campi e le nozioni di continuità sul piano, ma principalmente alla possibilità di un assiomatizzazione di una geometria non-archimedea, e allo studio dei possibili modelli che la verifichino.

Capitolo 1

Assiomatica della Geometria Elementare

Per geometria elementare si intendono quelle proprietà della geometria euclidea "classica" degli *Elementi* [E] che possono essere formalizzate utilizzando gli strumenti della logica del prim'ordine. Ogni proposizione o teorema della geometria elementare è quindi riconducibile a una scrittura formale composta da termini del linguaggio, connettivi e quantificatori, e che non utilizzi nozioni insiemistiche (che del resto sarebbero estranee allo spirito originale dell'opera di Euclide). In particolare non sono ammesse quantificazioni su sottoinsiemi di punti del piano.
La geometria degli *Elementi* di Euclide è storicamente la teoria assiomatica per antonomasia, e in questa trattazione il problema della scelta degli assiomi riveste un ruolo molto importante. Da una parte dovremo cercare di individuare un insieme di assiomi indipendenti (almeno nei limiti del possibile), ossia fare in modo che ciascun assioma non sia derivabile formalmente dai rimanenti. Dall'altra non si vuole scrivere un insieme di assiomi talmente ermetici che nascondano ad un primo sguardo, ma anche a un secondo e a un terzo, le proprietà usuali della geometria euclidea.

Tarski in [T1] propone un insieme di 13 assiomi raffinati dagli assiomi di Hilbert come esposti in [H], quasi tutti indipendenti, inclusivi dei casi degeneri, logicamente molto eleganti. Talvolta non sono però di immediata comprensione, nè risulta evidente a prima vista come i fondamentali principi della geometria euclidea possano essere derivati da essi.
In questo capitolo preferiamo concentrarci sull'evidenza del contenuto e sull'immediatezza delle conseguenze. Gli assiomi saranno quindi esposti in una forma più estesa (17 assiomi, per conservarne la scaramanzia). Accompagnati dalle opportune definizioni, essi permetteranno di derivare tutte le proposizioni presenti negli *Elementi*.

Il linguaggio adottato è composto da due soli simboli di relazione, B e δ, il primo ternario, il secondo quaternario. Le variabili saranno indicate con le lettere dell'alfabeto a, b, c... e tutte le variabili libere nelle formule sono da considerarsi universalmente quantificate. L'uguaglianza di punti è trattata come identità logica e, come anticipato, nello sviluppo della teoria verranno utilizzati

soltanto strumenti di logica del primo ordine.
La prima relazione, B, formalizza l'intuizione di 'essere tra due punti'. $B(abc)$ si può quindi leggere come: '*il punto b sta tra il punto a e il punto c*'. La seconda è la relazione di congruenza fra segmenti, quindi $\delta(a, b, c, d)$ significa a livello intuitivo '*il segmento ab è congruente al segmento cd*'.

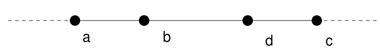
1.1 Assiomi di incidenza

Definiamo innanzitutto *piano* un qualsiasi modello della geometria elementare, i cui elementi saranno detti *punti*. Le variabili possono quindi essere quantificate soltanto su punti.
I primi cinque assiomi di incidenza[1] regolano il comportamento della relazione B[2].

A1 PROPRIETÀ DI IDENTITÀ DI B
$[B(aba) \rightarrow (a = b)] \wedge [B(aab)]$
Se un punto b sta tra un punto a e a stesso allora b è uguale ad a.
Un punto sta sempre tra se stesso e un qualsiasi altro punto.

A2 PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DI B
$B(abc) \rightarrow B(cba)$
Se b sta tra a e c allora sta anche tra c ed a.

A3 PROPRIETÀ DI TRANSITIVITÀ DI B
$B(abc) \wedge B(bdc) \rightarrow B(abd)$
Se b sta tra a e c e d sta tra b e c, allora b sta anche tra a e d.



Siano $a \neq b$ due punti del piano, diremo che un punto c giace sulla retta per ab se vale $B(abc) \vee B(acb) \vee B(cab)$. Tre punti a, b, c si diranno *allineati* se giacciono sulla stessa retta, quindi se $B(abc) \vee B(acb) \vee B(cab)$.
In termini insiemistici, convenienti ma non necessari, possiamo definire *retta* per a, b l'insieme $r = \{c \mid B(abc) \vee B(acb) \vee B(cab)\}$, identificando la retta con i punti che gli appartengono. Le rette verificano il classico postulato di Euclide: due punti distinti identificano un'unica retta. Inoltre ogni retta contiene almeno due punti, dato che per l'assioma d'identità e di simmetria $B(aab)$ e $B(abb)$ valgono sempre.
Possiamo allora identificare una retta con una coppia di punti distinti del piano, identificando tra loro le coppie che generano la stessa retta.
Diremo inoltre che un punto c giace sul segmento ab se $B(acb)$, e che un punto d appartiene al triangolo $\triangle abc$ se giace su uno dei segmenti ab, bc o ca.
Come in precedenza si possono definire questi concetti in termini di insiemi: definiamo *segmento* per due punti dati a e b l'insieme dei punti c tali che $B(acb)$. Per simmetria esso sarà uguale al segmento di estremi invertiti b ea.
Un *triangolo* è composto dall'unione dei tre segmenti che congiungono tre punti

[1] Il titolo è ispirato alla storica suddivisione degli assiomi data da Hilbert nei '*Fondamenti della Geometria*', ma il contenuto assiomatico è differente.
[2] La lettera B deriva dal termine inglese 'betweenness'.

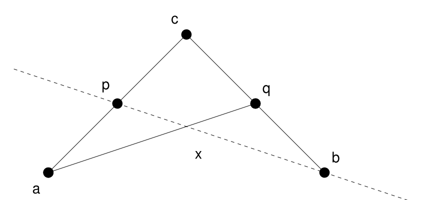
non allineati a, b e c. I segmenti sono detti lati e a, b, c i vertici del triangolo.
Il concetto di *intersezione* di una retta con un segmento, o di un triangolo con una retta, può essere pensato come intersezione insiemistica, ma notiamo che utilizzando i predicati di 'giacenza su una retta' o 'appartenenza a un segmento' essa è espressa dalla congiunzione delle formule corrispondenti.

L'esistenza di almeno un triangolo è garantita dal seguente assioma:

A4 ASSIOMA DI DIMENSIONE MINIMA
$\exists a\, \exists b\, \exists c\, [\neg B(abc) \wedge \neg B(acb) \wedge \neg B(cab)]$
Esistono tre punti non allineati.

La prima proprietà sui triangoli che serve supporre è l'assioma di Pasch:

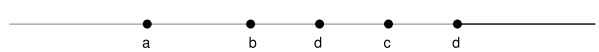
A5 ASSIOMA DI PASCH[3]
$B(apc) \wedge B(bqc)^4 \rightarrow \exists x[B(pxb) \wedge B(qxa)]$



L'assioma afferma che se una retta incontra un triangolo dato in uno dei suoi lati, ma non in uno dei suoi vertici, necessariamente dovrà incontrare uno dei lati opposti ma non entrambi. L'assioma vale comunque anche per triangoli degeneri a un segmento.

Vediamo ora altre proprietà che bisogna postulare per la relazione B:

A6 SEPARAZIONE DI B
$B(abc) \wedge B(abd) \wedge (a \neq b) \rightarrow B(acd) \vee B(adc)$
Se b sta tra a e c e tra a e d, allora o c sta prima di d rispetto ad a, oppure d sta prima di c, sempre rispetto ad a.



[3]Nel suo lavoro del 1882, il matematico tedesco Moritz Pasch evidenziò che l'assioma sopra enunciato era utilizzato implicitamente da Euclide, ma non era derivabile dai suoi postulati.
[4]La condizione $B(bqc)$, ossia che la retta debba passare per un punto allineato con un lato del triangolo, è necessaria per la validità dell'assioma di Pasch in qualsiasi modello cartesiano di dimensione maggiore di due.

A7 PROLUNGAMENTO[5]

$a \neq b \to \exists x\, [B(abx) \wedge (x \neq b)]$

Presi due qualsiasi punti $a \neq b$ esiste sempre un ulteriore punto x tale che b sta tra a e x.

A8 DENSITÀ[6]

$a \neq b \to \exists x\, B(axb) \wedge (x \neq a) \wedge (x \neq b)$

Dati due punti $a \neq b$ esiste un ulteriore punto x che sta in mezzo.

A partire da questi assiomi seguiranno tutte le proprietà di incidenza nel piano; vediamo ad esempio come definire e trattare i concetti fondamentali di semipiano, semiretta e di angolo.

Cominciamo col dimostrare che una retta data determina sul piano due componenti, che definiremo *semipiani*.
Sia r la retta data, definiamo sui punti del piano non giacenti su r una relazione di equivalenza: $a \sim b$ se il segmento che li congiunge non interseca la retta r.
É immediato dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza[7], essa quindi genererà una partizione del piano privato della retta in classi di equivalenza disgiunte. Proviamo ora che le classi di equivalenza sono soltanto due.
Innanzitutto per l'assioma di dimensione minima esiste un punto che non appartiene ad r, quindi c'è almeno una classe di equivalenza. Preso un punto a in essa e un punto b sulla retta r, per l'assioma di prolungamento esiste un punto c tale che $B(abc)$. Il segmento tra a e c incontra r in b e quindi i due punti appartengono a due classi distinte.
Per mostrare che le classi sono esattamente due consideriamo due punti non appartenenti alla stessa classe $a \not\sim b$, e c tale che $c \not\sim b$. Mostriamo che a e c sono nella stessa classe.
Nel caso a, b e c non giacciano sulla stessa retta, la retta r incontra il triangolo $\triangle abc$ nel lato ab. Se la retta r incontrasse il segmento ac (ossia a e c stanno in classi distinte) allora non potrebbe, per l'assioma di Pasch, intersecare il lato bc, che è assurdo poiché $b \not\sim c$.
Il caso in cui i tre punti siano allineati si dimostra in modo analogo.

Nozione simile è quella di *semiretta*. Presa una retta r, essa viene divisa da un suo qualsiasi punto a in due parti, che definiremo semirette. Si consideri infatti un qualsiasi punto c esterno alla retta (assioma 4), tracciando la retta per c passante per a, si divide il piano in due semipiani. Le intersezioni di ciascuno di essi con la retta r sono le due semirette di origine in a, non vuote grazie all'assioma di prolungamento.

Lo stesso assioma rende le rette prolungabili indefinitamente in entrambe le direzioni. Insieme all'assioma di separazione permetterà di definire un ordine sui punti di una retta, rendendola un insieme ordinato e denso in sé.

[5] Questo assioma è in realtà una diretta conseguenza di un assioma esposto in seguito, quello di costruzione dei segmenti, ma preferiamo inserirlo dato che esprime una proprietà fondamentale delle rette, esplicitamente considerata negli *Elementi*.

[6] Anche questo assioma è enunciato per lo stesso motivo, pur essendo derivabile dall'assioma di dimensione minima e dall'assioma di Pasch.

[7] L'unica parte non banale è la transitività, che è una semplice applicazione dell'assioma di Pasch per punti non allineati, e dell'assioma di separazione nel caso i tre punti siano allineati.

Diamo qualche ulteriore definizione: definiamo *raggio* uscente da o una qualsiasi semiretta di estremo o; l'unione di due raggi non appartenenti alla stessa retta, entrambi uscenti da o, viene detto *angolo*. Una tripla ordinata di punti (a, o, b) non allineati identifica quindi un angolo, che sarà indicato con $\angle aob$.
A questa definizione si può aggiungere l'angolo nullo, identificato da due raggi sovrapposti, quindi da due punti dalla stessa parte del vertice $B(oab)$. Consideriamo in questa definizione soltanto angoli convessi, escludendo quindi l'angolo piatto, nè convesso nè concavo.

La *parte interna* di un angolo $\angle aob$ è l'insieme dei punti d che stanno nello stesso semipiano di b individuato dalla retta oa e simultaneamente nello stesso semipiano di a dato dalla retta ob.
Se $\triangle abc$ è un triangolo, la sua parte interna è l'intersezione delle parti interne dei tre angoli $\angle abc$, $\angle bca$, $\angle cab$.

1.2 Assiomi di congruenza

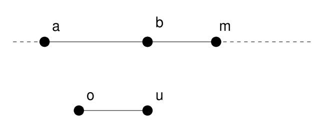
Passiamo ora a considerare le proprietà della relazione di congruenza fra segmenti. Per semplificare la notazione, $ab \equiv cd$ sostituirà $\delta(abcd)$ nelle scritture seguenti.

A9 PROPRIETÀ DI IDENTITÀ DI $\equiv$
$ab \equiv cc \to (a = b)$

A10 PROPRIETÀ DI RIFLESSIVITÀ DI $\equiv$
$ab \equiv ba$

A11 PROPRIETÀ DI TRANSITIVITÀ DI $\equiv$
$ab \equiv cd \wedge ab \equiv ef \to cd \equiv ef$

A12 ASSIOMA DI COSTRUZIONE DEI SEGMENTI
$\exists m[B(abm) \wedge bm \equiv ou) \wedge ((B(abn) \wedge bn \equiv ou) \to n = m)$
Dati segmenti ou ed ab esiste un unico punto m sulla retta ab, dalla stessa parte di b rispetto ad a, tale che ou è congruente ad bm.



