# Chapitre 4

# Une logique spatio-temporelle

*Close your eyes for a moment, turn around to look at something else and the thing that was before you is suddenly gone. Nothing lasts, you see, not even the thoughts inside you. And you mustn't waste your time looking for it. Once a thing is gone, that is the end of it.*

Paul Auster, *In the country of last things*.

Nous allons étudier dans ce chapitre les problèmes conjoints du temps et de l'espace, après avoir vu les travaux effectués séparément sur ces deux composantes du sens commun. Quand on considère le mouvement, on peut se demander dans quelle mesure on peut se contenter de regrouper ces travaux spatiaux et temporels. Classiquement le mouvement est en effet la combinaison d'une représentation spatiale et d'une fonction du temps vers l'espace. On a vu aussi que certains auteurs préconisent un traitement global, quitte à dériver les notions d'espace et de temps a posteriori. Cela pose évidemment des problèmes de nature ontologique pour la représentation. Le choix des relations à formaliser est également une question centrale. Nous allons voir ici quelques tentatives dans ce sens, dans un cadre qualitatif, ainsi que leurs limites. Nous verrons ensuite quels sont les enjeux liés au choix de primitives spatio-temporelles pour représenter le mouvement. Nous proposerons alors une théorie développée sur une base spatio-temporelle pour dépasser certaines limites des travaux existants ; nous finirons alors sur l'étude des modèles de cette théorie.

## 4.1 Représentation du mouvement sur une base qualitative

Nous allons dans un premier temps voir les rares tentatives de modéliser le mouvement et le changement spatial en prenant comme outils de base des théories “qualitatives” de l'espace au sens où nous l'avons présenté dans le chapitre précédent. Les travaux de Galton, présentés dans la section suivante, ont considéré essentiellement le changement de nature topologique, alors que les travaux présentés section 4.1.2 ont défini un vocabulaire qui prend en compte à la fois la topologie et l'orientation.

### 4.1.1 Le mouvement qualitatif dans une approche à base de régions

La première tentative de considérer le mouvement d'un point de vue qualitatif dans le cadre des théories de l'espace à base de régions est due à Galton (Galton, 1993), qui y a vu une occasion de défendre ses

vues sur une théorie plus générale du temps et de l'action, telle qu'il l'avait déjà défendue dans (Galton, 1990). Il se base sur une topologie de régions qualitative inspirée de RCC8 où les régions sont des entités primitives et où les relations que l'on peut exprimer sur ces régions sont toutes dérivées de la notion de *connexion*, et sont au nombre de huit, que nous rappelons brièvement : DC (non connexion), EC (contact, i.e. connexion externe), PO (recouvrement partiel), TPP (partie propre tangentielle), son inverse, NTPP (partie propre non tangentielle) et son inverse, et enfin EQ (égalité de deux régions de l'espace). Dans cette approche l'espace est distinct des objets matériels qui l'occupent, ainsi les relations portent entre des positions occupées par des objets (on retrouve la une distinction classique liée à l'existence d'un espace absolu), par exemple :
DC($pos(objet_1), pos(objet_2)$) ou TPP($region_1, pos(objet_2)$)
expriment des relations entre les régions occupées dans l'espace par deux objets, où entre une région et la position d'un objet. Il y a donc un typage de la théorie entre régions et objets, mis en correspondance par la fonction $pos$. Sans reprendre l'axiomatique de RCC, Galton considère que les régions sont des régions fermés, et la seule propriété explicite qu'il reprend est le fait que les 8 relations sont exhaustives et incompatibles entre elles.
Galton combine cette théorie spatiale avec une théorie temporelle, inspirée des formalismes de modélisation de l'action, plus directement de la théorie de l'action et du temps de (Allen, 1984). Ses caractéristiques sont les suivantes : les entités primitives de Galton sont des instants et des intervalles, et il remplace en conséquence le prédicat holds qui exprimait la vérité d'une proposition sur un intervalle par les trois prédicats suivants :

holds_on$(DC(pos(b), r_1), i)$ exprime que les deux régions $pos(b)$ et $r_1$ sont séparées pendant tout l'intervalle $i$.

holds_at$(DC(pos(b), r_1), t)$ exprime que les deux régions sont séparées à l'instant t.

holds_in$(DC(pos(b), r_1), i)$ exprime que les deux régions sont séparées à au moins un instant qui est incident à l'intervalle i.

De plus les relations suivantes peuvent exister entre instants et intervalles : $Div(t, i)$ exprime que l'instant $t$ est incident à l'intervalle $i$ ; $begin(t, i)$ et $end(t, i)$ expriment respectivement que $t$ commence (respectivement finit) l'intervalle $i$. On désigne de plus par $sup(i)$ et $inf(i)$ les instants correspondant au début ou à la fin d'un intervalle $i$. On désigne enfin par $(t, t')$ l'intervalle commencé par t et fini par t' (les intervalles doivent être interprétés comme n'incluant par leur début et leur fin). La relation d'ordre temporel est désignée par $<$.
On peut alors exprimer assez simplement des événements de mouvement avec ce vocabulaire ; un événement est différent d'un état en ce qu'il n'est pas temporairement homogène et il faut pour exprimer "l'apparition" d'un événement utiliser dans le Calcul d'Intervalles le prédicat $Occurs$ qui est subdivisé par Galton de façon analogue à holds_on en occurs_on, occurs_at et occurs_in. occurs_on exprime que l'événement prend la durée de l'intervalle, et occurs_at que l'événement est instantané et a lieu "à" un instant. On peut définir les mouvements suivant plusieurs optiques combinant objet ou régions. Ainsi on peut définir par exemple un événement de mise en contact de deux objets [1] (mouvement purement relatif) :

$$\begin{aligned}\text{occurs\_at}(contact(b_1, b_2), t) \triangleq\ & \text{holds\_at}(EC(pos(b_1), pos(b_2), t) \ \wedge \\ & \exists t' \text{holds\_on}(DC(pos(b_1), pos(b_2)), (t', t))\end{aligned}$$

1. Nous adaptons la notation de Galton pour l'harmonisation de l'exposé.

On peut aussi définir le mouvement d'un objet par rapport à une région (mouvement relatif mélangeant des entités ontologiquement différentes, un objet et une région) :

$$\begin{aligned}\mathsf{occurs\_on}(enter(b,r),i) \triangleq\ & \mathsf{holds\_at}(EC(pos(b),r),inf(i)) \ \wedge \\ & \mathsf{holds\_at}(TPP(pos(b),r),sup(i)) \ \wedge\ \mathsf{holds\_on}(PO(pos(b),r),i)\end{aligned}$$

Un exemple de mouvement défini de façon "absolue" (passage d'une position à une autre position) est donné dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned}\mathsf{occurs\_on}(move(b,r_1,r_2),i) \triangleq\ & \mathsf{holds\_at}(TPP(pos(b),r_1),inf(i)) \ \wedge \\ & \mathsf{holds\_at}(TPP(pos(b),r_2),sup(i)) \ \wedge \\ & \neg\mathsf{holds\_in}(TPP(pos(b),r_1),i) \ \wedge \\ & \neg\mathsf{holds\_in}(TPP(pos(b),r_2),i)\end{aligned}$$

D'autre part, Galton définit aussi des mouvements impliquant des points spatiaux par rapport à des régions. Ces définitions du mouvement sont d'abord un test du pouvoir expressif de la théorie qualitative utilisée, car l'axiomatisation de RCC n'est pas utilisée et on ne sait pas comment les ajouts qui y sont fait changent la théorie. Cependant l'objectif central du travail de Galton est l'étude de la continuité du mouvement et de ce qu'elle implique dans un tel cadre au niveau des transitions et des mouvements acceptables ; nous reviendrons sur cette question particulière au chapitre 5, mais on peut déjà noter que c'est un premier pas vers une caractérisation logique des mouvements intuitivement acceptables. On voit quand même déjà à ce stade que l'on peut faire des distinctions intéressantes du changement sur une base topologique essentiellement. Il n'y a pas par contre de caractérisation exhaustive de tous les mouvements qu'on peut souhaiter représenter mais seulement un échantillon. On peut noter aussi que la séparation des aspects spatiaux et temporels exige une caractérisation de chaque état traversé lors d'un mouvement, ce qui peut être dans certains cas assez lourd. Ce travail a cependant longtemps été la seule tentative d'une théorie proprement qualitative du mouvement, et a beaucoup influencé certaines positions que nous adoptons par la suite.

