Chapitre 5

La Continuité

La première impression naïve que nous ayons de la nature et de la matière est celle de la continuité.

David Hilbert.

5.1 Enjeux et problèmes

Nous avons vu au chapitre précédent une logique destinée à caractériser de façon qualitative les structures de l'espace-temps, limitées aux concepts méréo-topologiques. Le pouvoir expressif de cette théorie permet des modèles assez différents, dont beaucoup pourrait difficilement être considérés comme des reflets du sens commun. Nous allons commencer dans ce chapitre à étudier quelles conditions supplémentaires peuvent être considérées comme caractérisant de façon plus adéquate le changement dans l'espace. Différentes sortes de connexité par exemple ont été définies dans la théorie du chapitre précédent : temporelle, spatio-temporelle; sans être des conditions nécessaires sur les objets (une équipe de football par exemple n'est pas connexe spatio-temporellement, alors que la Pologne en tant que pays indépendant n'est pas connexe temporellement), il semble bien que ces propriétés soient des propriétés du monde considéré globalement, et de certains types d'entités.

Une autre propriété semble caractériser quant à elle beaucoup de raisonnement de sens commun, c'est l'évolution graduelle de propriétés spatiales dans le temps et a fortiori de la position et des relations entre entités du monde (problème qui nous concerne ici), ce que l'on désigne généralement sous le nom de "continuité", bien que ce mot recouvre des réalités assez différentes. Ce terme correspond à quelque chose de très formalisé en mathématiques quand il s'applique à certaines structures, les nombres réels notamment, ou bien à certaines applications (au sens mathématique), comme en analyse fonctionnelle (soit en topologie, soit sur des espaces normés). Il y a souvent confusion entre deux propriétés associées aux nombres réels, qui sont la densité et la continuité proprement dite. La densité caractérise également les nombres rationnels. Elle correspond intuitivement à pouvoir faire des distinctions aussi fines que l'on veut entre deux situations. La continuité est une notion diffrente, qui implique qu'il y a exactement un élément d'une structure qui sépare deux parties disjointes et complémentaires (dans le cas des nombres réels cela correspond à la propriété que tout ensemble borné a une borne supérieure et une borne inférieure). Elle correspond à l'absence de "trous" dans la structure considérée.

Mais cette notion est également très présente dans des domaines plus "concrets", bien qu'elle le soit alors de façon plus ou moins implicite et parfois de façon très informelle. Le "changement" spatial inclut souvent une forme ou une autre de continuité spatiale : en linguistique par exemple, nous avons vu que de nombreuses formalisations des unités lexicales liées au mouvement (principalement les verbes de déplacement) traduisent celui-ci comme une fonction du temps vers un ensemble de positions spatiales, alors que de nombreuses descriptions langagières de mouvements ne font intervenir qu'une (*J'ai quitté la banlieue*), voire deux positions occupées par l'entité en mouvement (*J'ai été de Paris à Rome en voiture*), et souvent aucune dans le cas de processus comme *courir deux kilomètres* par exemple. Il y a bien là la volonté d'exprimer que le sens commun des locuteurs va reconstituer une trajectoire propre au déplacement d'un mobile, car les cas de téléportation ne font pas partie de notre quotidien (à part pour les amateurs de Star Trek ou XBlast).

Dans le domaine recouvrant les approches qualitatives du temps et de l'espace, où la densité, par définition, ne peut avoir sa place puisque leur objectif est de ne faire que les distinctions pertinentes pour les tâches visées, la notion de continuité a pourtant fait son entrée pour caractériser certaines relations intuitivement "proches". Par exemple dans la théorie d'Allen, les relations "before" et "meets" décrivent deux situations plus proches l'une de l'autre que deux situations décrites par "before" et "after" par exemple, dans le sens où un changement dans la situation est perçu comme moindre dans le premier cas que dans le deuxième. Spatialement, cette notion de "voisinage", qui reste conceptuelle quand il s'agit du temps, a une interprétation évidente; elle correspond à un changement de relations spatiales : un mouvement. Elle se traduit alors par le fait que certains changement de relations spatiales ne peuvent se produire sans passer par des états intermédiaires. Par exemple, une région de l'espace qui se déplace ne peut instantanément passer d'un état où elle est déconnectée d'une autre région à un état où elle fait partie de cette région. Cette caractéristion des mouvements admissibles par le sens commun reste cependant à un niveau informel dans la mesure où elle n'est jamais exprimée par des propriétés intrinsèques des entités ou des relations qui les caractérisent. Dans son interprétation littérale, elle ne correspond en fait d'ailleurs qu'à la densité de l'espace et du temps, et seul Galton a étudié la signification réelle de la continuité pour une théorie du mouvement d'objets (où en plus de la densité, il n'y a pas de sauts des positions dans l'espace), après la formulation donnée dans (Randell et Cohn, 1989). La notion de "voisinage conceptuel" dont la formulation remonte à (Freksa, 1992) semble cruciale dans ces représentations dans la mesure où elles semblent de plus caractériser des classes de relations qui ont des propriété remarquables d'un point de vue computationnel (parmi les relations de Allen, les relations qui correspondent à des ensembles de relations voisines définissent des sous-ensembles calculables de relations).

La question de la continuité est également une question ontologique centrale. Elle est en effet au coeur du problème fondamental liée à la persistence des objets : quels sont les critères qui permettent d'identifier deux objets observés à deux moments différents, dans la mesure où leurs propriétés ont plus ou moins changé et dans la mesure où certaines de leurs parties sont peut-être différentes. La continuité de l'évolution des objets au cours du temps est parfois considérée comme le critère qui permet d'identifier des observations d'objet, bien que la notion, là encore, reste vague, étant données les nombreuses acceptions que nous avons déjà recensées.

Nous allons voir les différentes conceptions de la continuité qui émergent des domaines où elle apparaît et quelle est la forme qui semble correspondre le plus adéquatement au sens commun; nous proposons une définition dans la théorie spatio-temporelle du chapitre précédent, qui permet de retrouver de nombreuses propriétés attribuées aux formes "affaiblies" de la continuité mathématique que l'on peut trouver dans les théories qualitatives du temps et de l'espace, avec certaines restrictions que nous présentons ensuite. Cette notion nous oblige à regarder en effet d'un peu plus près des propriétés essentielles de la théorie vis à vis des concepts topologiques introduits et vis à vis de certains choix de représentations (présence d'atomes par exemple).

5.2 Différentes définitions de la continuité

Afin de clarifier les notions qui entrent en jeu dans ce chapitre, nous alons faire un rapide tour d'horizon des concepts que recouvrent le mot "continuité" en mathématiques, et ce qui transparaît dans les théories qualitatives de l'espace et du temps.

5.2.1 Continuités mathématiques

Il y a en fait plusieurs notions différentes de la continuité en mathématiques, qui portent d'une part sur des structures (l'objet continu paradigmatique étant l'ensemble des nombres réels) et d'autre part sur des liens entre structures (les fonctions continues). Pour ce qui est du monde sensible, on peut rapprocher la première de propriétés du temps et de l'espace (et elle correspond alors au fait qu'on les conçoit comme infiniment divisible (ce qui est la densité) et dépourvu de "trous" (la continuité proprement dite). La deuxième est à rapprocher de la conception du changement, le changement continu correspondant à des changements sans "sauts", dans le cas du mouvement, sans sauts dans l'espace, ce qui dépend de la représentation que l'on a du temps et de l'espace. Nous allons voir les alternatives que l'on rencontre pour cela avant de voir des visions différentes dans d'autres disciplines concernées par ce concept.

Les nombres réels
La densité sur un ensemble ordonné correspond à la propriété suivante :

$$\forall x \forall y \ (x < y \rightarrow \ \exists z \ x < z < y)$$

La continuité des nombres réels correspond à la propriété supplémentaire suivante (appelée la coupure de Dedekind, du nom du mathématicien qui a le premier caractérisé formellement cette propriété) :

$$\forall A \ ((\forall x, y(Ax \ \wedge \ \neg Ay) \rightarrow \ x < y) \ \wedge \ \exists x \ Ax \ \wedge \ \exists x \ \neg Ax) \\ \rightarrow \ \exists z(\forall u(z < u \rightarrow \ \neg Au) \ \wedge \ \forall u(u < z \rightarrow \ Au))$$

Où A est un prédicat quelconque. En termes d'ensembles on peut l'exprimer de la façon suivante : un ensemble $(E, <)$ a la propriété de continuité si quand il est partitionné en deux ensembles disjoints G et D tel que $\forall x \in G \ \forall y \in D \ (x < y)$ alors soit G a un plus grand élément, soit D a un plus petit élément, mais pas les deux à la fois (ici l'ensemble G correspond à A et D à $\neg A$, dans la définition précédente).
Intuitivement cela correspond à ce qu'il existe exactement un point qui divise une partition de l'ensemble, ce qui n'est pas vrai sur l'ensemble des rationnels (par exemple avec $Ax \triangleq x^2 < 2$) :la densité est différente de la continuité [1]. La nature de cette propriété (second ordre) la rend difficilement manipulable telle quelle de façon logique, mais les propriétés associées à cette notion (voir les fonctions continues plus bas) la rend plus attrayante d'un point de vue mathématique (existence de limites, possibilités de dérivation, d'intégration, ce qui permet tous les calculs à la base de la physique moderne).

