Chapitre 2

Représentations en logique classique

2.1. Introduction

Ce chapitre présente les approches de représentation du temps et de l'espace exprimées dans des formalismes logiques classiques, essentiellement la logique des prédicats (pour certains formalismes en logique modale propositionnelle cf. 3). La plupart des représentations sont des constructions qui reposent sur des théories du premier ordre à base de relations d'ordre B. La représentation de l'espace utilise notamment une famille d'ordres partiels connus aussi sous le nom de méréologie 2.3.1. Le raisonnement sur ces représentations sera présenté au chapitre 5. On verra aussi les liens étroits entre ces théories du premier ordre et certaines approches algébriques dans le chapitre 7. Le présent chapitre présentera ces théories en insistant sur les différences suivantes :

– différences des domaines : théories du temps, théories de l'espace, théories du mouvement en montrant les fondements communs ;

– différences ontologiques : chaque domaine étant réifié, quels sont les objets primitifs considérés : ponctuels (instants, points de l'espace ou de l'espace-temps) ou étendus (intervalles, régions de l'espace ou de l'espace-temps) ;

– différences entre les propriétés d'inclusion, de topologie, et au-delà propriétés géométriques en général (orientation, distance, forme).

Nous commencerons par l'étude des représentations du temps 2.2, puis de celles de l'espace dans ses propriétés méréologiques et topologiques 2.3, enfin géométriques 2.4. Pour finir nous verrons les travaux qui abordent la représentation conjointe des

---

Chapitre rédigé par Philippe MULLER et Vincent DUGAT.

notions de temps et d'espace à travers le mouvement. On suppose connus la logique des prédicats et les notations (cf. Annexe B). On suppose également connue la notion d'ordre (cf. Annexe G).

2.2. Le temps : instants et intervalles

Les représentations du temps en logique classique seront ici divisées suivant les objets primitifs qu'elles considèrent, soit des "instants", points dans le temps sans durée, soit des objets étendus, "intervalles de temps".

Il faut distinguer aussi ontologiquement plusieurs sortes d'entités "temporelles" centrales à toute théorie du temps et du changement. Nous avons d'une part des "temps" absolus (instants ponctuels ou intervalles de temps ayant une durée) qui permettent de dater et d'autre part des "états" (situation du monde stable par rapport à une propriété) et des événements (qui provoquent un changement de la situation du monde). Cette distinction est l'analogue de la différence entre espace absolu et objets occupant l'espace.

On peut distinguer alors trois grandes méthodes pour la modélisation du temps et du changement d'un point de vue logique : il existe d'une part une tradition de *tense logics* qui considère des opérateurs temporels, introduit généralement comme des opérateurs modaux : par exemple l'opérateur F est interprété comme suit : Fp signifie "il existe un moment dans le futur où p est vrai" ; les propriétés de la relation d'accessibilité des mondes dans les modèles de Kripke déterminent alors la structure temporelle résultante sur l'ordre sous-jacent.

Un courant assez populaire en planification est par contre de réifier les instants ou les intervalles de temps sur lesquels des propositions logiques sont valides ; c'est le cas du calcul des situations [MCC 69], de la théorie de l'action de [ALL 84] et de ses successeurs. Par exemple, le langage utilisé est formé d'expression du type $\mathsf{Holds}(champion(france, coupe\_du\_monde), I_{98})$ pour indiquer que la proposition $champion(france, coupe\_du\_monde)$ est valide sur l'intervalle I_{98}. Cette imbrication d'une logique dans une autre, qui implique une forme de quantification sur des propositions, caractérise aussi les approches du changement de McDermott [MCD 82] et dans une moindre mesure celle du calcul des événements de Kowalski et Sergot [KOW 86], et a été critiquée notamment par [GAL 91] pour la complexité qu'elle introduit dans le raisonnement.

Un autre genre d'approche destiné à éviter ces reproches est caractérisée par une réification des entités temporelles en les introduisant comme arguments des prédicats dans une théorie du premier ordre. On peut alors traduire "le but en or a été marqué à la 114e minute par Laurent Blanc" par $marque(LB, but, t)$ où t correspond à l'instant où le but a été marqué. On pourrait aussi introduire des intervalles de temps sur lesquels une proposition est vraie, ou même une réification des événements que l'on veut caractériser, à la façon de Davidson. Dans un article classique [DAV 67] propose en effet de représenter la phrase :

John buttered a toast at midnight with a knife.

Par la formule $buttered(john, toast, e) \ \wedge \ at(midnight, e) \ \wedge \ with(knife, e)$ ce qui permet d'inférer séparément les caractéristiques de l'événement, par exemple que *John buttered a toast at midnight.* Cette dernière approche à l'avantage d'introduire explicitement des individus ayant une extension temporelle et de rester dans un cadre de logique du premier ordre, et nous nous focaliserons par la suite plus sur ce genre d'approches.

La caractérisation des événements est une source de débat bien au-delà de la communauté I.A. et du présent chapitre. Nous verrons les éléments essentiels d'une théorie temporelle : choix ontologiques et choix des relations pertinentes, le tout dans une approche en logique du premier ordre. Nous verrons également les ponts qui existent entre les diverses approches. Pour plus de précisions, les articles qui offrent un panorama sur les théories du temps sont légion, tant d'un point de vue plutôt logique [LAN 91, BEN 95c, BEN 83a] que d'un point de vue I.A. [GAL 95a]. Les aspects liés à la référence temporelle dans le langage naturel ne seront pas étudiés ici (voir [BRA 90, KAM 93, STE 97]) mais il est évident que les liens sont étroits entre les préoccupations des communautés logique, linguistique et IA. Il faut noter aussi que la question du choix des entités temporelles a des conséquences computationnelles, certaines structures ayant des propriétés calculatoires plus intéressantes que d'autres.

2.2.1. *Logiques temporelles d'instants*

Pour pouvoir comparer les structures temporelles pour entités étendues dans le temps (événements ou intervalles) il faut considérer les propriétés courantes des ordres caractérisant diverses théories temporelles à base d'instants. On parlera d'ordre sous-jacent à une représentation d'intervalles en parlant de la structure d'instants isomorphe sous-jacente si l'on considère un intervalle de temps comme un ensemble de points. On verra en fait précisément section 2.2.3 quels sont les liens que l'on peut faire entre les diverses représentations. Les structures d'instants sont des structures du type $\mathcal{I} = \langle T, < \rangle$ où T est un ensemble d'instants et où $<$ est un ordre partiel strict (irréflexif, transitif) qui peut avoir les propriétés supplémentaires suivantes :

Linéarité

$$\forall x \forall y \quad (x < y \ \vee \ y < x \ \vee \ y = x)$$

Succession

$(\forall x \exists y \;\; y < x) \;\wedge\; (\forall x \exists y \;\; x < y)$ (correspond à l'infinité vers le passé et le futur)

Densité

$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z \; x < z < y)$

Ordre Discret

$$\forall x \forall y \; ((x < y \rightarrow \exists z (x < z \;\wedge\; \neg \exists u (x < u < z)))$$
$$\wedge \; (x < y \rightarrow \exists z (z < y \;\wedge\; \neg \exists u (z < u < y))))$$

Les deux derniers axiomes sont évidemment incompatibles. L'axiome de succession est généralement admis pour toutes les théories de sens commun du temps. Un bon nombre de celles-ci supposent la linéarité de l'ordre sous-jacent, sauf les approches qui considèrent le futur comme indéterminé et modélisable par une structure munie de branches représentant les alternatives possibles à partir d'un point (le calcul des situations est un exemple typique), ou bien celles qui considèrent le passé comme mal connu avec diverses histoires envisageables.

Il faut noter que la théorie des ordres munis de la linéarité, la succession et la densité d'une part, et les théories des ordres munis de la linéarité, la succession et la discrétion d'autre part sont syntaxiquement complètes (tout ce que l'on peut énoncer dans ces théories est soit un théorème, soit la négation d'un théorème). Un modèle canonique de la première est l'ensemble des rationnels, un modèle canonique de la seconde est l'ensemble des entiers relatifs[1]. Dans la limite des ordres linéaires il faut noter que les réels sont aussi un modèle des ordres denses, mais qu'ils ne sont pas complètement caractérisés par un tel ordre, ni par aucune théorie du premier ordre.

2.2.2. *Logiques d'intervalles*

Quand on passe aux représentations temporelles à base d'intervalles le choix devient bien plus vaste que pour les instants.

2.2.2.1. *Structures basées sur inclusion ou recouvrement*

D'après [BEN 83a] une structure d'intervalles est de la forme $\mathcal{T} = \langle I, \sqsubseteq, < \rangle$. Les relations d'inclusion ($\sqsubseteq$) et de précédence peuvent avoir les propriétés suivantes (les noms des axiomes sont repris et traduits de van Benthem)[2] :

1. cf. [BEN 83a].

2. Pour alléger la présentation, les variables libres doivent être considérées comme universellement quantifi ées dans ce qui suit.

Transitivité $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z \to x \sqsubseteq z$

Réflexivité $x \sqsubseteq x$

Antisymétrie $x \sqsubseteq y \sqsubseteq x \to x = y$

Liberté1 $(\forall z\ (z \sqsubseteq x \to z\sigma y)) \to x \sqsubseteq y$

avec une définition du recouvrement temporel comme suit :
$x\sigma y \triangleq \exists u\ (u \sqsubseteq x\ \wedge\ u \sqsubseteq y)$

Orientation $\forall x \forall y \exists u\ (x \sqsubseteq u\ \wedge\ y \sqsubseteq u)$

Remarquons que l'inclusion d'intervalles est un cas de méréologie et que les axiomes pour l'inclusion temporelle se rapprochent de ce que l'on peut trouver pour la relation P (cf. section 2.3.1). On peut donc définir les opérateurs d'union et d'intersection et poser leur existence dans les mêmes cas que pour la méréologie spatiale[3]. De même, on peut se poser la question de l'atomicité ou non des intervalles.

La relation de précédence $<$ peut avoir des propriétés analogues à la précédence portant sur des instants : transitivité, irréflexivité, et succession. La linéarité ne peut s'exprimer de façon similaire, mais on peut la modifier pour obtenir quelque chose d'analogue. De même la notion de densité doit être revue :

Linéarité* $x < y\ \vee\ y < x\ \vee\ x\sigma y$

Densité* $\forall x \exists y_1 \exists y_2\ (x = y_1 + y_2)$ (avec la définition méréologique de la somme)

Dans l'absolu, la somme est une somme méréologique standard, mais pour le temps elle est souvent remplacé par la fermeture convexe de la somme.

Les liens entre $<$ et $\sqsubseteq$ peuvent maintenant être précisés :

Incompatibilité
$x < y \to \neg x\sigma y$

3. Curieusement, van Benthem considère que l'union doit être l'union convexe des intervalles, alors même que la convexité est posée à part des autres axiomes. En fait il semble partager avec la plupart des représentations ayant cours à l'époque le postulat que les intervalles ne sont manipulables pratiquement que s'ils sont convexes.

Monotonie

$(x < y \rightarrow \forall u \; (u \sqsubseteq x \rightarrow u < y))$ (monotonie gauche)

$(x < y \rightarrow \forall u \; (u \sqsubseteq y \rightarrow x < u))$ (monotonie droite)

Ordre sur l'union

$(x < y \rightarrow \forall z \; (z < y \rightarrow x + z < y)) \;\wedge\; (y < x \rightarrow \forall z \; (y < z \rightarrow y < x + z))$

Convexité

$x < y < z \rightarrow \forall u \; ((x \sqsubseteq u \;\wedge\; z \sqsubseteq u \rightarrow y \sqsubseteq u))$

Liberté2

$(\neg x < y) \rightarrow \exists u \exists v \; (u \sqsubseteq x \;\wedge\; v \sqsubseteq y \;\wedge\; (\forall z \forall w ((z \sqsubseteq u \;\wedge\; w \sqsubseteq v) \rightarrow \neg z < w)))$

La convexité a été longtemps une propriété supposée nécessaire à une théorie temporelle, avant que l'on commence à l'abandonner pour modéliser des entités plus générales (cf section 2.2.2.4). Le dernier axiome exprime que deux intervalles qui ne se précèdent pas l'un l'autre peuvent avoir des sous-intervalles qui se précèdent mais qu'ils doivent avoir des sous-intervalles qui n'ont plus cette propriété. Les axiomes de "liberté" sont appelés axiomes "témoins" (witness) par Landman [LAN 91], car ils affirment l'existence d'intervalles qui permettent de faire le lien entre une structure d'intervalles et une structure de points correspondant à un ordre sous-jacent (cf section 2.2.3).

Il faut enfin noter que des axiomatisations presque équivalentes (à l'exception de la convexité des périodes temporelles) peuvent être obtenues à partir de la relation de recouvrement et de celle de précédence, en posant (cf [KAM 79, AUR 93])

Symétrie de σ :	$x\sigma y \rightarrow y\sigma x$	
Réflexivité de σ :	$x\sigma x$	
Incompatibilité :	$x < y \rightarrow \neg x\sigma y$	
Transfert :	$(x < y \;\wedge\; y\sigma z \;\wedge\; z < t) \rightarrow x < t$	
Linéarité :	$x < y \;\vee\; x\sigma y \;\vee\; y < x$	(seulement chez Kamp)
L'inclusion :	$x \sqsubseteq y \triangleq \forall z \; ((z\sigma x \rightarrow z\sigma y) \;\wedge\; (z < y \rightarrow z < x) \;\wedge\; (y < z \rightarrow x < z))$	

Cette axiomatisation retrouve alors pour l'inclusion les propriétés d'ordre partiel et de monotonie.