### 4.1.2 Une approche combinant topologie et orientation des régions

Montrant à quel point les concepts qualitatifs abordés d'un point de vue théorique par l'I.A. sont pertinents dans une grande variété d'applications pratiques, certains auteurs ont utilisé les relations spatiales topologiques et d'orientation dans le domaine des bases de données multimedia. Li, Oszu & Szafron (Li *et al.*, 1996; Li *et al.*, 1997) utilisent en effet les 8 relations topologiques de Egenhofer (Egenhofer et Franzosa, 1991), similaires aux relations RCC8 [2] ainsi que certaines relations d'orientation entre régions pour indexer des séquences vidéo et représenter le mouvement dans des documents multimedia. Les relations d'orientations sont définies entre objets par projection à partir des relations de Allen suivant les deux axes d'une image vidéo, à la suite de (Mukerjee et Joe, 1990; Mukerjee, 1989), mais les auteurs ne gardent que certaines relations qu'ils jugent pertinentes, sans donner plus de raisons. Celles-ci sont les directions cardinales Nord, Sud, Est, Ouest et les 4 directions intermédiaires (le Nord correspond en fait à la direction verticale vers le haut de l'image), auxquelles s'ajoutent les relations être au-dessus/à gauche/à droite/au-dessous, définies par des demi-plans à partir des objets mis en relations. Par exemple la relation "LT" (*to the left of*) est définie par le fait que la relation (meets $\vee$ before) relie les composantes suivant l'axe horizontal des deux objets mis en

2. La différence majeure étant qu'elles portent uniquement sur des régions convexes de l'espace.

relation. Les relations topologiques sont également définies par projection sur les axes et ne peuvent donc distinguer que des relation portant sur des rectangles alignés avec les axes. Deux sortes de mouvement sont exprimés à partir de ces relations. D'une part la trajectoire d'un objet seul, exprimée par une séquence de déplacements à partir d'une position initiale à un instant donné, chaque déplacement étant exprimé par une direction de déplacement entre deux instants de la séquence. D'autre part, les auteurs représentent des mouvements relatifs de deux régions par une séquence de paires de relations (relation topologique, orientation relative) dont une illustration est reproduite figure 4.1. Les relations DJ, LT, TC, OL, Null, RT correspondent aux relations *is disjoint from, to the left of, touches, overlaps, no relation, to the right of*. D'un point de vue théorique, ces auteurs prennent des relations similaires

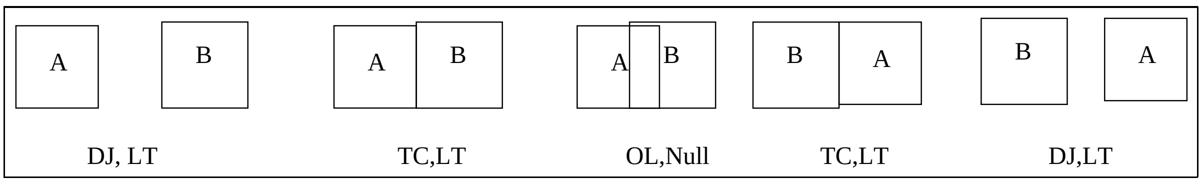


FIG. 4.1 - *Exemple de mouvement relatif et sa description*

à RCC8 plus deux systèmes de relations étudiés par Hernández (les 8 directions cardinales et les 4 directions haut, bas, gauche, droite) sans utiliser les liens qui existent entre ces relations, qui ne sont pas exclusives, et en considérant l'orientation comme un raffinement des relations de non connexion ou de connexion externe uniquement. En fait plusieurs associations de relations topologique et d'orientation peuvent correspondre à une même configuration spatiale. La sémantique de ces relations n'étant pas utilisée on peut se demander comment on peut indexer des séquences de façon cohérente. De ce point de vue il aurait sans doute été plus rationnel d'utiliser le modèle complet de Mukerjee et Joe ou la version récente qu'en ont donné (Balbiani *et al.*, 1998), même si le nombre élevé de relations possibles entre rectangles a dû en dissuader les auteurs. Il aurait sans doute été judicieux alors d'isoler de façon moins arbitraire un sous-ensemble pertinent de ces relations pour le traitement visé par les auteurs. On touche là également la limite de cet ensemble de relations pour représenter le mouvement, car les relations possibles sont à la fois très nombreuses et peu flexibles : une petite variation le long d'un axe de projection suffit à changer de relation (passer de Nord à Nord-ouest par exemple) alors qu'aucun mécanisme inférentiel ne vient préciser les "voisinages" de relations. On retombe sur certains inconvénients des théories qui discrétisent un ensemble de valeurs continu pour raisonner de façon qualitative. Il est alors difficile de rapprocher des mouvements d'objets qui se ressemblent mais diffèrent un peu. De plus il n'y a pas de contraintes exprimant que les transitions d'un état à un autre ne sont pas arbitraires, par exemple le fait pour deux régions que pour se recouvrir après avoir été déconnectées il faut d'abord se toucher, à cause de la continuité du mouvement (ce qui est justement la substance du travail de Galton). Deux séquences différentes DisJoint$\rightarrow$ OverLap et DJ$\rightarrow$ TouChes$\rightarrow$ OL correspondent en effet à deux mouvements identiques par les états qu'ils traversent, mais le modèle va les considérer comme distincts juste par manque d'une représentation explicite de la sémantique réelle des mouvements considérés. On voit là qu'il faut une caractérisation plus robuste du mouvement qui permette de définir les mouvements de façon à ne pas faire des distinctions arbitraires sans préciser les liens entre les différentes relations introduites par la théorie.

On peut rapprocher des travaux présentés ci-dessus quelques études réalisées dans une perspective plutôt orientée vers les systèmes d'information géographiques (SIG). Il y a dans ce domaine un besoin d'outils de représentation de données spatiales changeantes, et quelques tentatives ont émergé pour donner une base théorique à de tels outils. Hormis Galton qui a fait le lien entre ses travaux et les préoccupations des SIG (Galton, 1995b), on peut citer (Hornsby et Egenhofer, 1997) qui apporte une classification de phénomènes intéressants qualitativement (comme la fusion d'entités, la séparation, l'agrandissement, etc, généralement sur des entités géographiques : pays, forêts, terrains, etc). Dans le même ordre d'idée (Claramunt *et al.*, 1997) propose une caractérisation formelle de changements de ce type sur des entités géographiques en les exprimant par rapport à des projections des états successifs dans un espace 2D. Ainsi la fusion de deux entités par exemple est caractérisée par le fait que leur union est inchangée entre les deux états considérés et que les frontières de l'union sont inchangées. On voit que ceci est insuffisant, et les propriétés inférentielles ne sont pas du tout étudiées, bien que la combinaison d'informations de ce type soit nécessaire pour représenter tous les cas de changements possibles.

## 4.2 Pour une réunification spatio-temporelle

Nous avons vu certaines raisons pour lesquelles, pour pouvoir représenter les aspects qualitatifs du raisonnement de sens commun, il était plus approprié de considérer des relations sur des primitives étendues (les régions de l'espace) plutôt que sur des points sans dimension ; cela permet en effet de caractériser l'information de façon plus globale et donc avec un niveau approprié de sous-spécification qui se prête bien aux changements de granularité par exemple.

