Calibrage plan d'une caméra en mouvement à focale variable

Plane-based calibration of a moving camera with varying focal length

Pierre Gurdjos René Payrissat
IRIT-UPS, Équipe TCI
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4
Mél: gurdjos@irit.fr, payrissa@irit.fr

Résumé

Cet article décrit un algorithme résolvant le problème du calibrage plan d'une caméra en mouvement, à focale variable. Sous le terme "calibrage plan", nous sous-entendons que la caméra observe un objet plan dont la géométrie est parfaitement déterminée. Quelques méthodes existent déjà mais elles requièrent soit des étapes de pré-calibrage et des procédures itératives de minimisation soit la résolution d'un système linéaire de $2n$ équations avec $n+3$ inconnues, où n est le nombre d'images. La nouvelle équation de calibrage plan que nous proposons est indépendante de la focale et est spécifique à chaque image. Pour n images, notre système comporte seulement 3 inconnues correspondant aux paramètres internes constants de la caméra, soient le rapport d'échelle de la caméra et les coordonnées du point principal. La solution est obtenue en minimisant une distance géométrique exprimée sous une forme linéaire. Une fois cette estimation faite, le calcul des différentes focales est ensuite effectué de façon très simple. Notre algorithme présente deux points forts par rapport aux méthodes existantes : une complexité de calcul moindre et un meilleur conditionnement du système à résoudre garantissant l'obtention de résultats plus précis. Nous démontrons que la contrainte que nous utilisons exprime en fait les propriétés de la "ligne des centres" qui est le lieu géométrique du point principal lorsque deux figures planes sont en correspondance perspective, en accord avec un théorème de Poncelet. Les simulations effectuées sur des images synthétiques et les applications sur des images réelles confirment les points forts de l'algorithme.

Mots Clef

Calibrage plan, focale variable, géométrie d'images multiples, homographie, ligne des centres.

Abstract

This paper describes a two-step algorithm for calibrating a moving camera, with variable focal length, from views of a planar pattern with a known euclidean structure. Few methods already exist and they basically require either pre-calibration steps and iterative minimization procedures or to solve a linear system whose number of unknowns is $n+3$, where n is the number of views. We propose a new linear plane-based calibration constraint, irrespective of the focal length, that holds for each view, with only 3 unknowns (constant internal parameters) whatever n; each focal length recovery becoming straightforward. The solution is obtained by minimizing a linear geometric distance. This algorithm shows two strong points over existing methods: a lower computation complexity and a better system conditioning that leads to a higher accuracy. We show that our calibration constraint expresses the properties of the "centre line" that is the principal point locus when planar figures are in perpective correspondence, in accordance with Poncelet's theorem. Simulations show the better system conditioning and accuracy with the CL-based algorithm over the other ones. Applications on real images confirm the interest of our approach.

Keywords

Plane-based calibration, varying focal length, multiple view geometry, homography, centre line, Poncelet.

1 Introduction

Une des avancées récentes les plus remarquables en vision par ordinateur a été d'affranchir les applications de la pré-condition "les caméras doivent être calibrées une fois pour toutes". Dans ce cas, les applications ne nécessitent plus un calibrage hors ligne, souvent réalisé selon une approche photogrammétrique à partir des images d'un objet volumique de référence, ou d'une mire, dont la structure géométrique est parfaitement déterminée. Sur le plan théorique, un des apports importants a été notamment la mise en évidence d'entités projectives imaginaires, comme la conique absolue ou la quadrique absolue duale, permettant de relier le calcul de l'information métrique intrinsèque d'une caméra à l'estimation de leurs paramètres. Ce résultat a développé de nouvelles voies vers l'auto-calibrage d'une caméra en mouvement qui, par définition, est une méthode de calibrage ne nécessitant pas d'information *a priori* sur la structure géométrique de la scène observée (lire [10] ou [1] pour un historique de cette approche). L'"auto-calibrage plan", c.-à-d. le calibrage à partir des images d'un plan [1] de référence Π, est aussi possible à partir des homographies inter-images induites par le plan Π [9][5]. Hormis le fait que les environnements humains sont souvent constitués d'objets plans (éventuellement polyédriques), l'intérêt d'un calibrage plan est que l'estimation d'une homographie, exploitant la coplanarité des points de la scène, est plus stable et plus précise que l'estimation de structures projectives sans contrainte sur les points, telles que la matrice fondamentale ou une reconstruction projective [1].

On peut considérer que les méthodes d'auto-calibrage plan décrites dans [9] généralisent les méthodes de calibrage à partir d'une seule vue [3] et les méthodes de "calibrage plan" [13][8] basées sur les propriétés relatives à la projection de directions orthogonales de l'espace. Les méthodes de "calibrage plan" nécessitent des informations euclidiennes sur le plan observé (repère, angle, rapport de longueurs, etc.). Le calibrage à partir d'une seule vue est possible en exploitant les contraintes sur les paramètres intrinsèques de la caméra (le repère de l'image est souvent supposé euclidien) et la connaissance des points de fuite [2] associés à trois directions orthogonales [3] ou en présence d'un parallélépipède rectangle [11].

Dans un article [13] souvent cité, Z. Zhang considère les mêmes contraintes que celles utilisées dans l'auto-calibrage plan, mais il remplace les homographies inter-images par les homographies entre un plan euclidien de référence et les images. Pour des paramètres intrinsèques variables, Sturm et Maybank ont étendu cette méthode [3] dans [8] en montrant que les coefficients dépendant des paramètres variables de la caméra pouvaient être considérés comme des inconnues supplémentaires du problème. Dans le cas où seule la focale varie, une solution optimale (atteignant la borne de Cramer-Rao) a été proposée par Matsunaga dans [6]. Cependant, elle requiert une étape de pré-calibrage non décrite et des itérations de Newton lors de l'estimation (le problème est ramené au cas où seules les différentes valeurs de la focale sont inconnues).

D'une certaine façon, les algorithmes [13][8] de calibrage plan offrent un bon compromis entre la précision du calibrage photogrammétrique et la flexibilité de l'auto-calibrage [4]. Ils sont très faciles à mettre en oeuvre car ils minimisent des distances algébriques linéaires par des méthodes non itératives. Quand le nombre d'image est restreint, ils se révèlent aussi être rapides et efficaces, s'il n'y pas de mouvements critiques de la caméra [8]. Cependant, pour le calibrage d'une caméra avec paramètres internes variables, la complexité de l'algorithme décrit dans [8] est en $\mathcal{O}(n^3)$, ce qui peut pénaliser le temps d'exécution quand le nombre n d'images est important. De plus, la formulation algébrique du problème semble introduire un équilibrage artificiel du système qui, d'après nos simulations, donne plus de poids aux images associées aux grandes valeurs de focales.