1. Il faut noter que l'ensemble des entiers relatifs vérifie la propriété de Dedekind mais pas celle de densité.

Les fonctions continues La continuité caractérise également en mathématiques le comportement de fonctions qui respectent les propriétés suivantes :

Dans un espace métrique E muni d'une distance d_E, une fonction continue f dont le domaine est un espace F, muni d'une distance d_F, vérifie la propriété suivante :

$$\forall x_0 \in F\ \forall \varepsilon > 0\ (\exists \alpha (\forall x \in F d(x, x_0) < \alpha \rightarrow\ d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)))$$

Les distances étant des fonction de $E \times E$ ou $F \times F$ vers $\mathbf{R}^+$. Cette propriété exprime en fait que la fonction préserve la propriété de continuité de Dedekind entre deux ensembles.

Dans un espace topologique T une fonction continue est une fonction pour laquelle l'image réciproque d'un ouvert est toujours un ouvert, ce qui constitue une caractérisation plus générale que dans un espace métrique. Plus intuitivement, une définition équivalente peut être donnée en termes de voisinages topologiques : une fonction f de E vers F est continue si quand un point x de E est "proche" de $A \subset E$ (au sens topologique, c'est à dire que tout voisinage de x intersecte A), alors $f(x)$ est proche de $f(A)$. Rappelons qu'un ensemble $V \subset E$ est un voisinage de x s'il existe un ouvert contenant x et inclus dans V.

Dans la vision de la physique classique où l'espace est absolu, le temps est assimilé à $\mathbf{R}$ et l'espace à $\mathbf{R}^3$, chacun muni d'une distance euclidienne, et la continuité d'un mouvement est donc la continuité de la fonction de mouvement qui à chaque instant de la droite réelle associe une position dans $\mathbf{R}^3$.

5.2.2 Voisinages conceptuels et continuité

La question de la continuité est une question centrale pour le raisonnement de sens commun et est l'objet de débats contradictoires entre les partisans de différentes théories de l'action et du changement (et pas seulement spatial), comme il est au centre du problème de la représentation du temps. On a vu qu'il justifiait partiellement certains choix ontologiques à propos du temps (la représentation sous forme d'instants ou bien d'intervalles). Un problème central des ces représentations est la question de l'instant diviseur (dividing instant) qui définit le changement d'une propriété du monde. En effet, pour pouvoir parler d'instant diviseur dans une représentation à base de points, il faut la propriété de Dedekind. Et dans le cas d'une ontologie basée sur des intervalles, comment caractériser ce qui se passe au moment de transition entre deux intervalles exprimant deux propriétés contradictoires ?
Ces problèmes ont bien sûr une incidence sur les questions spatiales qui en sont un cas particulier où les événements sont des mouvements. Mais il se pose alors le problème supplémentaire de la nature de l'espace qui est le siège de ces mouvements; le problème de la structure du temps se reflète sur la structure de l'espace : discret ou continu ?
Dans le cas de représentations qualitatives de l'espace, la notion de fonctions continues sur les réels perd son sens puisqu'on ne veut justement faire que les distinctions pertinentes par rapport à son objectif; cela signifie par exemple que l'on peut ne s'intéresser qu'aux relations de connexion de régions de l'espace (topologiques) ou de partie à tout (méréologie). Même la notion plus faible de densité ne peut alors avoir la même signification. Entre deux situations successives différentes il n'y a pas forcément de situations intermédiaires : que pourrait-il (devrait-il ?) y avoir par exemple entre une connexion suivie d'une non connexion ?
En fait certaines propriétés sont intuitivement nécessaires pour pouvoir prétendre formaliser des notions naturelles même dans ce cadre simplifié par rapport aux notions de physique classique. Par

exemple un objet situé à l'intérieur d'une région doit franchir la frontière de cette région avant d'en sortir; dans une théorie méréo-topologique cela signifie que deux individus ne peuvent être partie l'un de l'autre puis déconnectés sans être en recouvrement partiel à un moment où à un autre. Cette notion intuitive quand on a en tête une interprétation des théories qualitatives de l'espace dans un espace métrique correspond au rapprochement continu de deux régions dans un espace métrique. D'une façon similaire, les représentations qualitatives du temps (qui n'est après tout qu'un espace à une dimension) utilisent des relations dont certaines sont perçues intuitivement comme moins "différentes" que d'autres. Sur la base de cette observation Freksa (Freksa, 1992) a suggéré la notion de "voisinages conceptuels" de relations. Ces voisinages sont conceptuels dans le cas du temps dans la mesure où ils correspondent à des "déplacements" mentaux d'intervalles temporels les uns par rapport aux autres. Si on considère les intervalles comme des segments susceptibles de se translater et de changer de taille les uns par rapport aux autres, les transitions possibles de façon "continue" correspondent alors aux arcs du graphe de relations du schéma figure 5.1. Dans l'absolu, l'intérêt d'une telle représentation peut être

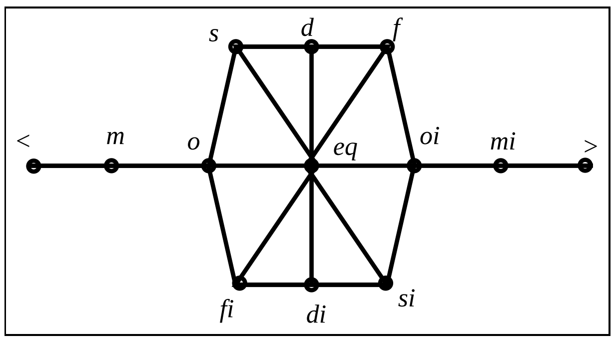

FIG. 5.1 - *Voisinages conceptuels des relations de Allen*

discuté : à quoi correspond ce changement conceptuel dans la représentation des relations entre intervalles temporels ? De plus plusieurs graphes de transitions sont également valables si l'on contraint différemment le type de changement considéré : si on considère que les intervalles peuvent être déplacer les uns par rapports aux autres mais ne peuvent pas changer de taille, alors certains arcs doivent disparaître (entre d et eq, entre di et eq, entre o,oi et eq) et d'autres dépendent de la taille des intervalles (f, d et s impliquent bien sûr que le premier est plus petit que le second). Un autre choix qui est parfois effectué est de restreindre les évolutions possibles à des segments dont les centres ne bougent pas mais dont la taille varie, et là encore le graphe doit être modifié. Dans la mesure où la réalité de ces changements n'est pas claire, comment déterminer ce qui est le plus raisonnable ? Euzenat (Euzenat, 1995) interprète ces changements de représentation comme des changements de granularité dans la représentation temporelle, dans le cas où les informations sont incertaines. Dans ce cas, les changements doivent en effet être limités de préférence à des relations "voisines". Un autre intérêt de ce type de graphe est de fournir une base de relations pour raisonner de façon calculable sur des représentations temporelles, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut.

Dans le cas de l'espace, où les théories méréo-topologiques offrent des relations analogues à celles de Allen en abandonnant l'ordre, l'interprétation du changement est toute trouvée et n'est plus seulement conceptuelle : elle peut être interprétée comme un changement des relations spatiales entre objets *au cours du temps*. Le graphe de voisinages conceptuels limite alors les transitions à certains types de changement, montrés figure 5.2.

Sur la base de ce graphe de transition, (Cui *et al.*, 1992) ont développé notamment un système de simulation d'évolutions dans l'espace d'organismes cellulaires; le modèle temporel associé y est discret, ce qui n'est possible que si les changements simulés sont assez lents par rapport à l'incrément temporel qui sépare deux instants. L'inconvénient évident de l'utilisation qui est faite de la notion de transition permise est évidemment de fixer la granularité temporelle nécessaire à un comportement satisfaisant des évolutions des relations spatiales utilisées dans de tels systèmes, ce qui rend l'utilisation très dépendante de la tâche particulière visée.