Pour avoir cette caractéristique au niveau du mouvement, on peut penser qu'une approche comme celle de Hayes est adéquate, car elle considère (du moins dans son intention) de façon globale l'espace et le temps. On pourrait alors considérer des relations qualitatives globales sur l'espace-temps pour remédier aux défauts du travail de Hayes sur les histoires. Il y a d'autres bonnes raisons pour prendre l'espace-temps comme domaine primitif, et on peut les trouver dans les problèmes liés à la modélisation des objets du monde et des événements d'un point de vue ontologique. Il y a en effet une distinction classique dans la plupart des théories des entités du monde et de leurs parties entre d'une part les objets physiques qui persistent au cours du temps (une chaise, un cheval, ...) que l'on nomme parfois les "continuants" en anglais (que l'on peut traduire par objets "persistants"), et d'autre part les objets limités dans le temps qui

peuvent avoir des parties temporelles (un début, une fin,...) comme les états ou les événements (une course, un repas) nommés "occurents" en anglais (ce que l'on peut traduit par "ce qui arrive"). S'il est indiscutable que ces deux sortes d'entités présentent des différences ontologiques réelles, la distinction au niveau temporel conduit à certains problèmes quand on considère la notion de changement. Cette vision implique en effet de considérer que les objets physiques ont une existence indépendante du temps et que les événements sont essentiellement caractérisés par leur extension temporelle (même s'il est généralement admis que les liens autres que temporels devraient faire partie de toute théorie des événements, comme la causalité). Il se pose alors le problème d'identifier les objets au cours d'événements temporels : qu'est ce qui permet de dire que deux objets à deux instants différents sont identiques ? Ceci est d'autant plus difficile dans l'absolu que pour pouvoir parler d'évolution temporelle, on doit pouvoir parler de changements des propriétés d'un objet au cours du temps et il faut alors des critères d'identité assez souples pour pouvoir rapprocher des occurrences d'objets dont certaines caractéristiques sont

différentes (quand ils perdent des parties par exemple). Cela peut entraîner des situations paradoxales, dont nous allons donner quelques exemples classiques pour montrer concrètement les implications de ce problème au niveau de la modélisation des propriétés spatio-temporelles (problème qui n'est donc pas uniquement métaphysique). Nous présentons d'abord la discussion du flux des propriétés de (Simons, 1987) ("the Flux Argument"). On considère un chat Tibbles, muni d'une queue à l'instant t, et qui ne l'a plus à l'instant t'. On dénomme Tib la partie du chat sans la queue.
tibbles $\neq$ tib à l'instant t (puisque tibbles a encore sa queue)
tibbles = tib à l'instant t' (puisque la queue a disparu)
tibbles à t = tibbles à t' (puisque tibbles est un continuant, son identité est indépendante du temps)
tib à t=tib à t' (idem pour tib)
Par transitivité de l'égalité on en déduit tibbles à t = tib à t, contredisant l'hypothèse de départ.
Il y a un certain nombre d'hypothèses contestables dans le raisonnement qui mène au paradoxe et on peut résoudre le problème en abandonnant l'une ou l'autre, mais contrairement à Simons, nous pensons qu'une façon simple de reformuler le problème est de considérer toutes les entités matérielles comme des "occurents", et donc analogues à des événements. En effet les propriétés de ces objets deviennent relatives aux parties temporelles de ces objets, ce qui évite d'avoir à temporaliser les prédicats logiques de la façon présentée dans l'exposé du paradoxe. Le problème principal à notre sens est en effet d'identifier implicitement un objet (tibbles) avec toutes ses occurrences temporelles (tibbles à t, tibbles à t').
Une telle position est tenue notamment (de façon informelle) par (Heller, 1990). Avec les notations de Hayes par exemple, on peut réécrire l'argumentation de la façon suivante : soit $h_1$ l'histoire du chat (avec sa queue pendant $x_1$, sans sa queue pendant $x_2$), et $h_2$ l'histoire de la partie du chat complémentaire de la queue. On peut alors exprimer ($Part$ désignant une relation de partie à tout) le problème de la façon suivante :

$$Part(h_2@x_1, h_1@x_1) \;\wedge\; \neg Part(h_1@x_1, h_2@x_1) \tag{4.1}$$
$$h_2@x_2 = h_1@x_2 \tag{4.2}$$
$$4.1\ et\ 4.2 \Rightarrow h_2 \neq h_1 \tag{4.3}$$

Et la morale est sauve, l'histoire du chat étant différente de sa partie qui n'inclut pas sa queue, tout en préservant la possibilité d'identifier le chat *à un instant donné* avec l'ensemble de ses parties *à ce moment*. Cette façon de considérer les objets a souvent été considérée comme une impasse loin de toute intuition quand elle a été proposé par divers philosophes de l'esprit (Quine, ...). Il semble pourtant naturel de considérer que les objets sont limités dans leur durée de vie et se rapprochent ainsi d'événements ou de processus. On peut aller alors un pas plus loin et poser radicalement que leur nature est la même, du moins au niveau spatio-temporel qui nous intéresse ici (ensuite, personne ne discute que les événements ont des propriétés essentielles différentes des objets matériels). La principale critique d'une approche spatio-temporelle des entités du monde (cf. à nouveau (Simons, 1987), qui parle de "la nature étrangère d'une ontologie de processus") est le caractère soi-disant difficile à appréhender [3] d'une telle théorie. Il est vrai que cette approche a été peu souvent développée de façon précise (mis à part les approches déjà citées, postérieures au livre de Simons, et qui sont restées à l'état d'ébauche). Les problèmes qui se posent à une telle approche sont de plusieurs sortes :

- Quels devraient être les liens entre propriétés et relations spatiales, spatio-temporelles et temporelles ?
- Quelles sortes de parties temporelles peuvent être légitimement introduites et comment (tout en conservant une nature qualitative à la théorie) ?

– Comment représenter le changement dans ce cadre ?

Nous avons vu qu'en représentation des connaissances, les considérations ontologiques occupent une place importante pour déterminer des formalismes appropriés à ce que l'on veut modéliser; c'est pour cela que l'on s'est un peu attardé sur ces travaux philosophiques qui traitent de tels problèmes. Nous allons maintenant voir les quelques théories qui ont affronté le problème de la modélisation d'entités spatio-temporelles de façon plus qualitative que Hayes.

### 4.2.1 La méréo-topologie spatio-temporelle

Nous avons vu au chapitre précédent un éventail des théories méréo-topologiques, considérées comme des théories de l'espace d'un point de vue statique. Nous avons mentionné que certaines de ces théories étaient considérées par leurs auteurs comme traitant d'entités spatio-temporelles ; nous allons maintenant voir comment le lien est assuré entre les aspects topologiques et les propriétés temporelles représentées sur ces entités spatio-temporelles. Essentiellement, il s'agit des axiomatisations de Clarke (1985) et Vieu (1991).
Clarke en plus de la connexion avait introduit un prédicat temporel B (pour "before") dans (Clarke, 1985). Cette relation est axiomatisée comme suit (les axiomes sont séparés et réécrits pour aider la lecture), en plus des axiomes méréotopologiques C1, C2, C4 et C5-C8 :

$$\neg \mathrm{B}xx$$

$$(\mathrm{B}xy \wedge \mathrm{B}yz) \rightarrow \mathrm{B}xz$$

$$\mathrm{B}xy \rightarrow \neg \mathrm{C}xy$$

$$\mathrm{B}xy \rightarrow \forall z \forall w (\mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}wy) \rightarrow \mathrm{B}zw$$

Les deux premiers axiomes définissent un ordre partiel strict, le troisième assure que la connection et la relation *before* sont incompatibles et le dernier assure que si deux entités sont ordonnées dans le temps, leurs parties sont ordonnées pareillement. Malheureusement, de même qu'on ne peut axiomatiser une logique d'intervalles avec $<$ seulement, on ne peut capturer l'ordre de régions spatio-temporelles avec uniquement un ordre temporel ; s'il est vrai que la connection apporte des liens que l'on peut rapprocher d'autres relations temporelles, la structure autorise des lignes de temps parallèles (ce qui peut être un objectif raisonnable dans d'autres contextes mais qui ne satisfait pas une propriété essentielle du sens commun recherché par beaucoup d'auteurs en I.A. à savoir la linéarité de l'ordre temporel (et même en linguistique cf (Kamp, 1979)). Clarke définit une relation de contemporanéité de la façon suivante :

$$\mathrm{CO}xy \triangleq \neg \mathrm{B}xy \ \wedge \ \neg \mathrm{B}yx$$

Malheureusement cette relation n'est pas transitive : on peut très bien avoir $\mathrm{B}xy$ et $\mathrm{CO}xu$ et $\mathrm{CO}yu$. Ceci explique sans doute que Clarke n'a pas caractérisé les modèles de cette axiomatisation spatio-temporelle.