Dans cet article, nous nous intéressons au problème du calibrage plan d'une caméra en mouvement à focale variable. Nous proposons de décomposer ce problème en deux sous-problèmes. Le premier consiste à estimer les paramètres internes constants (rapport d'échelle et coordonnées du point principal) à partir d'un système linéaire de n équations à seulement 3 inconnues. Le second consiste à calculer directement, pour chaque caméra partiellement calibrée, la focale correspondante. La formulation du premier sous-problème utilise les propriétés de la "ligne des centres" qui est le lieu géométrique du point principal, lorsque deux figures planes sont en correspondance perspective. En particulier, ceci nous permet de définir un critère linéaire, correspondant à une distance géométrique dans l'image, qui semble résoudre le problème d'équilibrage "artificiel" mentionné plus haut. De plus, cette formulation permet de retrouver les mouvements ambiguës de la caméra donnés dans [8], pour lesquels certains paramètres ne peuvent être estimés. L'algorithme basé sur la ligne des centres est rapide ; sa complexité est en $\mathcal{O}(n)$. Afin de le valider expérimentalement, des simulations ont été effectuées. Elles montrent son apport relativement à celui de Sturm et Maybank, dans le cas des mouvements décrits, à la fois du point de vue de la complexité de calcul et de la précision.

2 Cadre géométrique

Notations. Un objet géométrique (point, droite,...) est noté par une lettre p, l,... en police sans serif et le vecteur qui le représente par la même lettre minuscule $\mathbf{p}$, $\mathbf{l}$,... en gras. Une matrice est notée par une lettre majuscule en gras $\mathbf{M}$,... parfois en lettres grecques $\boldsymbol{\omega}$,.... Nous utilisons la notation $\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ pour représenter la matrice diagonale d'ordre n où $d_1, ..., d_n$ sont situés sur la diagonale principale et $\mathbf{I}_{m\times m}$ pour la matrice identité d'ordre m. Les colonnes d'une matrice $\mathbf{M}$ sont notées $\mathbf{m}_j$ et les éléments de $\mathbf{m}_j$ sont notés M_{ij}. Un ensemble de n matrices de la forme $\mathbf{M}$ est composé de $\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}, ..., \mathbf{M}^{(n)}$. Un scalaire est noté par une lettre X, u ou α,... La notation $\sim$ repré-

1. En pratique, le nombre de plans observés dans une image peut être arbitraire.

2. Si seulement deux points de fuite sont donnés, alors de nouvelles images du plan doivent être prises en compte [4].

3. À partir de travaux indépendants des résultats de [13].

4. Signalons que des méthodes de calibrage plan selon une approche photogrammétrique, conduisant à des résultats de haute précision, ont récemment été publiées [2].

sente l'égalité projective, c.-à-d. l'égalité à un scalaire près, alors que $\approx$ signifie "approximativement égal à".

2.1 Modèle de la caméra

Les coordonnées euclidiennes (X, Y, Z) d'un point de la scène et les coordonnées affines (u, v) de sa projection dans l'image sont liées par l'équation de projection : $[u, v, 1]^\top \sim \mathbf{P}[X, Y, Z, 1]^\top$. La matrice de projection perspective est décomposée en $\mathbf{P} = \mathbf{A}[\mathbf{R} \mid \mathbf{t}]$, où $\mathbf{A}$ est la matrice triangulaire supérieure des paramètres internes de la caméra et $(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ est un déplacement rigide dans l'espace. Nous utilisons la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{A}_c\mathbf{A}_f$, telle que :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & u_0 \\ 0 & \kappa & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

où σ est le facteur d'obliquité du repère affine de l'image, f est la distance focale (en pixels), κ est le rapport d'échelle de la caméra et (u_0, v_0) sont les coordonnées (en pixels) du point principal. Lorsque $\sigma = 0$, κ représente le rapport des dimensions d'un pixel. Dans cet article nous utilisons aussi cette hypothèse (c.-à-d. les pixels sont rectangulaires).

2.2 Contraintes de calibrage

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ l'espace projectif de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B}$ telle que le plan à l'infini Π_∞ a pour équation $T = 0$. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ sera doté d'une structure euclidienne dès que l'on sait y définir un "produit scalaire". Ceci est réalisé par l'introduction d'un objet imaginaire : la conique absolue Ω (ou cercle de l'infini) qui a pour équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = T = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. Ω ne contient pas de points réels et son "utilité" est restreinte aux points de Π_∞ qui peuvent être interprétés comme des directions de la géométrie euclidienne. Pour $\mathsf{u}_\infty, \mathsf{v}_\infty$ de Π_∞, représentés par $\left[\mathbf{u}_\infty^\top, 0\right]^\top$ et $\left[\mathbf{v}_\infty^\top, 0\right]^\top$ et projetés en $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (points de fuite) par $\mathbf{P}$, on définit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\boldsymbol{\omega}}$ par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}^\top \bar{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v} = \mathbf{u}_\infty^\top \mathbf{v}_\infty = \|\mathbf{u}_\infty\| \, \|\mathbf{v}_\infty\| \cos\theta,$$

où θ est l'angle de $(\mathbf{u}_\infty, \mathbf{v}_\infty)$ et $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^{-\top}\mathbf{A}^{-1}$ représente l'image de la conique absolue Ω par $\mathbf{P}$. Ainsi le calcul de $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ est étroitement lié au calibrage intrinsèque de la caméra (calcul de $\mathbf{A}$).

Contraintes issues de la caméra. Nous représentons l'image de la conique absolue Ω par $\mathbf{P}$ par la matrice :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 & -\kappa^2 u_0 \\ 0 & 1 & -v_0 \\ -\kappa^2 u_0 & -v_0 & \kappa^2 u_0^2 + v_0^2 + \kappa^2 f^2 \end{bmatrix} \sim \bar{\boldsymbol{\omega}}, \quad (2)$$

où seul ω_{33} dépend de f. Soient $\omega_{ij} (i \leq j)$ les éléments de $\boldsymbol{\omega}$. On peut montrer que les quatre égalités suivantes sont vérifiées [5] :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{11} = \kappa^2 \omega_{22}, \qquad (3)$$
$$u_0\omega_{11} = -\omega_{13}, \qquad v_0\omega_{22} = -\omega_{23}. \qquad (4)$$

Contraintes issues des points cycliques. Considérons le plan Π d'équation $Z = 0$ complété par deux points complexes conjugués $\mathsf{c}_\pm$, appelés points cycliques, qui appartiennent à Π_∞ $(Z = T = 0)$, et qui ont pour vecteur de coordonnées $\mathbf{c}_\pm = [1, \pm i, 0]^\top$, où $i^2 = -1$. Soit $\mathbf{H}$ l'homographie de Π sur le plan de l'image. Les points cycliques vérifient aussi $X^2 + Y^2 = 0$ et appartiennent donc à la conique absolue Ω. Leur image par $\mathbf{H}$ appartient à l'image de Ω, ce qui se traduit par $(\mathbf{H}\mathbf{c}_\pm)^\top \boldsymbol{\omega} (\mathbf{H}\mathbf{c}_\pm) = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit vérifiée est que les parties réelle et imaginaire de son membre gauche soient simultanément nulles, c.-à-d. :

$$\mathbf{h}_1^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{h}_2 = 0, \quad \mathbf{h}_1^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{h}_2, \qquad (5)$$

où $\mathbf{h}_1$et $\mathbf{h}_2$ sont les deux premières colonnes de $\mathbf{H}$. Ces contraintes sont linéaires par rapport aux éléments de $\boldsymbol{\omega}$ et constituent les équations de base du calibrage plan d'une caméra en mouvement.