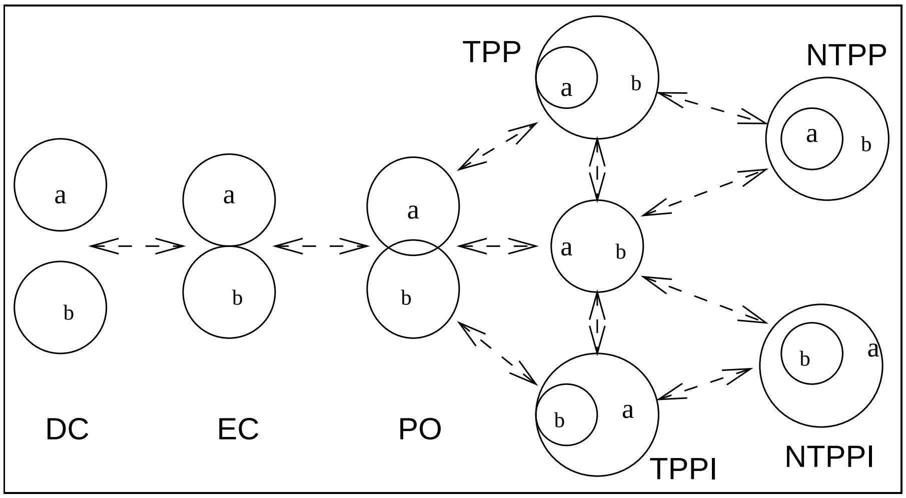

FIG. 5.2 - *Voisinages conceptuels de RCC8*

5.2.3 La Quasi-continuité de Galton

Jusque là, la notion de continuité utilisée par certaines théories de l'espace et du temps reste très informelle. Au niveau temporel, elle est liée à un problème qui se posent à beaucoup de théories est de savoir ce qui se passe à l'instant où une propriété change de valeur : la propriété est elle vraie ou fausse à l'instant du changement ? C'est ce qui est nommé "le problème de l'instant diviseur" ou Dividing Instant Problem. La théorie de Allen a voulu régler le problème en ne considérant que des propriétés qui sont valides sur des intervalles (ouverts) et refuse de se poser la question de l'instant qui sépare deux intervalles dans ce modèles. Les inconvénients d'une telle simplification sont alors l'impossibilité pour une proposition d'être valable à un seul "instant". Or de tels évènements instantanés sont difficilement écartables. Pour ce qui est du mouvement, si on suppose un ensemble d'objets et de positions qu'ils peuvent occuper dans l'espace (des régions de l'espace remplies par ces objets), comme dans (Shanahan, 1995) ou (Galton, 1993), l'occupation d'une position pendant un instant est nécessaire à l'expression du mouvement; sauf à considérer que les objets font des sauts dans l'espace on ne peut affirmer que s'ils occupent une position ils le font toujours sur un intervalle. Même avec une représentation relationnelle de l'espace et du mouvement, certaines relations spatiales peuvent être considérées comme instantanées (un objet qui vient en contact avec une région par exemple, peut n'entretenir la relation EC avec cette région que pendant un "instant"). C'est pour remédier à ce problème que Galton a modifié le calcul d'intervalles de Allen en ajoutant des points à l'ontologie temporelle de base. Son domaine temporel inclut des intervalles (ouverts) et des points qui terminent ou débutent des intervalles, ou bien sont incidents à des intervalles. Il remarque ensuite que certains états ne peuvent être valables sur un intervalle ouvert sans l'être aussi sur un intervalle de temps contenant ses extrémités (que l'on pense au contact externe, encore une fois)–et ils les nomme *états de position*, alors que d'autres états peuvent n'être valables que sur un ouvert, et donc ne peuvent l'être pendant un instant sans l'être aussi sur un ouvert contenant cet instant – ces états sont nommés états de mouvement. Formellement cela donne, en reprenant les notations déjà vues au chapitre précédent :

Pour un état de position s

$$\mathsf{holds\_on}(s,i) \rightarrow (\mathsf{holds\_at}(s,inf(i)) \wedge \mathsf{holds\_at}(s,sup(i)))$$

Pour un état de mouvement s

$$\mathsf{holds\_at}(s,t) \rightarrow \exists i\ (\mathsf{Div(t,i)} \wedge \mathsf{holds\_on}(s,i))$$

Le modèle temporel comprend de plus les axiomes suivants :

$$\mathsf{holds\_on}(s,(t_1,t_2)) \wedge \neg\mathsf{holds\_at}(s,t_3) \wedge t_2 < t_3 \rightarrow \exists t\ (\mathsf{holds\_on}(s,(t_1,t)) \wedge \forall t'(t < t' \rightarrow \neg\mathsf{holds\_on}(s,(t,t'))))$$

$$\mathsf{holds\_on}(s,(t_1,t_2)) \wedge \neg\mathsf{holds\_at}(s,t_3) \wedge t_3 < t_1 \rightarrow \exists t\ (\mathsf{holds\_on}(s,(t,t_1)) \wedge \forall t'(t' < t \rightarrow \neg\mathsf{holds\_on}(s,(t',t_1))))$$

Ils correspondent à l'existence de bornes supérieure et inférieure caractérisant la vérité d'une proposition sur un intervalle Ces axiomes correspondent donc à peu près à la continuité définie par Dedekind (le calcul d'intervalles autorise ici une certaine forme de second ordre portant sur les propriétés s qui peuvent être affirmées sur un intervalle ou un instant). Ils supposent en effet qu'il existe un instant t' qui fasse la coupure entre s et la négation de s.

Ensuite, pour exprimer la continuité du mouvement, Galton affirme que seules certaines transitions sont possibles successivement entre relations (c'est à dire avec $\mathsf{holds\_on}(R_1,i) \wedge \mathsf{holds\_on}(R_2,j) \wedge i\ \mathsf{m}eets\ j$); il dit alors que R_1 et R_2 sont des *perturbations* possibles l'une de l'autre. Pour correspondre à la continuité des mouvement d'objets physiques rigides, sa théorie doit alors exprimer la possibilité des perturbations montrée table 5.1 (R_i est une perturbation possible de R).

Avec ces notions, introduites dans (Galton, 1993) le problème de l'instant diviseur est réglé dans le

R	R_i
DC	DC, EC
EC	DC, EC, PO
PO	EC, PO, TPP, TPP^{-1}
TPP	PO, TPP, NTPP
NTPP	TPP, NTPP
TPP^{-1}	PO, TPP^{-1}, NTPP^{-1}
NTPP^{-1}	TPP^{-1}, NTPP^{-1}

TAB. 5.1 - *Schéma de perturbations de RCC8 pour deux objets*

cas des prédicats spatiaux appliqués à des objets rigides : un état de position ne peut succéder qu'à lui même ou à un état de mouvement et réciproquement, et à l'instant qui fait la transition, c'est l'état de position qui est valide. En fait, il est impossible de dire qu'un prédicat spatial est dans l'absolu un état de position ou de mouvement : en effet la relation TPP est une relation de position par rapport à NTPP, mais une relation de mouvement par rapport à l'égalité spatiale (par exemple dans le cas d'une partie tangentielle x d'une région y qui se dilaterait pour devenir égale à y). C'est pour cela que Galton a restreint la théorie à des objets rigides. Cependant, même pour des objets rigides, le nombre d'objets vient perturber les notions d'état de mouvement ou de position, et Galton a donc révisé sa théorie dans (Galton, 1995b).

En effet, si l'on considère trois boules de billard qui ne peuvent être mises en relations que par DC ou EC, certains états apparaissent comme des états de position ou de mouvement par rapport à différents états : si l'on nomme A, B et C les trois boules, s_1 l'état où les trois boules sont en contact, s_2 l'état où seules A et B sont en contact, et s_3 l'état où les trois boules sont déconnectées, on voit que s_2 doit être un état de position par rapport à s_3 (le contact entre deux boules doit être instantané par rapport à l'état où les trois sont déconnectées) mais un état de mouvement par rapport à s_1 (pour la même raison). Pour savoir lequel de deux états est valide à un instant de transition entre eux, il faut donc considérer les paires d'états. Galton appelle cela la *dominance* d'un état sur un autre, qui exprime que l'état dominant "s'empare" de l'instant diviseur entre lui et l'état dominé. Pour déterminer la relation de dominance entre deux états il faut donc connaître toutes les relations susceptibles de changer entre les deux, contrairement à ce qu'avait d'abord cru Galton. Par exemple le schéma de dominances avec seulement deux objets est montré figure 5.3, mais le schéma de dominance pour un objet par rapport à deux régions de l'espace (non montré ici, on peut se reporter à (Galton, 1995b)) comporte 31 états possibles pour une cinquantaine d'arcs. L'inconvénient évident de cette constatation est qu'on ne peut

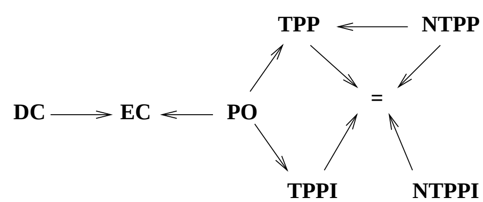

FIG. 5.3 - *Schéma de dominance pour RCC8 et deux objets*

réduire le problème de l'instant diviseur à des propriétés intrinsèques des relations et/ou des objets, ce qui en limite l'exploitabilité. On peut remarquer aussi que même la caractérisation des transitions possibles avec deux objets seulement (objets qui sont de plus considérés comme rigides) nécessite l'expression séparée de chaque perturbation possible (soit 16 axiomes), ce qui est peu économique et rend l'étude des modèles correspondants une tâche difficile (qui n'a d'ailleurs pas été tentée); en particulier rien n'indique que la théorie soit cohérente, même dans sa version modifiée de 95. Il est cependant remarquable que le problème de l'instant diviseur puisse être résolu avec suffisamment d'informations sur le monde théorisé, et que pour arriver à ce résultat on ait besoin de notions *topologiques* dans la théorie temporelle qui sous-tend cette théorie de l'action (même réduite ici au domaine de l'espace), et que l'on ait pas besoin de notions métriques.

5.2.4 Continuité et granularité de la représentation spatiale

Ce qui ressort des études précédentes est en effet que l'on peut exprimer des propriétés assimilables en partie à ce qu'implique la continuité métrique, même dans des théories qui ne permettent pas de distinguer aussi finement que l'on veut les représentations. On peut se demander alors à quoi correspond cette propriété dans sa version qualitative. Une notion importante qui a été associée à la notion de voisinages conceptuels est la granularité de la représentation du monde. La granularité correspond en fait à des échelles de représentation et caractérise des niveaux d'abstraction dans le raisonnement (ce qu'on a pu appeler le raisonnement à profondeur variable (Kayser, 1988)), dans la représentation des entités du monde (Hobbs *et al.*, 1987; Asher et Vieu, 1995; Borgo *et al.*, 1996) ou encore dans l'ensemble des relations liant ces entités (Euzenat, 1995). La granularité correspond au choix de la précision de la représentation qui est nécessaire à une tâche donnée et en ce sens elle est très proche de la notion de représentation qualitative. Les plus petites distinction faites pour un grain donné vont en effet avoir une influence sur ce que l'on considère comme changements spatiaux importants ou non.