3. Il a souvent été avancé par le passé que la physique relativiste pourrait justifier une approche spatio-temporelle, car elle serait plus proche de la nature "réelle" de l'univers physique. Nous pensons que le débat sur la représentation du temps, de l'espace et du mouvement du point de vue du sens commun peut ignorer la relativité dans la mesure où celle-ci reste assez étrangère aux connaissances de sens commun de l'homme de la rue où de la femme du laboratoire, et n'apporte pas beaucoup d'intuitions sur notre perception du monde de tous les jours. Il faut donc considérer les mérites de ce mouvement ontologique indépendamment des théories physiques modernes.

Afin de développer une véritable topologie spatio-temporelle Vieu a corrigé certains aspects de la théorie de Clarke en intégrant certains produits de la réflexion d'auteurs concernés par la modélisation du langage naturel. Elle fait l'hypothèse que toute relation spatiale est en fait spatio-temporelle (l'expression d'une relation spatiale même "statique" prend toujours du temps) et donc elle prend en compte les phénomènes temporels tels qu'ils ont été analysés par des linguistes formels (Kamp notamment). Vieu reprend donc les axiomes de la logique d'événements de Kamp, les régions de l'espace-temps étant assimilé à des événements (ce qui se réduit dans ce cas aux faits qu'ils ont une étendue temporelle et que deux entités peuvent être temporellement équivalentes sans pour autant être égales). Deux primitives temporelles sont donc ajoutées à la théorie méréo-topologique vue au chapitre précédent (comprenant C1-2, C4, C5-9, C11' et C12), une relation d'ordre $<$ semblable au "before" de Clarke et une relation d'overlap temporel $\sigma$. Et il faut alors spécifier quels sont les liens entre les relations temporelles et la relation de connexion :

$\mathrm{C}xy \rightarrow\ x\sigma y$
Deux entités connectées partagent leurs extensions temporelles.

$(x < y \wedge \mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}ty) \rightarrow\ z < t$
L'ordre est conservé sur les parties (axiome identique à celui de Clarke).

$(x\sigma y \wedge \mathrm{P}xz \wedge \mathrm{P}yt) \rightarrow\ z\sigma t$
L'overlap se transmet aux entités contenant deux entités en overlap.

$(x < y\ \wedge\ z < y) \rightarrow\ (x+z) < y$

$(x+y)\sigma z \leftrightarrow\ x\sigma z\ \vee\ y\sigma z$

Il faut signaler qu'une alternative à ces modélisations pourrait être la topologie des événements de Pianesi et Varzi que l'on a mentionnée au chapitre précédent. Si on considère les événements comme des régions de l'espace-temps et la connexion comme la connexion spatio-temporelle (et non comme un lien causal comme les auteurs la considèrent), on retrouve un cadre similaire aux approches précitées. L'ordre temporel est alors induit par un ensemble d'entités distinguées (les diviseurs) qui n'ont pas une origine intuitive claire, mais dont l'axiomatisation introduit des notions similaires à un ordre temporel. Les buts philosophiques poursuivis par les auteurs étant essentiellement de prouver que l'on peut définir l'ordre temporel *après* avoir introduit les événements, il nous semble plus pratique d'introduire autant de relations qu'il semble nécessaire pour modéliser une structure plutôt que de reporter le travail sur un ensemble d'entités.
Si l'on revient alors sur les axiomes de Vieu, il faut noter que seule la partie "purement" topologique a des modèles clairement caractérisés dans (Asher et Vieu, 1995) : les axiomes temporels ne sont pas considérés. Par ailleurs un point reste obscur dans cette axiomatisation des liens spatio-temporels : Vieu évoque la possibilité d'existence de "points de contact" purement temporels entre régions : c'est-à-dire d'avoir

$\mathrm{EC}xy\ \wedge\ i(x) < i(y)$

mais EC implique $x\sigma y$ ce qui combiné avec $i(x) < i(y)$ est soit contradictoire soit oblige à interpréter $\sigma$ comme le pendant temporel d'une connexion externe (les extensions temporelles des entités mises en relation partagent un point temporel), ce qui n'est pas l'interprétation voulue par l'auteur (et en tous cas pas celle prévue par Kamp pour l'overlap). Si on veut avoir aussi des points de contact temporels, il faut donc qu'une relation temporelle corresponde au contact par un point.

Ce modèle n'a pas été utilisé pour représenter des concepts purement de mouvement, néanmoins, il présente des côtés intéressants à plusieurs titres dans cette perspective : il corrige la topologie de Clarke pour l'espace-temps en incorporant réellement des relations temporelles, certes encore de façon insuffisante. C'est le travail qui a, à notre connaissance, poussé le plus loin l'objectif de Hayes de développer une géométrie (ici en fait seulement une topologie) d'histoires spatio-temporelles, dans un cadre beaucoup plus qualitatif et cohérent. C'est pour cela que nous l'avons repris comme base. Un autre aspect qui reste mal étudié dans ce cadre est celle de la temporalisation des relations entre objets. On se souvient que Hayes notait h@t des portions temporelles d'histoires et on a vu que ce genre d'expression est indispensable à l'expression de relations entre objets, notamment dans la résolution des paradoxes de la section 4.2. On a déjà parlé des problèmes de la définition de Hayes. Dans la théorie de Vieu, ces temporalisations interviennent à un niveau différent. Le modèle topologique traite en fait de régions de l'espace-temps déterminées par des objets ou des événements décrits dans des textes en langage naturel. Si $x$ est un objet de cette sorte, la région déterminée par $x$ et qui fait partie du domaine décrit par sa théorie topologique est récupérée via une fonction $stref$ (spatio-temporal referent), que l'on peut éventuellement croiser avec un événement ; ainsi $stref(x, e)$ est la région de l'espace-temps occupée par $x$ pendant un événement $e$. Ceci permet à l'auteur de pouvoir considérer des objets différents dans le langage naturel mais qui occupent une même région de l'espace-temps, ce qui pose des problèmes pour la représentation de messages linguistiques. Le problème est alors que cette fonction n'est pas vraiment caractérisée ; en particulier les seules régions introduites ainsi correspondent aux événements décrits séparément dans un texte. On ne peut alors faire de liens entre des énoncés d'événements distincts. Si l'on connaît une relation entre deux objets pendant un événement $e_1$ et entre ces deux objets pendant $e_2$, et si $\mathrm{stref}(e_1)\sigma\mathrm{stref}(e_2)$ on peut avoir plus d'informations pendant l'intersection des deux événements en combinant les relations entre les deux objets ; mais comme on ne peut parler des référents de ces objets pendant cette intersection, on se prive d'inférences potentiellement informatives. Tout ceci tient au fait que la fonction $stref$ est une étiquette dont les propriétés vis à vis de la structure spatio-temporelle n'ont pas été étudiées. Il faut en effet une caractérisation explicite des parties temporelles d'objets que l'on veut pouvoir manipuler et nous reviendrons sur les moyens à déployer. Il faut garder en mémoire que nous ne cherchons pour l'instant qu'une théorie acceptable pour des régions de l'espace-temps et que le lien avec les objets introduits dans le langage naturel n'est pas encore au centre de notre étude. Nous y viendrons au chapitre 6.

Nous avons présenté la justification des choix que nous faisons pour représenter le mouvement d'un point de vue du sens commun jusqu'ici. Nous pouvons résumer ces choix ainsi :

– Les entités primitives de la théorie sont étendues, à la fois dans le temps et l'espace.