Dai primi tre assiomi si ricava facilmente che $\equiv$ è una relazione di equivalenza tra segmenti. L'assioma 12 ci permette invece di dotare l'insieme dei segmenti di un ordine totale: intuitivamente un segmento sarà minore di un altro quando può essere riportato al suo interno. La costruzione precisa è un po' più laboriosa. Si prendano due segmenti ab e cd e un punto e dalla parte opposta di b rispetto ad a. Si riporti il segmento cd a partire da a, ottenendo il punto d' tale che $B(ead')$ e $ad' \equiv cd$. Diciamo che il segmento ab è maggiore o uguale al segmento cd se $B(ed'b)$, è minore o uguale se $B(ebd')$. Dalla transitività di B otteniamo la transitività dell'ordine, la riflessività è immediata. Per la tricotomia sfruttiamo l'assioma di separazione: dato che vale $B(eab)$ e $B(ead')$ allora o $B(ed'b)$ o $B(ebd')$, ossia o $ab \leq cd$ oppure $ab \geq cd$.

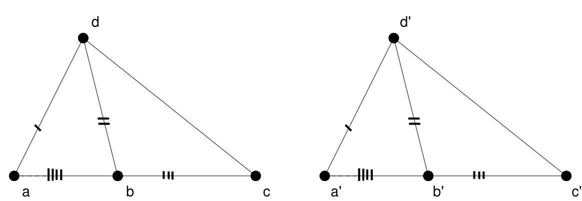
La buona definizione dell'ordine discende dall'unicità della costruzione dei segmenti. Vedremo in seguito come definire una somma e un prodotto sull'insieme dei segmenti quozientato per la relazione di congruenza.
Dimostriamo ora una proposizione che sarà utilissima in seguito:

Proposizione 1.1. *Sia $ab \equiv a'b'$ e $cd \equiv c'd'$, sia ad il segmento ottenuto riportando cd sulla retta ab, a partire da b, tale che $B(abd)$, e $a'd'$ la stessa costruzione con $a'b'$ e $c'd'$, allora $ad \equiv a'd'$.*

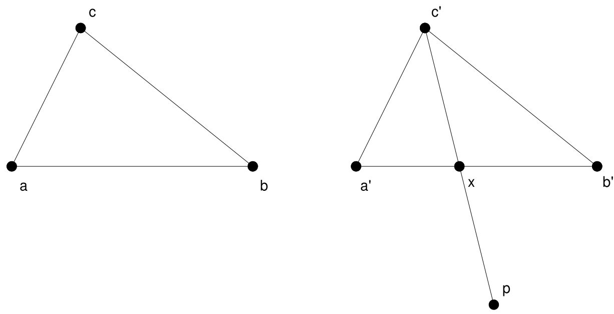
La proposizione è presente negli *Elementi*, e nella maggior parte delle successive assiomatizzazioni come assioma: *somma di segmenti congruenti è congruente*. Per ora non abbiamo ancora definito alcuna nozione di somma, quindi ci atterremo alla formulazione enunciata.
La dimostrazione è una semplice applicazione dell'unicità dell'assioma di costruzione dei segmenti: riportando $a'd'$ su ad in due tappe, prima riportando $a'b'$ e poi $c'd'$ si ha che $d = d'$. Ma due segmenti sono congruenti se e solo se, quando riportati l'uno sull'altro, i due estremi coincidono, quindi $ad \equiv a'd'$.

Il caso degli angoli è più complicato: la nozione di congruenza in questo caso non è una relazione primitiva.
Per poterla trattare è necessario introdurre due assiomi:

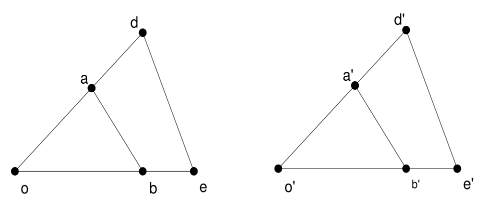
A13 ASSIOMA DEI 5 SEGMENTI
$[a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd'] \rightarrow cd \equiv c'd'$



A14 ASSIOMA DI COSTRUZIONE DEI TRIANGOLI
$ab \equiv a'b' \rightarrow \exists c', \exists x\, [(a'c' \equiv ac) \wedge (b'c' \equiv bc) \wedge B(c'xp) \wedge [B(a'b'x) \vee B(a'xb') \vee B(xa'b')]$
Dato un triangolo $\triangle abc$ e un segmento $a'b'$ congruente ad ab, esiste un triangolo $\triangle a'b'c'$ congruo ad $\triangle abc$, dove c' sta nel semipiano opposto a un punto assegnato p rispetto ad $a'b'$.

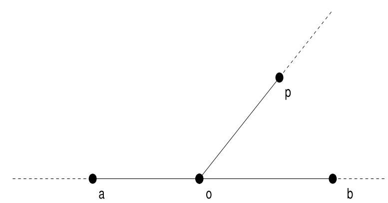


Consideriamo ora due angoli $\angle aob, \angle a'o'b'$ e riportiamo i due segmenti oa e ob sui due raggi dell'angolo $\angle a'o'b'$ in modo che $oa \equiv o'a'$ e $ob \equiv o'b'$. I due angoli si dicono *congruenti se* $ab \equiv a'b'$.
La relazione appena definita non dipende dai punti scelti per identificare l'angolo: siano $\angle aob, \angle a'o'b'$ i due angoli congruenti, quindi $ab \equiv a'b'$. Prendiamo sul raggio oa un punto d tale che $B(oad)$ e sul raggio ob un punto e tale che $B(obe)$, e riportiamoli sull'angolo $\angle a'o'b'$ ottenendo i punti d' ed e'. Dato che per la Prop. 1.1 somme di segmenti congruenti è congruente, con una doppia applicazione dell'assioma dei 5 segmenti otteniamo che $de \equiv d'e'$. I casi in cui d ed e siano presi prima di a e di b si dimostrano in modo analogo.

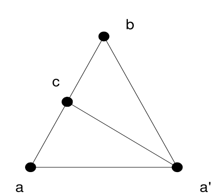


Così come per i segmenti anche in questo caso si può quozientare l'insieme degli angoli per la relazione di congruenza, definendo una somma, se pure in maniera un po' più laboriosa. Il concetto intuitivo di ordine è lo stesso: un angolo è minore di un altro se puó essere riportato nella sua parte interna. L'assioma di costruzione dei triangoli permette di sviluppare questa costruzione in dettaglio.

Consideriamo ora un retta r per a e b, ed un punto p esterno ad essa. Sia o un punto di r tra a e b e tracciamo la retta per p ed o. I due angoli $\angle aop$ e $\angle pob$ si diranno *supplementari*. Grazie all'assioma 14 possiamo sempre riportare un angolo a partire da un segmento, quindi possiamo dire che due generici angoli sono supplementari se, riportati sulla stessa retta, con origine in comune ma raggi da parti opposte, sempre rimanendo nello stesso semipiano, hanno gli ulteriori due raggi coincidenti.



Un angolo si dice *retto* se è congruente al suo supplementare.
Per dimostrare l'esistenza di (almeno due) angoli retti, è evidente che basta dimostrare l'esistenza di una semiretta che formi, nello stesso semipiano con una retta data, due angoli congruenti. Questo discende a sua volta dall'esistenza, dato un segmento aa', di un triangolo isoscele che abbia come base quel segmento, definendo come triangolo isoscele un triangolo con gli angoli alla base congruenti (si dimostra facilmente che può essere equivalentemente definito come un triangolo con due lati uguali).
Sia m il punto da cui si vuole tracciare la perpendicolare, si prenda un altro punto a sulla retta e si riporti il segmento am dall'altra parte di a rispetto a m, ottendendo a'. Costruendo un triangolo isoscele $aa'c$, con base su aa', e tracciando la retta cm, si ottiene la perpendicolare a r passante per un suo punto m (è la nota costruzione per riga e compasso della perpendicolare a una retta data).
Dimostriamo quindi l'esistenza di un triangolo isoscele su qualsiasi segmento dato aa'. Sia b un punto fuori dalla retta aa' (esiste per l'assioma 4): se gli angoli $\angle ba'a$ e $\angle baa'$ sono congruenti il triangolo è isoscele. In caso contrario supponiamo $\angle ba'a$ maggiore di $\angle baa'$ e riportiamo il secondo nel primo grazie all'assioma 14. Il raggio di origine a' che lo compone incontrerà il segmento ba in un punto c, per una facile conseguenza del teorema di Pasch e dell'assioma di separazione[8]. Il triangolo $aa'c$ ha i due angoli alla base congruenti ed è perciò isoscele.



Dall'assioma dei 5 segmenti discendono i consueti criteri di congruenza dei triangoli: basterà dimostrare il primo per vedere subito dimostrati anche gli altri.
Consideriamo due triangoli $\triangle abc$ e $\triangle a'b'c'$, e supponiamo che $ab \equiv a'b'$, $ac \equiv a'c'$ e $\angle cab \equiv \angle c'a'b'$ (criterio lato-angolo-lato). Supponiamo che ab sia maggiore di ac, che possiamo quindi riportare sullo stesso ab ottenendo d. Stessa cosa su $\triangle a'b'c'$. Ora $cd \equiv c'd'$ per la definizione di equivalenza per angoli, quindi le ipotesi dell'assioma 13 sono verificate, e i due triangoli sono congruenti.

[8] Crossbar Theorem, [H], pag.71

A15 ASSIOMA DI DIMENSIONE MASSIMA

$[au \equiv av \wedge bu \equiv bv \wedge cu \equiv cv \wedge (u \neq v)] \rightarrow B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$

Tre punti equidistanti da due punti dati giacciono sulla stessa retta.

L'assioma impedisce di utilizzare come modelli della teoria (come "piani"), gli usuali spazi affini di dimensione maggiore di due. In coppia con l'assioma di dimensione minima, che impedisce a una retta di essere modello della geometria elementare, caratterizza univocamente la "dimensione" 2 del piano.

Modificando questi soli due assiomi si ottiene un assiomatizzazione della geometria elementare in n dimensioni. Assumendo che l'insieme dei punti equidistanti da $n-1$ punti distinti non è sempre una retta si ottengono modelli di dimensione maggiore o uguale a n; per impedire dimensioni superiori basterà inserire come assioma che tre punti equidistanti da n punti dati devono appartenere alla stessa retta.

Tutti i risultati di completezza e decidibilità che otterremo per la geometria elementare in 2 dimensioni saranno immediatamente estendibili al caso in cui gli assiomi di dimensione massima e minima siano opportunamente modificati per ottenere una geometria n-dimensionale.

1.3 Postulato di Euclide

Gli assiomi fin qui esposti costituiscono la base della cosiddetta "geometria neutrale", i cui modelli sono detti *Piani di Hilbert*. Gran parte delle proposizioni esposte da Euclide nel primo libro degli Elementi sono dimostrabili in questa geometria: essi quindi costituiscono la base da cui far nascere geometrie euclidee e non euclidee.

Siamo qui interessati alla sola geometria euclidea, daremo quindi in seguito una corretta formulazione al prim'ordine del famoso quinto postulato: *Se una retta interseca altre due rette e forma due angoli interni dallo stesso lato di somma minore di due angoli retti, allora queste due rette, estese indefinitamente, si intersecano da quel lato.*

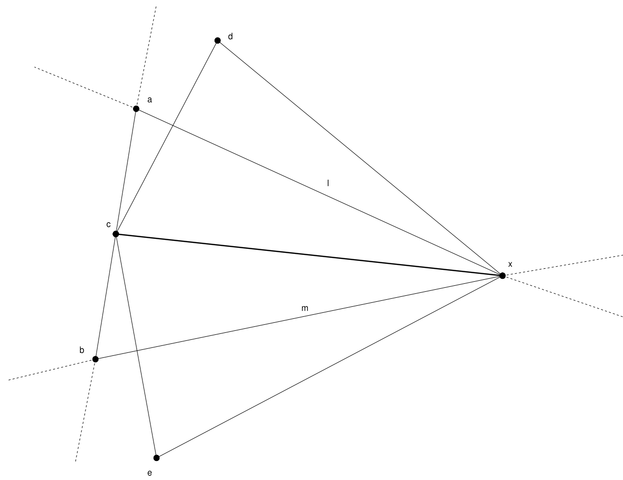
Ne daremo una sua versione equivalente, dovuta a J.Bolyai, di più facile traduzione formale:

A16 ASSIOMA DI BOLYAI

$B(abc) \vee B(acb) \vee B(cab) \vee \exists x[ax \equiv bx \equiv cx]$

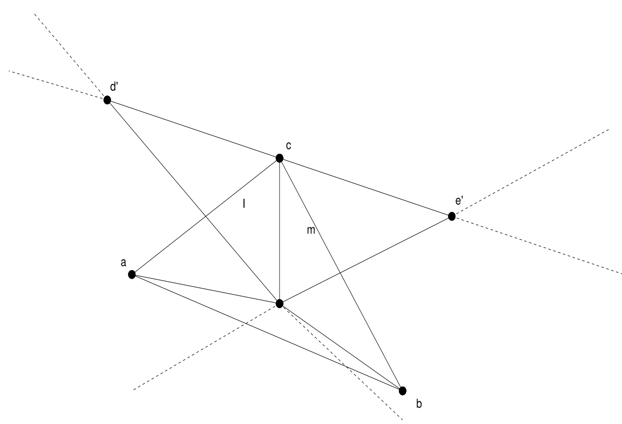
Esiste sempre un punto x equidistante da tre punti non allineati. Equivalentemente, per ogni triangolo esiste un cerchio che lo circoscrive.