2.2.2.2. *Structures basées sur une relation de "contact" temporel ("meet")*

Les structures du temps d'Allen [ALL 83, ALL 85, ALL 94] sont des théories de sens commun très populaires en IA et au-delà et ont été développées indépendamment de la tradition logique des logiques d'intervalles (comme l'a noté Galton, elles sont à rapprocher de la logique de [HAM 71]). Ce calcul d'intervalles a pour origine la nécessité de raisonner sur des processus ayant une certaine durée, ce qui n'était pas permis par les théories de l'action de l'époque en I.A. (le calcul des situations, ou les formalismes dédiés à la planification comme STRIPS). Dans cette optique Allen ne considère que des intervalles et ignore les instants comme étrangers au sens commun (cette opinion se nuancera par la suite dans [ALL 89]). Toutes les relations intuitives souhaitables pour pouvoir parler d'ordre temporel sont dérivées d'une unique primitive “meets” qui exprime que deux intervalles se touchent sans se recouvrir. Cette relation est axiomatisée comme suit (nous citons les axiomes de [ALL 94], en notant $x||y$ pour $meets(x, y)$ et $x||y||z$ pour $meets(x, y) \ \wedge \ meets(y, z)$) :

1) $(x||y \ \wedge \ x||z \ \wedge \ t||y) \rightarrow t||z$

Les intervalles définissent une classe d'équivalence des intervalles qui les rencontrent.

2) $[\forall x \forall z (x||y||z \ \wedge \ x||u||z)] \rightarrow u = y$

Deux intervalles qui rencontrent les mêmes intervalles sont égaux.

3) $\forall x \exists y \exists z \ (x||y \ \wedge \ z||x)$

Le temps est infini et les intervalles sont finis.

4) $x||y||z||t \rightarrow \exists u \ (x||u||t)$

Ceci introduit des intervalles “sommes” de deux intervalles y et z qui se rencontrent.

5) $(x||y \ \wedge \ u||v) \rightarrow (x||v \oplus \exists z \ (x||z||v) \oplus \exists z \ (u||z||y))$

Cet axiome exprime la linéarité de l'ordre sous-jacent : pour deux paires d'intervalles qui se rencontrent, soit le “point” de rencontre est le même, soit il existe un intervalle entre ces deux points de rencontre (et l'un de ces points est avant l'autre).

A partir de là, il est possible de définir un ensemble exhaustif de relations entre des intervalles convexes, qui sont illustrées figure 2.1. Cet ensemble de relations constitue un “standard” en I.A., et est utilisé dans de nombreux domaines (traitement du temps en langage naturel, planification, raisonnements temporels divers). La complexité du raisonnement sur l'ensemble des 13 relations (qui forme une algèbre) a été étudié de façon intense [LIG 90, LAD 87, NEB 94] et ce modèle est un bon point de comparaison pour tout formalisme temporel. Les aspects liés au raisonnement seront étudiés plus en détail au chapitre 5.

Sa caractéristique principale par rapport aux logiques temporelles présentées précédemment est (en dehors de son économie de primitives) l'indétermination par rapport à la densité. Cette théorie est en effet incomplète, et c'est pour cela que les raisonnements automatiques sur cette base sont restreints à quelques types d'inférences, comme la cohérence d'un ensemble de relations, ou la composition limitée de relations de base. Cette théorie est aussi la base d'une théorie plus générale de l'action et

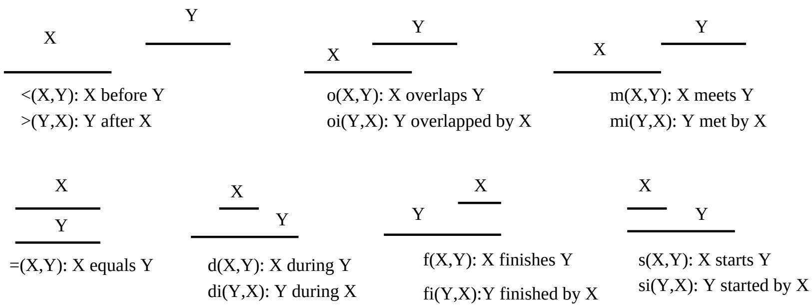

Figure 2.1. *Les relations de Allen pour le temps.*

du changement très utilisée, mais également soumise à de nombreuses critiques, qui ont conduit leurs auteurs à ajouter la notion d'instant à la notion de période temporelle.

2.2.2.3. *Structures hybrides*

Certains auteurs ont en effet noté certains inconvénients du modèle d'Allen. En premier lieu, l'impossibilité de représenter des événements "instantanés" (un choc par exemple) qui semblent constituer une partie importante des événements physiques que nous pouvons observer. L'expression des actions via des intervalles d'Allen les forcent en effet à prendre un certain temps, et on ne peut pas exprimer un état de transition entre intervalles. L'objectif avoué des auteurs est justement de ne pas avoir à décider des valeurs de vérité de propositions au moment de la transition entre deux états. Parmi les auteurs qui ont critiqué la théorie vis à vis de ces situations, on peut noter [VIL 94, MA 94, GAL 90], et leur proposition a été alors d'incorporer des instants aux intervalles, et de définir une théorie de l'action hybride. Dans [ALL 89], Allen et Hayes proposent de représenter certains événements par des intervalles indivisibles qui correspondraient à de tels événements instantanés. Cette façon de faire paraît assez peu intuitive dans certains cas ; prenons l'exemple suivant, adapté d'un exemple de Galton : on considère une balle lancée en l'air, et qui touche un plafond avant de redescendre. On peut représenter la situation on disant que la balle monte sur un intervalle I_1, descend sur un intervalle I_2 et que les deux sont en relation $meet$, mais alors on perd l'information que la balle touche le plafond. Et il paraît assez peu intuitif de dire que la balle touche le plafond pendant un intervalle de temps, même indivisible. Ce qui est en jeu ici, c'est une conception *continue* des phénomènes physiques. Galton prend aussi un autre exemple : si on admet que les objets en mouvement occupent des positions dans l'espace, on ne peut pas affirmer que les objets occupent ces positions successives sur des intervalles de temps. Soit on rejette la notion de position instantanée, soit on admet que ces positions sont occupées pendant un instant.

2.2.2.4. *Intervalles et connexité*

Un autre point important pour la représentation de situations spatio-temporelles est le problème de la connexité des entités que l'on considère. Au niveau spatial il y a peu de raisons de se restreindre à des régions connexe, si ce n'est pour des raisons d'efficacité de calcul dans certains cas particuliers. La plupart des modèles temporels portant sur des intervalles fait cependant l'hypothèse de convexité, ce qui dans le cas du temps revient à la connexité. L'ensemble des treize relations d'Allen notamment, n'est exhaustif que pour des intervalles convexes. Cette restriction a été levée par de nombreux travaux qui s'attachent à la modélisation de phénomènes essentiellement non convexes d'un point de vue temporel, soit des processus informatiques (dont on veut synchroniser l'alternance, cf [LAD 87]), soit des phénomènes itératifs tels que l'on peut en trouver en langage naturel, comme *Davidson se beurre une tartine tous les soirs à minuit*, cf par exemple [PIA 96], soit des processus non continus, comme la lecture d'un livre. On peut alors exprimer un grand nombre de relations entre événements non convexes (cf. [LAD 87] pour une typologie) et certaines propriétés computationnelles ont été étudiées sur quelques classes de relations [LIG 90, LIG 91], [MOR 91].

2.2.2.5. *Autres propriétés liées aux événements et aux intervalles*

Parmi les propriétés associées à des intervalles ou à des événements, certains travaux se préoccupent de l'incorporation d'informations sur les durées des intervalles. De même que nous laissons de côté les aspects métriques au niveau spatial pour la section 2.4, la métrique temporelle dépasse les objectifs que l'on s'est fixés ici.

Par ailleurs, les travaux sur l'action se préoccupent beaucoup des liens entre événements comme la causalité, qui permet des inférences sur des situations où le simple ordonnancement dans le temps est insuffisant à expliquer l'évolution du système étudié. Ceci dépasse notre cadre également, bien qu'il nous faille citer dans cette optique les travaux de Pianesi et Varzi [PIA 96] dans lesquels ce lien de causalité est introduit par une relation de connexion similaire à celle de la méréo-topologie. Les auteurs isolent alors des "diviseurs", des événements qui séparent topologiquement l'espace des événements en deux, et qui servent ensuite à orienter cet espace pour définir un futur et un passé et donc un ordre temporel. Nous signalons ces travaux car c'est la seule exception que nous avons relevée à la modélisation de l'ordre temporel par une relation primitive d'ordre. De plus on pourrait réinterpréter la connexion causale comme une connexion spatio-temporelle et s'approcher d'une méréologie de l'espace-temps ; il nous semble cependant que l'intérêt d'une construction à partir d'une classe d'événements particuliers donnés *a priori* n'est pas évident par rapport à la simplicité d'une relation d'ordre primitive.

2.2.3. *Correspondances entre instants et intervalles*

Nous avons vu rapidement les grandes options que l'on peut prendre quand on cherche à représenter qualitativement le temps (instants ou intervalles) ; nous allons voir dans cette section quels sont les liens formels que l'on peut faire entre les structures à base de points ou d'instants et les structures de régions ou d'intervalles. Le but de cette discussion est double :

– D'une part les axiomatisations de structures d'entités étendues sont souvent faites avec en arrière pensée l'équivalence d'une structure sous-jacente d'entités ponctuelles qui forme le modèle de ces structures (ne serait-ce que parce que les structures ponctuelles ont nourri notre éducation mathématique et physique). Expliciter le lien est un moyen d'indiquer les modèles que l'on représente d'une autre façon ; c'est ce que signifient les isomorphismes entre structures montrés via des "théorèmes de représentation" [BEN 83a], que nous allons présenter par la suite.

– D'autre part, si nous avons jusqu'ici placé la discussion du choix des primitives ontologiques sur le terrain de l'expressivité et de la commodité de représentation, les structures ponctuelles ont souvent des propriétés calculatoires plus intéressantes ou au moins mieux étudiées que les structures à base d'entités étendues. Notamment la théorie d'Allen retraduite en considérant les points limites des intervalles diminue le nombre de disjonctions présentes dans les compositions d'informations temporelles : par exemple si i_1, i_2 et f_1, f_2 sont les instants initiaux et finaux des intervalles I_1, I_2, l'expression $i_1 < i_2 \wedge f_1 < f_2$ correspond à $I_1 meets I_2 \vee I_1 overlap I_2 \vee I_1 before I_2$. Il est donc important de montrer comment on peut passer d'un type de représentation à un autre

Pour cela, il existe certaines constructions classiques et d'autres moins classiques. La construction d'entités étendues à partir d'entités ponctuelles est généralement évidente, nous la verrons en premier avant de passer aux constructions moins connues qui font le chemin inverse.

2.2.3.1. *Des points vers les intervalles*

Soit une structure d'instants $\mathcal{I} = \langle T, < \rangle$. La relation $<$ est une relation d'ordre sur T, donc irréflexive et transitive. On peut construire une structure d'intervalles de façon simple à partir de la structure de points : soit I, l'ensemble des ensembles d'instants construits sur T. On définit les deux relations suivantes, $\forall i \in I, \forall j \in I$:

$$i \sqsubseteq j \triangleq \forall t \; (t \in i \rightarrow t \in j)$$

$$i < j \triangleq \forall t \in i, \; \forall t' \in j \quad t < t'$$

et la structure résultante $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}, \sqsubseteq, < \rangle$ est une structure d'intervalles, au sens de la section 2.2.2.1. On a alors une correspondance entre les propriétés des deux structures, si on se restreint à des intervalles non nuls et convexes, donc si on a :

$$\forall I \exists t \in I$$

$$\forall t_1, t_2, t_3 (t_1 \in I, t_2 \in I \ \wedge \ t_1 < t_3 < t_2) \rightarrow t_3 \in I$$

La relation $<$ entre intervalles est bien un ordre, la relation $\sqsubseteq$ est réflexive, antisymétrique et transitive, et vérifie les propriétés suivantes : incompatibilité avec $<$, existence de l'union et de l'intersection, orientation, liberté et liberté2, atomicité, monotonie, convexité, et ordre sur l'union.

2.2.3.1.1.

Pour retrouver une structure similaire à la théorie de Allen, il faut imposer d'autres propriétés aux intervalles : ils doivent être bornés, donc définis par deux points extrémités orientés, et on définit alors la rencontre comme le "partage" d'une extrémité (la fin du premier intervalle et le début du second).