– La connaissance liée à ces entités est exprimée de façon relationnelle.

Pour mettre en oeuvre ces choix nous présentons dans ce chapitre la théorie qui rend compte des propriétés des référents spatio-temporels des objets que nous considérons pour la théorie du sens commun. En partant d'une méréo-topologie sur des entités étendues dans la tradition de Clarke, nous introduisons des relations primitives temporelles aux propriétés voisines des logiques d'événements et nous construisons les liens entre les primitives, afin d'introduire les notions nécessaires à l'expression des propriétés de l'espace-temps (comme la notion de partie temporelle). Une étude des modèles caractérisés par cette axiomatique conclura ce chapitre avant d'aborder l'étude de propriétés plus spécifique au mouvement de sens commun dans le chapitre suivant.

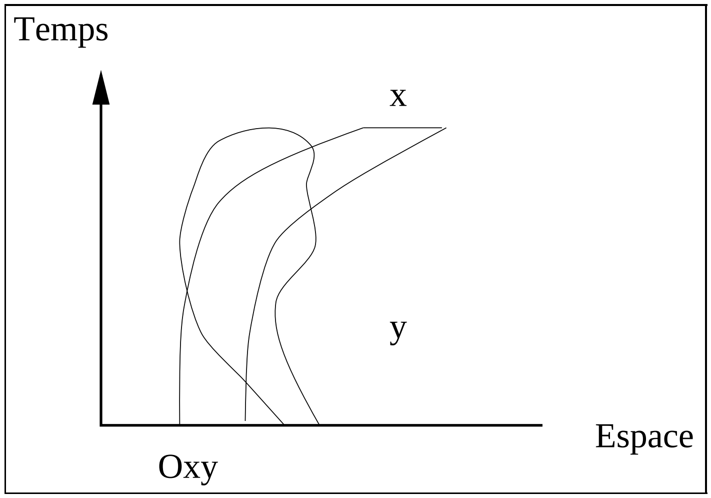


FIG. 4.2 - *Une interprétation spatio-temporelle de O(verlap)*

## 4.3 Topologie et ordre temporel

Nous résumons tout d'abord la théorie topologique qui sert de base à notre théorie des entités spatio-temporelles, comme nous l'avons discutée au chapitre précédent. Elle est reprise en partie de Asher et Vieu (Asher et Vieu, 1995). Les objets de cette théorie sont considérés comme les référents spatio-temporels d'objets physiques ou d'événements. Nous n'en avons gardé que la partie concernant les notions méréo-topologiques dont nous nous servirons, en laissant de côté la définition du contact faible. Comme on l'a vu cette théorie a l'avantage d'être cohérente et complète pour une classe de modèles présentée dans (Asher et Vieu, 1995) ; nous verrons comment les ajouts que nous y apportons contraignent ces modèles. On a vu que ces relations sont généralement interprétée comme des relations entre régions du plan ou de l'espace à trois dimensions (cf figure 3.1), même si la dimension du domaine est quelconque en toute généralité (ce qui implique que la théorie ne soit pas syntaxiquement complète). On a vu aussi que Clarke puis Vieu ont proposé de considérer les individus de leurs théories comme des régions de l'espace-temps, en ajoutant certaines relations pour traiter du temps ; la figure 4.2 montre par exemple l'interprétation intuitive spatio-temporelle de la relation d'overlap. L'axe horizontal correspond à la dimension spatiale et l'évolution temporelle est montrée le long de l'axe vertical. L'espace n'est ici unidimensionnel que par commodité, il pourrait aussi bien être de dimension 2, 3, ... n (ce qui poserait alors quelques problèmes de représentation graphique).

### 4.3.1 Axiomatisation de la Topologie

Nous allons reprendre les axiomes de la théorie topologique de (Asher et Vieu, 1995) en ne gardant que la partie proprement méréo-topologique.
La relation C est réflexive, symétrique et extensionnelle :

**A 4.1** C$xx$

**A 4.2** C$xy$ $\rightarrow$C$yx$

**A 4.3** $(\forall z\ (\mathrm{C}zx \leftrightarrow \mathrm{C}zy) \rightarrow x = y)$

On définit de façon standard les relations vues au chapitre 3:

**D 4.1** $\mathrm{P}xy \triangleq \forall z\ \ (\mathrm{C}zx \rightarrow \mathrm{C}zy)$

**D 4.2** $\mathrm{PP}xy \triangleq \mathrm{P}xy\ \wedge\ \neg\mathrm{P}xy$

**D 4.3** $\mathrm{O}xy \triangleq \exists z\ (\mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}zy)$

**D 4.4** $\mathrm{PO}xy \triangleq \mathrm{O}xy\ \wedge\ \neg\mathrm{P}xy\ \wedge\ \neg\mathrm{P}yx$

**D 4.5** $\mathrm{EC}xy \triangleq \mathrm{C}xy\ \wedge\ \neg\mathrm{O}xy$

**D 4.6** $\mathrm{TP}xy \triangleq \mathrm{P}xy\ \wedge\ \exists z\ (\mathrm{EC}zx \wedge \mathrm{EC}zy)$

**D 4.7** $\mathrm{NTP}xy \triangleq \mathrm{P}xy\ \wedge\ \neg\exists z\ (\mathrm{EC}zx \wedge \mathrm{EC}zy)$

**A 4.4** $\forall x \forall y \exists z\ \forall u\ \ (\mathrm{C}uz \leftrightarrow (\mathrm{C}ux \vee \mathrm{C}uy))$

L'objet $z$, noté $x + y$ représente la “somme” (unique grâce à A 4.3) de $x$ et $y$.

**A 4.5** $\forall x \exists y\ \neg\mathrm{C}yx \rightarrow \exists z\ \forall u(\mathrm{C}uz \leftrightarrow \exists v\ (\neg\mathrm{C}vx \wedge \mathrm{C}vu))$

L'objet $z$, noté $-x$, représente le complément de $x$.

**A 4.6** $\exists x\ \forall u\ \ \mathrm{C}ux$

L'objet $x$, noté $a$ représente l'individu universel.

**A 4.7** $\mathrm{O}xy \rightarrow \exists z\ \forall u(\mathrm{C}uz \leftrightarrow \exists v\ (\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}vy \wedge \mathrm{C}vu))$

L'objet $z$, noté $x \cdot y$ représente l'intersection de $x$ et $y$.

**A 4.8** $\forall x \exists y\ \forall u\ \ (\mathrm{C}uy \leftrightarrow \exists v\ (\mathrm{NTP}vx \wedge \mathrm{C}vu))$

L'individu y, noté ix, représente l'intérieur de x.

**D 4.8** $cx \triangleq\ -i(-x)$

**A 4.9** $ca = a$

Il faut ajouter la propriété classique des ouverts :

**D 4.9** $\mathrm{OP}x \triangleq\ (ix = x)$

**A 4.10** $(\mathrm{OP}x \wedge \mathrm{OP}y \wedge \mathrm{O}xy) \rightarrow \mathrm{OP}(x \cdot y)$

On peut alors définir la notion de connexité spatio-temporelle et de séparation :

**D 4.10** $\mathrm{SP}xy \triangleq \neg\mathrm{C}cxcy$

**D 4.11** CON$x \triangleq \neg(\exists x_1 \exists x_2 (x = x_1 + x_2 \wedge \mathrm{SP} x_1 x_2))$

L'atomicité, est classiquement définissable dans ce langage :

**D 4.12** AT$x \triangleq \neg \exists y \mathrm{PP} yx$

Nous avons laissé de côté les axiomes qui définissent l'existence d'un contact faible différent de EC, ainsi que l'axiome $\exists x, y$EC$xy$, qui sera une conséquence de notre théorie globale (car l'espace-temps sera connexe, ce qui implique $\forall x$ EC$cx(c(-x))$. Rappelons que l'on a dans cette théorie, le théorème suivant :

$$\vdash \neg \mathrm{C}(-x)x$$

Et que l'on n'a pas le principe de supplémentation :

$$\nvdash (\mathrm{PP}xy \rightarrow \exists z(y = x + z \wedge \neg \mathrm{C}zx)$$

Cela vient du fait que la notion classique de frontière topologique n'existe pas en tant qu'entité du domaine considéré ; en effet une entité non close est partie propre de sa fermeture, mais aucune entité ne "complète" l'entité pour constituer la fermeture.