Dimostriamo innanzitutto che implica il postulato di Euclide: siano l ed m due rette come in figura, r una retta che le interseca nei punti a e b, formando due angoli di somma minore di due angoli retti.



Sia c il punto medio del segmento ab e si traccino le due perpendicolari ad l ed m passanti per c. Si riportino rispettivamente sull'una e sull'altra le distanze di c da l e da m, ottenendo i punti d ed e: i tre punti d, c ed e non sono allineati, altrimenti la retta che li conterrebbe formerebbe due angoli retti con l ed m.
Per l'assioma di Bolyai esiste un punto x equidistante da d, c e da e. Si considerino allora i triangoli cxe e cxd: essi sono isosceli poiché x è equidistante dai rimanenti due vertici dei rispettivi triangoli.
Le due rette l ed m sono perpendicolari alle basi dei due triangoli, passanti per il punto medio: si incontreranno quindi in x, ed il postulato è dimostrato.

Viceversa sia $\triangle abc$ un triangolo, ab il suo lato maggiore. Si traccino le perpendicolari ai due lati minori, passanti per il punto medio, siano esse l ed m.



Si consideri ora una qualunque retta passante per c, non parallela nè ad l nè ad m. Essa le incontrerà in d' e in e' formando due angoli α e β, dalla parte del triangolo.
Entrambi gli angoli sono strettamente minori di un retto, essendo i due triangoli cee' ed cdd' rettangoli rispettivamente in e e in d. Per il postulato delle parallele

l ed m devono necessariamente incontrarsi in un punto x.
Consideriamo allora i triangoli cxb e cxa: essi sono isosceli con base, rispettivamente, cb e ca. Quindi il punto x è equidistante da a, c e b e l'assioma di Bolyay è dimostrato.

Grazie a quest'ultimo assioma si può sviluppare in ogni modello della geometria elementare una teoria elementare dell'area (definite le figure come parte interna di spezzate chiuse).
Si può dimostrare infatti [9]che un piano di Hilbert che verifica l'assioma di Euclide esiste una relazione di equivalenza, che possiamo denotare con "avere la stessa area", verificante le seguenti proprietà:

1. Figure congruenti hanno stessa area.
2. Unioni di figure con stessa area hanno stessa area.
3. Differenze di figure con stessa area hanno stessa area.
4. Metà di figure con stessa area hanno stessa area.
5. Il tutto è più grande della parte.
6. Se due quadrati hanno stessa area, i loro lati sono congruenti.

Perchè valgano le ultime tre è in realtà necessario inserire un ulteriore assioma che traduca il principio "il tutto è più grande della parte" in termini di scomponibilità delle figure[10]. Tutte queste proprietà sono definibili al prim'ordine nel linguaggio della geometria elementare, e generano una teoria dell'area avente le usuali proprietà. A partire dal teorema di Pitagora si potranno così derivare tutti i risultati di teoria dell'area presenti negli Elementi.
Chiameremo $\mathcal{E}_2$ la teoria della geometria elementare formata da questi primi 16 assiomi.

L'ultimo assioma che considereremo qui è l'assioma di intersezione rette-cerchi[11]:

A17 ASSIOMA DI INTERSEZIONE RETTE-CERCHI
$(za \leq zu \wedge zb \geq zu) \rightarrow \exists c\,(zc \equiv zu \wedge B(acb))$

Chiameremo la geometria elementare con questo assioma "geometria con riga e compasso", ed useremo la notazione $\mathcal{E}_2^{RC}$. Infatti grazie a questo assioma sono possibili tutte le classiche costruzioni con riga e compasso presenti nelle dimostrazioni di Euclide.

Questo assioma può essere visto come una debole forma di continuità sul piano. Studieremo in un apposito capitolo altri possibili assiomi per ottenere nuove costruzioni e più forti nozioni di continuità. A seconda dell'assioma di continuità scelto otterremo proprietà differenti: da un punto di vista logico

[9] [H] Cap.5
[10] [H] Cap.5, Assioma di De Zolt.
[11] n punti appartengono a un cerchio se sono equidistanti da un punto dato, quindi un cerchio è definibile al prim'ordine e identificato da un punto detto centro e un segmento raggio uscente da esso.

indagheremo sulle proprietà di completezza e decidibilità della teoria, dal punto di vista "euclideo" ci concentreremo sulla potenza delle costruzioni geometriche possibili grazie alle diverse formulazioni.

1.4 Indipendenza degli assiomi

Gli assiomi appena presentati sono una versione più estesa della lista presentata da Tarski in [T1]; ad essa sono stati aggiunti gli assiomi 1bis, 2, 7, 8 e 14 , è stata sostituita la formulazione del postulato di Euclide[12] con l'assioma di Bolyay e al posto della continuità elementare (che verrà discussa nell'ultimo capitolo) è stato inserito l'assioma di intersezione rette cerchi.

In [G] viene dimostrata l'indipendenza di gran parte degli assiomi esposti in [T1], tranne che degli assiomi 5, 9 e 10 (riflessività e identità di $\equiv$ e assioma di Pasch) che è ancora un problema aperto[13].

[12] $\exists x, y[B(abc) \wedge B(dbe) \wedge (a \neq b) \rightarrow B(aex) \wedge B(ady) \wedge B(xcy)]$ ossia per qualsiasi punto nell'interno di un angolo esiste un retta (in questo caso la retta per x,y), tale che intersechi entrambi i raggi dell'angolo.

[13] In [G] viene in realtà utilizzata la lista degli assiomi di Tarski con la continuità espressa al second'ordine, ma la dimostrazione dell'indipendenza di tutti gli altri, con le eccezioni precisate sopra, non ne fa uso.

Capitolo 2

Teorema di Rappresentazione

Partendo dall'insieme dei segmenti del piano, già considerato nella seconda sezione del precedente capitolo, esporremo in seguito lo stretto legame tra la geometria elementare e la teoria dei campi. Dimostreremo come ad ogni modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{E}_2$ può essere associato un campo ordinato $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ e mostreremo che $\mathcal{M}$ è isomorfo al piano $\mathbb{F}_{\mathcal{M}} \times \mathbb{F}_{\mathcal{M}}$, dove B e δ sono opportunamente definite.

2.1 Aritmetica dei segmenti

Riprendiamo l'insieme dei segmenti e quozientiamolo per la relazione di congruenza, che, come dimostrato al capitolo precedente, è una relazione di equivalenza. Col passaggio al quoziente possiamo parlare di lunghezza, intesa come classe di equivalenza di segmenti congruenti.
Fissiamo un punto z del piano, prendendolo come origine per una semiretta. Dato che per l'assioma di costruzione ogni segmento può essere riportato su di essa a partire da z, possiamo associare a ogni classe di segmenti congruenti un punto della semiretta, tale che il segmento che lo congiunge al punto z appartenga alla suddetta classe. Otteniamo così (considerando la semiretta privata dell'origine) un insieme di rappresentanti per l'insieme quoziente.
Questo insieme è ordinato dalla relazione d'ordine sui segmenti definita al capitolo 1. In questo capitolo definiremo inoltre due operazioni, in modo da rendere l'insieme di rappresentanti un anello ordinato.
Volendo estendere ora questa struttura all'intero insieme dei punti di una retta, consideriamo la seguente caratterizzazione algebrica, di immediata dimostrazione, valida per ogni campo. Preso un sottoinsieme $\mathcal{P}$ tale che $0 \notin \mathcal{P}$, se $\mathcal{P}$ è chiuso per somma e prodotto allora esiste un unico ordinamento su $\mathbb{F} = \mathcal{P} \cup \{0\} \cup -\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{P}$ è l'insieme dei positivi, e l'ordinamento verifica gli assiomi di campo ordinato. Viceversa dato un campo ordinato $\mathbb{F}$, l'insieme $\mathcal{P}$ dei positivi verifica le proprietà cui sopra.
L'idea è quindi di prendere l'insieme dei segmenti quozientato come insieme dei positivi, ed estenderlo ad un campo ordinato. Il seguente lemma algebrico ne garantisce l'esistenza:

Lemma 2.1. *Sia $\mathcal{P}$ un insieme con due operazioni $+$ e $\cdot$ che goda delle seguenti proprietà:*

- *somma e prodotto siano commutative ed associative;*
- *esiste l'elemento neutro per il prodotto, e ogni elemento ha un inverso in $\mathcal{P}$ (ossia $\mathcal{P}$ è un gruppo commutativo rispetto all'operazione $\cdot$);*
- *il prodotto è distributivo rispetto all'addizione;*
- *dati due elementi x ed y di $\mathcal{P}$ vale una e una sola delle seguenti: $x = y$ o esiste un z tale che $x + z = y$ o esiste un z tale che $y + z = x$;*

allora esiste un unico campo ordinato $\mathbb{F}$ il cui insieme degli elementi positivi è $\mathcal{P}$.

La dimostrazione di questo fatto rispecchia in sostanza la costruzione del campo dei quozienti a partire da un dominio di integrità. Come per passare da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, l'idea è quella di considerare l'insieme $\mathcal{P} \cup \{0\} \cup -\mathcal{P}$ e verificare che si tratta di un campo ordinato.
Trasferendo questa costruzione nel piano, possiamo così dotare l'insieme dei punti di una retta di una struttura di campo ordinato.

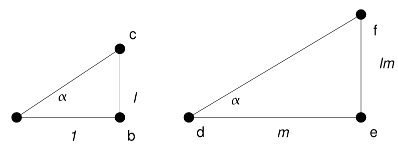
Definiamo allora sull'insieme dei segmenti una somma e un prodotto, che verifichino le proprietà del Lemma 2.1. Utilizzeremo la costruzione dell'aritmetica dei segmenti introdotta da Hilbert in [H], utilizzando la teoria delle proporzioni, e semplificata nel supplemento secondo da Paul Bernays. Nelle definizioni seguiremo la trattazione al Cap.4 in [H], in cui si trovano dimostrate nel dettaglio tutte le proprietà sotto enunciate.

Somma. La somma è definibile direttamente sull'insieme di rappresentanti, quindi sui punti di una semiretta privata dell'origine z. Infatti, sfruttiamo l'unicità dell'assioma di costruzione per ottenere una definizione direttamente sulle classi di equivalenza: *dati due punti l ed m, riportiamo a partire da l il segmento zm, ottenendo il punto m' tale che $B(zlm)$. m' è la somma $l + m$.*
Grazie alla Prop. 1.1 si mostra facilmente che la somma appena definita è commutativa ed associativa.
Vediamo in dettaglio l'ultima proprietà:

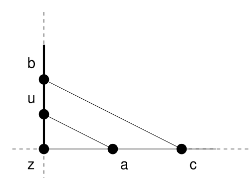
- *Dati due punti l ed m, una e una sola delle seguenti possibilità vale:*
  - *$l = m$;*
  - *Esiste un punto n tale che $a + n = b$;*
  - *Esiste un punto n tale che $b + n = a$;*

  Nel caso $l \neq m$, considerando i tre punti z, l ed m. Per l'assioma di densità esiste un ulteriore punto n tra l ed m, e sfruttando l'assioma di separazione, concludiamo che i due casi soprascritti sono gli unici possibili, e si escludono l'uno con l'altro.

Prodotto. Per la definizione del prodotto è necessario uscire dall'insieme dei rappresentanti canonici, considerato sopra per la somma. Si usa infatti una costruzione nel piano che utilizza opportuni triangoli di costruzione.
Fissiamo innanzitutto una classe di segmenti, quindi un punto u della semiretta, che diremo 1 o segmento unità.
Diamo quindi la seguente definizione: *Date due classi l ed m, costruiamo un triangolo rettangolo*[1] $\triangle abc$ *tale che bc rappresenti l e ab sia il segmento unità. Sia α l'angolo $\angle bac$. Costruiamo un nuovo triangolo rettangolo $\triangle def$, con de che rappresenti m, riportando in d l'angolo α. Il prodotto $l \cdot m$ è definito come la classe del segmento ef.*



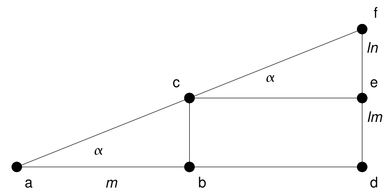
È possibile costruire il prodotto in maniera più semplice, utilizzando la teoria delle parallele: preso za sulla semiretta rappresentante, della classe di l, si tracci per z la perpendicolare alla semiretta stessa. Si riporti a partire da z su essa il segmento unità e un segmento rappresentante m, dalla stessa parte, ottenendo rispettivamente i punti u e b. Si tracci ora per b la parallela alla retta per ua, che incontrerà la semiretta rappresentante in un punto c. Il prodotto $l \cdot m$ sarà la classe del segmento ac.