Gradations de la continuité Parallèlement à sa caractérisation d'une certaine forme de continuité qualitative sur une théorie méréo-topologique, Galton s'est intéressé aux distinctions que l'on peut faire entre certaines formes de changements spatiaux, continus ou non au sens habituel, mathématique. En observant les types de changements qui peuvent intervenir sur des entités géographiques (Galton, 1997a), il constate que deux changements "continus" au sens mathématiques peuvent correspondre en fait à des comportements qualitativement différents : par exemple l'érosion d'un littoral est un phénomène qui paraît continu pour l'observateur géographique (exemple 1), alors que le rétrécissement d'un isthme qui finit par transformer une presqu'île en île introduit un changement qualitatif (exemple 2), tout en étant aussi graduel que le précédent exemple. Ces deux phénomènes sont en effet eux-mêmes très différents de ce qui se passe lors de la redétermination de frontières entre deux pays, qui est elle discontinue (exemple 3). Il faut remarquer ici que ces notions de continuités sont fortement dépendantes de l'observateur, et donc de l'échelle d'observation, c'est à dire de la granularité de la représentation. La chute d'une partie de falaise maritime est certainement discontinue vue par un promeneur alors qu'elle fait encore partie de ce qu'un géographe considèrerait comme un changement graduel de la côte. Ainsi Galton définit plusieurs distances entre régions de l'espace pour rendre compte de ces différences de comportement, et remarque en passant le lien entre la granularité de la représentation et la perception d'un phénomène continu ou non. Les métriques qu'il utilise sont les suivantes, où ∂R désigne la frontière de R, et δ est la distance euclidienne entre points :

mesure de séparation de frontière

$$\delta_1(R_1, R_2) = \max\left[\sup_{x\in\partial R_1}\left(\inf_{y\in\partial R_2}(\delta(x,y))\right), \sup_{x\in\partial R_2}\left(\inf_{y\in\partial R_1}(\delta(x,y))\right)\right]$$

Les restriction à apporter à cette définition pour qu'elle soit bien celle d'une distance est que les deux régions soient de co-dimension 0 (par exemple. si ce sont deux surfaces, elles sont dans un même plan), et qu'elles soient bornées. Cette distance est la moins "fine" des trois considérées par Galton, dans la mesure où elle ne donne une notion de "proximité" entre deux régions que quand celles-ci sont convexes, ce qui incite Galton à chercher d'autres distances.

mesure de séparation de taille

$$\delta_2(R_1, R_2) = surface((R_1/R_2) \cup (R_2/R_1))$$

Avec A/B dénotant $A \cap \overline{B}$, la différence A-B. La seule distance propre à Galton [2], celle-ci fournit une bonne estimation de proximité de régions de l'espace se recouvrant. Là aussi, il y a certaines restrictions à respecter : les deux régions doivent être de même dimension, et pour fournir une notion intéressante de distance, les régions doivent être également de codimension 0. Dans l'exemple géographique 2 présenté ci-dessus, le changement décrit est "continu" par rapport à cette métrique, alors que le changement exprimé dans l'exemple 3 ne l'est pas.

mesure de séparation d'intérieur

$$\delta_3(R_1, R_2) = \max \left[\sup_{x \in R_1} \left(\inf_{y \in R_2} (\delta(x,y)) \right), \sup_{x \in R_2} \left(\inf_{y \in R_1} (\delta(x,y)) \right) \right]$$

Cette notion est la plus fine des trois distances; c'est la distance de Hausdorff, qui est utilisée en vision et en reconnaissance de forme; elle ne compte comme continu que les changements du type de l'exemple 1 ci-dessus.

Quand on compare ces distances, on voit que la continuité induite par la dernière (appelons la δ_3-continuité est la plus fine et implique la δ_2 continuité (mais pas l'inverse). La continuité ici correspond à la notion métrique vue section 5.2.1. Sur un intervalle de temps $I = (t_1, t_2)$, avec $pos(E, t)$ la région de l'espace occupée par une entité E à l'instant t :

$$\forall t \in I \; \forall \varepsilon > 0 \; (\exists \alpha (\forall t' \in I |t - t'| < \alpha \rightarrow \; \delta_i(pos(E,t), pos(E,t')) < \varepsilon)))$$

Galton constate également que certains changements peuvent être continus selon δ_1 ou δ_2 indépendamment. Il est intéressant de voir pour quelle raison Galton pense que la δ_3-continuité est la notion la plus "intuitivement" proche de la continuité spatiale.

> Why should *int*-continuity [δ_3-continuity] conform better to our intuitions of continuity than the other two kinds ? There is a good reason for this and it is connected with what might be called the atomic theory of spatial change, according to which all spatial change in an object arises from the motion of small parts. It is a natural (though not strictly valid) inference from this that *continuous* spatial change should arise from the continuous motion of small parts.

Ainsi la continuité est bien explicitement liée à une notion de granularité, puisque les atomes d'une théorie définissent les distinctions maximums qui peuvent être faites sur des objets dans cette théorie. Dans le cas considéré ici ce sont des points intérieurs aux régions. Mais Galton n'envisage pas une autre sorte d'atomes que les points sans dimension.
On peut voir comment les différents types de continuité sont perçues, ce qui marque réellement le caractère ambigu et relatif de la continuité intuitive. Par exemple, Galton considère le cas d'une île (ou un archipel) avec l'apparition progressive d'une île à partir de rien à proximité de l'archipel; si l'on considère la région définie par l'archipel, l'évolution est continue pour la distance de taille (δ_2) mais pas pour les deux autres, alors que si l'on considère la région définie par l'étendue d'eau environnante, le changement est continu par rapport à toutes les distances sauf celle basée sur la frontière. On peut expliquer le côté intuitif de cet exemple (la naissance de l'île est plus discutablement continue que la perte

2. Nous avons corrigé la définition de (Galton, 1997a) qui semblait contenir une faute de frappe, puisque la définition de δ_2 impliquait la surface de l'intersection de deux régions nécessairement disjointes.

d'une partie de la surface de l'eau qui l'entoure, en tous cas cela correspond à des formes qualitativement différentes d'évolutions) parce qu'elle met en valeur la différence qualitative qu'est l'apparition d'une partie déconnectée d'une entité. Ainsi l'évolution de la surface de l'eau est par un certain point de vue continu, dans lequel l'évolution de l'archipel n'est pas continu.
On voit l'importance d'une part de l'évolution de parties connectées ou non (ce qui est une notion méréologique *et* topologique), et d'autre part de la multiplicité de points de vue intuitifs sur ce qui constitue un changement spatial "continu". C'est ce qui fait l'intérêt du travail de Galton, bien que l'utilisation de métriques pour modéliser ces évolutions la rende incompatible avec une approche où on ne dispose pas de la représentation numérique explicite des régions de l'espace considérées.

Continuité dans des représentations discrètes Galton parle de quasi-continuité à propos de sa théorie de la section 5.2.3, car les contraintes sur les relations méréo-topologique si elles permettent d'avoir certaines propriétés de la continuité métrique, ne permettent pas de distinguer des situations de façon aussi fine qu'avec une métrique (et ses travaux suivants sur les continuités géographiques montrent bien ce biais dans sa démarche). On peut remarquer cependant qu'il semble faire là une association entre métrique et continuité qui, comme nous l'avons vu plus haut, n'est pas nécessaire. Pourtant les propriétés qu'il impose à la dimension temporelle de sa théorie ressemblent beaucoup à ce que l'on entend par la continuité des réels (l'axiome de transition entre états page 113 est une version de la propriété caractéristique des réels, retranscrite dans la version modifiée du calcul d'intervalles que Galton utilise, qui induit une certaine forme de second ordre); on pourrait considérer alors que dans sa théorie le mouvement est quasi-continu parce qu'il respecte la coupure de Dedekind sur le temps, quand on ne considère que les seuls prédicats spatiaux, par exemple pour 'C' : si deux régions sont connectées puis déconnectées, il existe un instant qui est la borne inférieure et la borne supérieure de ces deux états.
Il serait alors peut-être plus approprié de parler de quasi-continuité dans une structure qui n'impliquerait pas cette propriété de continuité de l'ordre temporel. En particulier on peut se poser la question de l'existence de propriétés analogues avec un ordre temporel dense ou même discret. Il existe en fait une autre version de la "quasi-continuité" dans (Forrest, 1995), avec l'objectif de parler non pas seulement de l'espace tel qu'il est perçu mais de fournir un modèle physique réaliste du monde, et expérimentalement testable, sur la base d'un espace et d'un temps discrets. Forrest tente alors de définir des notions équivalentes aux notions habituelles de mouvement, de continuité, d'orientation, et de montrer qu'elles sont aussi plausibles que celles fondées sur $\mathbb{R}$. Nous ne nous attarderons pas sur les expériences qui permettraient d'infirmer ou de confirmer que ce modèle est celui du monde "réel", mais on note qu'il parvient à donner des équivalents convaincants à des notions de sens commun d'un point de vue intuitif (comme la vitesse et le déplacement continu). Dans son modèle, l'espace est analogue à $\mathbb{Z}^3$, le temps à $\mathbb{Z}$ et donc le seul déplacement continu possible pour un point de matière est de passer d'un emplacement de l'espace à un emplacement voisin pendant un instant (un point temporel). Cela implique (explique ?) que le mouvement de toute particule a une vitesse maximale limite; malheureusement cela semble impliquer que tout mouvement de particule continu en ce sens doive être à cette vitesse d'un point par instant. A la question, comment le mouvement peut-il être continu, tout en permettant des vitesses différentes (ce qui semble un fait observable incontestable), Forrest donne la réponse suivante : par un mouvement avant/arrière perpétuel on peut avoir toutes les vitesses rationnelles possibles; cela implique une redéfinition du concept de quantité de mouvement et de supposer une "tendance" au mouvement chez les particules de matière, mais permet de rendre compte des variations de vitesse. La modélisation adéquate de la réalité physique du mouvement est largement au-delà de nos préoccupations, mais ce que nous retiendrons ici est qu'il n'est pas absurde d'avoir des modèles non standards dis-

crets de l'espace, avec des notions de mouvement et de continuité differentes de celles fondées sur les nombres réelles associés à une métrique, tout en préservant certaines propriétés souhaitables.
Ceci nous a poussé à chercher à exprimer une notion méréo-topologique de continuité qui pourrait formaliser cette notion sur le vocabulaire restreint que constitue la théorie méréo-topologique de l'espace temps présentée au chapitre précédent. Dans la mesure où la continuité, ou la quasi-continuité est une propriété qui semble indissociable de ce que l'on entend par mouvement de sens commun, mais que la continuité mathématique semble une notion trop forte pour notre objectif, nous avons cherché une alternative raisonnable, définissable dans la théorie, par contraste aux approches présentées plus hauts, qui cherche au mieux à caractériser les modèles que devraient avoir au minimum une telle théorie