2.2.3.2. *Des intervalles vers les points*

La traduction précédente est assez naturelle, alors que le sens inverse l'est beaucoup moins, tant l'idée que le point est l'élément primitif de tout système du temps et de l'espace est ancrée dans nos conceptions. On doit pourtant à Russell et Wiener [WIE 14, RUS 14] la construction de "points" comme ensemble d'intervalles, ceux-ci étant les structures primitives considérées. Russell considère les points comme ensembles d'intervalles convergents (le point est la limite d'une telle suite). Partant de l'idée que le point est une abstraction représentant l'élément minimum d'une représentation on peut considérer qu'un point dans une structure d'intervalles est un élément indécomposable, ce qui peut correspondre à un intervalle atomique par exemple. Pour recouvrer la notion générale même en l'absence d'intervalles atomiques, on peut construire les points comme des ensembles d'intervalles se recouvrant deux à deux comme l'indique la figure 2.2. Dans cet exemple, les points sont définis comme les

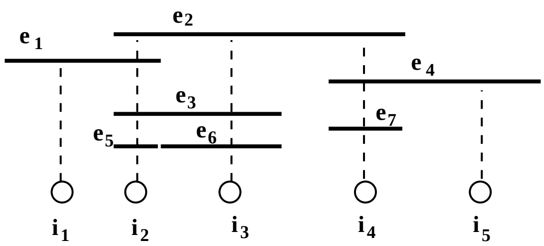

Figure 2.2. *La construction de points à partir d'intervalles*

ensembles d'intervalles joints par les traits pointillés menant à chaque point. La structure utilisée correspondant à ces ensembles d'intervalles est celle d'un *ultra-filtre*. Un filtre $\mathcal{U}$ est un ensemble non vide de parties d'un ensemble $\mathcal{F}$ ayant les propriétés suivantes :

– $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{U}\ \forall \mathcal{B} \in \mathcal{U}\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{U}$
– $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{U}\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{U}$ (on a donc $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$).

Un ultra-filtre ou filtre maximal $\mathcal{U}_1$ est un filtre qui est maximal par rapport aux propriétés ci-dessus :
si $\mathcal{U}_2$ est un filtre et $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ alors $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$

Sur une structure d'intervalles temporels $\mathcal{T} = \langle I, \subseteq, < \rangle$, où σ désigne le recouvrement on peut définir des ultra-filtres de la façon suivante :
t est un ultra-filtre si

– $\forall u \in t\ \forall v \in t \quad u \sigma v$ et l'intersection $u \cap v$ appartient à t
– $\forall u \in t\ \ (u \subseteq v \rightarrow v \in t)$
– t est maximal

On peut alors définir une relation d'ordre sur les ultra-filtres de la façon suivante :

$$t_1 \prec t_2 \ \triangleq\ \exists u \in t_1\ \exists v \in t_2 \quad u < v$$

Cette relation est en effet trivialement irréflexive et transitive (par la transitivité de $<$). On peut donc construire une structure d'instants $\mathcal{I} = \langle T, \prec \rangle$ où T est l'ensemble des ultra-filtres construits sur $\mathcal{T}$, et $\prec$ la relation défini ci-dessus. Cette dernière hérite de plus de certaines propriétés de $<$; ces liens sont étudiés précisément dans [BEN 83a] et nous ne nous étendrons pas sur toutes les axiomatisations possibles. Il est cependant très important de voir à quelle condition on peut prétendre avoir une structure de points "équivalents" à la structure d'intervalles de départ. Pour cela on voit que l'on peut définir un intervalle comme ensemble des instants construits par ultra-filtres à partir de lui-même. Nous noterons cette opération comme suit :

$$u^* = \{\ t \mid\ u \in t\ \}$$

Soit T^* l'ensemble des intervalles construits de cette manière à partir des ultra-filtres de T, $\sqsubseteq$ l'inclusion sur T^*, et $<$ l'ordre sur les intervalles induits par $\prec$[4] On note alors $\mathcal{T}^* = \langle T^*, \sqsubseteq, < \rangle$ (note : cette construction retourne la définition classique d'un intervalle comme l'ensemble des points qu'il contient en ensemble des points le contenant). On peut parler d'isomorphisme de structure entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ si les conditions suivantes sont vérifiées (cf. [BEN 83a] ou [LAN 91]) :

4. De la même façon qu'au paragraphe "Des points vers les intervalles".

– la fonction f définie par $f(u) = u^*$ est bijective
– $u < v$ si et seulement si $u^* < v^*$
– $u \subseteq v$ si et seulement si $u^* \sqsubseteq v^*$

Il y a alors effectivement isomorphisme si la structure d'intervalles satisfait les propriétés de monotonicité, de conjonction (l'existence de l'intersection), de convexité, et les axiomes de liberté 1 et 2, pour les relations d'ordre partiel strict $<$ et d'ordre partiel $\subseteq$.

2.2.3.3. *Les points dans la théorie d'Allen*

Allen et Hayes ont indiqué dans [ALL 89] une façon de construire une structure de points à partir de leur structure d'intervalle. La construction par ultra-filtre ne peut suffire dans la mesure où l'on veut introduire l'ensemble des lieux de contact entre intervalle mis en relation par la relation $meet$. Les points sont alors définis comme des classes d'équivalence de paires d'intervalles reliées par la relation $meet$. Si a est un point :

$$\forall \langle i, j \rangle \in a \; \forall k, l \; ((k||j \;\wedge\; i||l) \rightarrow \langle k, l \rangle \in a)$$
$$\forall \langle i_1, j_1 \rangle \in a \; \forall \langle i_2, j_2 \rangle \in a \quad (i_1||j_2 \;\wedge\; i_2||j_1)$$

Cette construction garantit que les points sont des classes d'équivalence grâce à l'unicité des points de rencontre d'intervalles. Cette construction ne considère que les points de contact entre intervalles. Au cas où il existe des chaînes infinies d'intervalles inclus les uns dans les autres cette construction laisse de côté la limite éventuelle d'un telle série, et on ne retrouvera pas une structure de points équivalente (il manquera ce point limite).

2.3. L'espace : points et régions

Certaines caractéristiques des théories du temps se retrouvent sous des formes similaires dans les théories de l'espace (le temps pouvant être vu comme un espace à une dimension). Notamment la distinction entre entités sans dimension et entités étendues est une question centrale dans les représentations formelles de l'espace. Les notions centrales pour le temps que sont l'ordre et l'inclusion ne se retrouvent cependant pas avec la même importance. Plus précisément, la notion de base sur des régions de l'espace est celle de la relation de partie à tout entre deux régions. Cette notion est l'objet de la méréologie (cf. section suivante). Cette théorie est très faible du point de vue des structures qu'elle caractérise. Pour prétendre modéliser des notions que l'on peut véritablement qualifier de spatiales, la notion de connexion est la notion la plus fondamentale que l'on peut considérer. Pour ce qui est des régions, la notion de connexion a été étudiée par Whitehead [WHI 29]. L'intégration de la notion de connexion dans la méréologie a été ensuite à la base de plusieurs systèmes visant à décrire le réel sur la base primitive de régions spatiales servant de référent aux objets matériels, on doit citer Carnap [CAR 58], Leonard et Goodman [LEO 40] et Woodger [WOO 37] qui ont développé des théories formelles de la méréo-topologie. Plus récemment Clarke [CLA 81] a développé une version alternative de ces théories et ces travaux ont commencé à inspirer certains chercheurs en IA. On doit à Randell, Cui et Cohn [RAN 90, RAN 92b] d'avoir jeté un pont entre l'IA traditionnelle et les travaux de Clarke. Une présentation plus exhaustive en est faite par Cohn [COH 96] et Stock [STO 97]. Nous avons du laisser de coté notamment les travaux sur les espace discrets [GLA 92], et les travaux sur l'intégration du temps et de l'espace seront présentés à la section 2.5.

2.3.1. *Les méréologies*

Les méréologies sont des ordre partiels conçus avant tout pour la notion générique de partie, qui en s'instanciant dans les domaines du temps et de l'espace s'applique aux entités étendues (intervalles, régions). On doit les premières axiomatisations au mathématicien polonais Leśniewski [LEŚ 89], qui en faisait une alternative à la théorie des ensembles. Dans cette perspective il faut voir la relation d'ordre comme une relation d'inclusion entre entités.

On doit à Simons [SIM 87] une étude détaillée des différentes versions modernes de la méréologie et à Varzi [VAR 96] une présentation complète des méréologies et méréo-topologies les plus récentes considérées en IA. Certains travaux en bases de données spatiales ont également proposé des modèles de représentation, qui recoupent certaines intuitions de ces théories méréologiques et méréo-topologiques sur des bases mathématiquement plus classiques [EGE 91b, EGE 91a]. La relation primitive la plus souvent choisie des théories méréologiques est la relation P de partie à tout entre deux entités. Son axiomatisation est :

P1 : $P(x, x)$

P2 : $P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y$

P3 : $P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$

On peut sur cette base définir les notions de partie propre (PP), de recouvrement (O, comme *overlap* en anglais), et de recouvrement partiel (PO) :

$PP(x, y) = P(x, y) \wedge \neg P(y, x)$;

$O(x, y) = \exists z(Pzx \wedge P(z, y))$;

$$PO(x,y) = O(x,y) \wedge \neg P(y,x) \wedge \neg P(x,y).$$

Alternativement on peut définir la méréologie en prenant O, PP ou DR (“discrete from”) comme primitives. On définit alors P respectivement par :

$$P(x,y) = \forall z(O(x,z) \rightarrow O(z,y))\,;$$
$$P(x,y) = PP(x,y) \vee x = y\,;$$
$$P(x,y) = \forall z(DR(y,z) \rightarrow DR(x,z)).$$

Un autre principe propre à beaucoup de ces théories est le principe de supplémentation [5] :

P4 : $\neg \mathrm{P}(x,y) \rightarrow \exists z\ (\mathrm{P}(z,x)\ \wedge\ \neg \mathrm{O}(z,y)$

Il implique l’extensionalité de la relation O (et donc de PP) :

P1,P2,P3,P4 $\vdash (\forall z(\mathrm{O}(x,z) \leftrightarrow \mathrm{O}(y,z))) \leftrightarrow x = y$

c’est à dire que toutes les entités qui recouvrent les mêmes entités sont égales. Ce principe est remis en cause par certaines méréo-topologies (voir section 2.3.2) et l’axiome de supplémentation n’est donc pas universellement admis.

On parle de conditions de “fermeture” de la méréologie quand les opérations suivantes sont définies dans la théorie. Ces axiomes affirment l’existence de la somme d’entités, de leur intersection quand elle existe, de la différence de deux entités et d’un individu universel qui comprend tous les autres :

P5 : $(\exists z\ \ (\mathrm{P}(x,z)\ \wedge\ \mathrm{P}(y,z)))\ \rightarrow\ (\exists u \forall v(\mathrm{O}(v,u)\ \leftrightarrow\ (\mathrm{O}(v,x)\ \vee\ \mathrm{O}(v,y))))$ (somme, notée $+$)

P6 : $\mathrm{O}(x,y) \rightarrow \exists z \forall w(\mathrm{P}(w,z) \leftrightarrow (\mathrm{P}(w,x) \wedge \mathrm{P}(w,y)))$ (intersection, notée $\cdot$)

5. Il correspond à l’axiome de "liberté" de van Benthem, si on considère sa contraposée :

$$\neg x \sqsubseteq y \rightarrow \exists z\ (z \sqsubseteq x\ \wedge\ \neg z \sigma y)$$

c’est à dire que si pour x et y, x n’est pas inclus dans y, alors il existe un intervalle qui permet de "faire la différence", étant inclus dans x mais n’intersectant pas y.

P7 : $(\exists z(\mathrm{P}(z,x) \ \wedge \ \neg\mathrm{O}(z,y))) \rightarrow (\exists u \forall w(\mathrm{P}(w,u) \leftrightarrow (\mathrm{P}(w,x) \ \wedge \ \neg\mathrm{O}(w,y))))$ (différence, notée $-$)

P8 : $\exists z \ \forall x \mathrm{P}(x,z)$ (existence de l'univers, noté a)

On peut alors définir le complément comme :

$-x \triangleq a - x$ dans le cas où sont admis P8 et P7.

La plupart des méréologies[6] refusent l'équivalent de l'ensemble vide qui serait un individu nul vérifiant :

P9 : $\exists z \forall x \mathrm{P} zx$

En effet celui-ci est en opposition avec le refus d'entités abstraites qui caractérise la plupart de ces approches (le nominalisme étant une des raisons d'être de la méréologie, cf [GOO 77]), et donc par exemple l'intersection de deux entités n'existe que si ces deux entités se recouvrent.
Généralisant les opérateurs précédents, certaines théories admettent cependant un principe de fusion généralisée (historiquement, il précède l'introduction des opérateurs précédent, qui en sont des cas particuliers) :

P10 : $(\exists x \phi(x)) \rightarrow \exists z \forall y(\mathrm{O}(y,z) \leftrightarrow \exists x(\mathrm{O}(x,y) \ \wedge \ \phi(x)))$

qui introduit un z qui est constitué de toutes les entités qui vérifient une propriété ϕ vérifiée par au moins une entité (x est libre dans ϕ, mais pas y et z) ; par exemple, en notant $\sigma x \phi(x)$ l'entité z dont l'existence est ainsi affirmée, on a :

P1-P4, P10 $\vdash u + v = \sigma x(\mathrm{P}(x,u) \vee \mathrm{P}(x,v))$

Soit : la somme de deux entités est la fusion de leur parties. De plus P1-P4 et P10 impliquent P5-P8.

6. A l'exception de [MAR 65, BUN 66], cités par [VAR 96].

2.3.1.0.1.