Come abbiamo anticipato questa è una buona definizione, infatti due segmenti congruenti genereranno triangoli di costruzione del prodotto congruenti. La classe di 1 è l'unità della moltiplicazione, infatti i due triangoli costruiti per la moltiplicazione di $a \cdot 1$ sono congruenti, e il segmento prodotto non è altro che a.
La dimostrazione che il prodotto è commutativo ed associativo sfrutta le proprietà dei quadrilateri policiclici, ossia inscrivibili in un cerchio. Costruendo uno di questi quadrilateri utilizzando i triangoli di moltiplicazione si ottengono dimostrazioni di queste due proprietà.
A titolo di esempio vediamo in dettaglio la dimostrazione della proprietà distributiva, quindi $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$: sia α l'angolo determinato dal primo triangolo di moltiplicazione per l. Costruiamo il secondo triangolo di moltiplicazione per m, $\triangle abc$, ottenendo quindi $l \cdot m$ su bc. Prolunghiamo il lato ab fino ad ottenere il punto d tale che bd rappresenti n. Tracciamo la perperdicolare in d alla retta ab, e la parallela a bd passante per c. Prolungando il lato ac

[1] Certi concetti utilizzati in questo capitolo, come quello di triangolo rettangolo, sono facilmente e correttamente definibili in termini del linguaggio di $\mathcal{E}_2$ a partire dai concetti esposti al primo capitolo

otteniamo il triangolo cef, simile ad $\triangle abc$. Dato che $bdce$ è un rettangolo, ce rappresenterà n, ed ed rappresenterà $l \cdot m$. Dapprima considerando il triangolo adf otteniamo che $l \cdot (m+n)$ è rappresentato da df, che scomposto nei due segmenti de e ef, rispettivamente eguali ad $l \cdot m$ e ad $l \cdot n$, ci porta al risultato voluto.



Possiamo ora utilizzare il Lemma 2.1, partendo da qualsiasi semiretta privata dell'origine, utilizzata come rappresentante dell'insieme dei segmenti quozientato. Tutte le rette del piano, una volta fissato un punto z su esse a far da zero, hanno così la stessa struttura di campo ordinato.
Chiameremo questa struttura $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$, il campo ordinato associato al modello $\mathcal{M}$ della geometria elementare $\mathcal{E}_2$.

2.2 Il piano $\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$

Una volta associato ad ogni modello $\mathcal{M}$ della geometria un campo ordinato $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$, consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{F}_{\mathcal{M}} \times \mathbb{F}_{\mathcal{M}} = {\mathbb{F}_{\mathcal{M}}}^2$.
Definiamo sui suoi elementi due relazioni $B^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}}$ e $\equiv^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}}$, in modo da renderlo una L-struttura, cioè un insieme in cui siano interpretati i simboli appartenenti al linguaggio L. Nel nostro caso L è appunto formato dai soli due simboli di relazione B e δ (ricordando che scriviamo $ab \equiv cd$ per $\delta(abcd)$).

Per interpretare la relazione B in $\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$ cominciamo, diversamente che nel primo capitolo, a definire quando tre coppie sono allineate; aggiungeremo in seguito ulteriori condizioni per definire quando una coppia sta tra le altre due.
Seguendo la consueta definizione di retta nella geometria analitica, se $\bar{a} = (a_1, a_2)$, $\bar{b} = (b_1, b_2)$, $\bar{c} = (c_1, c_2)$ sono coppie di $\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$, esse appartengono alla stessa retta se esistono tre coefficienti k_1, k_2, k_3 tali che l'equazione $k_1x_1 + k_2x_2 = k_3$ è verificata da tutte e tre le coppie ordinate.
Utilizzando ora le proprietà di ordine di $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ definiamo:

$$B^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}}(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) \Leftrightarrow \quad \exists k_1, k_2, k_3 \quad \begin{array}{l} k_1a_1 + k_2a_2 = k_3 \wedge \\ k_1b_1 + k_2b_2 = k_3 \wedge \\ k_1c_1 + k_2c_2 = k_3 \wedge \\ (a_1 \leq b_1 \leq c_1 \vee c_1 \leq b_1 \leq a_1) \wedge \\ (a_2 \leq b_2 \leq c_2 \vee c_2 \leq b_2 \leq a_2) \end{array}$$

La definizione di congruenza è basata invece, come intuibile, sul concetto di distanza euclidea:

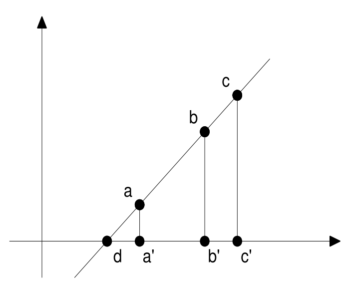
$$\bar{a}\bar{b} \equiv^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}} \bar{a}'\bar{b}' \Leftrightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)^2$$

Sottolineiamo un fatto importante: qualsiasi enunciato sulle coppie è sempre definito in termini di enunciati su elementi del campo $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$.

Grazie all'usuale tecnica di introduzione delle coordinate possiamo costruire una bigezione da un modello $\mathcal{M}$ in $\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$.
Più precisamente, fissiamo due punti del piano $\mathcal{M}$, siano essi z ed u. Dalla trattazione ai capitoli precedenti sappiamo che la retta per zu ha una struttura di campo ordinato, identificata con $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$. z è scelto come punto origine e il segmento zu come segmento unità. Chiameremo questa retta *asse delle ascisse*. Prendiamo ora una seconda retta, la perpendicolare alla retta per zu in z, che sarà detta *asse delle ordinate*. Il segmento unità di questa retta sarà il segmento zu', ottenuto riportando il segmento zu a partire da z.
Chiameremo *assi coordinati* queste due rette, entrambe isomorfe ad $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$.
Definiamo dunque la mappa $\psi : \mathcal{M} \to \mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$ tracciando, per ogni punto a del piano, le parallele ai due assi coordinati e associandogli la coppia formata dai due punti intersezione (identificati in $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$). $\psi(a)$ sarà dunque la coppia (a_1, a_2), dove a_1 è l'intersezione della parallela all'asse delle ordinate, passante per a, con l'asse delle ascisse, a_2 l'intersezione della parallela all'asse delle ascisse con l'asse delle ordinate. Dalla teoria delle parallele e dall'unicità di intersezione fra rette discende che ψ è ben definita, iniettiva e surgettiva.
Che ψ sia inoltre un isomorfismo di L-strutture [2] è il contenuto del seguente:

Teorema 2.2 (di Rappresentazione). $\mathcal{M} \models \mathcal{E}_2 \Rightarrow \mathcal{M} \cong \mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}$.

Dimostrazione. Utilizziamo l'isomorfismo ψ appena definito, e dimostriamo che conserva la relazione B, cioè $B(abc) \Leftrightarrow B^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}}(\psi(a), \psi(b), \psi(c))$.
Prendiamo a, b, c tali che $B(abc)$, e dimostriamo dapprima che $\psi(a)$, $\psi(b)$ e $\psi(c)$ verificano le prime tre condizioni di appartenenza alla stessa retta.
Supponiamo che la retta per abc non sia parallela ad alcuno dei due assi e chiamiamo d la sua intersezione con l'asse delle ascisse. Consideriamo ora i triangoli $\triangle dcc'$, $\triangle dbb'$ e $\triangle daa'$ come in figura. È immediato vedere che sono simili.



Utilizzando le proprietà di campo di $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ e ragionando per similitudini si ha che $\frac{c_2}{c_1-d} = \frac{b_2}{b_1-d} = \frac{a_2}{a_1-d}$, da cui discendono le prime tre equazioni con $k_1 = -\frac{c_2}{c_1-d}$, $k_2 = 1$ e $k_3 = k_1 d$.
Viceversa se vale $B^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}}(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ posso sempre costruire 3 triangoli simili come in figura, con a,b e c appartenenti allo stesso lato, quindi allineati.
Nel caso la retta per a,b e c sia parallela ad uno dei due assi, per esempio al

[2] ossia una bigezione che conservi le interpretazioni dei simboli di L.

primo, basta scegliere $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ e $k_3 = a_2$.
Supponiamo ora che i tre punti si trovino tutti nel primo quadrante (gli altri casi si svolgono in modo analogo) e tracciamo le parallele all'asse delle ordinate passanti per i tre punti. Per la teoria delle parallele sappiamo che a e c staranno da parti opposte della retta bb' se e solo se lo saranno anche a' e c'. Ora za' è a_1, zb' è b_1 e zc' è c_1, quindi $a_1 < b_1 < c_1$. Allo stesso modo per le seconde coordinate, e l'equivalenza è così dimostrata.
Vediamo ora che ψ conserva anche la relazione $\equiv$, cioè che
$ab \equiv a'b' \Leftrightarrow \psi(a)\psi(b) \equiv^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}} \psi(a')\psi(b')$.
Consideriamo il segmento ab. Tracciando le parallele agli assi coordinati passanti per a e per b, otteniamo un triangolo rettangolo $\triangle abc$, con lati bc, di lunghezza $b_1 - a_1$, e ac lungo $b_2 - a_2$. Se l è la lunghezza di ab, per il teorema di Pitagora vale che $l^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$.
Consideriamo ora il segmento $a'b'$: allo stesso modo, se l' è la sua lunghezza, vale $l'^2 = (b'_1 - a'_1)^2 + (b'_2 - a'_2)$.
Se i due segmenti sono congruenti, $ab \equiv a'b'$, allora $l = l'$ quindi $l^2 = l'^2$ ossia $\psi(a)\psi(b) \equiv^{\mathbb{F}^2_{\mathcal{M}}} \psi(a')\psi(b')$.
Viceversa se $l^2 = l'^2$ anche $l = l'$ dato che sono due elementi positivi del campo, quindi $ab \equiv a'b'$. $\square$

Si è ora tentati di pensare a $\mathbb{R}^2$ come l'unico modello della geometria elementare, ma questo presuppone una nozione di continuità molto più forte della sola intersezione tra cerchi e rette, come abbiamo postulato al primo capitolo. Vedremo infatti che soltanto modificando opportunamente quell'ultimo assioma otterremo un unico modello. Negli altri casi non solo potremo trovare modelli di cardinalità arbitrariamente grande, ma anche modelli non isomorfi e in certi casi neppure elementarmente equivalenti.

Capitolo 3

Campi Reali Chiusi e Campi Euclidei

Nel capitolo precedente abbiamo visto come associare ad un modello $\mathcal{M}$ della geometria euclidea un campo ordinato $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$, il cui prodotto cartesiano, con le relazioni di “essere tra” e di “congruenza” opportunamente definite, risulta isomorfo al modello stesso. Essendo così stretto il legame tra geometria elementare e teoria dei campi si rende necessario studiare più approfonditamente alcune classi particolari di campi ordinati.
Cominciamo col chiarire alcune proprietà generali proprie di questi campi.
Il linguaggio della teoria è composto dal linguaggio della teoria dei campi con l'aggiunta di una relazione binaria $<$. Come visto in precedenza si può sostituire a questa relazione un predicato unario, che indichi l'appartenenza di un elemento all'insieme dei positivi $\mathcal{P}$. Gli assiomi della teoria sono i consueti assiomi di campo con l'aggiunta degli assiomi operazione-ordine:

- $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
- $\forall x \, \forall y \, (x < y \rightarrow x \neq y)$
- $\forall x \, \forall y \, (x < y \vee x = y \vee x > y)$

I seguenti fatti, che supporremo noti, sono conseguenze dirette, ma importanti, degli assiomi:

- Ogni campo ordinato ha caratteristica zero, dato che somma di elementi positivi deve essere positiva.
- Ogni quadrato è positivo, e quindi -1 non è esprimibile come somma di quadrati.
- L'ordine in un campo ordinato è denso, dato che $(x + y)/2$ è sempre compreso tra x e y.
- Sia $|x| = max\{x, -x\}$ il valore assoluto di x. Si dimostra facilmente che $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Ogni campo ordinato contiene (una copia isomorfa di) $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ rispettivamente come sottoanello e sottocampo ordinati.

3.1 Campi Euclidei

Definizione 3.1. *Un campo ordinato $\mathbb{E}$ si dice euclideo se ogni elemento positivo ha una radice quadrata.*

Questa proprietà è facilmente formalizzabile al prim'ordine nel linguaggio dei campi ordinati.
Nei campi euclidei notiamo che, dato che ogni elemento positivo è un quadrato, possiamo definire la relazione d'ordine utilizzando le sole operazioni di campo: $x \leq y$ se e solo se $y - x$ è un quadrato. Inoltre l'ordine è unico: considerando un generico insieme di positivi $\mathcal{P}$, esso deve contenere tutti i quadrati, ma essi, insieme ai loro opposti, formano già una partizione di $\mathbb{F}$.

Un primo esempio di campo euclideo è banalmente $\mathbb{R}$. Un altro esempio è il campo $\mathbb{E}$ ottenuto da $\mathbb{Q}$ estendendolo algebricamente con tutte le radici quadrate degli elementi positivi.
In logica una teoria si dice *completa* se tutti i suoi modelli sono elementarmente equivalenti, ossia soddisfano le stesse proprietà elementari. Già i due esempi precedenti mostrano che la teoria dei campi euclidei non è completa: basta considerare per esempio l'enunciato '$\forall a \, \exists x \, (x^3 = a)$', è verificato da $\mathbb{R}$ ma non da $\mathbb{E}$.

Dato che gli assiomi della geometria elementare permettono tutte le costruzioni con riga e compasso, e quindi anche le estrazioni di radici, il campo $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ è sempre euclideo.