5.3 Une continuité qualitative

5.3.1 Définition

La continuité à laquelle nous pensons pour caractériser le sens commun est différente de la continuité au sens mathématique puisque celle-ci implique de pouvoir faire des distinctions aussi fines que possible à propos du temps ou de l'espace. Nous cherchons quelque chose de plus qualitatif et qui nous permette malgré tout de retrouver les propriétés essentielles d'une théorie du mouvement (celles des voisinages conceptuels). La continuité que nous introduisons maintenant pour cela peut être exprimée dans la théorie que nous avons présentée et permet de retrouver certaines contraintes sur les transitions de relations, sans avoir pour cela à imposer séparément ces contraintes comme le fait Galton dans (Galton, 1993); nous avons ainsi une caractérisation plus générale du changement continu dans un cadre qualitatif et il est plus simple d'en montrer la cohérence. De plus Galton a restreint sa théorie à des objets rigides, ce qui n'est pas exprimable dans une théorie topologique, et ce qui n'est pas le cas ici.
Informellement, nous proposons de considérer comme continue une trajectoire spatio-temporelle si elle est temporellement connexe et si elle ne comporte pas de "saut spatial", c'est à dire si aucune de ses parties ne peut être en contact temporel avec une tranche temporelle sans être en même temps en contact spatio-temporel (la figure 5.4 illustre un contre exemple; w n'est pas continu à cause de u, qui correspond à un saut qualitatif horizontal). Nous avons déjà parlé d'une version analogue de cette propriété pour l'univers au chapitre 4, en l'appelant "normalité de l'univers". Cela exprime qu'il n'y a pas de déplacement brusque d'un invididu par rapport à un autre, où pas de perte ou de gain soudain d'une partie dans une entité continue (nous nous approchons ainsi de certaines propriétés intuitives de la continuité spatiale soulignée par Galton dans ses travaux de (Galton, 1997a)). Nous avons proposé la définition suivante dans (Muller, 1998b; Muller, 1998a) :

$$\text{CONTINU}w \triangleq \text{CON}_t w \ \wedge\ \forall x \forall u\ ((\text{TS}xw\ \wedge\ x \between u \wedge \text{P}uw) \rightarrow \text{C}xu)$$

Tony Cohn a fait la remarque que cela n'excluait pas les cas où un ouvert apparaissait à la suite d'un fermé en faisant un saut (cf figure 5.5) et cela indique qu'il faudrait corriger la définition comme suit :

D 5.1 $\text{CONTINU}w \triangleq \text{CON}_t w \ \wedge\ \forall x \forall u\ ((\text{TS}xw\ \wedge\ cx \between cu \wedge \text{P}uw) \rightarrow \text{C}cxcu)$

Pour les raisonnements de sens commun qui nous intéressent, on peut vouloir imposer que l'univers lui-même (a) soit continu, ce qui correspond aux notions combinées de connexité temporelle et de normalité de l'univers, vues au chapitre 4. Nous allons ici appliquer ces notions à des entités de l'univers et plus seulement à l'univers lui-même.

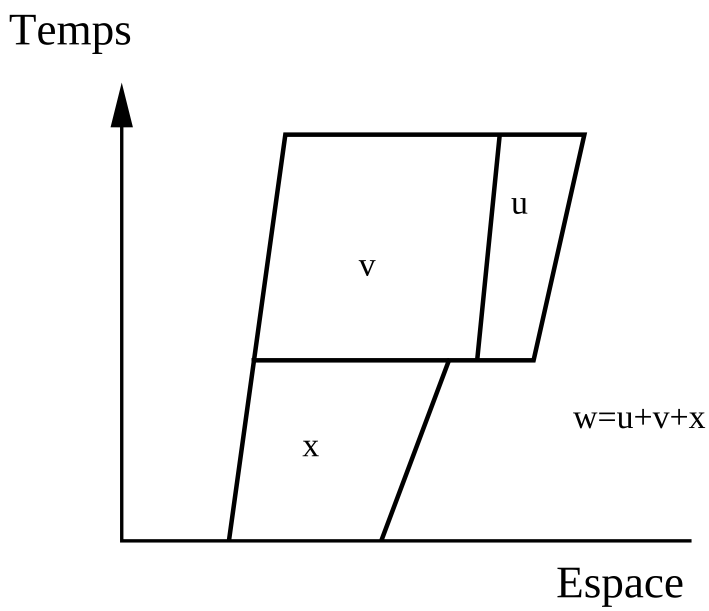

FIG. 5.4 - *Une région non continue*

Si nous reprenons certains des exemples de Galton (1997b), on peut voir qu'avec cette définition on considère comme non continues les transformations d'entités où il y a une perte ou un gain "soudain" d'entités, ou bien quand il y a une perte, même graduelle, d'une composante connexe, comme dans l'exemple de l'apparition/disparition d'une île dans l'océan. On voit en effet figure 5.6, si on considère l'île comme constituée dans un premier temps par une portion d'espace-temps x_1, puis par deux portions déconnectées x_2 et x_3, (et posons pour simplifier $x = x_1 + x_2 + x_3$), on a bien :

$$\mathrm{TS}x_1 x \wedge \mathrm{P}x_3 x \ \wedge \ cx_1 \lessgtr cx_3$$

Mais on a $\neg \mathrm{C}x_1 x_3$, et donc l'histoire de l'île n'est pas continue. Par contre on voit sur la trajectoire de droite l'histoire de l'eau environnant l'île (y) et cette trajectoire est bien continue : aucune partie n'apparaît ou ne disparaît soudainement. Notre définition explique ainsi cette intuition remarquée par Galton, sans ici recourir à des définitions différentes de la continuité. Nous pensons que cela semble indiquer le bien fondé intuitif de cette continuité qualitative.

Un autre moyen de vérifier si cette définition est intéressante était de vérifier si elle permet de retrouver les transitions continues du graphe de voisinages conceptuels de relations spatiales. Nous avions montré quelques propriétés sur cette définition de la continuité dans (Muller, 1998a) qui semblait indiquer que cela était le cas. Pour pouvoir comparer avec les voisinages conceptuels de RCC8, il faut pouvoir définir des équivalents aux relations spatiales et exprimer que ces relations existent entre deux entités pendant une certaine durée, puis vérifier que les transitions dans le temps entre deux relations "spatiales" n'étaient pas continues pour les relations non voisines. Ceci nous avait permis de montrer l'importance des atomes dans la définition de la continuité ; malheureusement le contexte de comparaison entre les relations "spatiales" de RCC8 et les notres était approximatif. Par exemple pour montrer l'impossibilité d'une transition continue entre DC et PO (spatiaux), nous avions considéré les tranches

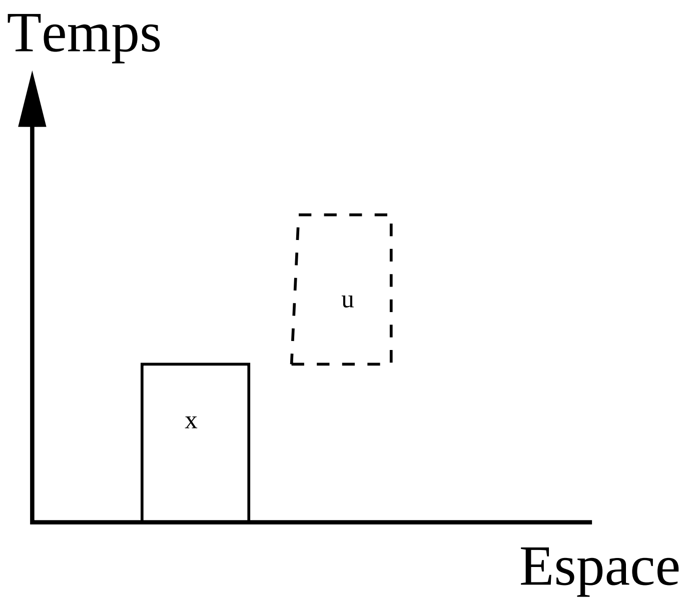

FIG. 5.5 - *Un cas limite: un ouvert u téléporté.*

successives d'une seule des deux entités concernées, et les hypothèses du théorème présenté étaient plus fortes que ce qu'il aurait fallu pour avoir vraiment montré ce que l'on se proposait de faire :

$$(\mathrm{TS}xw \wedge \mathrm{P}yw \wedge \mathrm{DC}xz \wedge \mathrm{O}_{sp}yz \ \wedge \ x \asymp y) \rightarrow \ \neg \mathrm{CONTINU}w$$

Pour pouvoir vraiment comparer avec les voisinages conceptuels, il aurait fallu des hypothèses de départ plutôt comme suit :

$\mathrm{TS}x_1w \wedge \mathrm{TS}z_1z \wedge \mathrm{DC}x_1z_1 \ \wedge \ x_1 \equiv_t z_1$ pour exprimer la relation spatiale DC entre w et z pendant un intervalle de temps.