Nous avons vu les caractéristiques principales des théories méréologiques qui n'ont pas une interprétation nécessairement spatiale. Il faut plutôt les voir comme des théories générales, alternatives à la théorie des ensembles, et qui servent donc à modéliser des propriétés abstraites sur des entités de même niveau ontologique. C'est par l'ajout de notions topologiques sur cette base que la plupart des auteurs commencent à parler de théories "spatiales". Dans la mesure où nous nous intéressons à la combinaison méréologie et topologie, nous ne sommes pas entrés dans le détail des systèmes méréologiques et de leurs paternités. Pour une étude complète, l'ouvrage de référence reste [SIM 87].

2.3.2. *Méréologie et topologie*

2.3.2.1. *Concepts topologiques*

Nous avons affirmé plus haut l'aspect fondamental de la topologie pour une théorie de l'espace ; nous allons maintenant voir comment on peut formaliser ce concept d'un point de vue qualitatif. En mathématiques standard, une topologie est une structure de la forme $\mathcal{T} = \langle E, T \rangle$, où T est un ensemble de sous-ensembles de E, appelés les *ouverts* de la topologie $\mathcal{T}$, ces sous-ensembles vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall O_1 \in T \;\; \forall O_2 \in T \;\; (O_1 \cap O_2 \in T)$
L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$\forall U \subseteq T \;\; (\bigcup_{O \in U} O) \in T$
L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

Ø et E sont ouverts.

Dans la topologie classique, la notion d'ouvert permet de définir la connexité d'une région en disant que x est connexe si et seulement si il n'existe pas deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x = O_1 \cup O_2$.
Le type de propriétés topologiques que nous considérons ici est en fait l'équivalent du point de vue où les entités primitives sont des régions, considérées dans un cadre méréologique. Par rapport à la méréologie, la topologie caractérise la notion de "tout" fait d'un seul morceau, une notion qu'on ne peut exprimer en méréologie pure, malgré la tentative de Whitehead [WHI 20]. Celui-ci a défini une notion de "jointure" de deux entités, censée capturer la relation de deux entités connectées :

$$\mathrm{J}(x,y) \triangleq \exists z \; (O(x,z) \;\wedge\; O(y,z) \;\wedge\; \forall u \; (Puz \rightarrow Oux \;\vee\; Ouy))$$

Ceci exprime que pour deux entités “jointes”, il en existe une troisième qui les recouvrent toutes les deux et qui fait partie de la somme. Mais cette notion n’excluant pas les entités z qui peuvent être non connexes, elle ne correspond pas à la connexion : par exemple en considérant deux objets non connexes x et y, la somme z de deux parties quelconques respectivement de x et y (donc non connexe) vérifie la condition de la définition ci-dessus.

Il y a alors plusieurs façons d’introduire les concepts topologiques : la première est en introduisant, en plus de P, une primitive de connexion ayant au moins les propriétés suivantes.

$$\mathrm{C}(x, x) \tag{C1}$$

$$\mathrm{C}(x, y) \rightarrow \mathrm{C}(y, x) \tag{C2}$$

$$\mathrm{P}(x, y) \rightarrow \forall z(\mathrm{C}zx \rightarrow \mathrm{C}zy) \tag{C3}$$

Une solution alternative est de n’avoir que C comme primitive, en remplaçant (C3) par :

$$\forall x \forall y(\forall z(\mathrm{C}(x, z) \leftrightarrow \mathrm{C}(y, z))) \rightarrow x = y \tag{C4}$$

Dans tous les cas, on peut alors définir les notions suivantes :

$$\mathrm{EC}(x, y) \triangleq \mathrm{C}(x, y) \ \wedge \ \neg\mathrm{O}(x, y) \qquad \text{(connexion externe).}$$

$$\mathrm{TP}(x, y) \triangleq \mathrm{P}(x, y) \ \wedge \ \exists z \ (\mathrm{EC}zx \wedge \mathrm{EC}zy) \qquad \text{(partie tangentielle)}$$

$$\mathrm{NTP}(x, y) \triangleq \mathrm{P}(x, y) \ \wedge \ \neg\mathrm{TP}(x, y) \qquad \text{(partie non tangentielle)}$$

L’ensemble des axiomes P1-P8 et C1-C3 caractérise par exemple la méréo-topologie de [CAS 94]. Les axiomes C1, C2 et C4 forment la base des méréo-topologies de [CLA 81, RAN 92b, ASH 95].

Dans cette dernière optique (C comme seule primitive) la relation P est définie comme suit :

$$\mathrm{P}(x, y) \triangleq \forall z(\mathrm{C}(x, z) \rightarrow \mathrm{C}(y, z))$$

La partie non tangentielle (NTP), aussi nommée “partie interne” (IP) par [SMI 96, VAR 96], peut aussi servir de base à une méréo-topologie. Une autre alternative encore est celle de [BOR 96] ; à partir d’un prédicat exprimant qu’une région est connexe (SRx pour *simple region*, interprétée comme “l’intérieur de x est connexe”), la connexion particulière SC (*strong connection*) est alors définie par[7] :

$$\text{SC}(x, y) \triangleq \exists u \exists v \ (\text{P}ux \wedge \text{P}vy \wedge \text{SR}(u + v)).$$

On peut aussi définir dans tous les formalismes de façon évidente les relations NTPP (partie propre non tangentielle) et TPP (partie propre tangentielle), et leurs relations inverses notées NTPPI (ou NTPP^{-1}) et TPPI (ou TPP^{-1}). Les huit relations DC, EC, PO, NTPP, TPP, NTPP^{-1}, TPP^{-1} et l’égalité forment un ensemble de relations exhaustives (entre deux régions une de ces relations est vérifiée) et incompatibles entre elles (voir figure 2.3 pour une illustration de ces relations dans le cas d’un espace 2D), dans le cas où les régions sont régulières, c’est-à-dire que la fermeture de l’intérieur d’une région est identique à la fermeture de la région, et l’intérieur de la fermeture est identique à l’intérieur.

On peut aussi redéfinir les opérateurs méréologiques à partir de la connexion, quand on adopte (C4) :

$$x + y \ \triangleq \iota z \forall w \ (\text{C}wz \leftrightarrow (\text{C}wx \vee \text{C}wy))$$

$$x - y \ \triangleq \iota z \forall w \ (\text{P}wz \leftrightarrow (\text{P}wx \ \wedge \ \neg\text{C}wy))$$

$$-x \ \triangleq \iota z \forall w \ (\text{P}wz \leftrightarrow \neg\text{C}wy)$$

et avoir des axiomes d’existence de ces entités analogues à P5-P8 :

(C5) :$\forall x \forall y \exists z \ \forall w \ (\text{C}wz \leftrightarrow (\text{C}wx \vee \text{C}wy))$ (somme)

(C6) : $\text{O}(x, y) \rightarrow \exists z \ \forall w (\text{C}wz \leftrightarrow \exists v \ (\text{P}(x, y) \wedge \text{P}vy \wedge \text{C}vw))$ (intersection)

(C7) : $\forall x \exists y \ \neg\text{C}(y, x) \rightarrow \exists z \ \forall w (\text{C}wz \leftrightarrow \exists v \ (\neg\text{C}vx \wedge \text{C}vw))$ (complément)

(C8) :$\exists x \ \forall z \ \ \text{C}zx$ (univers)

La différence peut se définir par :

7. Cette connexion est en fait différente de C, car elle correspond intuitivement à une connexion par plus d’un “point”, en fait le contact (la connexion externe) se fait suivant une entité de dimension n-1 dans un espace de dimension n. Par exemple en 3D elle correspond au contact par une surface.

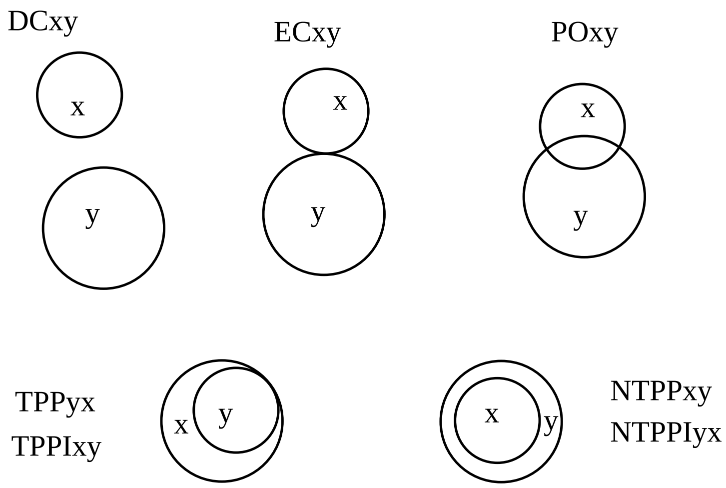

Figure 2.3. *Une interprétation 2D des relations méréotopologiques*

$$x - y \triangleq x \cdot (-y)$$

Les théories de [CLA 81, ASH 95] comprennent par exemple les axiomes C1-2, C4, C5-C8. Cette définition du complément a pour conséquence notable le théorème suivant :

C1,C2,C4,C7$\vdash \forall x \neg \mathrm{C} x(-x)$

Pour avoir une définition de la connexité qui ait un sens il faut donc la formuler ainsi :

CON$(x) \triangleq \forall x_1 \; \forall x_2 \; (x = x_1 + x_2 \rightarrow \mathrm{C}(cx_1)(cx_2))$

La théorie de [RAN 92b] comprend les axiomes C1-2, C4, C5-6, C8, et définit autrement le complément pour avoir C$x(-x)$.

2.3.2.1.1.

Toute théorie topologique est caractérisée par essence par un ensemble d'ouverts (ou de fermés) dotés des propriétés suivantes, reformulées ici dans un contexte méréologique (notamment on prend la notation courante OP(x) pour signifier que x est ouvert et CL(x) pour les fermés et on désigne l'intérieur de x par $i(x)$ ou ix et la fermeture par $c(x)$ ou cx plutôt que la notation habituelle en théorie ensembliste $\mathring{x}$ et $\overline{x}$) : L'intersection de deux ouverts est un ouvert, si elle existe puisqu'il n'y a pas d'individu nul , et la fusion quelconque d'ouverts est un ouvert [VAR 96] :

$$(\text{OP}(y) \wedge \text{OP}(x)) \to (z = x \cdot y \to \text{OP}(z)) \tag{C9}$$

$$\forall x(\phi(x) \to \text{OP}(x)) \to \text{OP}(\sigma x \phi(x)) \tag{C10}$$

On pourrait poser des axiomes équivalents avec les fermés, en posant ensuite que OP$(x) \triangleq$CL$(-x)$: la somme finie de fermés est un fermé et l'intersection quelconque de fermés est un fermé (quand elle existe).
On peut en fait définir ces notions à partir des relations déjà introduites en définissant

$$\text{OP}(x) \triangleq x = ix \qquad \text{avec} \qquad ix \triangleq \sigma z(\text{NTP}zx) \text{ (intérieur de x).}$$

$$\text{CL}(x) \triangleq x = cx \qquad \text{avec} \qquad cx \triangleq -i(-x).$$

Les axiomes C9 et C10 ou leurs contreparties avec la clôture permettent alors de retrouver l'axiomatisation classique de Kuratowski de la topologie avec une primitive de fermeture. On peut ajouter la notion de frontière comme $bx \triangleq -(ix + i(-x))$. Ces opérateurs peuvent ne correspondre à rien suivant les théories. En effet, l'axiome suivant :

$$\forall x \exists y \ \text{NTP}(y, x) \tag{C11}$$

qui fait partie des théories de [CLA 81, ASH 95, RAN 92b], affirme l'existence d'un intérieur pour tout élément du domaine, ce qui exclut les frontières. Vieu et Asher affirment en fait l'existence et l'unicité d'une partie non tangentielle maximale qui est donc l'intérieur :

$$\forall x \exists y \, \forall u \ \ (\text{C}uy \leftrightarrow \exists v \ (\text{NTP}vx \wedge \text{C}vu)) \tag{C11'}$$

Ils ajoutent aussi C9 et une condition de fermeture de l'univers :

$$ca = a \tag{C12}$$

qui, ajoutée à leurs autres axiomes, permettent de retrouver les autres propriétés des opérateurs topologiques. Smith et Varzi proposent aussi de définir la topologie et les liens entre une entité et sa frontière en axiomatisant directement la notion de frontière comme suit [SMI 97] : la relation $\mathrm{B}(x,y)$ se lit “x est une partie de frontière pour y”. Ils rejettent donc C11. Ils se basent sur la méréologie formée par P1-P4+P8.

$\mathrm{b}(x) \triangleq \sigma z(\mathrm{B}(z,x))$
(la frontière est la fusion des parties frontières)

$\mathrm{b}(x) = b(-x)$

$\mathrm{b}(\mathrm{b}(x)) = \mathrm{b}(x)$

$\mathrm{b}(x \cdot y) + \mathrm{b}(x + y) = \mathrm{b}(x) + \mathrm{b}(y)$

Et en définissant dans ce cadre la fermeture comme la somme d’une entité et de sa frontière, on peut aussi définir la connexion :

$\mathrm{c}(x) = x + \mathrm{b}(x)$

$\mathrm{C}(x,y) \triangleq \mathrm{O}(\mathrm{c}(x),y) \vee \mathrm{O}(\mathrm{c}(y),x)$

2.3.2.1.2.