3 Travaux antérieurs

À notre connaissance, il n'existe pas d'autres méthodes non itératives de calibrage plan que celles basées sur les équations (5) et traitées dans l'introduction.

3.1 Paramètres internes constants

Dans [13], Z. Zhang suppose les paramètres internes de la caméra constants. Les n images fournissent n homographies de matrices $\mathbf{H}^{(k)}$, ce qui donne un système comportant $2n$ équations (5) linéaires par rapport aux éléments de la matrice $\boldsymbol{\omega}$ d'ordre 3. La matrice $\boldsymbol{\omega}$ n'a que 5 degrés de liberté, par conséquent, au moins 3 images sont nécessaires pour l'estimer. Si, de plus, on suppose que les pixels sont rectangulaires $(\sigma = 0)$, alors seulement 2 images suffisent.

3.2 Paramètres internes variables

Dans [8], P. Sturm et S. Maybank ont étendu le travail de Zhang au cas où les paramètres internes de la caméra sont variables. Dans leur méthode, les pixels sont supposés rectangulaires $(\sigma = 0)$. Deux sous-cas

5. Les deux premières égalités viennent du fait que les pixels sont rectangulaires, c.-à-d. que $\sigma = 0$. Quant aux égalités (4), à notre connaissance, elles n'ont jamais donné lieu à une interprétation. Nous suggérons qu'elles expriment une propriété de polarité. En effet, le centre p_0 de toute conique Σ est le pôle de la droite à l'infini par rapport à Σ. En particulier, pour la conique absolue, nous avons $\mathbf{I}_{3\times3}\mathbf{p}_0 \sim \mathbf{l}_\infty$ où $\mathbf{p}_0 = [0, 0, 1]^\top$ représente le centre de Σ et $\mathbf{l}_\infty = [0, 0, 1]^\top$ représente la droite à l'infini. Cette équation se transforme par $\mathbf{A}$ en $\boldsymbol{\omega}[u_0, v_0, 1]^\top = \mathbf{l}_\infty$, puisque $\mathbf{l}_\infty$ est invariant par transformation affine. Seules deux équations analytiques parmi les trois sont indépendantes et on peut montrer qu'elles sont strictement équivalentes à (4).

sont envisagés : [i] la focale varie seule ou [ii] conjointement avec le point principal. Ces paramètres variables sont considérés comme des inconnues additionnelles dans les équations de base (5) du calibrage plan. Pour n images, dans le cas [i] (resp. [ii]), le système a $2n$ équations avec $3+n$ (resp. $5+n$) inconnues.

4 Discussion

D'un point de vue numérique, la méthode utilisée par Sturm et Maybank pour résoudre le problème 3.2 peut présenter certains inconvénients, d'une part, relatifs à la complexité de l'algorithme requis et, d'autre part, relatifs au conditionnement du système modélisant le problème.

4.1 Complexité

Les algorithmes 3.1 et 3.2 de calibrage plan requièrent la résolution d'un système sur-déterminé d'équations homogènes de la forme $\mathbf{Mx} \approx \mathbf{0}$, sous la contrainte $||\mathbf{x}|| = 1$, où $\mathbf{x}$ est le vecteur contenant les m inconnues (avec $m-1$ degrés de liberté) et $\mathbf{M}$ est la matrice $2n \times m$ des coefficients déduits des matrices $\mathbf{H}^{(j)}$ $(1 \leq j \leq n)$ à partir des équations (5), avec $2n > m$. Le problème consiste à chercher $\mathbf{x}$ qui minimise la somme des carrés des distances algébriques :

$$\epsilon^2 = ||\mathbf{Mx}||^2 \text{ sous la contrainte } ||\mathbf{x}|| = 1. \qquad (6)$$

La solution au sens des moindres carrés (totaux) est la plus petite valeur singulière de $\mathbf{M}$ (ou, de façon équivalente, la plus petite valeur propre de $\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$). Dans le cas d'une caméra à focale variable, décrit dans le problème 3.2, il faut calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice $2n \times (4+n)$ par un algorithme itératif. La complexité de ce dernier [6] est en $\mathcal{O}(n^3)$ (soient $16n^3+160n^2+512n+512$ *flops* [7], d'après [1], pp. 558). Cette formulation n'est pas adaptée aux longues séquences d'images, notamment si des contraintes de temps d'exécution doivent être prises en compte. Pour prendre un exemple concret, pour $n = 100$ images, la matrice $\mathbf{M}$ est de dimension 200×104 et le coût de calcul est d'environ 17.6 *Megaflops*.

4.2 Conditionnement

Nous donnons tout d'abord la proposition suivante.

Prop. 1 *Lorsque la longueur focale f varie, deux images associées à deux niveaux identiques de bruit contribuent de façon différente à l'estimation de* $\mathbf{x}$.

Nous ne donnons pas la preuve mais suggérons une idée concernant la démarche à suivre. Pour simplifier, on supposera que $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(f, f, 1)$.

6. En pratique, seules les matrices Σ et $\mathbf{V}$ de la décomposition $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$ sont calculées.

7. *Flop* : opération de virgule flottante.

Soient deux images $\mathcal{I}^{(a)}$, $\mathcal{I}^{(b)}$ d'un plan Π. Nous omettrons les indices lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté. Associons à $\mathcal{I}^{(a)}$, $\mathcal{I}^{(b)}$ deux focales différentes, soient $f^{(a)}$ et $f^{(b)}$. Notons $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{||\bar{\mathbf{x}}||}\bar{\mathbf{x}}$, où $\bar{\mathbf{x}} = \left[\omega_{11}, \omega_{33}^{(a)}, \omega_{33}^{(b)}\right]$, la solution pour (6). D'après (2), on a $\omega_{11} = 1$, $\omega_{33} = f^2 + \Delta f^2$, où Δf^2 représente l'erreur sur f^2, et nous notons $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{||\bar{\mathbf{x}}||}\mathrm{diag}(\omega_{11}, \omega_{11}, \omega_{33})$. Soit $\tilde{\mathbf{H}}$ une estimation de $\mathbf{H}$. La $i^{\text{ième}}$ $(i = 1, 2)$ colonne $\tilde{\mathbf{h}}_i$ de $\tilde{\mathbf{H}}$ est de la forme $\tilde{\mathbf{h}}_i = \lambda\mathbf{A}\tilde{\mathbf{r}}_i$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\tilde{\mathbf{r}}_i = [\tilde{r}_{1i}, \tilde{r}_{2i}, \tilde{r}_{3i}]^\top$. Les quantités :