3.2 Campi Reali Chiusi

Definizione 3.2. *Un campo reale chiuso è un campo ordinato $\mathbb{K}$ in cui, preso $p \in \mathbb{K}[x]$, se b, b' sono due elementi distinti del campo tali che $p(b) < 0$ e $p(b') > 0$, esiste un c strettamente compreso tra b e b' tale che $p(c) = 0$.*

La teoria dei campi reali chiusi può anch'essa essere formalizzata al prim'ordine nel linguaggio dei campi ordinati considerando il seguente schema di assiomi, uno per ogni grado n naturale:

- $\forall a_0, ..., a_n, x, y[(x < y) \wedge a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 < 0 \wedge$
  $a_n y^n + ... + a_1 y + a_0 > 0] \rightarrow$
  $\exists z(x < z < y \wedge a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 = 0)$

Chiameremo questa teoria RCF (Real Closed Fields). Dato che i polinomi $x^2 - a$, con $a \neq 1$ positivo, cambiano segno tra 0 e $max\{1, a\}$, ogni campo reale chiuso è euclideo. Si ha quindi la stessa proprietà di unicità dell'ordine.

Dimostreremo nelle successive sezioni che la teoria RCF è completa, diversamente dalla teoria dei campi euclidei. Per far ciò abbiamo bisogno di dimostrare l'esistenza e l'unicità di un estensione algebrica reale chiusa per ogni campo ordinato. Per la dimostrazione di questo fatto seguiremo la trattazione in [P], Sez. 6.6. Una ampia trattazione algebrica molto completa sui campi reali chiusi può anche essere trovata nel classico [W].

La derivata di un polinomio è definita formalmente, monomio per monomio. Se in $p(x)$ sostituiamo $x + a$ al posto di x e sviluppiamo, otteniamo la formula di Taylor: $p(x + a) = p(a) + p'(a) \cdot x + \cdots + \frac{p^{(d)}(a)}{d!} \cdot x^d$, dove d è il grado del polinomio.

Lemma 3.3 (Limitazione degli zeri)**.** *Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti in un campo ordinato $\mathbb{F}$, $p(x) = x^d + \cdots a_1 x + a_0$, e sia m il massimo dei valori assoluti dei coefficienti $a_{d-1}, \cdots a_0$. Gli zeri di p in $\mathbb{F}$ sono compresi tra $-m-1$ e $m+1$.*

Dimostrazione. Se prendiamo $|x| \geq m+1$ allora

$$|p(x) - x^d| \leq m \cdot (|x|^{d-1} + \cdots + 1) = \frac{m(|x|^d - 1)}{(|x| - 1)} \leq |x|^d - 1$$

e se $p(x)$ fosse nullo avremmo l'assurdo $|x|^d \leq |x|^d - 1$. □

Lemma 3.4 (Permanenza del segno)**.** *Sia $a \in \mathbb{F}$, campo ordinato, e $p \in \mathbb{F}[x]$, se $p(a) > 0$ allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che il polinomio $p(x)$ è sempre positivo in un intorno $[a - \epsilon, a + \epsilon]$.*

Dimostrazione. Sviluppiamo p, che supporremo di grado n, con la formula di Taylor:

$$p(a+h) = p(a) + hp'(a) + \cdots + \frac{h^d}{d!} p^{(d)}(a) >$$

$$> p(a) - |h||p'(a)| - \cdots - \frac{|h^d|}{d!} |p^{(d)}(a)| \tag{3.1}$$

Sia ora $\delta = \frac{p(a)}{d}$, grazie all'assioma di densità e alla proprietà (di facile dimostrazione) che se $|h| < 1$ allora $|h^k| < |h|$ otteniamo che per ogni $k \leq d$:

$$\frac{|h^k|}{k!} p^{(k)}(a) < \delta \text{ per } |h| < h_k = \frac{p(a) \cdot k!}{d \cdot |p^k(a)|}$$

Nel caso $p^k(a) = 0$ è vero per ogni h. Dalla formula 3.1 e scegliendo come ϵ il minimo degli h_k:

$$p(a+h) > p(a) - \sum_{i=0}^{d} \delta = 0 \quad \forall\, |h| < \epsilon$$

□

Lemma 3.5 (Monotonia locale)**.** *In un campo ordinato $\mathbb{F}$, se $p'(a) > 0$ allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che $p(x) > p(a)$ per $a < x \leq a + \epsilon$, e $p(x) < p(a)$ se $a - \epsilon \leq x < a$.*

Dimostrazione. x sarà della forma $a + h$, consideriamo quindi il polinomio

$$\frac{p(x) - p(a)}{x - a} = \frac{p(a+h) - p(a)}{h} = p'(a) + \cdots + \frac{h^{d-1}}{d!} p^d(a) = q(h)$$

Ora $q(0) = p'(a) > 0$ quindi per permanenza del segno esiste un intorno $[-\epsilon, \epsilon]$, in cui rimane positivo. Quindi su $[a - \epsilon, a + \epsilon]$

$$\frac{p(x) - p(a)}{x - a} > 0$$

da cui la tesi. □

Lemma 3.6. *In un campo reale chiuso, se p è un polinomio non costante la cui derivata è sempre positiva o nulla su un intervallo $[a, b]$, $a < b$, allora $p(a) < p(b)$*

Dimostrazione. Iniziamo col caso in cui $p'(x)$ sia sempre strettamente positiva su $[a, b]$. Se $p(a) \geq p(b)$ per il Lemma 3.5 possiamo trovare un c e un d tali che $a < c < d < b$ e $p(c) > p(a)$, $p(d) < p(b) \leq p(a)$. Dato che siamo in un campo reale chiuso il polinomio $p(x) - p(a)$ ha uno zero b_1 nell'intervallo (c, d). Ripetendo la costruzione, possiamo trovare un ulteriore zero b_2 strettamente compreso tra a e b_1, e così via, contraddicendo il fatto che un polinomio ha un numero finito di zeri.
Nel caso generale, dato che p' ha un numero finito di zeri, ci possiamo ricondurre al caso in cui p' sia strettamente positiva su un intervallo, tranne che in un suo estremo. Sia quindi $p'(a) = 0$ ma $p'(x) > 0$ su $(a, b]$. Se fosse $p(a) > p(b)$, allora per il Lemma 3.4 potremmo trovare un c con $a < c < b$ tali che $p(c) > p(b)$, ma per la costruzione precedente ciò è impossibile. Quindi $p(a) \leq p(b)$, ma la disuguaglianza è stretta perché $p(a) \leq p(a + b)/2$, e su $[(a + b)/2, b]$ p' è strettamente positiva. $\square$

Proposizione 3.7. *Ogni campo ordinato può essere immerso in un campo reale chiuso.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato ma non reale chiuso, e sia $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ un polinomio di grado minimo che cambi segno tra a e b senza annullarsi. Possiamo assumere che $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$ con $a < b$. Per minimalità esso risulta irriducibile.
Consideriamo il campo $\mathbb{F}[x]/p(x)$, composto dai polinomi di grado strettamente minore al grado d di $p(x)$, con l'usuale addizione e moltiplicazione modulo p. In questo campo p ha la proprietà desiderata, ma per ottenere un estensione ordinata di $\mathbb{F}$ bisogna dotare $\mathbb{F}[x]/p(x)$ di un ordine che estenda l'ordine di $\mathbb{F}$.
Consideriamo allora l'insieme A degli $\alpha \in [a, b]$ tali che $p(\alpha) < 0$, e sia B il suo complementare. L'insieme A non ammette massimo α_0, altrimenti $p(\alpha_0) < 0$, e la sua esistenza contraddirebbe il Lemma 3.4. Allo stesso modo B non può avere un elemento minimo β_0, dato che p non si annulla in $[a, b]$ e avrei quindi $p(\beta_0) > 0$, contraddicendo di nuovo il Lemma di permanenza del segno.
Consideriamo ora un generico polinomio q di grado minore di d. Per minimalità di p ogni qualvolta che q cambia segno ha una radice, quindi ha segno costante sugli intervalli delimitati dalle sue radici. Dato che sono un numero finito, possiamo trovare un α_q in A e un β_q in B tale che q ha segno costante sull'intervallo (α_q, β_q).. Diciamo che q è positivo se prende valori strettamente positivi su (α_q, β_q).
È immediato notare che l'insieme dei positivi appena definito è chiuso per somma e forma, insieme al suo opposto e al polinomio nullo, una partizione di $\mathbb{F}[x]/p(x)$.
Consideriamo ora il prodotto. Siano q_1 e q_2 due polinomi positivi, e scriviamo $q_1 \cdot q_2 = q \cdot p + r$ dove r è il resto della divisione euclidea di $q_1 \cdot q_2$ per p, ed è anche la definizione di prodotto $q_1 \cdot q_2$ nel campo che stiamo considerando. Dato che anche q è di grado strettamente minore di d, così come q_1, q_2 e r, possiamo trovare un intervallo comune $[\alpha, \beta]$, con α in A e un β in B, su cui i polinomi q_1, q_2, q e r hanno segno costante. Dalla definizione di A eB sappiamo che su questo intervallo p cambia segno, quindi $q \cdot p$ è negativo in qualche parte di (α, β). Quindi r non può essere negativo, dato che è sommato a $q \cdot p$, e deve risultare

positivo su (α, β) dato che i due polinomi q_1 e q_2 sono positivi sull'intervallo.
L'ordine definito su $\mathbb{F}[x]/(p(x))$ estende l'ordine di $\mathbb{F}$, che è incluso come il campo dei polinomi costanti.
Quindi, se $\mathbb{F}$ non è reale chiuso, possiamo trovare una sua estensione propria ordinata, inclusa nella chiusura algebrica di $\mathbb{F}$, dove il polinomio p ha la proprietà desiderata. Ripetendo questo processo a partire da questo nuovo campo posso ottenere una catena di estensioni ordinate di campi, che, essendo tutte incluse nella chiusura algebrica, hanno come maggiorante la loro unione. Il Lemma di Zorn garantisce allora l'esistenza di elementi massimali, quindi nel nostro caso l'esistenza di campi reali chiusi che estendono il campo $\mathbb{F}$. □

Definizione 3.8. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato, definiamo chiusura reale di $\mathbb{F}$ un campo $\mathbb{K}$, estensione algebrica ordinata di $\mathbb{F}$, che sia reale chiuso.*

Teorema 3.9. *Ogni campo ordinato $\mathbb{F}$ ha una chiusura reale unica a meno di $\mathbb{F}$-isomorfismo.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.7 possiamo immergere $\mathbb{F}$ in un campo reale chiuso $\mathbb{K}$, e considerando la chiusura algebrica relativa di $\mathbb{F}$ in $\mathbb{K}$ otteniamo la chiusura reale (è facile dimostrare che il campo degli elementi algebrici su $\mathbb{F}$ è ancora reale chiuso). L'unicità è conseguenza della proposizione seguente. □

Proposizione 3.10. *Siano $\mathbb{F}_1$ ed $\mathbb{F}_2$ due campi ordinati, $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ due campi reali chiusi che li estendono e $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ i sottocampi formati dagli elementi algebrici rispettivamente su $\mathbb{F}_1$ ed $\mathbb{F}_2$. Ogni isomorfismo tra $\mathbb{F}_1$ ed $\mathbb{F}_2$ si estende ad un unico isomorfismo (di campi ordinati) tra $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{F}_1 = \mathbb{K}_1$ e $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}_2$ la proposizione è dimostrata. Altrimenti consideriamo $\alpha \in \mathbb{K}_1 - \mathbb{F}_1$ di grado minimo d su $\mathbb{F}_1$. Per la minimalità di α ogni polinomio di grado minore di d a coefficienti in $\mathbb{F}_1$ mantiene segno costante su un intorno di *alpha* in $\mathbb{L}_1$, quind anche in $\mathbb{F}_1$.
Allo stesso modo se invece che prendere α in $\mathbb{K}_1 - \mathbb{F}_1$ viene preso in $\mathbb{K}_2 - \mathbb{F}_2$.
Sia ora $p_1(x)$ il polinomio minimo di α su $\mathbb{F}_1$. Per minimalità di p, $p_1'(\alpha) \neq 0$ e possiamo supporre, considerando $-p_1$ in caso contrario, che abbia valore positivo in α. Per il Lemma 3.4 possiamo trovare a_1 e b_1 in $\mathbb{F}_1$ tali che $a_1 < \alpha < b_1$ e tali che $p_1'(x)$ sia positivo sull'intervallo di $[a_1, b_1]$ considerato in $\mathbb{L}_1$. Sfruttando ora il Lemma 3.6 su $\mathbb{L}_1$ otteniamo che $p_1(a_1) < 0$ e $p_1(b_1) > 0$.
Consideriamo ora l'estensione $\mathbb{F}_1(\alpha)$, isomorfa al quoziente $\mathbb{F}_1[x]/(p(x))$. Dato che ogni polinomio di $\mathbb{F}_1[x]$ di grado minore di d ha segno costante su un intorno di α a estremi in $\mathbb{F}_1$, l'ordine definito su $\mathbb{F}_1(\alpha)$ restringendo quello di $\mathbb{L}_1$ non è altro che quello definito dalla Proposizione 3.7 (per unicità dell'ordine su $\mathbb{L}_1$).
Costruiamo ora un'estensione di $\mathbb{F}_2$ ad esso isomorfa. Sia $p_2(x)$ il polinomio di $\mathbb{F}_2[x]$ ottenuto tramite l'isomorfismo in questione, e siano a_2 e b_2 le immagini di a_1 e b_1. p_2 cambia segno tra questi due punti, dato che l'isomorfismo conserva l'ordine. Quindi esiste un β in $[a_2, b_2]$ in $\mathbb{L}_2$ che annulla p_2. Estendiamo allora l'isomorfismo da $\mathbb{F}_1(\alpha)$ in $\mathbb{F}_2(\beta)$ mandando α in β. β è unico poiché p_2 definisce una funzione crescente su $[a_2, b_2]$, infatti la sua derivata formale, immagine di p', è sempre positiva. Ripetendo il ragionamento precedente l'ordine di $\mathbb{F}_2(\beta)$ deve essere quello della Proposizione 3.7, quindi $\mathbb{F}_1(\alpha)$ e $\mathbb{F}_2(\beta)$ sono isomorfi oltre che come campi, anche che come campi ordinati.
Come per la proposizione precedente possiamo ripetere questo processo se necessario un numero transfinito di volte, fino ad ottenere un isomorfismo tra $\mathbb{K}_1$

e $\mathbb{K}_2$.
L'isomorfismo definito è l'unico possibile. Infatti dato che stiamo trattando isomorfismi di campi ordinati, se $\alpha \in \mathbb{K}_1$ e p è il suo polinomio minimo, l'immagine di α in $\mathbb{K}_2$ dovrà necessariamente essere l'n-esima radice del polinomio immagine di p se α è l'n-esima radice di p. □