Une propriété qu’on a seulement mentionnée jusqu’ici est liée à la propriété d’atomicité des régions, autrement dit le fait de ne pas être décomposable ; formellement on définit le fait d’être atomique pour une région par :

$At(x) \triangleq \neg\exists y\ \mathrm{PP}(y,x)$

Certaines théories prennent parti en imposant l’une des deux propositions suivantes :

$\forall x \exists y\ \mathrm{PP}(y,x)$ (atomicité)

$\forall x \exists y\ (\mathrm{P}(y,x)\ \wedge\ At(y))$ (non-atomicité)

Pour RCC, la théorie de [RAN 90, RAN 92b], la non-atomicité est une obligation pour préserver la cohérence de la théorie. La question de l’atomicité est importante si on veut pouvoir considérer une théorie qualitative avec un nombre fini d’éléments. Il faut noter d’autre part qu’une théorie complètement atomique a l’avantage d’être équivalente à une algèbre de Boole avec les points correspondant aux atomes, ce qui les ramène dans un domaine formellement bien balisé. Une représentation discrète peut par ailleurs être considérée comme souhaitable dans des applications où les objets sont des ensembles de pixels (qui forment alors les atomes).

2.3.3. *Correspondances entre points et régions*

De la même façon que les intervalles sont naturellement considérés comme des ensembles d'instants, les régions de l'espace sont facilement considérées comme des ensembles de points spatiaux. On peut également définir les points comme des entités du second-ordre à partir de régions de l'espace primitives. Plusieurs méthodes permettent de retrouver une structure ponctuelle à partir de régions, suivant le type de structure que l'on prend au départ. Par exemple, dans la géométrie de Tarski [TAR 69, TAR 72], les points sont définis comme des ensembles de sphères concentriques. Pour les structures spatiales qui nous intéressent ici, la méréologie et la topologie combinées, on peut remonter à Whitehead [WHI 29] ou de Laguna [LAG 22] pour l'idée de la construction. Clarke a le premier proposé une structure combinant les points liés à la connexion et une construction par ultra-filtre, d'une façon cependant erronée, comme l'ont noté [BIA 91, VIE 91]. Vieu a corrigé la définition des points dans une telle théorie et nous verrons cette définition corrigée par la suite. Cette définition combine en fait les deux types de construction que nous avons vus à propos des structures temporelles : la construction par ultra-filtres et celle par paires d'entités en contact. Par ailleurs, il existe une autre définition d'un point méréo-topologique due à [ESC 94], pour qui un point est une entité dépourvue de structure topologique (par opposition aux régions) ; c'est-à-dire qu'un point peut avoir des parties, mais il ne peut recouvrir partiellement une région : il en est une partie ou rien. Cette définition a en fait pour but de modéliser des représentations avec différents niveaux de granularité, un point pouvant être considéré comme une région à un niveau de granularité plus précis, mais pas l'inverse. Cette définition de point ne recouvre donc pas tout à fait ce qui nous intéresse dans cette section, à savoir une représentation à base de points équivalente à une représentation à base de régions. A la suite de son article "A Calculus of Individuals Based on Connection", Clarke publie dans "Individuals and Points" [CLA 85] une étude des liens entre sa théorie basée sur des régions et une structure de points définis à partir de ces régions. Elle diffère de la construction par ultra-filtre car la relation de connexion est différente d'un recouvrement et induit une différence entre les points correspondant d'une part à des connexions externes et d'autre part à des emboîtements classiques de régions se recouvrant partiellement ou non. Sa définition en est la suivante (on a changé sa notation pour l'harmoniser avec le reste de l'exposé).

Points de Clarke α est un point ($PT(\alpha)$) si et seulement si il vérifie les conditions suivantes (les variables x, y, z... dénotant des régions) :

1) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow (EC(x,y)\ \vee\ (O(x,y)\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha)))$

2) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ P(x,y)) \rightarrow y \in \alpha)$

3) $\forall x \forall y\ ((x+y \in \alpha \rightarrow (x \in \alpha\ \vee\ y \in \alpha)))$

4) $\alpha \neq \emptyset$

Clarke impose de plus l'existence des points avec l'axiome suivant :

$$\forall x \forall y\ (C(x,y) \rightarrow \exists \alpha (PT(\alpha)\ \wedge\ x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha))$$

L'idée de Clarke était d'introduire, en plus des points construits comme ultra-filtres, les points qui correspondent aux connexions externes (les points de contact en fait entre des régions en connexion externe). En voulant faire une définition unifiée logiquement, il a malheureusement rendu la définition de point inconsistante avec l'existence d'une connexion externe, ce qui ramène sa topologie à une simple méréologie.

2.3.3.1. *Les points dans la méréotopologie d'Asher et Vieu*

Comme on l'a vu section 2.3.2, la méréotopologie d'Asher et Vieu est une version corrigée de la méréotopologie de Clarke. L'axiomatisation de Asher et Vieu permet de retrouver une structure de points isomorphe à la structure sur les régions, par une construction qui corrige celle de Clarke, et dont ils ont fait la preuve de consistance et de complétude. Ils ont en fait distingué, à la suite de [VIE 91] deux sortes de points : ceux introduits par une connexion externe (nommés “points frontières”) pour lesquels on peut reprendre une construction similaire à celle d'Allen et Hayes pour les instants de contact entre intervalles et ceux introduits par des recouvrements (nommés “points intérieurs”). Leurs définitions respectives sont les suivantes :

Point intérieur α est un point intérieur (IP(α)) si et seulement si :

1) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow (O(x,y)\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha)))$
2) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ P(x,y)) \rightarrow y \in \alpha)$
3) $\alpha \neq \emptyset$
4) α est maximum par rapport aux conditions précédentes.

Point frontière α est un point frontière (BP(α)) si et seulement si :

1) $\exists x \exists y\ (x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha\ \wedge\ EC(x,y))$
2) $\forall x \forall y\ [(x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow ((O(x,y)\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha) \vee$
$\exists t \exists z (z \in \alpha\ \wedge\ t \in \alpha\ \wedge\ Pzx\ \wedge\ Pty\ \wedge\ ECzt))]$
3) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ P(x,y)) \rightarrow y \in \alpha)$
4) α est maximum par rapport aux conditions précédentes.

On peut alors faire correspondre à une région l'ensemble des points qui la contiennent. On peut alors induire une topologie sur cette nouvelle structure, qui a les propriétés de la structure de départ (c'est d'ailleurs ainsi que ces auteurs prouvent la complétude sémantique de leur théorie). Nous illustrons figure 2.4 la correspondance points/régions suivant cette construction : supposons seulement l'existence de deux régions de base x et y, fermées toutes les deux, et telles que $EC(x,y)$, et l'existence du complément de $(x+y)$. Par les divers axiomes de la théorie, il existe aussi les régions $i(x)$, $i(y)$,

$x + y$ et les sommes de deux régions ainsi que leurs compléments et leurs fermetures ou intérieurs. Au total on peut donc construire les points suivants (pour simplifier la lecture, on n'indique que les régions qui définissent minimalement chaque point et pas ceux qui contiennent des éléments du point, comme par exemple l'individu universel, qui appartient à tous les points ; ceci rend d'ailleurs compte plus intuitivement de la définition de points, les régions que l'on garde sont en effet celles qui différencient les points entre eux) :

$p_1 = \{-(x+y), ...\}$, et IP(p_1), $p_2 = \{x, c(-(x+y)), ...\}$, et BP$(p_2)$, $p_3 = \{ix, ...\}$, et IP(p_3), $p_4 = \{x, y, ...\}$, et BP(p_4), $p_5 = \{iy, ...\}$, et IP(p_5), $p_6 = \{y, c(-(x+y)), ...\}$, et BP$(p_6)$.
Si on définit x^* et y^* comme l'ensemble des points qui contiennent respectivement x et y, on voit bien, par exemple, que $x^* \cap y^* = \{p_4\}$, ce qui respecte l'interprétation voulue de EC. Il faut noter que nous avons pris un exemple avec un nombre de régions

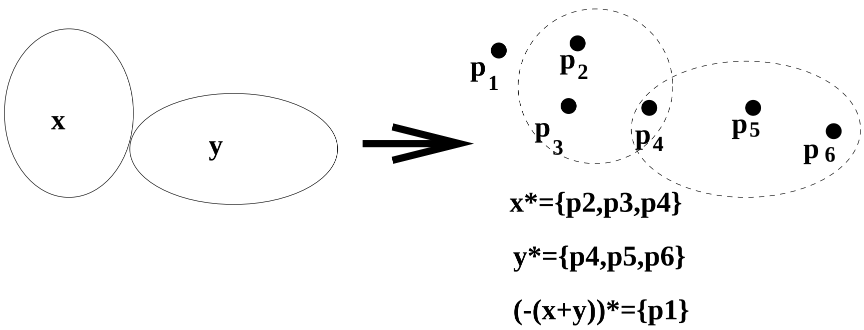

Figure 2.4. *La construction de points à partir d'intervalles*

fini pour simplifier ; dans ce cas les points intérieurs correspondent bijectivement aux atomes. La définition du point est cependant plus générale et avec des régions sans atomes, un point intérieur correspond à une suite de régions emboîtées les unes dans les autres, convergeant vers la notion habituelle de point.

2.4. Méréogéométries

Les théories méréogéométriques (méréogéométries) sont des enrichissements des méréotopologies prenant en compte des notions morphologiques et/ou métriques. Le méréogéométries (méréotopologies) n'ont pas pour but de développer une *nouvelle* géométrie ou topologie, mais elles sont motivées par la tentative de fonder la géométrie euclidienne (ou une partie de cette géométrie) sur des entités et des relations primitives plus " cognitives " ou plus aptes à couvrir les besoins de certains secteurs d'application (robotique, GIS, linguistique, . . .).

Le pouvoir expressif des méréogéométries rend plus difficile, par rapport aux cas des théories du temps ou des méréotopologies, l'analyse des liens entre : (*i*) les méréogéométries et géométries basées sur le points (qu'on appellera géométries classiques) ; (*ii*) les méréogéométries fondées sur des primitives différentes. En effet normalement, les primitives proposées dans la littérature sont hétérogènes et caractérisées très faiblement ou de façon implicite/indirecte (voir [LAG 22, TAR 72, NIC 62, BEN 83a]). Seulement très récemment, Bennett [BEN 01a] et Donnelly [DON 01] ont développé des théories complètes et avec une axiomatisation donnée directement sur les régions, qui sont respectivement basées sur les primitives de Tarski et de De Laguna[8].

D'autre part, chaque méréogéométrie est accompagnée par une description plus ou moins explicite, en terme de $\mathbb{R}^n$: des ïndexintended models*intended models*. En alternative à une bonne axiomatisation, ces descriptions clarifient la signification des primitives et permettent une comparaison sémantique (*conceptuelle*) des différentes primitives[9]. Dans [BOR 01], Borgo et Masolo ont jeté les bases d'une comparaison sémantique de quelques méréogéométries.

Ici on entrera dans les détails des théories de Tarski et de Bennett. Pour les autres méréogéométries on donnera seulement les *intended models* de $\mathbb{R}^n$ [10] accompagnées par quelques observations.

2.4.1. *Théories basées sur Partie et Sphère*

Dans les géométries classiques les notions d'*alignement*, et de *distance* entre points jouent un rôle fondamental. On peut donc espérer suivre pour les méréogéométries le même type d'approche en généralisant ces notions à des régions quelconques. Malheureusement cette généralisation pose beaucoup de problèmes causés par l'hétérogénéité des formes des régions (voir [GER 94, VIE 97]). La relation de *partie* (introduite par Leśniewski [LEŚ 89]) et la notion de sphère donnent à Tarski la possibilité d'exploiter la correspondance intuitive *points-centres des sphères* pour introduire ce type de notions entre les sphères[11]. À ce point, vu que la géométrie classique est fondée seulement sur ces notions (voir la géométrie élémentaire de Tarski [TAR 67], ou la géométrie de Hilbert [HIL 71]), on peut essayer d'axiomatiser les méréogéométries en transposant les axiomes des géométries classiques aux relations entre sphères, avec les modifications opportunes dues au fait que les sphères sont étendues.

8. Aucune comparaison formelle entre ces deux théories n'a été conduite jusqu'à maintenant.

9. C'est-à-dire que on peut comparer les *intended models* de $\mathbb{R}^n$.

10. On utilisera la topologie et la distance classiques de $\mathbb{R}^n$: x° ($\overline{x}$) est l'intérieur (la fermeture) de x, $dist$ est la distance entre points ou ensembles, $diam$ est le diamètre d'un ensemble, $s = boule(c, r)$ si s est une boule ouverte de centre c et de rayon r.

11. Donc la généralisation ne s'étend pas aux régions quelconques mais seulement aux sphères.

Dans la littérature on trouve deux approches différentes basées sur la notion de sphère : dans [TAR 72, BEN 01a, DUG 02] (**T1**) on ajoute directement à la notion de *partie*, le prédicat *être une sphère* et on reconduit les axiomes de Tarski ; dans [BOR 96] (**T2**) on définit la sphère à partir des primitives de *partie*, *connexion* et *congruence* et on transporte les axiomes de Hilbert.

2.4.1.1. *Approche T1*

En indiquant le prédicat *être une sphère* avec S, on donne les *intended models*[12] de $\mathbb{R}^n$:

$\mathcal{D}$ = {sous ensembles réguliers, ouverts et non vides de $\mathbb{R}^n$ }
$\mathsf{P}(x, y) \Rightarrow X \subseteq Y$
$\mathsf{S}(x) \Rightarrow (\exists c, r \in \mathbb{R})(X = boule(c, r))$

On va analyser d'abord l'approche de Tarski, pour voir en quel sens on peut l'appeler *indirecte*.