$$e_1 = \tilde{\mathbf{r}}_1\tilde{\mathbf{r}}_2^\top, \; e_2 = \tilde{\mathbf{r}}_1\tilde{\mathbf{r}}_1^\top - \tilde{\mathbf{r}}_2\tilde{\mathbf{r}}_2^\top,$$

caractérisent une bruit relatif à l'estimation de $\mathbf{H}$ par $\tilde{\mathbf{H}}$. Admettons que les homographies $\tilde{\mathbf{H}}^{(a)}$ et $\tilde{\mathbf{H}}^{(b)}$ ont un “niveau identique” de bruit, c.-à-d. qu'elles vérifient $e_1^{(a)} = e_1^{(b)}$ et $e_2^{(a)} = e_2^{(b)}$, et sans perte de généralité, supposons aussi que $\lambda = 1$.
À chaque image correspond deux équations de la forme $\tilde{\mathbf{h}}_1^\top\hat{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{h}}_2 = \xi_1$ et $\tilde{\mathbf{h}}_1^\top\hat{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{h}}_2^\top\hat{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\mathbf{h}}_2 = \xi_2$. Intéressons-nous à la première équation :

$$\xi_1 = \frac{\omega_{11}}{||\bar{\mathbf{x}}||}(\tilde{r}_{11}\tilde{r}_{12} + \tilde{r}_{21}\tilde{r}_{22})f^2 + \frac{\omega_{33}}{||\bar{\mathbf{x}}||}\tilde{r}_{31}\tilde{r}_{32}.$$

En supposant $\frac{\Delta f^2}{||\bar{\mathbf{x}}||}\tilde{r}_{31}\tilde{r}_{32} \approx 0$, on a $\xi_1 \approx \frac{1}{||\bar{\mathbf{x}}||}e_1 f^2$ qui est une fonction strictement monotone de f. Par conséquent, quand $e_1 > 0$ (resp. $e_1 < 0$), $\tilde{\mathbf{H}}^{(b)}$ a plus (resp. moins) de poids que $\tilde{\mathbf{H}}^{(a)}$ pour le calcul de la solution $\hat{\mathbf{x}}$. Par un raisonnement analogue, on pourrait faire la même remarque pour la seconde équation.
Plus généralement, il est connu [12][1] qu'une distance algébrique telle que ξ_1 ou ξ_2 n'a pas d'interprétation géométrique ou statistique. Ainsi la solution obtenue peut ne pas être celle attendue intuitivement.
Dans le cas du calibrage plan, les ordres de grandeur des éléments de la matrice $\mathbf{M}$ et du vecteur $\mathbf{x}$ peuvent différer de façon importante. Tous ces points ont pour conséquence un mauvais conditionnement du système que Sturm et Maybank améliorent par une normalisation uniforme des colonnes de $\mathbf{M}$. D'après nos simulations, cette étape d'équilibrage s'avère indispensable mais il faut noter que la “contribution arbitraire” des équations mis en évidence par la proposition 1 semble subsister en pratique.
Afin de définir un critère géométrique de minimisation qui ne présente pas ces inconvénients, nous remplacerons les contraintes algébriques basées sur l'image de la conique absolue par une contrainte géométrique déduite de deux figures planes en correspondance perspective, basée sur la “ligne des centres” et ne dépendant pas de la focale.

5 La ligne des centres

Les propriétés géométriques déduites de deux figures planes en correspondance perspective et, en particulier, des positions des centres de projection, sont connues depuis longtemps, notamment grâce aux travaux de J.V. Poncelet au milieu du XIX$^{\text{ième}}$ siècle [7]. Fondamentalement, Poncelet a montré le théorème suivant, selon une approche purement géométrique : *"Lorsqu'une figure plane est la projection centrale d'une autre figure plane, ces figures restent en perspective quand on fait tourner le plan de la première autour de son intersection avec le plan de la seconde, et le centre de projection décrit un cercle* C *dont le plan est perpendiculaire à cette intersection".* Dans le contexte de l'image d'un plan Π, ceci suggère la définition suivante :

Déf. 2 *La ligne des centres* L_C *est le segment de droite obtenu par projection orthogonale du cercle* C *sur le plan de l'image (voir figure 1).*

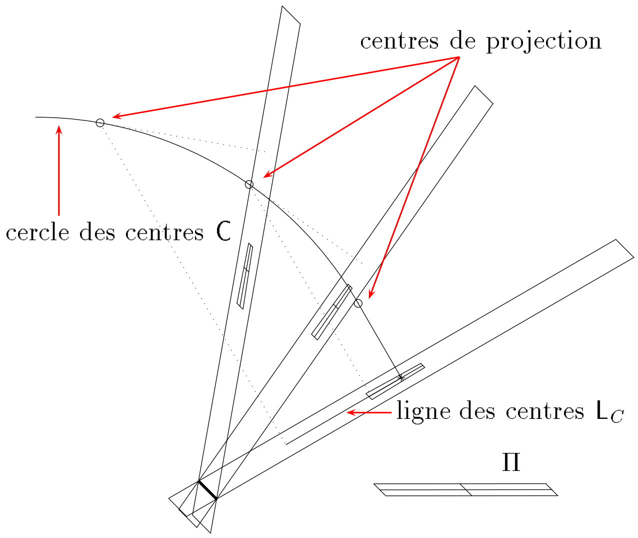

FIG. 1 – *Illustration du théorème de Poncelet. Une caméra produit la même vue du plan* Π *(c.-à-d. les homographies inter-vues induites par* Π *correspondent à l'identité), quand on fait tourner le plan de l'image autour de son intersection avec* Π *de telle façon que le centre de projection soit situé sur le cercle* C*, dans un plan perpendiculaire à cette intersection.*

Prop. 3 *D'après le théorème de Poncelet, la ligne des centres est le lieu géométrique du point principal. Elle est orthogonale à la ligne de fuite du plan* Π *et ne dépend pas de la distance focale de la caméra.*

Dans ce qui suit, nous explicitons l'équation analytique de la ligne des centres L_C. Nous démontrons que cette équation est indépendante de f et nous l'utilisons comme contrainte géométrique pour estimer les paramètres u_0, v_0, κ constituant les éléments de la matrice $\mathbf{A}_c$ dans (1). Cette formulation nous permettra de traiter de longues séquences d'images puisque le nombre d'inconnues reste constant, contrairement à [8]. Les différentes focales sont ensuite directement obtenues par un calcul direct, avec une précision sensiblement supérieure à celle trouvée par Sturm et Maybank dans [8].