Questo non è l'unico approccio possibile alla teoria dei campi reali chiusi. Il teorema che segue riassume il Cap.XI in [La] (i risultati originali sono di Artin-Schreier in [A-S]), in cui sono esposte alcune possibili definizioni per i campi reali chiusi:

Teorema 3.11 (Artin-Schreier)**.** *Sia $\mathbb{F}$ un campo, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
1) $\mathbb{F}$ è reale chiuso;
2) $\mathbb{F}$ è ordinato e $\mathbb{F}[i]$ è algebricamente chiuso, dove $i^2 = -1$;
3) $\mathbb{F}$ è massimale (nel senso di estensioni algebriche di campi) in riferimento alla proprietà: -1 non è esprimibile come somma di quadrati.
4) Per ogni $a \in \mathbb{F}$ o a o $-a$ è un quadrato e ogni polinomio di grado dispari ha una radice.

3.3 Eliminazione dei quantificatori

Esponiamo in questa sezione il metodo dell'eliminazione dei quantificatori, che utilizzeremo per dimostrare la completezza della teoria RCF. Seguiremo fedelmente le dispense [B], ispirate alla trattazione in [Sh].
L'idea è di trovare per ogni formula ϕ un altra formula θ ad essa equivalente (nel senso di $T \vdash \phi \leftrightarrow \theta$) ma priva di quantificatori. Da questo non discende immediatamente la completezza di una teoria, ma vedremo in seguito che questa proprietà, insieme alla fatto che ogni campo ordinato contiene una copia isomorfa di $\mathbb{Q}$, ci permetterà di dimostrare che la teoria dei campi reali chiusi è completa.

Definizione 3.12. *Una L-teoria T ammette eliminazione dei quantificatori se per ogni formula ϕ esiste θ senza quantificatori tale che $T \vdash \phi \leftrightarrow \theta$.*

Cominciamo col semplificare il problema, restringendo la verifica a formule con un unico quantificatore:

Lemma 3.13. *Se in una L-teoria T ogni formula esistenziale della forma $\exists x\, \theta$ con θ senza quantificatori è equivalente a una ϕ senza quantificatori allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Per induzione sulle formule. Se α è atomica è già senza quantificatori. Ora basta controllare i casi in cui è della forma $\neg\alpha, \alpha \to \beta, \exists\, x\alpha$ (gli altri connettivi sono definiti a partire da questi due, come anche $\forall$ da $\exists$). I due casi $\neg\alpha$ e $\alpha \to \beta$ si risolvono con facili ragionamenti per tautologie. Per il caso $\exists x\alpha$ sfruttiamo l'ipotesi induttiva e otteniamo un α' senza quantificatori equivalente ad α. Alla formula è ora applicabile l'ipotesi del lemma, e la dimostrazione è conclusa. □

Cosideriamo ora due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se, per ogni L-enunciato θ in un certo insieme D, $\mathcal{A} \models \theta \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \theta$ scriviamo $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{B}$.
Questa notazione è comoda per il lemma che segue. Nel caso particolare in cui D sia l'insieme degli enunciati senza quantificatori verificati da T, e θ una qualsiasi formula con quantificatori, esso fornisce un potente metodo di riduzione dei quantificatori.

Lemma 3.14. *Sia T una L-teoria, D un insieme di L-enunciati chiuso per connettivi e θ un L-enunciato. Supponendo che per ogni coppia di modelli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di T tali che $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{B}$ si abbia $\mathcal{A} \equiv_\theta \mathcal{B}$ allora $T \vdash \theta \leftrightarrow \delta$ con $\delta \in D$.*

Dimostrazione. Sia $H = \{\delta \in D | T \vdash \theta \to \delta\}$. Se esiste un enunciato di H tale che implica θ in T la dimostrazione è conclusa. Ragionando per tautologie e utilizzando il teorema di compattezza e il teorema di Herbrandt dimostriamo che $\exists \delta \in H \quad T \vdash \delta \to \theta \Leftrightarrow T, H \vdash \theta$. Supponiamo per assurdo che $T, H \nvdash \theta$ allora esiste una L-struttura $\mathcal{A}$ modello di T, H tale che $\mathcal{A} \not\models \theta$. Per ipotesi in ogni modello $\mathcal{B}$ di T tale che $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{B}$ il valore di verità di θ coincide con quello in $\mathcal{A}$ (quindi $\mathcal{B} \not\models \theta$). Consideriamo $D_A \supseteq H$ l'insieme degli enunciati di D veri in $\mathcal{A}$. Ogni modello $\mathcal{C}$ di T, D_A coincide con $\mathcal{A}$ su D così per ipotesi coinciderà anche su θ, cioè $\mathcal{C} \not\models \theta$, così $T, D_A \vdash \neg\theta$. Questo è equivalente a dire che esiste δ in D_A tale che $T \vdash \delta \to \neg\theta$ cioè $T \vdash \theta \to \neg\delta$ cioè $\neg\theta \in H$, ma $\mathcal{A} \models T, H$ quindi $\mathcal{A} \models \theta$ e $\mathcal{A} \models \neg\theta$. Assurdo. $\square$

Quindi se per ogni formula con quantificatori si può trovare un insieme D composto da enunciati senza quantificatori tale che $\mathcal{A} \equiv_\theta \mathcal{B}$ per ogni coppia di modelli di T tali che $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{B}$, la teoria ammette eliminazione dei quantificatori. Verificare questa proprietà non è certo facile, la faremo quindi discendere da due proprietà più potenti e di più immediata verifica:

Definizione 3.15. *Una teoria T ha la* ***proprietà dell'isomorfismo*** *se ogni isomorfismo $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ tra sottostrutture $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' \subset \mathcal{A}'$ di due modelli $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ di T, si estende ad un isomorfismo $\hat{f} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$di modelli di T con $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}'$. Cioè ogni isomorfismo di sottostrutture si estende a un isomorfismo di sottomodelli.*

Definizione 3.16. *Una teoria T ha la* ***proprietà del sottomodello*** *se per ogni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ modelli di T, e per ogni enunciato esistenziale della forma $\exists x \theta(x, \vec{a})$, dove $\theta(x, \vec{a})$ è una formula senza quantificatori con parametri $\vec{a}$ in $\mathcal{A}$, se $\mathcal{B}$ verifica l'enunciato, anche $\mathcal{A}$ lo verifica. In altre parole T ha questa proprietà se, preso un modello, ogni suo sottomodello è un sottomodello elementare. (non sono certo)*

Teorema 3.17. *Se T è una teoria che gode della proprietà dell'isomorfismo e del sottomodello, e il linguaggio in cui è formulata contiene almeno un simbolo di costante, allora T ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.13 basta dimostrare che ogni L-formula esistenziale del tipo $\exists x \theta$, con θ senza quantificatori, è equivalente a una formula ϕ anch'essa senza quantificatori.

Cominciamo considerando il caso che $\exists x \theta$ sia chiusa, cioè θ non contenga altre variabili libere oltre x. Per trovare un enunciato senza quantificatori a lei equivalente useremo il Lemma 3.14, utilizzando con D l'insieme degli L-enunciati senza quantificatori (non vuoto in quanto L ha almeno un simbolo di costante, e chiuso per connettivi). Siano quindi $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ due modelli di T con $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{A}'$, dobbiamo mostrare che $\mathcal{A} \equiv_{\exists x\theta} \mathcal{A}'$. L'ipotesi $\mathcal{A} \equiv_D \mathcal{A}'$ (cioè $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ verificano gli stessi enunciati senza quantificatori) è equivalente al fatto che le sottostrutture $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ costituite dalle interpretazioni dei termini chiusi, sono isomorfe tramite l'isomorfismo $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ che manda $t^{\mathcal{A}}$ in $t^{\mathcal{A}'}$, con t L-termine e $t^{\mathcal{A}}$ e $t^{\mathcal{A}'}$ le sue interpretazioni in $\mathcal{A}$ e in $\mathcal{A}'$. Questa mappa è ben definita in quanto se $t_1^{\mathcal{A}} = t_2^{\mathcal{A}'}$, l'enunciato $t_1 = t_2$ è vero in $\mathcal{A}$, ed essendo senza quantificatori è vero in $\mathcal{A}'$. Lo stesso ragionamento serve a mostrare che f è iniettiva, basta scambiare i ruoli di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$. Inoltre il dominio di f sono le interpretazioni in $\mathcal{A}'$ di tutti i termini chiusi, quindi per ogni termine basta considerare la sua interpretazione in $\mathcal{A}$ per ottenere la sua controimmagine. E' ovvio inoltre che preserva i valori di ogni funzione h in L: $h^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}) = h(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}} \to h(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{A}'} = h^{\mathcal{A}'}(t_1^{\mathcal{A}'}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}'})$. La proprietà dell'isomorfismo ci permette di estendere l'isomorfismo di L-strutture $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ così stabilito ad un isomorfismo $\hat{f} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ di modelli di T, con $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}'$. Per dimostrare che $\mathcal{A} \equiv_{\exists x\theta} \mathcal{A}'$ supponiamo che $\mathcal{A}$ soddisfi $\exists x\theta$ e mostriamo che anche $\mathcal{A}'$ lo soddisfa (simmetricamente il viceversa). La proprietà del sottomodello ci garantisce innanzitutto che l'enunciato $\exists x\theta$ è vero nel sottomodello $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Essendo $\mathcal{C}'$ isomorfo a $\mathcal{C}$ esso sarà vero anche in $\mathcal{C}'$ e poiché gli enunciati esistenziali veri in una struttura sono veri in qualsiasi sua estensione, esso sarà anche vero in $\mathcal{A}'$.

Il caso in cui $\exists x\theta$ è una formula chiusa è così completo. Se invece θ contiene altre variabili libere $\vec{y}$ oltre alla x, ci ricondurremo al caso precendente ampliando il linguaggio L con nuove costanti $\vec{c}$ che andremo a sostituire al posto delle $\vec{y}$. È una semplice verifica, ma tecnica e noiosa, che se T gode delle proprietà del sottomodello e dell'isomorfismo anche l'estensione $T[\vec{c}]$ le verificherà.
Consideriamo allora la formula chiusa $\exists x\theta(x, \vec{c})$ del linguaggio ampliato. Per il caso speciale precedentemente dimostrato, applicato però alla teoria $T[\vec{c}]$, esiste un enunciato senza quantificatori $\phi(\vec{c})$ del linguaggio ampliato tale che $T[\vec{c}] \vdash \phi(\vec{c}) \leftrightarrow \exists x\theta(x, \vec{c})$. Visto che $T[\vec{c}]$ non contiene assiomi sulle costanti $\vec{c}$, possiamo dedurne finalmente che $T \vdash \forall \vec{y}(\phi(\vec{y} \leftrightarrow \exists x\theta(x, \vec{y}))$, a condizione che $\phi(\vec{c})$ non contenga quantificazioni sulle $\vec{y}$, ma con un cambio di variabili possiamo facilmente eludere il problema. $\square$