$\mathrm{TS}x_2w \wedge \mathrm{TS}z_2z \wedge \mathrm{O}x_2z_2 \ \wedge \ x_2 \equiv_t z_2 \ \wedge \ x_2 \cdot z_2 \equiv_t x_2$ pour exprimer la relation spatiale O entre w et z pendant un intervalle de temps.

$x_1 \asymp x_2$ pour indiquer que ces deux intervalles se touchaient.

En reprenant donc rigoureusement ce cadre de comparaison, on peut s'apercevoir que certaines transitions continues suivant la définition violent certaines impossibilités du graphe de voisinages, (cf. figure 5.7 où une région $x_1 + x_2$ passe d'une relation spatiale PP à une relation EC spatiale vis à vis de y). Ici une région (x) se réduit à un point pour croître à nouveau ce qui est possible si on n'exclut pas les formes de la figure 5.8. Il nous faut donc une notion plus forte que la simple connexité spatio-temporelle pour caractériser des déplacements continus. La trajectoire montrée figure 5.8 (une sorte de noeud papillon temporel) est en effet connexe temporellement, mais on a vu qu'elle peut faire des sauts dans le graphe de transition que l'on voudrait interdire. Pour éviter cela on peut introduire une notion de “connexion forte” entre deux entités (illustrée figure 5.9). Elle correspond intuitivement à une connection par plus d'un “point”, et on peut en donner la définition suivante :

D 5.2 $\mathrm{SC}xy \triangleq \mathrm{C}xy \ \wedge \ \exists z \ (\mathrm{NTP}cz(x+y) \wedge \mathrm{O}zx \wedge \mathrm{O}zy \wedge \mathrm{CON}z)$

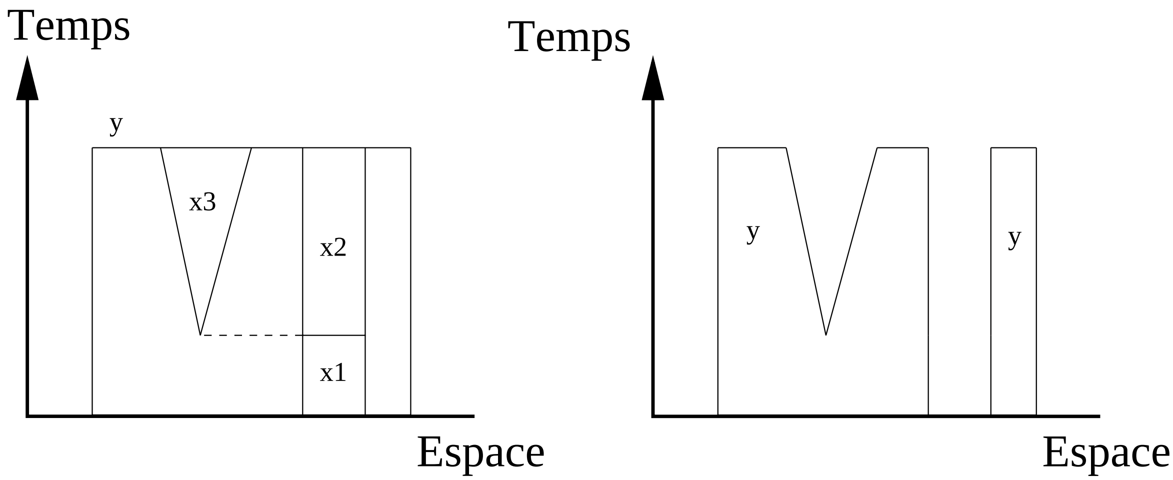

FIG. 5.6 - *Création d'un archipel et continuité.*

Et on peut définir une notion de région fortement connectée de façon analogue à la connexité simple [3] :

D 5.3 SR$x \triangleq \forall x_1 \forall x_2 \ (x = x_1 + x_2 \rightarrow \text{SC}cx_1cx_2)$

Maintenant pour définir une notion de continuité plus forte, il faut interdire les sauts de partie non fortement connectées, et avoir des régions temporellement fortement connectées et on peut donc prendre les définitions suivantes, la relation STC étant une notion de connexité temporelle forte nécessaire pour caractériser des contacts temporels par plus d'un "point" (figure 5.10) :

D 5.4 STC$xy \triangleq \text{SC}(a/x)y \wedge \text{SC}x(a/y)$

En effet si y et la tranche d'univers correspondant à x sont fortement connectées, cela correspond à un contact par plus d'un point donc un contact temporel par plus d'un point (sur la figure z_1 est l'entité qui montre que a/x et y sont fortement connectées et z_2 correspond à la connection x et a/y). Et la notion de région temporellement fortement connectée étant alors définie comme suit :

D 5.5 STCR$x \triangleq \forall x_1 \forall x_2 \ (x = x_1 + x_2 \rightarrow \text{STC}cx_1cx_2)$

Une nouvelle continuité renforcée peut donc être introduite :

D 5.6 CONTINU$_2 w \triangleq \text{STCR}w \ \wedge \ \forall x \forall u \ ((\text{TS}xw \ \wedge \ cx \between cu \wedge \text{P}uw) \rightarrow \text{C}xu)$

On voit aussi que la nouvelle définition de la continuité implique l'ancienne (tout ce qui est continu dans le dernier cas l'est dans le premier) et que l'exemple de l'île page 119 est toujours représenté de la même façon [4].

3. Correspondant à la notion de "simple region" dans (Borgo *et al.*, 1996), prise comme primitive, et que l'on peut aussi définir dans RCC, cf. (Bennett, 1996) où ceci est fait en définissant d'abord une région fortement connectée *via* une notion d'ouvert. La connection forte entre deux régions est alors définie en spécifiant que leur somme est fortement connectée.

4. En particulier, la mer (y), bien que non connexe spatio-temporellement, est fortement connexe temporellement.

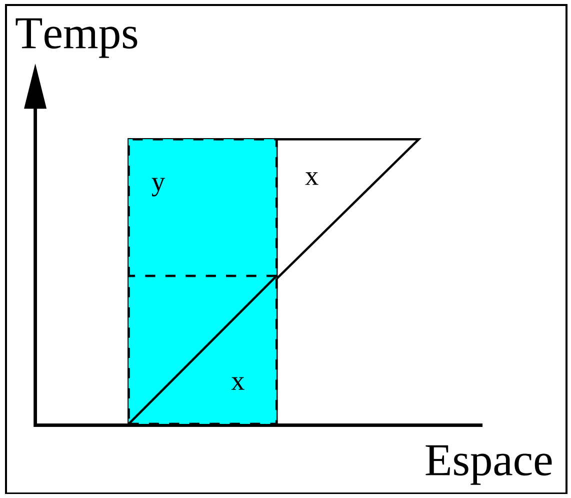

FIG. 5.7 - *Evasion d'une région sans passer par overlap.*

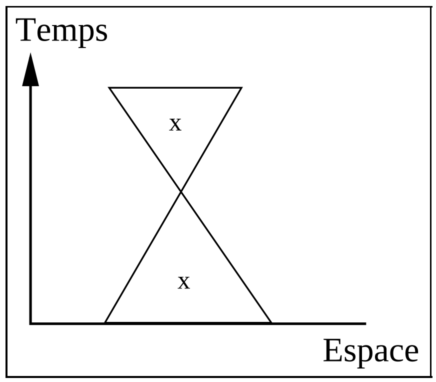

FIG. 5.8 - *Une région faiblement connectée.*

Nous allons maintenant voir sous quelles conditions on peut retrouver les propriétés de changement continu dans le graphe de voisinages conceptuels; si l'on compare des relations spatio-temporelles (sur la base de RCC8) entre parties contemporaines de deux individus continus au sens défini plus haut, on montre que les transitions possibles sont celles prévues par les voisinages conceptuels de RCC8 à certaines conditions sur la forme des entités spatio-temporelles.

5.3.2 Relations purement spatiales

Pour pouvoir comparer les deux conceptions il nous faut introduire quelques notions supplémentaires. En effet bien que nous utilisons les relations méréo-topologiques semblables à RCC8 nous ne les interprétons pas spatialement. Il nous faut donc des équivalents spatiaux à ces relations dans notre théorie afin de pouvoir comparer; il nous faut aussi préciser comment nous définissons des transitions entre des états "spatiaux" pour pouvoir parler d'analogues aux transitions définies par Galton. Intuitivement une relation purement spatiale, pour correspondre à l'intuition dans notre modèle doit correspondre à une

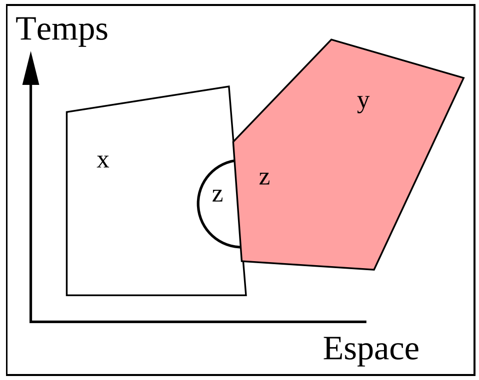

FIG. 5.9 - *Exemple de connection forte.*

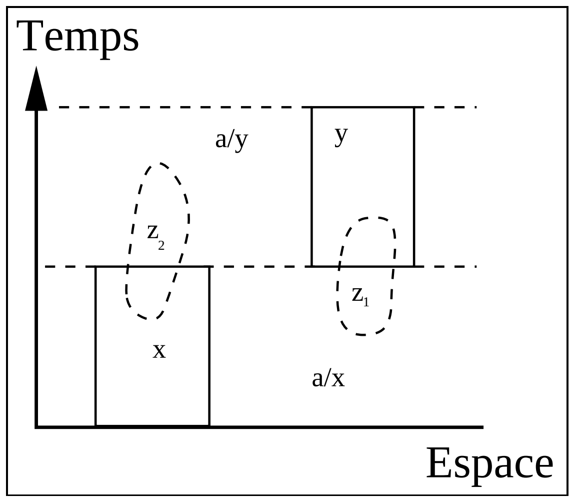

FIG. 5.10 - *Exemple de forte connexion temporelle.*

relation qui ne change pas pendant une certaine période, autrement dit qui est vérifiée entre toutes les tranches temporelles des entités considérées pendant la période de temps pertinente. On peut constater que c'est déja vrai pour DC quand elle est vraie entre deux entités contemporaines :