### 4.3.2 L'ordre temporel

La méréo-topologie présentée dans sa forme simplifiée est très générale et est généralement considérée comme une théorie topologique d'un espace de dimension quelconque constitué de régions étendues et de même dimension que l'espace global. Pour pouvoir la considérer comme une théorie de l'espace-temps il faut l'enrichir avec les propriétés structurelles du temps. Nous avons vu qu'une conséquence de nos choix ontologiques est que les entités que l'on considère sont étendues dans le temps, mais pas seulement temporelles ; la structure temporelle adaptée sera donc proche celle de la "logiques d'événements" de Kamp, car on ne peut pas avoir l'extensionalité temporelle. En plus d'une relation d'ordre indiscutable, nous aurons besoin d'exprimer les notions d'inclusion et de recouvrement temporel. Celles-ci ne sont cependant pas suffisantes pour décrire les transitions spatiales telles que celles que nous visons, comme l'a montré Galton (cf chapitre précédent). Il est en effet important de pouvoir différencier un recouvrement d'un simple contact. La relation "meets" de Allen permet de faire cette différence, mais n'est pas non plus adéquate (cf. encore Galton) et de plus elle se restreint à des intervalles convexes. De plus si on admet des contacts spatio-temporels il paraît logique d'autoriser que de tels points soit des contacts temporels, comme l'indique (Vieu, 1991).
Pour rester fidèle à notre conviction que la notion de point est une notion abstraite (que ce soit spatialement ou temporellement) nous ne voulons pas introduire celle-ci dans notre théorie comme le fait Galton. Pour pouvoir distinguer topologiquement les étendues temporelles nous utilisons donc une relation de connexion temporelle, notée $\between$, structurellement analogue à C, mais portant uniquement sur la durée de vie des entités du domaine. Nous en proposons l'axiomatisation suivante, en tenant compte de ses liens avec $<$, la relation d'ordre temporel prise également comme primitive :

**A 4.11** $x \between y \rightarrow y \between x$ (symétrie)

**A 4.12** $x \between x$ (réflexivité)

**A 4.13** $x \between y \rightarrow \neg x < y$ (incompatibilité entre $\between$ et $<$)

**A 4.14** $x < y \rightarrow \neg y < x$ (antisymétrie de $<$)

**A 4.15** $(x < y \wedge y \between z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (transfert entre $\between$ et $<$)

**A 4.16** $x < y \rightarrow (\forall z\ (z \subseteq_t x \rightarrow z < y) \wedge (z \subseteq_t y \rightarrow x < z))$ (monotonie de $\subseteq_t$ par rapport à $<$)

Par l'axiome 4.12 et l'axiome 4.15, la relation $<$ est bien transitive.
Nous définissons alors les relations classiques :

**D 4.13** $x \subseteq_t y \triangleq \forall z (z \between x \rightarrow z \between y)$ ( inclusion temporelle)

**D 4.14** $x \sigma y \triangleq \exists z (z \subseteq_t y \wedge z \subseteq_t x)$ (recouvrement temporel)

**D 4.15** $(x \equiv_t y) \triangleq x \subseteq_t y \wedge y \subseteq_t x$ ( équivalence temporelle)

Ces propriétés permettent de retrouver les axiomes des autres approches de logique d'événements (à l'exception de la linéarité, nous y revenons plus loin) [4] :

**Th 4.1** $x \subseteq_t x$ (définition de $\subseteq_t$)

**Th 4.2** $x \sigma y \rightarrow y \sigma x$ (définition de $\sigma$)

**Th 4.3** $x < y \rightarrow \neg x \sigma y$ (Ax. 4.13)

**Th 4.4** $(x < y \wedge y \sigma z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 4.15)

**Th 4.5** $(x < y \wedge y \subseteq_t z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 4.15)

**Th 4.6** $(x \subseteq_t y \wedge y \subseteq_t z) \rightarrow x \subseteq_t z$ (définition de $\subseteq_t$)

**Th 4.7** $x \subseteq_t y \rightarrow \forall z\ (z \sigma x \rightarrow z \sigma y)$ (Th.4.6)

**Th 4.8** $x \subseteq_t y \rightarrow \forall z\ ((z < y \rightarrow z < x) \wedge (y < z \rightarrow x < z))$ (Ax. 4.16)

Afin de pouvoir retrouver une notion de linéarité temporelle sur l'ordre sous-jacent aux entités temporelles, il nous faut l'équivalent d'un complément temporel ; intuitivement les entités que l'on peut introduire pour cela correspondent au futur et au passé d'une entité. Le passé et le futur devront être ici les "tranches de l'univers" avant et après l'entité considérée (cf. ci-dessous).

**A 4.17** $\forall x ((\exists y (x < y)) \rightarrow (\exists z \forall u (x < u \leftrightarrow Puz)))$ (existence d'un futur)

**A 4.18** $\forall x ((\exists y (y < x)) \rightarrow (\exists z \forall u (u < x \leftrightarrow Puz)))$ (existence d'un passé)

On appellera futur de x ($f(x)$) et passé de x ($p(x)$) les deux entités dont on a posé l'existence ; leur unicité est montrée facilement :
par exemple pour le futur, supposons $\exists z_1 \forall u (x < u \rightarrow Puz_1)))$ et $\exists z_2 \forall u (x < u \rightarrow Puz_2)))$. Avec P$z_1 z_1$ on obtient $x < z_1$ et donc P$z_1 z_2$ et par symétrie on a $z_1 = z_2$.
Les propriétés suivantes sont immédiates :

**Th 4.9** $x < f(x)$

**Th 4.10** $p(x) < x$

4. Nous indiquons entre parenthèses les axiomes ou théorèmes nécessaires aux démonstrations, les preuves complètes étant en annexe pour alléger la lecture.

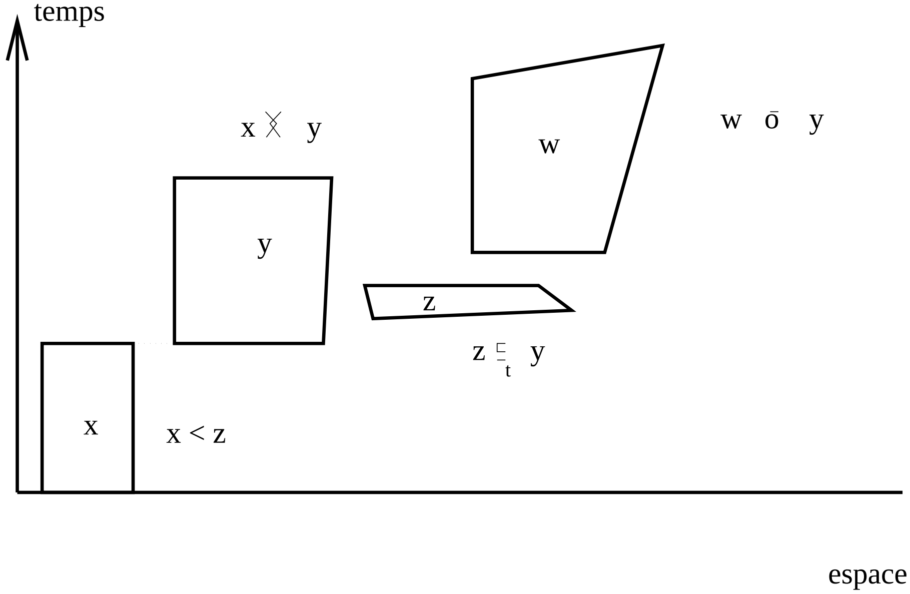


FIG. 4.3 - *Les relations temporelles*

## 4.4 Contraintes sur l'espace-temps

### 4.4.1 Liens temps/ espace-temps

On a noté les problèmes des axiomes de (Vieu, 1991) et (Clarke, 1985) exprimant les liens entre la relation de connexion et les relations temporelles. Clarke proposait une structure trop faible, et Vieu une interprétation de ses relations qui semble erronée. Nous pensons que le plus cohérent est bien que la connection spatiale implique une forme de connexion temporelle, mais qui doit être de nature similaire : si la connection implique le partage d'un "point" spatio-temporel, elle doit impliquer le partage d'un "point"temporel :

**A 4.19** $\mathrm{C}xy \to \ x \asymp y$

Ceci règle le cas des points de contact ; il faut lui adjoindre un axiome prenant en compte les liens plus méréologiques entre entités, à savoir que l'inclusion spatio-temporelle entraîne l'inclusion temporelle :

**A 4.20** $\mathrm{P}xy \to \ x \subseteq_t y$

Pour que le modèle soit réellement multi-dimensionnel, les deux relations de contact doivent être distinctes ; les axiomes suivants imposent au moins une autre dimension en plus du temps.