Prop. 4 *Soit* $\mathbf{H}$ *l'homographie d'un plan* Π *sur le plan de l'image, où* H_{ij} *est l'élément* (i,j) *de* $\mathbf{H}$*. Le vecteur* $\mathbf{l}_C = [-\varphi_1\kappa^2, -\varphi_2, \varphi_3\kappa^2 + \varphi_4]^\top$*, où :*

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (H_{31}^2 + H_{32}^2)(H_{31}H_{12} - H_{11}H_{32}),\\
\varphi_2 &= (H_{31}^2 + H_{32}^2)(H_{31}H_{22} - H_{21}H_{32}),\\
\varphi_3 &= (H_{31}H_{12} - H_{11}H_{32})(H_{11}H_{31} + H_{12}H_{32}),\\
\varphi_4 &= (H_{31}H_{22} - H_{21}H_{32})(H_{21}H_{31} + H_{22}H_{32}),
\end{aligned} \tag{7}$$

représentent les coefficients de la ligne des centres L_C *par rapport au repère affine de l'image.*

Preuve. En éliminant algébriquement ω_{33} des équations (5), nous obtenons une fonction linéaire des éléments de $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\varphi}^\top[\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{11}, \omega_{22}]^\top = 0, \tag{8}$$

où $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]^\top$ est défini en (7). En introduisant les relations (3)(4) dans (8), nous obtenons :

$$-\varphi_1\kappa^2 u_0 - \varphi_2 v_0 + (\varphi_3\kappa^2 + \varphi_4) = 0. \tag{9}$$

L'équation (9) montre que le point principal, de coordonnées (u_0, v_0) dans le repère affine de l'image, se trouve sur la droite L, représentée par :

$$\mathbf{l}_C \sim [-\varphi_1\kappa^2, -\varphi_2, \varphi_3\kappa^2 + \varphi_4]^\top. \tag{10}$$

Nous démontrons que L coïncide avec la ligne des centres L_C. Puisque L contient (u_0, v_0), il suffit de montrer que L est orthogonal à la ligne de fuite L_∞^π de Π. Il est connu [1] que le vecteur $\mathbf{l}_\infty^\top$ des coefficients de L_∞^π correspond à la dernière ligne de $\mathbf{H}^{-1}$, d'où [8] :

$$\mathbf{l}_\infty^\top \sim [H_{21}H_{32} - H_{31}H_{22}, H_{31}H_{12} - H_{11}H_{32}, \cdots] \tag{11}$$

Dans le repère affine de l'image, il est équivalent de montrer que $\mathbf{l}_C$ et $\mathbf{l}_\infty$ sont orthogonaux par rapport à $\mathbf{C}^* \sim \mathrm{diag}(1/\kappa^2, 1, 0)$. Cette condition est vraie puisqu'il est aisé de vérifier que $\mathbf{l}_C^\top \mathbf{C}^* \mathbf{l}_\infty = 0$. En conclusion, le vecteur (10) représente les coefficients de la ligne des centres L_C par rapport au repère affine de l'image. ■

6 Méthode

Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré que l'équation de la ligne des centres L_C définie en (9) induit une contrainte linéaire sur le vecteur des inconnues $\mathbf{x} = \lambda\left[\kappa^2 u_0, v_0, \kappa^2, 1\right]^\top$, $\lambda \neq 0$. Ces paramètres

8. Nous omettons dans (11) le dernier coefficient car il n'intervient pas dans la suite.

sont supposés constants, donc le nombre de degrés de liberté est égal à 3, quel que soit le nombre n d'images. Ceci nous permet d'estimer u_0, v_0, κ dans une première étape à partir de $n \geq 3$ homographies. La deuxième étape consiste simplement à déterminer la focale associée à chaque caméra calibrée partiellement à partir des estimations de u_0, v_0, κ. Nous décrivons maintenant ces deux étapes.

6.1 Estimation de u_0, v_0, κ

Avec n homographies de matrices $\mathbf{H}^{(k)}$ associées aux n images, le problème est de trouver $\hat{\mathbf{x}}$ vérifiant :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|=1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\Phi \mathbf{x}\|^2 \right\} \quad \text{avec } \Phi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{(1)T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^{(n)T} \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

où Φ est la matrice de taille $n \times 4$ obtenue en empilant les vecteurs lignes $\boldsymbol{\varphi}^{(k)\top} = \left[\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \varphi_3^{(k)}, \varphi_4^{(k)}\right]$ calculés à partir des $\mathbf{H}^{(k)}$, $1 \leq k \leq n$.

Recherche d'une distance géométrique. Un des aspects très intéressant de notre formulation, utilisant la ligne des centres, est de donner une interprétation géométrique de la fonction de coût $\|\Phi \mathbf{x}\|^2$ comme somme de distances euclidiennes dans les images. En présence de bruit gaussien, nous savons qu'un critère de minimisation exprimé en termes de distances orthogonales dans les images est optimal au sens du maximum de vraisemblance (MLE) [1]. La proposition suivante nous permet de traduire le critère de minimisation de notre algorithme à partir de distances orthogonales. Sa démonstration (omise) est immédiate.

Prop. 5 *Soit $\bar{\Phi}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque ligne $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4]$ de Φ par $\bar{\boldsymbol{\varphi}}^\top = \frac{\boldsymbol{\varphi}^\top}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}$. Lorsque $\kappa = 1$ on a :*

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|=1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} d^2(\mathsf{m}_0, \mathsf{L}_C^{(j)}) \right\}, \qquad (13)$$

où $d(\mathsf{m}_0, \mathsf{L}_C)$ est la distance orthogonale du point principal m_0 à la ligne des centres L_C.

Cette propriété indique que l'erreur résiduelle correspond à la somme de n carrés de distances euclidiennes. En pratique, nous savons que $\kappa \approx 1$ et donc que la proposition 5 peut s'appliquer (*cf.* figure 2).

Le problème des moindres carrés (13) est résolu en calculant, à partir de la décomposition en valeurs singulières $\Phi = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$, la solution $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_*$, où $\mathbf{v}_*$ est la colonne de $\mathbf{V}$ associée à la plus petite valeur singulière. La complexité de l'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$ (soient $70n + 512$ *flops* en prenant en compte les normalisations de lignes de Φ, conformément à la proposition 5), où n est le nombre d'images.

À partir de la solution $\hat{\mathbf{x}}$, il est très simple de calculer u_0, v_0, κ à partir de (3) et (4).