Th 5.1 $(\mathrm{DC}xy \ \wedge \ x \equiv_t y) \rightarrow \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{DC}x_{/u}y_{/u})$

On définit donc :

D 5.7 $\mathrm{DC}_{sp}xy \triangleq \mathrm{DC}xy \ \wedge \ x \equiv_t y$

Pour les autres relations de RCC8, on peut prendre les définitions suivantes (R_{sp} désignera l'équivalent purement spatial de R) :

D 5.8 $\mathrm{EC}_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \ \wedge \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{EC}x_{/u}y_{/u})$

D 5.9 $\mathrm{O}_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \wedge \mathrm{O}xy \ \wedge \ x \equiv_t (x \cdot y)$

Car on a alors :

Th 5.2 $(\mathrm{O}xy \ \wedge \ x \equiv_t y) \rightarrow \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{O}x_{/u}y_{/u})$

De même :

D 5.10 $\mathrm{PO}_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \wedge \mathrm{PO}xy \ \wedge \ x \equiv_t (x \cdot y)$

Car on a alors :

Th 5.3 $(\mathrm{PO}xy \ \wedge \ x \equiv_t y) \rightarrow \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{PO}x_{/u}y_{/u})$

D 5.11 $\mathrm{P}_{sp}xy \triangleq \mathrm{P}xy \ \wedge \ x \equiv_t y$

et on a bien :

Th 5.4 $(\mathrm{P}xy \ \wedge \ x \equiv_t y) \rightarrow \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{PP}x_{/u}y_{/u})$

D 5.12 $\mathrm{TPP}_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \ \wedge \ \forall u(\mathrm{TS}ux \rightarrow \mathrm{TPP}x_{/u}y_{/u})$

La définition de $\mathrm{NTPP}_{sp}xy$ se distingue un peu de la structure des autres définitions purement spatiales car on doit pouloir avoir cette relation valable sur une période de temps fermée, ce qui est impossible avec $\mathrm{TS}zx \rightarrow \mathrm{NTPP}x_{/z}y_{/z}$, car pour $z = x$ on force $\mathrm{NTPP}xy$, ce qui rend impossible simultanément $x \equiv_t y$ et $cy = y$. Afin de garder toute l'expressivité nécessaire pour ce que l'on vise, nous adoptons donc la définition suivante :

D 5.13 $\mathrm{NTPP}_{sp}xy \triangleq \mathrm{P}xy \ \wedge \ x \equiv_t y \ \wedge \ \neg\exists z \ (z \subseteq_t x \wedge \mathrm{EC}zx \wedge \mathrm{EC}zy)$

Et on a alors une propriété plus faible sur les tranches :

Th 5.5 $\mathrm{NTPP}_{sp}xy \triangleq \forall z(\mathrm{TS}z(ix) \rightarrow \mathrm{NTPP}(x_{/z})(y_{/z})$

Les relations spatiales TPP^{-1} et NTPP^{-1} se définissent alors immédiatement.

5.3.3 Le problème des voisinages conceptuels

L'équivalent d'une transition immédiate entre deux états correspond alors dans notre théorie à la succession de deux relations spatiales incompatibles entre deux tranches d'entités, ce que l'on exprimera de façon générale comme suit (il faudra remplacer R_1 et R_2 par les deux relations purement spatiales considérées, prise parmi RCC8) :

$$R_1(x_{/u})(y_{/u}) \ \wedge \ R_2(x_{/v})(y_{/v}) \ \wedge \ \mathrm{MEETS}uv$$

En définissant :

D 5.14 $\mathrm{MEETS}uv \triangleq iu < iv \ \wedge \ u \between v$

On peut alors exprimer l'impossibilité de transitions continues entre deux relations R_1 et R_2 cela de la façon suivante :

$(\mathrm{TS}x_1x \wedge \mathrm{TS}x_2x \wedge \mathrm{TS}z_1z \wedge \mathrm{TS}z_2z \ \wedge \ R_1x_1z_1 \ \wedge \ R_2x_2z_2 \wedge \mathrm{MEETS}x_1x_2)$
$\rightarrow (\neg\mathrm{CONTINU}x \ \vee \ \neg\mathrm{CONTINU}z)$
On notera les hypothèses correspondantes $\mathrm{Trans}(x, z, R_1, x_1, z_1, R_2, x_2, z_2)$ pour faciliter la lecture.

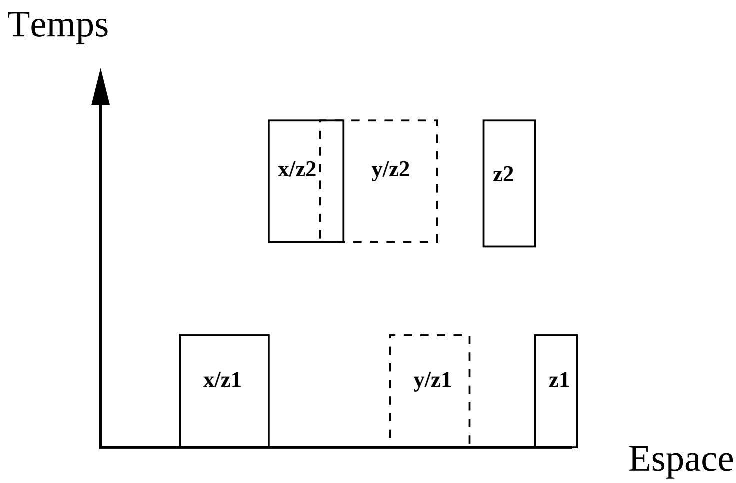

FIG. 5.11 - *Relations purement spatiales*

Pour retrouver les propriétés de la figure 5.2, il suffit alors de montrer les théorèmes suivants :

i) Une transition continue entre DC_{sp} et O_{sp} est impossible (ainsi une transition continue entre DC et PO ou TPP ou NTPP ou TPP^{-1} ou NTPP^{-1} ou “=” est impossible).

ii) Une transition continue entre EC_{sp} et NTP_{sp} ou TP_{sp} est impossible (excluant aussi le cas d’une transition EC/=).

iii) Une transition continue entre PP_{sp} et PP_{sp}^{-1} est impossible (si bien qu’aucune transition de TPP ou NTPP vers TPP^{-1} ou NTPP^{-1} n’est possible)

iv) Une transition continue entre PO_{sp} et NTPP_{sp} est impossible. PO_{sp} étant symétrique, l’impossibilité d’une transition PO/NTPP^{-1} est montrée en même temps.

Ainsi les seules possibilité restantes sont celles de la figure 5.2. Nous allons alors voir ce que nous pouvons retrouver comme résultat avec ces restrictions.

Non continuité de TP/NTP↔EC On montre les résultats intermédiaires suivants :

Th 5.6 $(\text{EC}_{sp}xz_2 \ \wedge \ \ \wedge z_1 \between z_2 \wedge \text{CONTINU}(z_1 + z_2)) \rightarrow \ \neg\text{SC}xz_1$

Th 5.7 $(\text{STC}xu \wedge \text{MEETS}ux \ \wedge \ \neg\text{SC}xu) \rightarrow \ \neg\text{CONTINU}(u + x)$

En effet par $\text{STC}xu$, on a $\exists y$ $\text{NTP}y(x + a/u)$ et en prenant $y' = y \cdot x$ on a à la fois $\neg\text{C}y'u$ et $y' \between u$ et donc $\neg\text{CONTINU}(u + x)$.

Th 5.8 $(\neg\text{SC}xz_1 \wedge \text{MEETS}z_1x \wedge \text{P}uz_1) \rightarrow \ \neg\text{CONTINU}(u + x)$

En supposant $\text{CONTINU}(x + u)$, on a $\text{STCR}(x + u)$ donc $\text{STC}ux$ et les autres hypothèses impliquent $\neg\text{SC}ux$ et on peut appliquer le théorème précédent pour aboutir à une contradiction.
Enfin on peut montrer :

Th 5.9 $(\text{Trans}(\text{EC},\text{P}, x, z) \wedge \text{CONTINU}z) \rightarrow \ \neg\text{CONTINU}x$

Les hypothèses permettent d'appliquer le théorème 5.6, puis le théorème 5.8 d'où l'on déduit : $\neg$CONTINU$(x_1 + x_2)$.