3.4 La teoria RCF è completa

Teorema 3.18. *RCF gode della proprietà del sottomodello.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ due modelli di RCF (due campi reali chiusi), e sia $\theta(x, \vec{a})$ una formula senza quantificatori con $\vec{a} \in \mathcal{A}$ tale che $\theta(b, \vec{a})$ per un certo $b \in \mathcal{B}$. Bisogna dimostrare che esiste un $\hat{a} \in \mathcal{A}$ tale che $\theta(\hat{a}, \vec{a})$. Essendo θ senza quantificatori è una combinazione booleana di formule atomiche. In RCF le formule atomiche sono eguaglianze o disuguaglianze di funzioni polinomiali a coefficienti in $\mathcal{A}$, del tipo $f(x) = 0$ o $g(x) < 0$ con $f, g \in \mathcal{A}[X]$. Infatti, per induzione sulle formule, i termini sono tutti funzioni polinomiali: le costanti 0,1 e le variabili lo sono e i polinomi sono chiusi per somma e prodotto, gli unici due simboli di funzione presenti nella teoria. Gli unici due simboli di relazione sono $=$ e $<$ che formano le equazioni e le disequazioni. Inoltre θ ha un unica variabile libera quindi i polinomi sono in un unica variabile.
Sia $S \subseteq \mathcal{A}$ l'insieme degli zeri dei polinomi f_i che compongono θ e sia $[a_1, a_2]$

l'intervallo delimitato da punti di S a cui appartiene b (in caso b sia maggiore o minore di tutti gli elementi di S uno dei due estremi può essere $+\infty$, $+\infty$). Dato che in ogni campo ordinato l'ordine è denso esiste un $\hat{a} \in \mathcal{A}$ che sta in $[a_1, a_2]$, e che quindi verifica le stesse equazioni e disequazioni polinomiali di b, rispetto all'insieme finito di polinomi che formano θ. Si avrà quindi $\theta(b, \vec{a}) \leftrightarrow \theta(\hat{a}, \vec{a})$, da cui segue $\theta(\hat{a}, \vec{a})$ che era proprio ciò che volevamo dimostrare. □

Teorema 3.19. *RCF gode della proprietà dell'isomorfismo.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ due sottostrutture dei campi algebricamente chiusi $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ un isomorfismo di sottostrutture. Vogliamo dimostrare che f si estende a un isomorfismo di sottomodelli.
Poichè il linguaggio della teoria contiene $0, 1, +, \cdot$ possiamo considerare $\mathcal{D} \cup -\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$ che contiene anche -1, e che si verifica essere un anello. Possiamo allora estendere f una prima volta ad un isomorfismo da $\overline{\mathcal{D}}$ in $\overline{\mathcal{D}'}$.
Ora $\overline{\mathcal{D}}$ e $\overline{\mathcal{D}'}$, essendo sottoanelli di campi, sono dei domini di integrità e possiamo così considerarne i rispettivi campi dei quozienti $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{A}'$. Estendiamo una seconda volta f_1 a $f_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ponendo $f_2(\frac{x}{y}) = \frac{f_1(x)}{f_1(y)}$ con $x, y \in \overline{\mathcal{D}}$. Ora basta verificare che f_2 conserva l'ordine perché rimanga un isomorfismo, ma questo è banale in quanto il segno di un quoziente è univocamente determinato dal segno di numeratore e denominatore.
Utilizziamo ora la Proposizione 3.10; l'isomorfismo $f_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ si solleva ad un isomorfismo tra le chiusure algebriche relative di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{A}'$, che non sono altro che le rispettive chiusure reali. Quindi un isomorfismo tra sottostrutture si può sempre estendere ad un isomorfismo di sottomodelli. □

Corollario 3.20. *RCF ammette eliminazione dei quantificatori.*

Teorema 3.21. *RCF è completa.*

Dimostrazione. Come formulazione equivalente alla completezza dimostriamo che una formula chiusa φ è vera in un modello se e solo se è vera in ogni altro modello. Poichè RCF ammette eliminazione dei quantificatori φ è equivalente a una formula φ' senza quantificatori. Sia allora $\mathcal{A}$ un modello di RCF. In quanto campo ordinato contiene una sottostruttura $\mathbb{Q}^{\mathcal{A}}$ isomorfa a $\mathbb{Q}$. Dato che φ' è senza quantificatori, essa vale in una struttura se e solo se vale in una sottostruttura, quindi, per ogni modello $\mathcal{B}$ di RCF:

$$\mathcal{A} \models \varphi' \Leftrightarrow \mathbb{Q}^{\mathcal{A}} \models \varphi' \Leftrightarrow \mathbb{Q}^{\mathcal{B}} \models \varphi' \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi'$$

Proprio come volevamo dimostrare. □

Corollario 3.22. *RCF è decidibile.*

Dimostrazione. Segue dalla sua completezza e dal fatto che è ricorsivamente assiomatizzata. □

Capitolo 4

Assioma di Continuità e Teoremi di Caratterizzazione

Nella definizione di un'aritmetica dei segmenti e nella dimostrazione del teorema di rappresentazione abbiamo utilizzato le sole proprietà del piano definite dai primi 16 assiomi, come esposti al primo capitolo.
La discussione sull'ultimo assioma, e quindi sulle possibili formulazioni della continuità del piano, ci porterà in questo capitolo ad ottenere i risultati più interessanti sulla completezza e la decidibilità della geometria elementare.
Abbiamo visto che una teoria è completa se e solo se ogni enunciato valido in un modello è valido in tutti gli altri. Un altro modo di formalizzare lo stesso concetto è dire che tutti i modelli di una teoria completa sono elementarmente equivalenti, ossia presi due di essi, se un enunciato vale in uno allora vale anche nell'altro. Due modelli isomorfi sono elementarmente equivalenti, ma il viceversa non è vero, dato che due modelli elementarmente equivalenti possono avere per esempio cardinalità differenti.
Nel capitolo sui campi reali chiusi abbiamo inoltre visto che una teoria i cui assiomi sono esposti in forma primitiva ricorsiva, che siano quindi espressi in una forma tale da essere "riconosciuti" in tempo finito (algoritmicamente parlando), se è completa è anche decidibile. Infatti si può costruire un algoritmo che decida, dato un enunciato, se esso è un teorema o se lo è la sua negazione, visto che in una teoria completa ogni enunciato è dimostrato oppure confutato.

4.1 Assioma di continuità al second'ordine

Aggiungiamo ad $\mathcal{E}_2$ l'assioma di continuità più generale (l'assioma di Dedekind), che asserisce l'esistenza di un elemento separatore tra due qualsiasi sottoinsiemi di una retta, ogni qual volta gli elementi di uno sono minori di tutti gli elementi dell'altro (in riferimento a un punto z fissato).

ASSIOMA DI CONTINUITÀ DI DEDEKIND

$$\exists z\,[a \in A \wedge b \in B \to B(zab)] \to \exists c\,[a \in A \wedge b \in B \to B(acb)]$$

Indicheremo questa teoria con $\mathcal{E}_2^{Ddk}$.
notiamo che le variabili A e B sono quantificate su sottoinsiemi di punti. Si tratta quindi di una formula al second'ordine, che non appartiene al linguaggio "elementare" che abbiamo adottato.
Dall'aritmetica dei segmenti sappiamo come associare ad un modello di questa teoria, un campo ordinato. Dall'assioma di continuità segue subito che questo campo è completo, è quindi isomorfo al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali
Usando allora il teorema base di rappresentazione otteniamo che tutti i modelli della geometria in questa forma sono isomorfi ad $\mathbb{R}^2$. In questo caso quindi la geometria ha un modello unico (a meno di isomorfismo).

Teorema 4.1. $\mathcal{M} \models \mathcal{E}_2^{Ddk} \Leftrightarrow \mathcal{M} \cong \mathbb{R}^2$.

4.2 Geometria "con riga e compasso"

Atteniamoci ora agli assiomi di Euclide, e assumiamo come formulazione debole dell'assioma di continuità l'assioma di intersezione tra segmenti e cerchi dato al primo capitolo. L'assioma afferma che ogni qualvolta un segmento contiene un punto interno e un punto esterno ad un cerchio, lo interseca in un punto c. Questo assioma consente quindi tutte le costruzioni con riga e compasso.
$\mathcal{E}_2^{RC}$, come l'avevamo denominata, è una formulazione equivalente agli assiomi di Hilbert esposti in [H], dove si trova la dimostrazione del seguente teorema di caratterizzazione:

Teorema 4.2. $\mathcal{M} \models \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M} \cong \mathbb{F}^2$ *con* $\mathbb{F}$ *campo euclideo.*

Come già notato al capitolo precedente, la teoria dei campi euclidei non è completa. Di conseguenza possiamo trovare due modelli di $\mathcal{E}_2^{RC}$ non elementarmente equivalenti: per esempio sia $\mathbb{E}$ il campo dato da $\mathbb{Q}$ esteso con tutte le radici quadrate degli elementi positivi, e sia $\mathbb{K}$ la sua chiusura reale. Entrambi i piani cartesiani su questi due campi sono modelli di $\mathcal{E}_2^{RC}$ per il Teorema 4.2, ma mentre nel secondo è possibile la trisezione dell'angolo, nell'altro, come ben noto dalla storia, non lo è.

Questo esempio ci dimostra come per la risoluzione degli storici problemi di trisezione dell'angolo e costruzione dei poligoni regolari non è sufficiente supporre la sola intersezione tra cerchi e rette. Un analogo problema è la duplicazione del cubo nello "spazio elementare" $\mathcal{E}_3$.

4.3 Assioma di continuità elementare

Tarski notò che per risolvere tutti i problemi classici, senza inserire nella teoria strumenti di logica del second'ordine, si può sostituire l'assioma di intersezione rette-cerchi con un assioma che esprima al prim'ordine la continuità della retta. L'assioma di continuità di Dedekind è infatti formalizzabile in uno schema di assiomi del prim'ordine, seppur restringendoci ai soli sottoinsiemi "definibili da formule del prim'ordine":

SCHEMA DI ASSIOMI DI CONTINUITÀ ELEMENTARE DI TARSKI
$\exists a \forall x \forall y[\alpha \wedge \beta \rightarrow B(axy)] \rightarrow \exists b \forall x \forall y[\alpha \wedge \beta \rightarrow B(xby)]$
con α, β formule al prim'ordine, α non contenente occorrenze libere di a,b,y e β non contenente occorrenze libere di a,b,x.

Indichiamo questa teoria con $\mathcal{E}_2^{Tsk}$.
Con questa formulazione della continuità, $\mathcal{E}_2$ possiede molte buone proprietà logiche.
Cominciamo con il caratterizzare i suoi modelli in modo univoco.
Dato un modello $\mathcal{M}$, dimostriamo che il corrispondente campo associato $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ è un campo reale chiuso. Sia $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$ un polinomio a coefficienti in $\mathbb{F}_{\mathcal{M}}$, e $b, b' \in \mathbb{F}_{\mathcal{M}}$ tali che $f(b) < 0$ e $f(b') > 0$. Supponendo che $b < b'$ dobbiamo dimostrare che esiste un c, compreso tra b e b', tale che $p(c) = 0$.
Consideriamo allora l'insieme $B = \{y \text{ t.c } y \geq b \wedge y \leq b' \wedge p(y) > 0\}$ e l'insieme $A = \{x \text{ t.c. } x \geq b \wedge x \leq b' \wedge p(x) < 0 \wedge (x < y \, \forall y \in B)\}$. L'insieme B è formato dagli elementi di $\mathcal{F}$ nell'intervallo b, b' su cui il polinomio ha segno strettamente positivo; l'insieme A è invece formato da quegli elementi su cui è negativo, più piccoli di ogni elemento di B. In questo modo otteniamo che se $x \in$[1] A e $y \in B$ necessariamente $B(bxy)$.
Grazie all'assioma di continuità esiste un c tra b e b' tale che $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $B(xcy)$.
Per dimostrare ora che $p(c) = 0$ mostriamo che non appartiene a nessuno dei due insiemi. Supponiamo che c appartenga ad uno dei due insiemi, allora sarà necessariamente o il massimo di A o il minimo di B. Prendiamo il caso che c sia il massimo di A: per il Lemma 3.4 esiste un $\bar{h}$ tale che $\forall |h| < \bar{h} \quad p(c+h) > 0$, contro l'ipotesi di massimo. Allo stesso modo si dimostra che B non ammette minimo, quindi (dato che c è nell'intervallo b, b') $p(c) \not< 0$ e $p(c) \not> 0$ e per tricotomia $p(c) = 0$.

Grazie a questo risultato il teorema di rappresentazione può essere esteso alla seguente forma:

Teorema 4.3. $\mathcal{M} \models \mathcal{E}_2^{Tsk} \Leftrightarrow \mathcal{M} \cong \mathbb{F}^2$ *con* $\mathbb{F}$ *campo reale chiuso.*

Dimostrazione. Il teorema base di rappresentazione dà la dimostrazione della prima implicazione; per il viceversa partiamo dal fatto che $\mathbb{R}^2$ è un modello di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$, e dai risultati esposti al capitolo 3 sappiamo che tutti i campi reali chiusi sono tra loro elementarmente equivalenti. Dato che ogni enunciato sul prodotto cartesiano di un campo reale chiuso è riconducibile a un enunciato sul campo stesso, $\mathbb{F}^2$ è elementarmente equivalente a $\mathbb{R}^2$, e quindi è modello di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$. $\square$

I modelli della geometria elementare, in questa formulazione, sono quindi tutti e soli i piani cartesiani su un campo reale chiuso e sono tutti elementarmente equivalenti. Questo non implica che siano tutti isomorfi tra loro: è un risultato fondamentale della teoria dei modelli che (grazie ai teoremi di Lowenheim-Skolem) possiamo trovare modelli di ogni cardinalità, e inoltre, come vedremo in seguito, esistono modelli non archimedei della geometria elementare alla Tarski. Ricordando inoltre che tutti gli assiomi di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ sono espressi in forma primitiva ricorsiva otteniamo il seguente:

Teorema 4.4. $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ *è completa e decidibile.*

Dato che gode di così tante proprietà viene da chiedersi se non sia finitamente assiomatizzabile. La risposta è no; una dimostrazione di questo interessante

[1]Il simbolo di appartenenza è qui utilizzato come pura notazione. I due insiemi sono infatti definiti da formule del prim'ordine, e un elemento appartiene ad uno di essi se verifica le formule che definiscono l'insieme stesso.

fatto si può trovare in [T1].