6.2 Estimation de f

Pour chaque homographie $\mathbf{H}$, on définit $\mathbf{G} = \mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{H}$, où $\mathbf{A}_c$ est la matrice définie en (1) ayant pour éléments u_0, v_0, κ. L'image de la conique absolue devient $\mathbf{A}_c^\top \boldsymbol{\omega} \mathbf{A}_c \sim \operatorname{diag}(1, 1, f^2)$. Le problème consiste alors à résoudre, pour $F = f^2$, l'équation matricielle suivante $\Psi\,[F, 1]^\top \approx 0$, où :

$$\Psi = \begin{bmatrix} G_{12}^2 + G_{21}^2 - G_{12}^2 - G_{22}^2 & G_{31}^2 - G_{32}^2 \\ G_{11}G_{12} + G_{21}G_{22} & G_{31}G_{32} \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Soit $\bar{\Psi}$ la matrice obtenue en normalisant les colonnes Ψ_i de Ψ de telle façon que $\|\bar{\Psi}_i\| = 1$ et soit $\mathbf{Q} = \bar{\Psi}^\top \bar{\Psi}$. La solution explicite $\hat{F}$ au sens des moindres carrés peut être directement calculée et nous obtenons :

$$\hat{F} = \alpha \frac{\lambda - Q_{11}}{Q_{12}},$$

où $\alpha = \frac{\|\Psi_1\|}{\|\Psi_2\|}$, $\lambda = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} - \sqrt{(Q_{11} - Q_{22})^2 + 4Q_{12}^2})$. Cette étape de l'algorithme nécessite environ 60 flops par homographie.

6.3 Algorithme

Nous résumons ci-dessous les différentes étapes de l'algorithme de calibrage plan pour une caméra en mouvement à focale variable.

1. Acquérir plusieurs vues d'un plan Π pour n différentes orientations de la caméra avec éventuellement des variations de focale, en tenant compte du fait que la ligne des centres est orthogonale à la ligne de fuite associée à Π.

2. Estimer les n matrices $\mathbf{H}$ représentant les homographies du plan Π vers les images.

3. Estimer les paramètres internes constants de la caméra :

   – Construire la matrice $\bar{\Phi}$ formée des n vecteurs lignes $\boldsymbol{\varphi}$ calculés dans (7) à partir des matrices $\mathbf{H}$, puis normalisés en $\bar{\boldsymbol{\varphi}}^\top$ comme indiqué dans la proposition 5 ,

   – Calculer $\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|=1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|\bar{\Phi}\mathbf{x}\|^2 \right\}$ comme expliqué en 6.1,

   – En déduire u_0, v_0, κ à partir de (3) et (4).

4. Estimer la focale f comme expliqué en 6.2.

7 Singularités

L'intérêt de la formulation basée sur la ligne des centres est qu'elle permet de fournir une justification géométrique aux singularités inhérentes au problème du calibrage plan, c.-à-d. lorsque la solution n'existe pas ou est indéterminée.

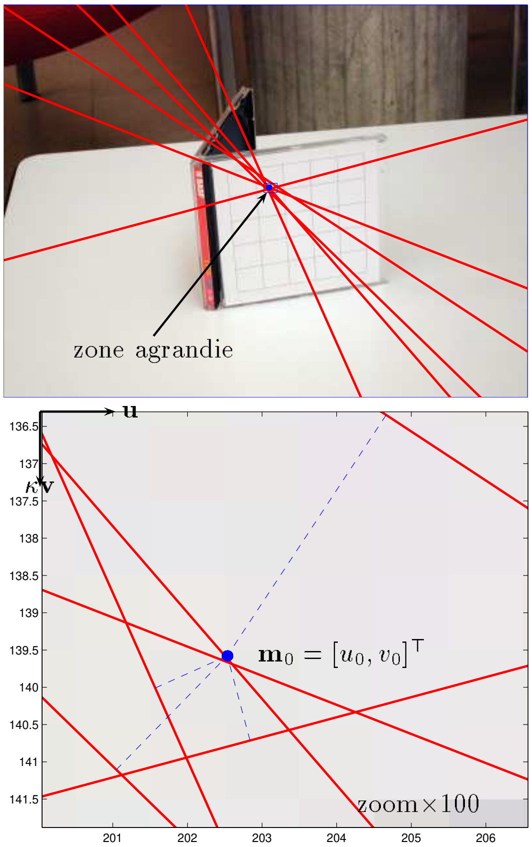

FIG. 2 – *(a) Les lignes des centres de 6 images d'une grille* 6×6*, collée sur un boîtier de CD, ont été calculées à partir des homographies associées et affichées dans la première image. (b) En agrandissant avec un facteur 100 la zone indiquée par le rectangle, on représente le problème de l'estimation du point principal* m_0 *et du rapport d'échelle* κ *comme étant celui de la la minimisation de la somme des distances orthogonales de* m_0 *aux lignes des centres, dans un repère "*κ*-corrigé" de l'image.*

Ces singularités peuvent apparaitre aux deux niveaux de notre méthode, c.-à-d. lors de l'estimation des paramètres constants (niveau 1) et de la focale (niveau 2). Les déplacements "critiques" de la caméra ont déjà fait l'objet d'une étude très complète dans [8] mais nous montrons que le cadre géométrique que nous avons introduit nous permet de faire quelques justifications. Nous décrivons ici les plus significatives.

1. Des singularités existent lorsque les lignes de fuite sont parallèles dans deux des trois images requises du plan Π. Ceci se produit lorsque le mouvement de la caméra est soit une translation, soit une rotation d'axe parallèle à Π, soit une rotation d'axe perpendiculaire à Π ou une composition des ces déplacements. Afin d'éviter ces singularités, il est nécessaire que les lignes de fuite dans les images aient des orientations différentes. Dans la majorité des cas, on peut remarquer que l'ajout de rotations autour de l'axe des Z de la caméra (axe optique) améliore nettement les résultats.
2. D'après le système (14), il n'y a pas de solution pour f^2 dans deux cas : [i] $G_{31} = \pm G_{32}$ [ii] $G_{31} = 0$ ou $G_{32} = 0$. Ces deux cas correspondent à des orientations particulières du repère associé à Π relativement au repère de la caméra. Il n'est pas nécessaire de les décrire puisqu'on peut facilement les éviter en appliquant une rotation autour de l'axe des Z du repère de Π (c.-à-d. autour de la normale à Π). À titre d'exemple, [ii] est vérifié lorsque l'axe des u (resp. des v) du repère de l'image est parallèle à l'axe des X (resp. des Y) du repère de Π : les points de fuite correspondants sont alors à l'infini.

8 Expériences réalisées

8.1 Simulation

Nous avons comparé notre méthode de calibrage plan basée sur la Ligne des Centres (LC) avec la méthode de Sturm et Maybank (SM).