Primitive de partie. P est transitive et satisfait l'axiome du deuxième ordre ci-dessous qui garantit la somme unique de tous les éléments d'un ensemble non vide (dérivé de l'axiome de fusion P10, cf section 2.3.1) :

$$\mathsf{SUM}(X, x) \triangleq \forall y(X(y) \to \mathsf{P}(y, x)) \wedge \neg\exists z(\mathsf{P}(z, x) \wedge \forall y(X(y) \to \mathsf{DR}(y, z)))$$
$$\forall X(\exists x(X(x)) \to \exists! x(\mathsf{SUM}(X, x)))$$

Primitive de sphère. P et S permettent de définir les relations suivantes entre sphères : *externally tangent* (ET), *internally tangent* (IT), *externally diametrical* (ED), *internally diametrical* (ID), *concentricité* ($\odot$) et *équidistance* (EQD). Pour simplifier la notation, on indiquera avec $\forall^\circ$ et $\exists^\circ$ les quantifications sur les sphères, et on supposera que les relations s'appliquent seulement aux sphères.

$$\mathsf{ET}(a, b) \triangleq \mathsf{DR}(a, b) \wedge \forall^\circ x, y((\mathsf{P}(a, x) \wedge \mathsf{P}(a, y) \wedge \mathsf{DR}(b, x) \wedge \mathsf{DR}(b, y)) \to (\mathsf{P}(x, y) \vee \mathsf{P}(y, x)))$$

$$\mathsf{IT}(a, b) \triangleq \mathsf{PP}(a, b) \wedge \forall^\circ x, y((\mathsf{P}(a, x) \wedge \mathsf{P}(a, y) \wedge \mathsf{P}(x, b) \wedge \mathsf{P}(y, b)) \to (\mathsf{P}(x, y) \vee \mathsf{P}(y, x)))$$

12. $\Rightarrow$ représente la fonction d'interprétation des prédicats, et X représente l'interprétation de x.

$\mathsf{ED}(a,b,c) \triangleq \mathsf{ET}(a,c) \wedge \mathsf{ET}(b,c) \wedge \forall^{\circ} x,y((\mathsf{DR}(x,c) \wedge \mathsf{DR}(y,c) \wedge \mathsf{P}(a,x) \wedge \mathsf{P}(b,y)) \rightarrow \mathsf{DR}(x,y))$

$\mathsf{ID}(a,b,c) \triangleq \mathsf{IT}(a,c) \wedge \mathsf{IT}(b,c) \wedge \forall^{\circ} x,y((\mathsf{DR}(x,c) \wedge \mathsf{DR}(y,c) \wedge \mathsf{ET}(a,x) \wedge \mathsf{ET}(b,y)) \rightarrow \mathsf{DR}(x,y))$

$a \odot b \triangleq a = b \vee (\mathsf{PP}(a,b) \wedge \forall^{\circ} x,y((\mathsf{ED}(x,y,a) \wedge \mathsf{IT}(x,b) \wedge \mathsf{IT}(y,b)) \rightarrow \mathsf{ID}(x,y,b)))$
$\vee(\mathsf{PP}(b,a) \wedge \forall^{\circ} x,y((\mathsf{ED}(x,y,b) \wedge \mathsf{IT}(x,a) \wedge \mathsf{IT}(y,a)) \rightarrow \mathsf{ID}(x,y,a)))$

$\mathsf{EQD}(a,b,c) \triangleq \exists^{\circ} z(z \odot c \wedge \forall^{\circ} x,y((x \odot a \wedge y \odot b) \rightarrow (\mathsf{PO}(x,z) \wedge \mathsf{PO}(y,z))))$

Tarski définit les points au deuxième ordre : un point est la classe de toutes les sphères concentriques à une sphère donnée. Il introduit la relation d'*équidistance* entre points : les points α et β sont équidistants du point γ si les sphères qui appartiennent à γ sont EQD par rapport aux sphères qui appartiennent à α et β. Il donne les axiomes de la géométrie élémentaire sur le prédicat d'*équidistance* sur les points[13]. Il définit les régions comme sommes de sphères.

On peut noter qu'aucun axiome n'est donné directement sur les relations entre sphères définies à partir de S, mais Tarski caractérise ces notions *indirectement* à travers les axiomes donnés pour l'équidistance sur les points, il est donc obligé de construire les points (au deuxième ordre) dans sa théorie[14].

Bennett considère la même méréologie mais, à la différence de Tarski, il donne les axiomes directement sur deux relations entre sphères : $\mathsf{B}(x,y,z)$ si et seulement si le centre de x est entre les centres de y et z et $\mathsf{EQD}(x,y,z,w)$ ssi les centres de x et y sont à la même distance des centres de z et w. Il peut alors transporter les axiomes de la géométrie élémentaire de Tarski en substituant l'identité par la concentricité. Il complète la théorie en rajoutant des axiomes qui correspondent à la définition des régions de Tarski comme sommes d'ensembles de sphères.

Axiomes correspondant à la géométrie classique de Tarski[15].

13. Il introduit aussi d'autres axiomes pour garantir la catégoricité de la théorie.

14. On ne peut pas considérer des fragments du premier ordre de la théorie qui pourraient être intéressants pour des applications.

15. On a maintenu la même numération que Bennett (**A1** et **A2** sont les axiomes méréologiques).

A3 $\forall^\circ x, y(\mathsf{B}(x, y, x) \rightarrow x \odot y)$
A4 $\forall^\circ x, y, z, u((\mathsf{B}(x, y, u) \wedge \mathsf{B}(y, z, u)) \rightarrow \mathsf{B}(x, y, z))$
A5 $\forall^\circ x, y, z, u((\mathsf{B}(x, y, z) \wedge \mathsf{B}(x, y, u) \wedge \neg(x \odot y)) \rightarrow (\mathsf{B}(x, z, u) \vee \mathsf{B}(x, u, z)))$
A6 $\forall^\circ x, y((\mathsf{EQD}(x, y, y, x))$
A7 $\forall^\circ x, y, z((\mathsf{EQD}(x, y, z, z) \rightarrow x \odot y)$
A8 $\forall^\circ x, y, z, u, v, w((\mathsf{EQD}(x, y, z, u) \wedge \mathsf{EQD}(y, z, v, w)) \rightarrow \mathsf{EQD}(z, u, v, w))$
A9 $\forall^\circ t, x, y, z, u \exists^\circ v((\mathsf{B}(x, t, u) \wedge \mathsf{B}(y, u, z)) \rightarrow (\mathsf{B}(x, v, y) \wedge \mathsf{B}(z, t, v)))$
A10 $\forall^\circ t, x, y, z, u \exists^\circ v, w((\mathsf{B}(x, u, t) \wedge \mathsf{B}(y, u, z) \wedge \neg(x \odot y))$
$\rightarrow (\mathsf{B}(x, z, v) \wedge \mathsf{B}(x, y, w) \wedge \mathsf{B}(v, t, w)))$
A11 $\forall^\circ x, x\prime, y, y\prime, z, z\prime, u, u\prime((\mathsf{EQD}(x, y, x\prime, y\prime) \wedge \mathsf{EQD}(y, z, y\prime, z\prime) \wedge \mathsf{EQD}(x, u, x\prime, u\prime) \wedge$
$\mathsf{EQD}(y, u, y\prime, u\prime) \wedge \mathsf{B}(x, y, z) \wedge \mathsf{B}(x\prime, y\prime, z\prime) \wedge \neg(x \odot y)) \rightarrow \mathsf{EQD}(z, u, z\prime, u\prime))$
A12 $\forall^\circ x, y, u, v \exists^\circ z((\mathsf{B}(x, y, z) \wedge \mathsf{EQD}(y, z, u, v))$
A13 $\forall XY(\exists^\circ z \forall^\circ x, y((X(x) \wedge Y(x)) \rightarrow \mathsf{B}(z, x, y))$
$\rightarrow \exists^\circ z \forall^\circ x, y((X(x) \wedge Y(x)) \rightarrow \mathsf{B}(x, z, y)))$
A14 $\forall^\circ x, y, z((x \odot y \wedge y \odot z) \rightarrow x \odot z)$
A15 $\forall^\circ x, x\prime y, z, w((\mathsf{EQD}(x, y, z, w) \wedge x\prime \odot x) \rightarrow \mathsf{EQD}(x\prime, y, z, w))$
A16^n $\exists^\circ x_0, \ldots, x_n(\bigwedge_{0 \leq i \neq j \neq k \leq n}(\neg(x_i \odot x_j) \wedge \mathsf{EQD}(x_i, x_j, x_j, x_k))) \wedge$
$\neg\exists^\circ x_0, \ldots, x_{n+1}(\bigwedge_{0 \leq i \neq j \neq k \leq n+1}(\neg(x_i = x_j) \wedge \mathsf{EQD}(x_i, x_j, x_j, x_k)))$

Les axiomes **A3**-**A12** correspondent directement aux dix premiers axiomes de la géométrie élémentaire de Tarski [TAR 67] où l'identité est changé en concentricité. Pour garantir la catégoricité de la théorie, le schéma d'axiomes de continuité de Tarski, est devenu un axiome du deuxième ordre (**A13**). L'axiome **A14** établit que $\odot$ est une relation d'équivalence (la réflexivité et la symétrie sont implicites dans la définition de $\odot$). Vue que B peut être définie en termes de EQD (et aussi toutes les autres relations géométriques, c'est à dire qu'on peut considérer la seule primitive EQD pour axiomatiser la géométrie élémentaire) et que EQD est symétrique, l'axiome **A15** est suffisant pour garantir la substitution d'une sphère avec une concentrique. Pour un n donné, l'axiome **A16**^{n} détermine la dimension de l'espace, en affirmant qu'il existe au plus $n + 1$ sphères équidistantes. Cet axiome est donc une généralisation des axiomes de *lower/upper dimension* que Tarski a introduit pour le cas bi-dimensionnel.

Axiomes spécifiques aux régions étendues. Vu que le domaine de la théorie n'est pas constitué seulement de sphères, mais en général de régions régulières ouvertes, il faut garantir l'existence de sphères centrées n'importe où et avec un diamètre quelconque, et il faut reconduire la relation de partie entre régions quelconque à la relation entre sphères :

A17 $\forall^\circ x, y(\neg(x \odot y) \rightarrow \exists^\circ s \forall^\circ z(\mathsf{COI}(z, s) \leftrightarrow \mathsf{Nearer}(x, z, x, y)))$
A18 $\forall^\circ x \exists^\circ y(\neg(x \odot y) \wedge \forall^\circ z(\mathsf{COI}(z, x) \leftrightarrow \mathsf{Nearer}(x, z, x, y)))$
A19 $\forall x, y(\mathsf{P}(x, y) \leftrightarrow \forall s(\mathsf{COI}(s, x) \rightarrow \mathsf{COI}(s, y)))$
A20 $\forall^\circ r \exists^\circ s(\mathsf{P}(s, r))$

Avec : $\mathsf{COI}(s, r)$ signifie que s a son centre dans l'intérieur de r, et $\mathsf{Nearer}(w, x, y, z)$ signifie que les centres de w et x sont plus proches que ceux de y et z [16].

Bennett établit ensuite deux résultats fondamentaux :

Théorème 1 *(Bennett [BEN 01a]) Les axiomes* ***A1-A20*** *constituent un système axiomatique catégorique pour la géométrie n-dimensionnelle basée sur les régions, tel que tous les modèles de cette théorie sont isomorphes à une structure $\mathfrak{R}_n = \langle R_{\mathbb{R}^n}, \mathsf{P}, \mathsf{S}\rangle$, où $R_{\mathbb{R}^n}$ est l'ensemble des ensembles de $\mathbb{R}^n$ réguliers et ouverts ; $\langle r_1, r_2\rangle$ satisfait P in $\mathfrak{R}_n$ ssi $r_1 \subset r_2$; r satisfait S ssi r est une boule ouverte n-dimensionnelle de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 2 *(ibid) Cette théorie est indécidable pour $n \geq 2$.*

2.4.1.2. *Approche T2*

La théorie proposée par Borgo en [BOR 96] :

$\mathcal{D}$ = {sous ensembles réguliers, ouverts, non vides et de diamètre fini de $\mathbb{R}^n$ }
$\mathsf{P}(x, y) \Rightarrow X \subseteq Y$
$\mathsf{SR}(x) \Rightarrow (\forall A, B \in \mathcal{D})(X = A \cap B \rightarrow A \cup B \neq \emptyset)$
$\mathsf{CG}(x, y) \Rightarrow$ il existe une isométrie f tel que $Y = f(X)$

À partir de ces primitives on peut définir la sphère[17] :

$$\mathsf{S}(x) \triangleq \mathsf{SR}(x) \wedge \forall y((\mathsf{CG}(y, x) \wedge \mathsf{PO}(y, x)) \rightarrow \mathsf{SR}(x - y))$$

Au lieu de se ramener à la géométrie élémentaire de Tarski, Borgo *et al* [BOR 96] simulent les segments et les triangles (où x, y, z sont des sphères) :

$\mathsf{LIN}(x, y, z) \triangleq \mathsf{B}(x, y, z) \vee \mathsf{B}(y, x, z) \vee \mathsf{B}(z, x, y)$
$\mathsf{SEG}(x, y) \triangleq \neg(x \odot y)$
$\mathsf{TRI}(x, y, z) \triangleq \neg(x \odot y) \wedge \neg(x \odot z) \wedge \neg(y \odot z) \wedge \neg(\mathsf{LIN}(x, y, z))$

et, en utilisant la primitive CG, on peut alors traduire les axiomes de Hilbert [HIL 71] sur la transportabilité/congruence des segments et des triangles (voir [BOR 96] pour les détails). L'axiomatisation de cette théorie est au premier ordre et l'analyse sémantique n'a pas été conduite.