**A 4.21** $\exists x \exists y \ x \asymp y \ \wedge \ \neg \mathrm{C}xy$

**A 4.22** $\exists x \exists y \ x < y$

La non-convexité temporelle des entités impose les contraintes suivantes sur les liens entre la somme et les relations temporelles :

**A 4.23** $(x < y \wedge z < y) \leftrightarrow (x + z) < y$

**A 4.24** $(x + y) \gtrless z \leftrightarrow \; x \gtrless z \;\vee\; y \gtrless z$

Enfin, nous caractérisons le lien entre connection temporelle et l'intérieur par l'axiome suivant :

**A 4.25** $ix \gtrless y \rightarrow \; x\sigma y$

On retrouve alors les axiomes de (Vieu, 1991) :

**Th 4.11** $\mathrm{O}xy \rightarrow x\sigma y$ (Ax. 4.20)

**Th 4.12** $(x < y \wedge \mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}ty) \rightarrow z < t$ (Th. 4.8, Ax. 4.20)

**Th 4.13** $(x\sigma y \wedge \mathrm{P}xz \wedge \mathrm{P}yt) \rightarrow z\sigma t$ (Th. 4.7, Ax. 4.20)

**Th 4.14** $(x + y)\sigma z \leftrightarrow \; x\sigma z \;\vee\; y\sigma z$ (Ax. 4.24)

### 4.4.2 Parties temporelles

Pour pouvoir définir des relations entre régions de l'espace qui évoluent et pouvoir exprimer certaines formes de changement, nous allons maintenant définir une notion de tranche temporelle, c'est à dire la partie maximum d'une entité spatio-temporelle qui correspond à une certaine période de temps. Cette période de temps sera bien sûr définie par rapport à une autre entité du domaine (le temps n'existant pas indépendamment). Nous supposons ainsi que toutes les entités que l'on considère peuvent avoir des parties temporelles, ce qui est une des caractéristiques principales des approches spatio-temporelles de la méréologie, et également une des plus controversées (Thomson, 1983; Hacker, 1982; Casati, 1995). Nous verrons comment la formalisation de cette notion prévient les critiques habituelles de cette approche.

La notion de partie temporelle peut être définie de plusieurs façons dans une théorie méréologique, même dans des théories qui supposent le temps et l'espace séparés. Par exemple Simons la définit ainsi $(<_T)$ :

$$e' <_T e \equiv e' < e \;\wedge\; \forall f([f < e \;\wedge\; spl[f] < spl[e']] \rightarrow \; f < e')$$

Avec $<$ désignant une relation de partie à tout entre objets, et spl (pour "spell" : l'étendue) est une fonction qui associe à une entité la période de temps correspondant à la vie de cette entité. Simons définit alors une "phase" comme une partie temporelle connexe. Plusieurs choses sont implicites dans cette représentation : La première est que Simons intègre comme objet la matière dont ces objets sont faits (via la fonction $spl$) sans discussion. La deuxième est la caractérisation du temps. Une tranche temporelle est d'après lui une phase de durée zéro, mais il ne présente pas de théorie explicite du temps qui permettrait d'exprimer cela formellement.

C'est pour cette raison qu'il nous semble indispensable de définir ces objets de façon topologique, sans parler de durées. Nous nous restreignons ainsi à une théorie où les durées les plus courtes sont les objets ou les événements les plus petits (par rapport à la relation d'inclusion) que l'on peut décrire, sans introduire de notions extérieures à la théorie.

Carnap (Carnap, 1958) avait également proposé de considérer des objets avec une étendue temporelle, et avait proposé plusieurs alternatives de représentation (combinant des instants ou des intervalles avec des points ou des régions). A chaque fois, le modèle sous-jacent plus ou moins explicite est la topologie classique, axiomatisée de diverses manières. Carnap reprend aussi à son compte une modélisation des objets physiques due à (Woodger, 1937), dans laquelle les objets sont spatio-temporels. Cette théorie

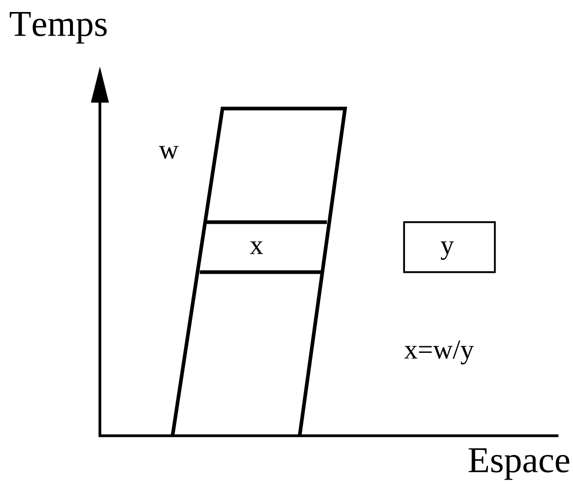


FIG. 4.4 - *Tranche temporelle : $x$ est une tranche de $w$.*

combine une théorie des relations de partie à tout avec un ordre temporel, en donnant quelques indications, très incomplètes, de ce que les liens devraient être entre les deux structures (une sorte de méréologie temporelle, une tentative réitérée par Simons). Une définition intéressante est cependant celle d'objets "momentanés" qui correspond en fait à une partie temporelle indivisible. Carnap considère que tout objet a une partie momentanée. Une tranche d'individu est alors une partie momentanée maximale d'un objet. Bien que l'axiomatique ne soit pas cohérente avec la définition de l'ordre temporel, il y a là l'intuition d'une partie temporelle exploitable. En ce qui nous concerne, nous ne ferons cependant pas d'hypothèses superflues sur la nature indivisible ou non des parties temporelles. L'atomicité est en effet laissé de côté pour ce qui est des extensions temporelles aussi bien que pour l'extension spatio-temporelle.

Ces approches quelques peu différentes ont toutes en commun qu'elles supposent l'existence d'un continuum spatio-temporel (Carnap suppose que l'espace-temps est dense et illimité, et continu au sens usuel), ce qui nous semble peu justifié au regard de l'utilisation limitée qu'en fait Carnap. De plus, ces théories ne sont pas complètement formelles dans la mesure où y sont considérées des notions qui ne peuvent y être définies (comme les durées). Nous proposons alors de définir une tranche temporelle uniquement comme la partie maximale d'un objet pendant une certaine période. Nous évitons ainsi toute restriction arbitraire sur la nature de l'espace-temps. La définition adoptée est alors qu'une tranche temporelle $x$ est une partie d'une entité $y$ telle que toute autre partie de $y$ contenue temporellement dans $x$ est une partie de $x$ [5] :

**D 4.16** $\mathrm{TS}xy \triangleq \mathrm{P}xy \wedge \forall z\ ((\mathrm{P}zy \wedge z \subseteq_t x) \rightarrow \mathrm{P}zx)$

Qui donne les propriétés suivantes :