Nous avons simulé une configuration de 8 caméras observant une mire plane, sous la forme d'une grille carrée $10cm \times 10cm$ contenant $11 \times 11 = 121$ points. La résolution de l'image est de 512×512 pixels. Tous les paramètres internes de la caméra sont inconnus. Les paramètres $u_0 = 256$, $v_0 = 256$, $\kappa = 1$ sont supposés constants. Parmi les 8 caméras, nous distinguons 2 sous-ensembles de 4 auxquels nous associons deux focales différentes (en pixels), soit $f_{\min} = 800$ et $f_{\max} = 1800$. En ce qui concerne les paramètres externes, pour chaque caméra nous tirons aléatoirement la position de son centre optique dans une sphère dont le centre est le centre de la grille et le rayon est approximativement égal à $50cm$. Les axes optiques de chacune des caméras passent aléatoirement par le centre de la mire (avec une déviation de $\pm 2.5cm$ dans le plan Π qui la contient). Des rotations aléatoires, de moyenne nulle et d'écart-type 2π, sont ajoutées autour des axes optiques. Cette remarque est importante car de telles rotations vont permettre des mouvements éloignées des configurations critiques telles que décrites au paragraphe 7. Une exemple d'une telle configuration d'images est donnée dans la figure 3. Les angles entre le plan Π et les différents axes optiques ont des valeurs prises aléatoirement dans l'intervalle $[30°, 70°]$.

La comparaison des deux méthodes porte sur les erreurs relatives au calcul des paramètres internes de la caméra à différents niveaux de bruit. Nous considérons un bruit gaussien additif $\mathcal{N}(0, \sigma)$, de moyenne 0 et d'écart-type σ, pour σ variant de 0.5 à 3 pixels, avec un pas de 0.5. Dans une première simulation [S_1], nous avons pertubé les coordonnées des points de la grille projetés dans chacune des 8 images en ajoutant un bruit $\mathcal{N}(0,\sigma)$. Nous calculons les erreurs absolues (en pixels) sur les coordonnées (u_0, v_0) du point principal et les erreurs relatives sur le rapport d'échelle κ et sur les différentes focales $f^{(j)}$, $1 \leq j \leq 8$. Les matrices $\mathbf{H}^{(j)}$ représentant les homographies du plan Π vers les images $\mathcal{I}^{(j)}$ sont estimées à partir des seuls points visibles, en utilisant l'algorithme DLT (Direct Linear Transformation) avec normalisation, tel qu'il est décrit dans [1]. Pour chaque niveau de bruit, 1000 tirages indépendants ont été effectués et nous présentons les moyennes de ces erreurs par des tracés en trait plein dans la figure 3. D'après ces tests, nous pouvons dire, en faveur de la méthode *LC*, que nous obtenons un gain de précision lorsque $\sigma = 1$ d'environ 20% pour les coordonnées du point principal et de 12% pour le rapport d'échelle κ. Dans une seconde simulation [S$_2$], nous avons fait les mêmes hypothèses que dans [S$_1$] mais en pertubant les coordonnées des points avec un bruit $\mathcal{N}(0,\sigma)$ pour le sous-groupe des 4 images associées à $f_{\min}$ et un bruit $\mathcal{N}(0,2\sigma)$ pour le sous-groupe des 4 images associées à $f_{\max}$. Les moyennes des erreurs obtenues correspondent aux tracés en pointillés dans la figure 3. D'après ces tests, le gain de précision, lorsque $\sigma = 1$, passe à 50% pour les coordonnées du point principal et 25% sur κ. En fait, il semble que la méthode de Sturm et Maybank privilégie davantage les images associées à focale $f_{\max}$ (qui sont plus bruitées que celles associées à $f_{\min}$ dans la simulation [S$_2$]), ce qui vérifie expérimentalement la proposition 1.

8.2 Application

La synthèse d'images virtuelles photo-réaliste, à partir d'images réelles, est un domaine qui a suscité beaucoup d'intérêt. Elle a des avantages : faible dépendance entre qualité du rendu et complexité de la scène (beaucoup de détails n'ont pas besoin d'être explicités), modélisation géométrique et rendu simplifiés, processus de conception plus facile... Même si le cadre géométrique des algorithmes de synthèse d'une nouvelle vue a l'avantage d'être projectif, un calibrage euclidien de la caméra est nécessaire pour exprimer la position et l'orientation de la caméra virtuelle. La scène est composée d'un boîte d'environ $10cm \times 10cm \times 10cm$ et d'une mire de dimension connue ($6.4cm \times 6cm$) composée de 30 points. L'acquisition a été faite à l'aide d'un appareil photo numérique NIKON Coolpix ® 800 disposé à environ $50cm$ de la scène. Nous avons pris 4 images, à différents niveaux de zoom (voir la figure 4). Nous avons calibré la caméra à partir des 4 images de la mire en utilisant notre algorithme basé sur la ligne des centres. Pour la synthèse d'une nouvelle vue, nous n'utilisons que les images 2 et 4. Nous construisons de façon semi-automatique des couples de points homologues par désignation manuelle dans l'image 2 et mise en correspondance automatique dans l'image 4. Nous construisons ensuite un maillage triangulaire sur ces points. À partir de nouveaux points de vue dont la spécification est possible grâce au calibrage, un nouveau maillage est prédit. Les textures sont ensuite transférées en respectant les contraintes de visibilité lors de l'affichage des triangles (voir la figure 4).

9 Conclusion

Nous avons abordé le problème du “calibrage plan” d'une caméra en mouvement à focale variable, c.-à-d. le calcul de ses paramètres internes à partir d'images d'un plan dont la géométrie est parfaitement déterminée. Un algorithme minimisant des distances algébriques par des méthodes non itératives a été récemment proposé dans [8]. Il est très simple à mette en oeuvre, mais sa complexité est en $\mathcal{O}(n^3)$, où n est le nombre d'images. De plus, nous avons remarqué que cette méthode semble privilégier de façon arbitraire les images associées à des grandes focales. Pour pallier à ces inconvénients, nous proposons un nouvel algorithme rapide, dont la complexité est en $\mathcal{O}(n)$, basé sur la “ligne des centres”, qui décompose le problème en deux sous-problèmes, indépendamment du nombre d'images. La contribution principale de cet article concerne le premier sous-problème qui consiste d'abord à calculer les paramètres constants de la caméra. La solution est obtenue en minimisant un critère basé sur des distances orthogonales, dans les images, exprimées linéairement par rapport aux inconnues.

Nous avons donné une interprétation géométrique de la contrainte de la “ligne des centres”, conformément à un théorème de Poncelet. À condition d'avoir suffisamment d'orientations différentes de la ligne de fuite du plan observé, nous avons montré une amélioration de l'estimation de tous les paramètres, avec une complexité de calcul très faible. Notre approche a bien sûr des limites. Nous faisons l'hypothèse que le point principal ne se déplace pas lorsque la focale varie, ce qui est faux en pratique. Néammoins, pour certaines applications comme celle que nous avons présenté, cette hypothèse peut être conservée sans trop d'inconvénient. Nous devrions aussi considérer des coefficients de distorsion optique non nuls dans le modèle de la caméra, mais l'aspect linéaire de notre système serait perdu. Enfin si nous recherchons un critère optimal, nous devrons considérer la nature statistique du bruit dans les données, c'est-à-dire dans les matrices représentant les homographies. De plus, une étape de correction des données devra être intégrée afin d'améliorer la méthode. En ce qui concerne les perspectives qu'offrent notre approche, nous étudions actuellement une mise en œuvre récursive (basée sur les équations de Kalman par exemple) permettant de considérer le point principal comme paramètre variable.