Cerchiamo ora di caratterizzare geometricamente i modelli di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$. Oltre a tutte le proprietà della geometria classica che seguono dai primi 16 assiomi, questa formulazione dell'assioma di continuità garantisce in più l'intersezione di qualsiasi curva polinomiale del piano non appena essa "attraversa" una altra curva, anch'essa polinomiale. Le proprietà di esistenza di radici nel campo associato corrispondono quindi a "costruzioni ammissibili" nel piano euclideo.
Nel nostro caso l'esistenza di tutte le radici quadrate di elementi positivi garantisce le intersezioni di cerchi e rette, quindi le costruzioni con riga e compasso; l'esistenza di radici di grado dispari di ogni ordine permette di risolvere tutti i classici problemi storici irrisolvibili nella geometria "per riga e compasso". La potenza dell'assioma di continuità elementare è però molto maggiore, non essendo un assioma di costruzione, ma un vero e proprio assioma di continuità del piano.

4.4 Geometrie "intermedie"

Consideriamo invece ora assiomi che permettano costruzioni ulteriori oltre a quelle possibili per soli riga e compasso. Si tratta dunque di forme di continuità più forti che la sola intersezione tra cerchi e rette, pur rimanendo al di sotto della continuità elementare alla Tarski. I modelli di queste geometrie, se caratterizzabili, non sono altro che piani cartesiani su campi ordinati godenti certe speciali proprietà, sempre estendibili ad un piano cartesiano costruito sulla loro chiusura reale. In sostanza si ottiene una catena di teorie della geometria elementare, partendo dalla "geometria per riga e compasso" fino ad arrivare in vari passi alla continuità elementare. Un modello di una qualsiasi geometria intermedia ha come sottomodelli tutti i modelli delle geometrie con assiomi di continuità più "deboli". La catena dei modelli è dunque una catena di estensioni algebriche, che, partendo dal campo euclideo modello di $\mathcal{E}_2^{RC}$, arriva in vari passi alla sua chiusura reale, modello della geometria con l'assioma di continuità elementare $\mathcal{E}_2^{Tsk}$.

Vediamo per esempio cosa accade se aggiungiamo uno strumento ampiamente studiato nella storia, la riga numerata. Grazie a particolari costruzioni otteniamo una geometria in cui è possibile trisecare l'angolo e duplicare il cubo[2], quindi una geometria piuttosto soddisfacente, dato che in essa due dei grandi problemi dell'antichità sono risolubili. In [Y] è mostrata nei dettagli la risoluzione delle equazioni di quarto e terzo grado per riga numerata e compasso; il campo associato conterrà quindi tutte le soluzioni di queste equazioni. Se definiamo "campi tartaglici" [3] i campi contenenti tutte le radici quarte degli elementi positivi e le radici cubiche di tutti gli elementi, otteniamo, parallelamente alle altre geometrie, un teorema di caratterizzazione.
L'esempio non è l'unico, da Apollonio in poi gli autori dell'antichità inserirono l'utilizzo di parabole, e coniche in generale, nella risoluzione dei problemi piani. Un possibile sviluppo può essere lo studio di alcune estensioni di campi, se

[2] Per le costruzioni relative consultare [Y].
[3] In onore del vero scopritore delle formule di Cardano.

caratterizzabili, associate a certi strumenti, o per esempio alle condizioni di costruibilità dei poligoni regolari.

Osserviamo che nessuna di queste teorie "intermedie" può essere completa: come suggerito all'inizio della sezione, è facile trovare per qualsiasi di esse modelli non elementarmente equivalenti. Infatti alcuni strumenti aggiunti alla riga e al compasso possono essere ricondotti ad un assioma che garantisce intersezione di certe curve ossia garantisce l'esistenza di radici di polinomi fino a un certo grado nel campo associato. Ma per qualsiasi "geometria intermedia" si può trovare un n per cui l'enunciato $\forall a \, \exists x \, x^n = a$ (che è un enunciato del prim'ordine nel linguaggio dei campi ordinati) non è verificato. Considerando un modello non reale chiuso del campo associato e la sua chiusura reale otteniamo quindi due modelli non elementarmente equivalenti.

L'altra possibilità è che si introduca uno strumento con una certa precisa lunghezza, per esempio π, per ottenere una geometria "per riga e compasso" in cui si possa quadrare il cerchio. In questo caso i modelli risultanti sono tutti della forma $\mathbb{K}(\alpha)$, i più piccoli campi euclidei che contengano il campo $\mathbb{K}$ euclideo e l'elemento α, trascendente su $\mathbb{K}$. Basta prendere due campi euclidei non elementarmente equivalenti di partenza, per ottenere due modelli non elementarmente equivalenti. Quindi qualsiasi teoria 'intermedia' è incompleta.

La caratterizzazione che viene usata per dimostrare che la teoria dei campi reali chiusi è completa è data dal Teorema di Artin-Schrier 3.11: si possono infatti definire i campi reali chiusi come campi ordinati tali che in ogni loro estensione propria e algebrica -1 è esprimibile come somma di quadrati (quindi non ordinabile). Qualsiasi estensione algebrica si consideri, essa non verifica i primi assiomi della geometria, quindi modelli non elementarmente equivalenti non possono essere estensioni algebriche l'uno dell'altro. Per ottenere questa geometria dovremmo supporre quindi l'esistenza di un infinità di nuovi strumenti, o meglio, basterebbe una sorta di "matita del prim'ordine" che colori tutto lo spazio.

4.5 Decidibilità per le teorie "intermedie"

Non abbiamo ancora considerato la decidibilità della geometria "per riga e compasso" nè di quelle "intermedie", dando solo risposta negativa alla loro completezza. La questione in questo caso pare ancora aperta. Tarski in [T1] congettura che nessuna sottoteoria del prim'ordine finita di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ sia decidibile. Ma non ci sono dimostrazioni note di questo fatto.

Possiamo però ottenere un risultato più debole, ma utile per le sue conseguenze: restringendoci all'insieme degli enunciati universali $\mathcal{E}_2^{RC}$ è decidibile.

Infatti, come dimostrato in [T1], considerando i soli enunciati universali, le teorie $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ ed $\mathcal{E}_2^{RC}$ sono indistinguibili. Dal fatto che ogni prodotto cartesiano su un campo euclideo può essere immerso in un prodotto cartesiano sulla sua chiusura reale, e utilizzando i Teoremi 4.2 e 4.3, si ottiene che ogni modello di $\mathcal{E}_2^{RC}$ si pu'øestendere a un modello di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$. Gli enunciati universali conservano la loro validità nel passaggio a sottostrutture, quindi se $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ verifica uno di questi enunciati immediatamente lo verifica anche $\mathcal{E}_2^{RC}$. Per il viceversa, notiamo che un modello di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ è banalmente anche un modello di $\mathcal{E}_2^{RC}$, quindi verifica

tutti i suoi enunciati e alla decidibilità di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ segue la decidibilità, ristretta all'insieme delle formule universali, di $\mathcal{E}_2^{RC}$.
Lo stesso discorso vale anche per geometrie "intermedie", che sono tutte sottostrutture di modelli di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$.
Grazie a ciò si può anche concludere che tutti gli enunciati universali dimostrabili soltanto "per riga e compasso" sono dimostrabili in $\mathcal{E}_2^{Tsk}$ senza l'uso della continuità elementare.

4.6 Generalizzazioni e possibili sviluppi

Modificando opportunamente gli assiomi dimensionali, come visto nel primo capitolo, possiamo ottenere una teoria assiomatica della geometria elementare in n dimensioni, che risulta anch'essa completa e decidibile. In [Sc], portando questo processo all'estremo, e con non poca fatica, viene formulata un assiomatizzazione per la geometria elementare in infinite dimensioni, con risultati di completezza e decidibilità analoghi.
In [Sz] viene invece esposta un'assiomatizzazione della geometria elementare iperbolica, ottenendo, anche in questo caso, una caratterizzazione univoca dei modelli. Essi saranno particolari spazi, detti *spazi di Hilbert-Szàsz*, su un campo reale chiuso. Dalla completezza della teoria RCF viene derivata la completezza della teoria elementare della geometria iperbolica, che risulta inoltre decidibile e non finitamente assiomatizzabile.

Passiamo ora ad alcune considerazioni su modelli di $\mathcal{E}_2^{Tsk}$. Come abbiamo visto i modelli di questa teoria sono tutti elementarmente equivalenti, ma possiamo trovare una gran quantità di modelli non isomorfi, e non solo perché di diversa cardinalità. Innanzitutto il campo dei numeri reali algebrici è un campo reale chiuso, non è altro che la chiusura reale di $\mathbb{Q}$.
Gli esempi più interessanti si trovano però cercando campi reali chiusi non archimedei, quindi campi in cui esistono elementi più grandi di tutti i multipli interi di un dato elemento, o allo stesso modo elementi infinitesimi più piccoli di qualsiasi frazione intera. Gli esempi non mancano, dalle serie di Poiseux fino al risultato, molto generale, che le serie a coefficienti in un campo reale chiuso $\mathbb{K}$ e a esponenti in un gruppo divisibile[4] formano un campo reale chiuso, e non archimedeo.
Un possibile sviluppo della tesi può essere indirizzato verso una possibile assiomatizzazione di una geometria elementare non archimedea. Si può ad esempio introdurre una nuova relazione $I(abcd)$ che corrisponda all'intuizione "il segmento ab è infinitesimo rispetto al segmento cd". Una discussione sulla possibile formulazione dell'assioma di archimede al prim'ordine è già di per sè interessante.
Lo studio poi di un eventuale assiomatizzazione potrebbe potenzialmente portare a modelli i cui campi associati sono modelli dell'analisi non-standard, consentendo una teoria elementare della misura.

Per trattare campi archimedei è utile, nel nostro caso, rimanere al second'ordine. Indeboliamo infatti l'assioma di Dedekind, restringendo l'esistenza dell'elemento separatore alle le sole "classi contigue", dove per "classi contingue" si intendono sottoinsiemi disgiunti tali che ogni elemento del primo è minore di tutti quelli del secondo, e tali che per ogni ϵ positivo esistono un punto nel

[4]Un gruppo G si dice divisibile se $\forall n \in \mathbb{N}$ e $g \in G$ esiste $y \in G$ tale che $ny = g$.

primo e uno nel secondo che distano meno di ϵ. In questo caso non si può più dimostrare il teorema di caratterizzazione unica, perchè non è più dimostrabile l'archimedeicità del campo associato.
Per poter ottenere un teorema di caratterizzazione si potrebbero allora sfruttare i risultati in [K-S], dove è dimostrato che modelli di una assiomatizzazione di questo tipo (riferita ai campi) sono modelli dell'analisi non-standard. Si ottengono quindi interessanti modelli che, oltre a non essere archimedei, godono di tutte le molteplici proprietà dei modelli dell'analisi non-standard.

Bibliografia

[A-S] E. ARTIN, O. SCHREIER, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Hamb. Abn.,1926.

[B] A. BERARDUCCI, *Appunti ed esercizi del corso di Istituzioni di Logica Matematica*, 2002.

[E] EUCLIDE, *Gli Elementi*, a cura di A.Frajese e L.Maccioni, UTET, 1970.

[G] H.N. GUPTA, *Contributions to the axiomatic foundation of geometry*, doctoral dissertation, University of Berkeley, 1965.

[H] R. HARTSHORNE, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000.

[La] S. LANG, *Algebra*, Addison Wesley, 1965.

[Lz] F. LAZZERI, *Appunti del corso di Matematiche Elementari da un punto di vista superiore: geometria euclidea*, 2005.

[H] D. HILBERT, *I Fondamenti della Geometria, con i supplementi di Paul Bernays*. Feltrinelli 1970.

[K-S] H.J. KEISLER, J.H. SCHMERL, *Making the hyperreal line both saturated and complete*, Journal of Symbolic Logic 56, 1991.

[P] B. POIZAT, *A Course in Model Theory*. Springer, 2000.

[Sc] D. SCOTT, *Dimension in Elementary Euclidean Geometry*. In *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics*, North-Holland Publishing Company 1959.

[Sh] J.R. SHOENFIELD, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, 1967.

[Sz] W. SZMIELEV, *Some metamathematical problems concerning Elementary Hyperbolic Geometry*. In *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics*, North-Holland Publishing Company 1959.

[T1] A. TARSKI, *What is Elementary Geometry*. In *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics*, North-Holland Publishing Company 1959.

[T2] A. TARSKI and S. GIVANT, *Tarski's system of geometry*. The Bullettin of Symbolic Logic, Volume 5, Number 2, 1999.

[T3] A. TARSKI, *A decision method for Elementary Geometry and Algebra*. Second edition, Berkeley and Los Angeles 1951, VI.

[W] B. VAN DER WAERDEN, *Modern algebra*. Revised English edition, New York, 1953, vol 1. XII.

[Y] R.C. YATES, *The angle ruler, the marker ruler and the carpenter's square*, National Mathematics Magazine, Vol. 15, No. 2 (Nov. 1940), pp. 61-73.