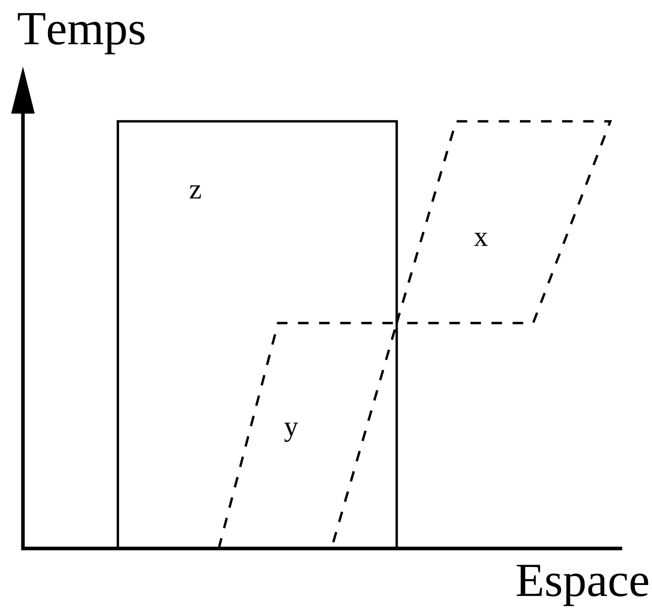

FIG. 5.12 - *Non continuité de la transition PP/EC*

Non continuité de DC↔PO En fait, cette relation semble impossible si l'on considère la figure 5.13, mais elle dépend en fait de l'existence de certaines parties dans les régions de l'espace-temps que l'on considère. La figure 5.14 montre une transition entre DC et PO qui est continue à condition que l'intersection introduite par le recouvrement partiel (la région u) soit d'intérieur atomique, ou du moins que la partie contenant les points de connexion avec x et y soit d'intérieur atomique. En effet si on prend $x' = x + u$ et $y' = y + u$, on a bien DC$x'/e_1 y'/e_1$ et PO$_{sp} x'/e_2 y'/e_2$. Nous n'avons pas trouvé à ce stade de moyen d'exclure de telles configurations sans revoir complètement la méréo-topologie sous-jacente. Nous pourrions en fait imposer certaines formes aux éventuelles atomes de la théorie pour régler le problème et cela fera l'objet de la suite de nos recherches sur la continuité qualitative.

Non-continuité de PP↔PP^{-1} Cette impossibilité (voir Figure 5.15) se montre avec les résultats suivants. Avec $\overline{x} \triangleq (a/x) - x$, on peut montrer :

Th 5.10 $($SCTR$x \wedge$ SCTR$\overline{x}) \rightarrow$ $($CONTINU$x \leftrightarrow$CONTINU$\overline{x})$

Par ailleurs :

Th 5.11 PP$_{sp} x_1 y_1 \rightarrow$ DC$_{sp} x_1 \overline{y_1}$

Th 5.12 PP$^{-1}_{sp} x_2 y_2 \rightarrow$ PO$_{sp} x_2 \overline{y_2}$

Comme on a $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$ si x et y ne se recouvrent pas temporellement, vérifier la continuité de la transition PP/PP^{-1} revient à vérifier la continuité de la transition DC/PO. On a donc les mêmes conditions que sur cette transition. Dans le cas où on ne peut définir un $\overline{y_1}$ c'est que $cy_1 = c(a/y_1)$

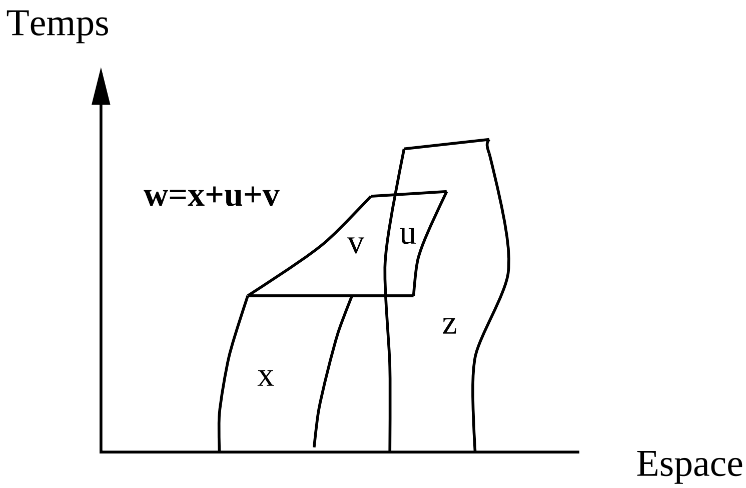

FIG. 5.13 - *Non continuité d'une transition DC/PO.*

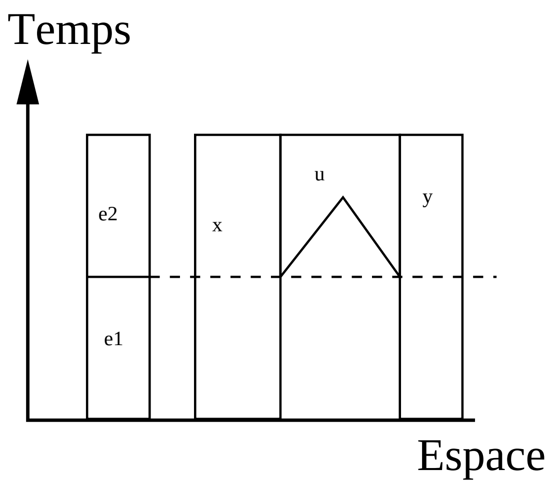

FIG. 5.14 - *Un cas limite de transition DC/PO.*

Non-continuité d'une transition PO$\leftrightarrow$NTPP Aves les hypothèses suivantes :

$z = z_1 + z_2 \wedge \mathrm{TS}x_1x \wedge \mathrm{NTPP}_{sp}x_1z_1 \wedge \mathrm{TS}x_2x \wedge$
$\mathrm{PO}_{sp}x_2z_2 \wedge x_2 \between x_1$

Et en considérant $u = x_2 - z$ on a $u \between x_1$ et $\neg\mathrm{C}cucx_1$

5.4 Vers une théorie du mouvement de sens commun

Nous avons à ce stade défini le vocabulaire dont nous souhaitons disposer et qui nous paraît indispensable à l'expression formelle du mouvement. Nous avons de plus défini les caractéristiques principales que doit posséder notre théorie du mouvement topologique pour prétendre formaliser certaines notions

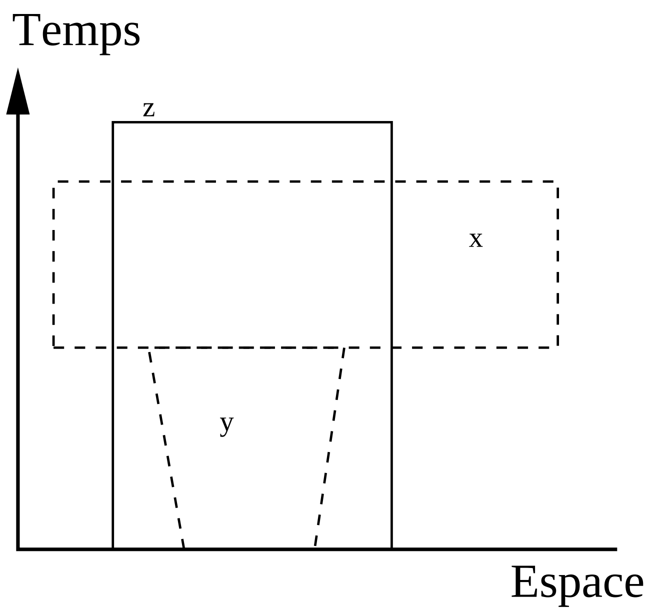

FIG. 5.15 - *Transition PP/PP*$^{-1}$

essentielles de sens commun, et prouvé la cohérence de cette base théorique. En l'état, cette théorie caractérise de façon assez large tout ce qui correspond à des évolutions spatio-temporelles topologiques. On voit que l'utilisation de primitives spatio-temporelles permet l'expression de contraintes telles que la continuité d'une façon globale, au contraire d'une approche avec temps et espace séparés, qui doit affirmer séparément chacune des transitions possibles séparément, avec les problèmes que l'on a vus. Cela nous a notamment permis de montrer que les contraintes à imposer sur le temps et l'espace-temps sont loin d'être évidentes, et qu'elles sont liées profondément à d'autres concepts méréo-topologiques, comme les atomes et les contraintes qu'il faut leur imposer.
Nous allons maintenant voir comment utiliser ce vocabulaire pour exprimer de façon plus sytématique certains types de changements, ce qui va nous donner les classes de mouvement utilisables pour la représentation et pour le raisonnement sur le mouvement topologique.

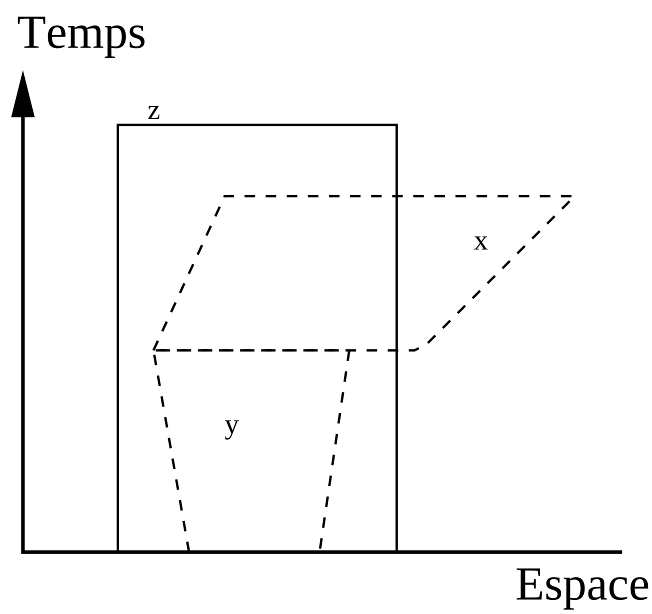

FIG. 5.16 - *Transition NTPP/PO*