16. Voir [BEN 01a] pour les défi nitions.

17. Notons qu'il existe des régions à diamètre infi ni qui satisfont la défi nition d'une sphère mais qui ne sont pas *boule*. Par exemple $x = \mathbb{R}^n - boule(c, r)$.

2.4.2. *Théorie basée sur Can Connect*

Dans [LAG 22], De Laguna introduit une théorie basée seulement sur la relation *can connect* : $\mathsf{CCon}(x, y, z)$ s'il existe une région congruente à x qui a au moins un point en commun avec y et z.

$\mathcal{D}$ = {sous ensembles réguliers, fermés, non vides de $\mathbb{R}^n$ }
$\mathsf{CCon}(x, y, z) \Rightarrow dist(Y, Z) \leq diam(X)$

Sur la base de cette relation on peut facilement définir C (et donc P en utilisant la définition standard sur la base de C) :

$\mathsf{C}(x, y) \triangleq \forall z(\mathsf{CCon}(z, x, y))$

De Laguna introduit seulement deux axiomes :

$a = b \leftrightarrow \forall x, y(\mathsf{CCon}(x, a, y) \leftrightarrow \mathsf{CCon}(b, x, y))$
$\exists x, y(\mathsf{CCon}(a, x, y) \wedge \neg\mathsf{CCon}(b, x, y)) \rightarrow \neg\exists z, w(\mathsf{CCon}(b, z, w) \wedge \neg\mathsf{CCon}(a, z, w))$

qui clairement laissent beaucoup de modèles non désirés. Dans [DON 01], Donnelly propose une axiomatisation complète de CCon pour l'espace 3-dimensionnel.

2.4.3. *Théorie basée sur Partie et Conjugaison*

Dans [NIC 62], Nicod introduit une théorie basée sur P et la relation de conjugaison : $\mathsf{Conj}(x, y, z, w)$ si les deux couples de régions x, y et z, w comprennent respectivement deux couples de points congruents.

$\mathcal{D}$ = {sous ensembles réguliers, fermés, non vides de $\mathbb{R}^n$ }
$\mathsf{P}(x, y) \Rightarrow X \subseteq Y$
$\mathsf{Conj}(x, y, z, w) \Rightarrow \exists a, b, c, d(a \in X \wedge b \in Y \wedge c \in Z \wedge d \in w \wedge dist(a, b) = dist(c, d))$

On peut noter que la primitive P n'est pas nécessaire, car on peut définir C (et donc P) de manière similaire à l'approche de De Laguna :

$\mathsf{C}(x, y) \triangleq \forall z(\mathsf{Conj}(z, z, x, y))$

Il faut souligner que le but de Nicod est d'expliciter la possibilité de partir des régions pour reconstruire la géométrie euclidienne. C'est à cause de cela qu'il ne s'est pas intéressé à donner explicitement des axiomes : il considère comme axiomes simplement tous les théorèmes qui peuvent être démontrés dans $\mathbb{R}^n$ avec P et Conj une fois fixés ses interprétations.

2.4.4. *Théorie basée sur Closer*

Dans [BEN 83a] Van Benthem propose une théorie basée sur la primitive *closer* : $\mathsf{Closer}(x, y, z)$ si x est plus près de y que de z. Cette théorie a été reprise et améliorée dans [AUR 97]. Dans les deux cas les axiomes sont seulement minimaux.

$\mathcal{D}$ = {sous ensembles réguliers, ouverts, non vides de $\mathbb{R}^n$ }
$\mathsf{Closer}(x, y, z) \Rightarrow dist(X, Y) < dist(X, Z)$

Dans ce cas aussi on peut définir facilement C et donc P :

$\mathsf{C}(x, y) \triangleq \neg\exists z(\mathsf{Closer}(x, z, y))$

2.4.5. *Théories intégrant la notion de forme*

La notion de région recouvre toutes les formes. D'un point de vue pratique elle est inapte à capturer des notions géométriques réclamant une reconnaissante de formes ou de types de formes. Un certain nombre de travaux ont étendu les méréotopologies dans le but de gérer ces notions. Ces enrichissements sont parfois motivés par la recherche d'un langage plus apte à couvrir les besoins de secteurs d'application comme la robotique, les bases de données géographiques (GIS) ou la formalisation de notions d'espace dans la langue naturelle. On distingue deux grands types d'approches : (*i*) s'intéresser à la structure d'un objet par l'intermédiaire de ses discontinuités, donc de ses " trous " ou, (*ii*) s'intéresser directement à la forme d'un objet.

Dans le premier cas on peut citer Varzi [VAR 96] qui traite des concavités et des trous. Il tente de caractériser les propriétés topologiques des cavités et concavités des objets en ajoutant à une méréotopologie classique (basée sur P et C) une primitive H dont le sens intuitif est : $\mathsf{H}(x, y)$ est vrai si " x est un trou de ou dans y ". La primitive H ne permet de caractériser que les propriétés morphologiques définissables de manière topologique, c'est à dire par l'intermédiaire des discontinuités introduites dans l'objet. Ces limites conduisent Varzi à introduire en plus une primimive F où $\mathsf{F}(x, y)$ signifie intuitivement : " x remplit y ", et un opérateur primitif d'enveloppe convexe h ($\mathsf{h}(x)$ associe à la région x son enveloppe convexe)[18] afin de caractériser la complémentarité d'un trou et d'un objet et les notions d'être à " l'intérieur " et à " l'extérieur ".

Dugat *et al* [DUG 02], représentent l'autre approche et s'intéressent directement à la caractérisation des formes des objets. Ils utilisent une xméréogéométrie incluant les

18. Cohn dans [COH 95] avait déjà proposé d'introduire un tel opérateur.

sphères qui permet de définir qualitativement, comme montré plus haut, des notions géométriques intéressantes (Cf. 2.4.1). Ils proposent une axiomatique basée sur P et S et définissent la congruence entre sphères, la distance, l'ordre et une notion d'angle.

La méréogéométrie ainsi obtenue est appliquée à la reconnaissance de formes d'objets approximés par des ensembles de sphères. Ces sphères sont calculées par des méthodes de géométrie computationnelle (Transformée d'axe médian), on ne retient qu'un ensemble caractéristique de sphères. Les objets sont représentés par des régions résulant de la somme de ces sphères. Une forme quelconques bidimentionnelle ou tridimentionnelle est donc approximée par un ensemble fini de sphères qui est utilisé pour " reconnaître " logiquement une forme (par exemple une figure géométrique : triangle, cube, . . .) ou exprimer des notions de structure [DUG 99, DUG 02].

2.5. Le mouvement

2.5.1. *Introduction*

Nous allons étudier dans cette partie les problèmes conjoints du temps et de l'espace, après avoir vu les travaux effectués séparément sur ces deux composantes. Même si le mouvement peut être classiquement vu comme la combinaison d'une représentation spatiale et d'une fonction du temps vers l'espace, cela laisse la place pour quelques variations ontologiques. On verra aussi que certains auteurs préconisent un traitement holistique de l'espace-temps, quitte à dériver les notions d'espace et de temps a posteriori. Le choix des relations à formaliser est également une question centrale.

Nous allons voir les rares tentatives de modéliser le mouvement et le changement spatial en prenant comme outils de base des théories "qualitatives" de l'espace, c'est-à-dire où l'espace est considéré comme constitué primitivement par des régions étendues, dans cadre de logique du premier ordre. Les rares tentatives dans ce sens se sont concentrées sur les aspects méréo-topologiques pour commencer. Le mouvement est donc à entendre ici comme "changement de propriétés topologiques", où bien méréo-topologie de l'espace-temps.

2.5.2. *Objectifs des théories spatio-temporelles*

On peut dégager deux grandes familles d'objectifs pour ces représentations : d'une part obtenir des théories formelles du premier ordre permettant de représenter les mêmes aspects que les topologies à base de points ; d'autre part, fournir des bases au raisonnement automatique sur des informations spatio-temporelles dans des contextes qualitatifs. Le premier point concerne l'expressivité des théories qui se donnent pour but la représentation du mouvement. Le second concerne les propriétés inférentielles de telles théories. Une question importante dans cette perspective est par exemple la modélisation de la continuité du mouvement. Dans le domaine recouvrant les approches qualitatives du temps et de l'espace, où la densité, par définition, ne peut avoir sa place puisque l'objectif est de ne faire que les distinctions pertinentes pour les tâches visées, la notion de continuité a fait son entrée pour caractériser certaines relations intuitivement “proches”. Par exemple dans la théorie d'Allen, les relations “before” et “meets” décrivent deux situations plus proches l'une de l'autre que deux situations décrites par “before” et “after” par exemple, dans le sens où un changement dans la situation est perçu comme moindre dans le premier cas que dans le deuxième. Spatialement, cette notion de “voisinage”, qui reste conceptuelle quand il s'agit du temps, a une interprétation évidente ; elle correspond à un changement de relations spatiales : un mouvement. Elle se traduit alors par le fait que certains changement de relations spatiales ne peuvent se produire sans passer par des états intermédiaires. Par exemple, une région de l'espace qui se déplace ne peut instantanément passer d'un état où elle est déconnectée d'une autre région à un état où elle fait partie de cette région. La figure 2.5 montre les voisinages conceptuels de RCC8. Elle correspond au fait que pour deux objets de la théorie (donc deux régions fermées), les transitions “possibles” entre deux états du monde (où une relation RCC8 relie deux régions) sont contraints par le graphe. Introduit pour la première fois par [CUI 92], ce graphe a été étudié plus en détail par [GAL 93] qui a combiné une logique temporelle et RCC8 pour modéliser ces propriétés. Nous allons dans un premier temps présenter cette combinaison entre

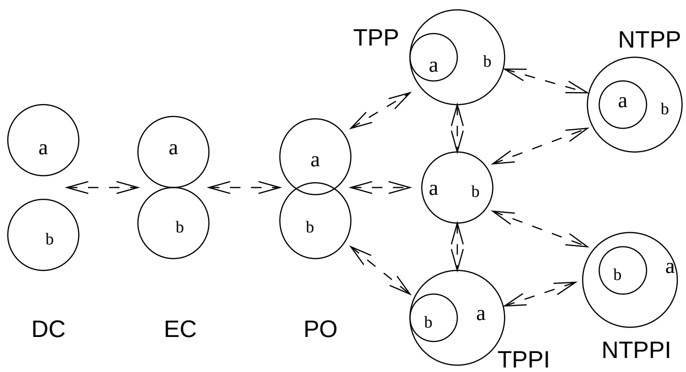

Figure 2.5. *Voisinages conceptuels de RCC8*

logique temporelle et logique de l'espace, avant de voir comment la démarche peut être inversée en définissant des logiques de l'espace-temps à partir desquelles on peut définir temps et espace.

2.5.3. *Combiner espace et temps*

La première tentative de considérer le mouvement d'un point de vue qualitatif dans le cadre des théories de l'espace à base de régions est due à Galton [GAL 93], qui y a vu une occasion de défendre ses vues sur une théorie plus générale du temps et de l'action, telle qu'il l'avait déjà défendue dans [GAL 90]. Il se base sur une topologie de régions qualitative inspirée de RCC8. Dans son approche l'espace est distinct des objets matériels qui l'occupent, ainsi les relations portent entre des positions occupées par des objets (on retrouve là une distinction classique liée à l'existence d'un espace absolu), par exemple :
DC$(pos(objet_1), pos(objet_2))$ ou TPP$(region_1, pos(objet_2))$
expriment des relations entre les régions occupées dans l'espace par deux objets, ou entre une région et la position d'un objet. Il y a donc un typage de la théorie entre régions et objets, mis en correspondance par la fonction pos.

Galton combine cette théorie spatiale avec une théorie temporelle, inspirée des formalismes de modélisation de l'action, plus directement de la théorie de l'action et du temps de [ALL 84]. Les entités primitives de Galton sont des instants et des intervalles, et il remplace en conséquence le prédicat holds qui exprimait la vérité d'une proposition sur un intervalle par les trois prédicats holds_on, holds_at, holds_in. Par exemple,

> holds_on$(DC(pos(b), r_1), i)$ exprime que les deux régions $pos(b)$ et r_1 sont séparées pendant tout l'intervalle i.

De plus les relations suivantes peuvent exister entre instants et intervalles : $Div(t, i)$ exprime que l'instant t est incident à l'intervalle i ; $begin(t, i)$ et $end(t, i)$ expriment respectivement que t commence (respectivement finit) l'intervalle i. On désigne de plus par $sup(i)$ et $inf(i)$ les instants correspondant au début ou à la fin d'un intervalle i. On désigne enfin par (t, t') l'intervalle commencé par t et fini par t' (les intervalles doivent être interprétés comme n'incluant par leur début et leur fin, ce qui est l'interprétation normale du calcul d'Allen). La relation d'ordre temporel est désignée par $<$.