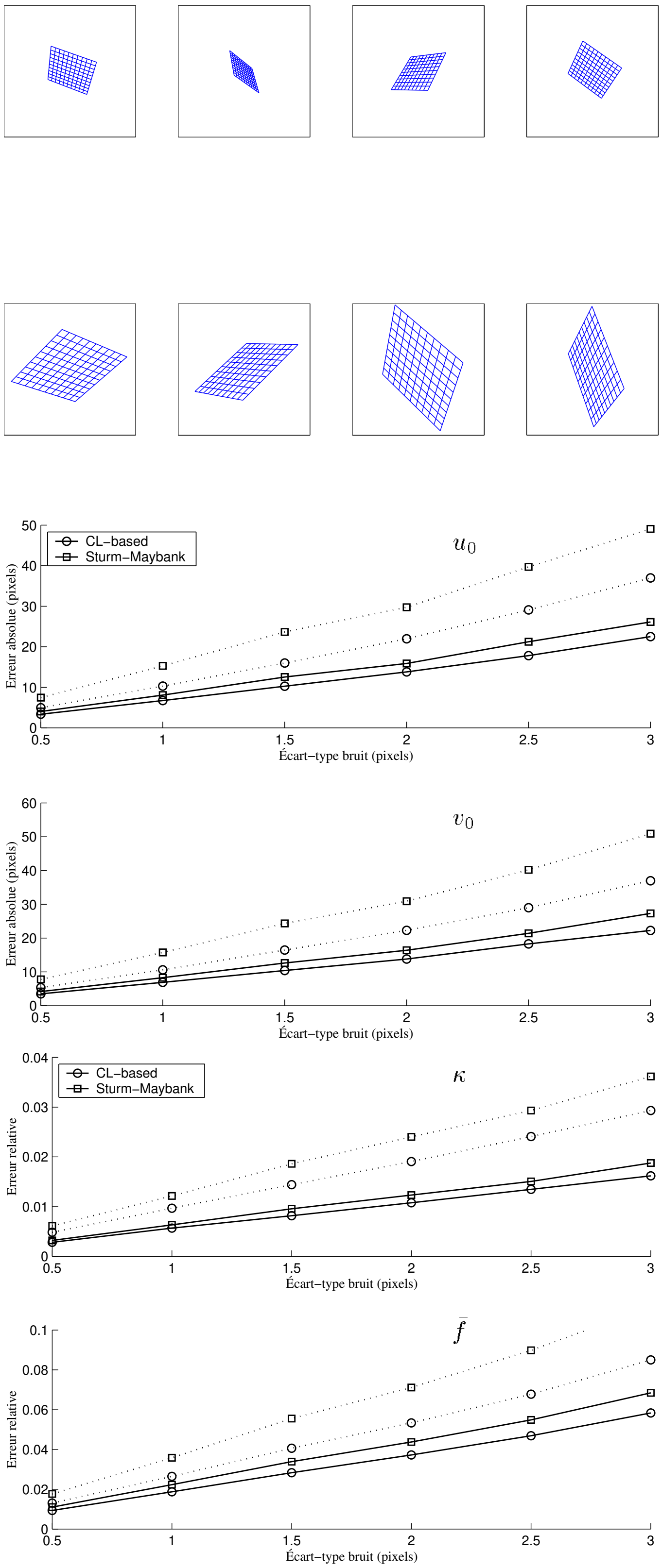

FIG. 4 – *Calibrage de l'appareil numérique NIKON Coolpix 800 à partir de quatre vues prises à différents valeurs de zoom. La méthode est basée sur la ligne des centres (tracée dans chaque image) intégrant le rapport d'échelle (la croix indique le point principal estimé). Application à la synthèse de nouvelles vues à partir d'images réelles. Les orientations relatives aux prises de vue correspondent à un cas "favorable" à l'estimation, selon l'interprétation géométrique du critère.*

FIG. 3 – *Simulations montrant que la méthode de calibrage plan basée sur la ligne des centres (LC) améliore les résultats par rapport à la méthode de Sturm et Maybank (SM), pour une complexité moindre. La simulation indiquée par les pointillés met en évidence que (SM) privilégie davantage les images associées à des grandes focales (ici plus bruitées que celles associées à des petites focales).*

Références

[1] R. Hartley et A. Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

[2] J.-M. Lavest, M. Viala et M. Dhome. *Quelle précision pour une mire d'étalonnage ?* In Traitement du Signal, volume 16 numéro 3, pages 241-254, 1999.

[3] D. Liebowitz, A. Criminisi et A. Zisserman.*Creating architectural models from images.* In Proc. EuroGraphics, volume 18, pages 39-50, septembre 1999.

[4] D. Liebowitz et A. Zisserman.*Combining scene and auto-calibration constraints.* In Proc. 7th International Conference on Computer Vision (ICCV'99), Kerkyra, Grèce, septembre 1999.

[5] E. Malis et R. Cipolla. *Self-calibration of zooming cameras observing an unknown planar structure.* In Proc. 15th International Conference on Pattern Recognition (ICPR'00), volume 1, pages 85-88, Barcelone, Espagne, septembre 2000.

[6] C. Matsunaga et K Kanatani. *Calibration of a moving camera using a planar pattern: optimal computation, reliability evaluation, and stabilization by model selection.* In Proc. 6th European Conference on Computer Vision (ECCV'00), Dublin, Irlande, juillet 2000.

[7] J.V. Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures.* Imprimerie de Mallet-Bachelier, Paris, 1862.

[8] P.F. Sturm et S.J. Maybank. *On plane-based camera calibration: a general algorithm, singularities, applications.* In Proc. Computer Vision and Pattern Recognition Conference (CVPR'99), pages 432–437, Fort Collins, Colorado, USA, juin 1999.

[9] B. Triggs. *Autocalibration from planar scenes.* In Proc. 5th European Conference on Computer Vision (ECCV'98), pages 89–105, Friburg, Allemagne, juin 1998.

[10] B. Triggs. *Géométrie d'images multiples.* Thèse de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, novembre 1999.

[11] M. Wilczkowiak, E. Boyer et P. Sturm. *Camera calibration and 3D reconstruction from single images using parallelepipeds.* In Proc. 12th International Conference on Computer Vision (ICCV'2001), Vancouver, Canada, 2001.

[12] Z. Zhang. *Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting.* Rapport de recherche INRIA N°2676, octobre 1995.

[13] Z. Zhang. *A flexible new technique for camera calibration.* IEEE Transactions of Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI), volume 22, numéro 11, pages 1330-1334, novembre 2000.