Cependant l'objectif central du travail de Galton est l'étude de la continuité du mouvement et de ce qu'elle implique dans un tel cadre au niveau des transitions et des mouvements acceptables. Il remarque en effet que certains états ne peuvent être valables sur un intervalle ouvert sans l'être aussi sur un intervalle de temps contenant ses extrémités (que l'on pense au contact externe)–et ils les nomme *états de position*, alors que d'autres états peuvent n'être valables que sur un ouvert, et donc ne peuvent l'être pendant un instant sans l'être aussi sur un ouvert contenant cet instant – ces états sont nommés états de mouvement. Formellement cela donne :

Pour un état de position s

$$\text{holds\_on}(s,i) \rightarrow (\text{holds\_at}(s, inf(i)) \ \wedge \ \text{holds\_at}(s, sup(i)))$$

Pour un état de mouvement s

$$\text{holds\_at}(s,t) \rightarrow \exists i \ (\text{Div(t,i)} \ \wedge \ \text{holds\_on}(s,i))$$

Le modèle temporel comprend de plus les axiomes suivants :

$$\text{holds\_on}(s,(t_1,t_2)) \ \wedge \ \neg\text{holds\_at}(s,t_3) \ \wedge \ t_2 < t_3 \rightarrow \exists t \ (\text{holds\_on}(s,(t_1,t)) \ \wedge \ \forall t'(t < t' \rightarrow \neg\text{holds\_on}(s,(t,t'))))$$

$$\text{holds\_on}(s,(t_1,t_2)) \ \wedge \ \neg\text{holds\_at}(s,t_3) \ \wedge \ t_3 < t_1 \rightarrow \exists t \ (\text{holds\_on}(s,(t,t_1)) \ \wedge \ \forall t'(t' < t \rightarrow \neg\text{holds\_on}(s,(t',t_1))))$$

Ils correspondent à l'existence de bornes supérieure et inférieure caractérisant la vérité d'une proposition sur un intervalle. Ensuite, pour exprimer la continuité du mouvement, Galton affirme que seules certaines transitions sont possibles successivement entre relations (c'est à dire avec $\text{holds\_on}(R_1,i) \ \wedge \ \text{holds\_on}(R_2,j) \ \wedge \ i$ meets j) ; il dit alors que R_1 et R_2 sont des *perturbations* possibles l'une de l'autre. Pour correspondre à la continuité des mouvement d'objets physiques rigides, sa théorie doit alors exprimer la possibilité des perturbations montrée table 2.1 (R_i est une perturbation possible de R).

Galton a ainsi indiqué qu'une caractérisation (partielle) de certaines propriétés intuitives du changement spatial pouvaient s'exprimer dans un cadre uniquement topologique ou méréo-topologique, pourvu que l'on dispose de suffisamment d'informations sur le monde théorisé. Malheureusement [GAL 95b] a montré que cette information (les schémas de perturbation) était différente suivant le nombre d'objets que l'on considère. D'autre part les contraintes sur chaque transition doivent être listées extensivement.

R	R_i
DC	DC, EC
EC	DC, EC, PO
PO	EC, PO, TPP, TPP^{-1}
TPP	PO, TPP, NTPP
NTPP	TPP, NTPP
TPP^{-1}	PO, TPP^{-1}, NTPP^{-1}
NTPP^{-1}	TPP^{-1}, NTPP^{-1}

Tableau 2.1. *Schéma de perturbations de RCC8 pour deux objets*

2.5.3.0.1.

Plus récemment [GER 02] a étudié quelques formes de raisonnement combinant théories qualitatives pour le temps (le calcul sur des intervalles d'Allen) et pour l'espace (utilisant 8 les relations méréo-topologiques maintenant connues sous le nom de RCC8). Dans ce cadre, les relations sont valables sur un intervalle d'Allen, par exemple "I :(X DC Y)" indique que la relation DC est valable entre X et Y pendant l'intervalle I, et l'enjeu est d'inférer des contraintes définies sur un ensemble d'intervalles. Il n'y a pas d'axiomatisation logique pour contraindre les changements possibles dans cette approche : les modèles sont restreints explicitement par combinaison des algèbres d'Allen et de RCC8.

2.5.4. *L'espace-temps comme primitive*

Nous avons vu certaines raisons pour lesquelles, pour pouvoir capturer les aspects qualitatifs du raisonnement de sens commun, il était intéressant de considérer des relations sur des primitives étendues (les régions de l'espace) plutôt que sur des points sans dimension ; cela permet en effet de caractériser l'information de façon plus globale et donc avec un niveau approprié de sous-spécification qui se prête bien aux changements de granularité par exemple.

Nous avons vu au chapitre précédent un éventail de théories méréo-topologiques, considérées comme des théories de l'espace d'un point de vue statique. Certaines de ces théories étaient considérées par leurs auteurs comme traitant d'entités spatio-temporelles ; nous allons maintenant voir comment le lien est assuré entre les aspects topologiques et les propriétés temporelles représentées sur ces entités spatio-temporelles. Essentiellement, il s'agit des axiomatisations de [CLA 85], [VIE 91] et [MUL 98a].

Clarke, en plus de la connexion, avait introduit un prédicat temporel B (pour "before") dans [CLA 85]. Cette relation est axiomatisée comme suit (les axiomes sont séparés et réécrits pour aider la lecture), en plus des axiomes méréotopologique :

$$\neg \mathrm{B}(x, x)$$

$$(\mathrm{B}(x, y) \wedge \mathrm{B}(y, z)) \rightarrow \mathrm{B}(x, z)$$

$$\mathrm{B}(x, y) \rightarrow \neg \mathrm{C}(x, y)$$

$$\mathrm{B}(x, y) \rightarrow \forall z \forall w (\mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}wy) \rightarrow \mathrm{B}zw$$

Les deux premiers axiomes définissent un ordre partiel strict, le troisième assure que la connexion et la relation *before* sont incompatibles et le dernier assure que si deux entités sont ordonnées dans le temps, leurs parties sont ordonnées pareillement. Malheureusement, de même qu'on ne peut axiomatiser une logique d'intervalles avec $<$ seulement, on ne peut capturer l'ordre de régions spatio-temporelles avec uniquement un ordre temporel ; cette théorie reste très sous-spécifiée et Clarke n'a d'ailleurs pas caractérisé les modèles de cette axiomatisation spatio-temporelle.

Afin de développer une véritable topologie spatio-temporelle Vieu a corrigé certains aspects de la théorie de Clarke. Elle fait l'hypothèse que toute relation spatiale est en fait spatio-temporelle (l'expression d'une relation spatiale même "statique" prend toujours du temps). Vieu reprend donc les axiomes de la logique d'événements de Kamp, les régions de l'espace-temps étant assimilées à des événements (ce qui se réduit dans ce cas au fait qu'ils ont une étendue temporelle et que deux entités peuvent être temporellement équivalentes sans pour autant être égales). Deux primitives temporelles sont donc ajoutées à la théorie méréo-topologique, une relation d'ordre $<$ semblable au "before" de Clarke et une relation de recouvrement temporel σ. Et il faut alors spécifier quels sont les liens entre les relations temporelles et la relation de connexion :

$\mathrm{C}(x, y) \rightarrow x\sigma y$
Deux entités connectées partagent leurs extensions temporelles.

$(x < y \wedge \mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}ty) \rightarrow z < t$
L'ordre est conservé sur les parties (axiome identique à celui de Clarke).

$(x\sigma y \wedge \mathrm{P}(x, z) \wedge \mathrm{P}yt) \rightarrow z\sigma t$
L'recouvrement se transmet aux entités contenant deux entités en recouvrement.

$(x < y \;\wedge\; z < y) \rightarrow (x + z) < y$

$(x + y)\sigma z \leftrightarrow \; x\sigma z \;\vee\; y\sigma z$

Si l'on revient alors sur les axiomes de Vieu, il faut noter que seule la partie "purement" topologique a des modèles clairement caractérisés dans [ASH 95] : les axiomes temporels ne sont pas considérés.

Ce modèle n'a pas été utilisé pour représenter des concepts purement de mouvement, néanmoins, il présente des côtés intéressants à plusieurs titres dans cette perspective : il corrige la topologie de Clarke pour l'espace-temps en incorporant réellement des relations temporelles, certes encore de façon insuffisante. Il a été pris comme base pour aller vers une formalisation réelle des "histoires" de Hayes [HAY 85] dans [MUL 98a].

Un autre aspect qui reste mal étudié dans ce cadre est celle de la temporalisation des relations entre objets. Il faut en effet une caractérisation explicite des parties temporelles d'objets que l'on veut pouvoir localiser les unes par rapport aux autres.

Dans cette perspective, la théorie de [MUL 98b, MUL 02] reprend l'axiomatisation de [VIE 91], en précisant les liens exacts entre espace-temps (par la topologie) et temps (par les relations temporelles). De plus, une notion d'épisode temporel d'objet (ou tranche temporelle) est introduite, qui permet d'exprimer des relations évoluant avec le temps.

$$\mathrm{TS}(x, y) \triangleq \mathrm{P}(x, y) \wedge \forall z\ ((\mathrm{P}zy \wedge z \subseteq_t x) \rightarrow \mathrm{P}zx)$$

Avec ces définitions, on peut alors parler de relations "spatiales" (ce sont des relations liant des tranches temporelles d'objets, valables pour toute tranche dans un intervalle de temps donné). Cette théorie permet une redéfinition purement méréo-topologique d'un notion de "continuité" d'histoire spatio-temporelle avec laquelle il est possible de montrer certaines contraintes entre relations spatiales équivalentes au graphe de voisinages conceptuels présenté figure 2.5. La définition de cette continuité nécessiterait l'exposé complet de l'axiomatique, on se contentera ici d'en donner l'idée de façon imagée. Considérant par exemple, la figure 2.6 on peut définir une notion de continuité faible qui exclue les histoires telles que $x + u + v$ car u en est une partie qui se déconnecte "instantanément" de l'épisode précédent (x) de l'objet $x + u + v$ La première représentation de cette propriété [MUL 98b] étant trop

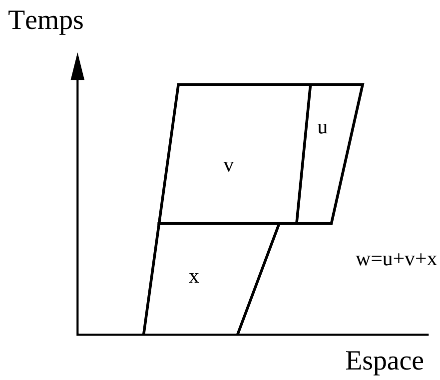

Figure 2.6.

faible, des travaux dans la lignée de cette étude proposent des axiomatisations différentes de la notion d'espace-temps considéré comme primitive. Davis [DAV 01] considère une axiomatique qui réintroduit la notion de points temporels, pour boucher les trous de [MUL 98b], donnant une théorie mixte et plus complexe. Hazarika et Cohn [COH 01] définissent les mêmes notions à partir de l'axiomatique de RCC8 combinée aux axiomes temporels de [MUL 98b], et étendent les catégories de changements que l'on peut définir dans un tel cadre. Enfin, [MUL 02] corrige certaines faiblesses de la formalisation initiale, pour définir plusieurs niveaux de continuité qualitative (supposant des formes de changements différentes).

Stell et West [STE 04] redéfinissent une méréologie temporalisée en utilisant des primitives différentes (des treillis de Galois) pour retrouver des propriétés similaires sur des histoires spatio-temporelles (la topologie en moins).

On peut aussi rapprocher des travaux présentés ci-dessus quelques études réalisées dans une perspective plutôt orientée vers les systèmes d'information géographiques (SIG). Il y a dans ce domaine un besoin d'outils de représentation (notamment d'une façon qualitative) de données spatiales changeantes, et quelques tentatives ont émergé pour donner une base théorique à de tels outils [TØS 01]. Hormis Galton qui a fait le lien entre ses travaux et les préoccupations des SIG [GAL 95b], on peut citer [HOR 97] qui apporte une classification de phénomènes intéressants qualitativement (comme la fusion d'entités, la séparation, l'agrandissement, etc, généralement sur des entités géographiques : pays, forêts, terrains, etc). Dans le même ordre d'idée [CLA 97] propose une caractérisation formelle de changements de ce type sur des entités géographiques en les exprimant par rapport à des projections des états successifs dans un espace 2D. Ainsi la fusion de deux entités par exemple est caractérisée par le fait que leur union est inchangée entre les deux états considérés et que les frontières de l'union sont inchangées. On voit que ceci est insuffisant, et les propriétés inférentielles ne sont pas du tout étudiées, bien que la combinaison d'informations de ce type soit nécessaire pour représenter tous les cas de changements possibles. Dans la même lignée on peut citer aussi [ERW 02] qui a présenté une spécification d'un langage de représentation et de requêtes pour des systèmes d'information géographique avec une composante temporelle, limitée à ce que peuvent exprimer les modèles d'Egenhofer (donc des trajectoires spatio-temporelles convexes). Ces auteurs ne présentent pas de caractérisation formelle des prédicats utilisés, construits à partir de représentations géométriques ponctuelles.