**Th 4.15** $\mathrm{TS}xx$ (réflexivité)

**Th 4.16** $(\mathrm{TS}xy \wedge \mathrm{TS}yx) \rightarrow x = y$ (antisymétrie)

5. On désigne une tranche par TS pour *Temporal Slice* ou *Tranche de tempS*.

**Th 4.17** $(\mathrm{TS}xy \wedge \mathrm{TS}yz) \rightarrow \mathrm{TS}xz$ (transitivité)

De plus, une tranche $x$ d'un objet $y$ incluse temporellement dans une autre tranche $z$ de $y$ est aussi une tranche de $z$ :

**Th 4.18** $(\mathrm{TS}xy \wedge \mathrm{TS}zy \ \wedge \ x \subseteq_t z) \rightarrow \mathrm{TS}xz$

Nous avons mentionné l'intérêt des théories qualitatives pour le raisonnement sur des données qui sont abstraites de données souvent numériques (cf. chapitre 1), et nous avons souligné en conséquence l'importance qu'il y avait à limiter le nombre d'entités manipulées par la théorie. Dans ce même esprit d'économie, il faut se poser la question de la nature des parties temporelles que l'on doit introduire. Il semble intuitivement justifié de considérer que les parties temporelles sont déterminées par les périodes de temps présentes dans le domaine des objets et que chaque objet doit donc avoir une partie temporelle correspondant à la vie des autres entités existant pendant la durée de l'entité considérée. Ceci correspond à l'axiome suivant :

**A 4.26** $y \subseteq_t x \rightarrow \ \exists u \ (\mathrm{TS}ux \ \wedge \ u \equiv_t y)$
(toute entité $x$ a une tranche $u$ temporellement équivalente à tout autre entité $y$ incluse temporellement dans la durée de vie de $x$)

Il en résulte alors :

**Th 4.19** $\forall x, y(x\sigma y \rightarrow \ \exists u(\mathrm{TS}ux \ \wedge \ u \subseteq_t y))$

**Th 4.20** $\mathrm{P}xy \rightarrow \ \exists z(\mathrm{TS}zy \ \wedge \ z \equiv_t x)$
(pour toute entité, il existe une tranche temporellement équivalente à toute partie de cette entité).

**Th 4.21** $(\mathrm{TS}xy \wedge \mathrm{TS}zy \ \wedge \ x \equiv_t z) \rightarrow \ x = z$
(cette tranche est unique)

On notera $x_{/y}$ cette tranche correspondante quand elle existe ; $x_{/y}$ est la partie de $x$ correspondant à la “vie” de $y$, quand $y \subseteq_t x$.

### 4.4.3 Tranches temporelles et structure temporelle

On peut maintenant caractériser plus précisément les propriétés de la structure temporelle de la théorie spatio-temporelle. On a tout d'abord :

**Th 4.22** $\mathrm{TS}(f(x), a) \wedge \mathrm{TS}(p(x), a)$
(le futur et le passé d'une entité quelconque sont des tranches temporelles de l'univers)

Une tranche d'univers peut être considérée comme un épisode du monde considéré. Ce théorème a pour conséquence immédiate l'unicité du futur et du passé pour deux entités contemporaines :

**Th 4.23** $(x \equiv_t y \ \wedge \ \exists z \ (x < z)) \rightarrow \ f(x) = f(y)$

**Th 4.24** $(x \equiv_t y \ \wedge \ \exists z \ (z < x)) \rightarrow \ p(x) = p(y)$

On peut définir des notions temporelles utiles comme :

**D 4.17** $\mathrm{CON}_t x \triangleq \neg(\exists x_1 \exists x_2 (x = x_1 + x_2 \ \wedge \ \neg(cx_1 \between cx_2)))$ (connexité temporelle)

Et une notion plus spatio-temporelle importante de “normalité” de l'univers :

**A 4.27** $(\text{TS}ua \ \wedge \ cu \mathbin{\bowtie} cv) \rightarrow \text{C}cucv$

Cette propriété assure que l'univers ne fait pas de sauts spatio-temporels (il n'y a pas d'entités temporellement liée à une tranche d'univers mais déconnectés de cette tranche). Cette propriété, qui peut être vue comme une forme de connexité spatio-temporelle, sera à la base de l'étude de la continuité de l'espace-temps que nous verrons au chapitre suivant. L'expression $cu \mathbin{\bowtie} cv$ est indispensable pour exclure le cas d'une région ouverte succédant de façon brusque à une autre région (et pour lesquelles on n'aurait pas $u \mathbin{\bowtie} v$ [6]).

Pour imposer la linéarité de l'ordre temporel on pourrait imposer un ordonnancement des entités temporellement connexes (qui correspond à l'adaptation de la définition de Kamp à notre primitive de contact temporel) :

$$(\text{CON}_t x \wedge \text{CON}_t y) \rightarrow \ (x < y \ \vee \ x \mathbin{\bowtie} y \ \vee \ y < x)$$

Mais cela ne nous dit rien dans le cas général des entités non connexes car on ne peut exprimer dans la théorie qu'une entité est une somme de composantes connexes à moins de faire une distinction ontologique entre des entités primitives connexes et celles que l'on peut construire ensuite par somme arbitraire, ce qui compliquerait la théorie peut-être inutilement. Au lieu de ça nous allons imposer une contrainte plus forte. Tout d'abord la notion d'ordonnancement sera définie comme suit :

**D 4.18** $\text{ORD}(x, y) \triangleq x < y \ \vee \ x > y$

Cette relation est symétrique.
On introduit aussi :

**D 4.19** $\text{PMCT}(x, y) \triangleq \text{P}xy \ \wedge \ \neg\exists z \ (\text{P}zy \ \wedge \ \ \wedge \text{PP}xz \wedge \text{CON}_t(z))$

Cette relation exprime que $x$ est une partie temporellement maximalement connectée de $y$ (une composante temporellement connexe). Pour exprimer un équivalent de l'axiome de linéarité, on affirme ensuite que les composantes connexes de deux entités sont ordonnées, en se servant d'une relation “d'entremêlage” de deux entités temporellement :

**D 4.20** $\text{BETW}(y, x) \triangleq \neg\text{ORD}(x, y) \ \wedge$
$\forall y' (\text{PMCT}y'y \rightarrow \ \exists x_1 \exists x_2 \ (x = x_1 + x_2 \wedge \text{ORD}x_1 y' \wedge \text{ORD}x_2 y')$

Un exemple de configuration correspondant à cette relation est montrée figure 4.5. Cette relation exprime qu'il y au moins des parties de x et y que l'on peut ordonner. Il faut noter que l'on peut avoir à la fois $\text{BETW}xy$ et $\text{BETW}yx$ (cf figure 4.6).
On impose alors :

**A 4.28** $\forall x, y (\text{BETW}(x, y) \vee \text{BETW}(y, x) \vee \text{ORD}(x, y) \ \vee \ x \mathbin{\bowtie} y)$

Et on impose également qu'il existe toujours une partie temporellement maximalement connectée pour toute entité :

**A 4.29** $\forall x \exists x' \ \text{PMCT}x'x$

6. Ceci a été porté à notre attention par Tony Cohn.

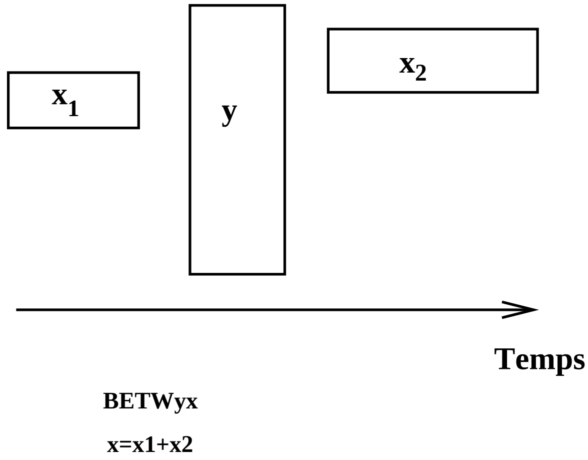


FIG. 4.5 - *Un exemple d'entremêlage d'entités temporellement non connexes*

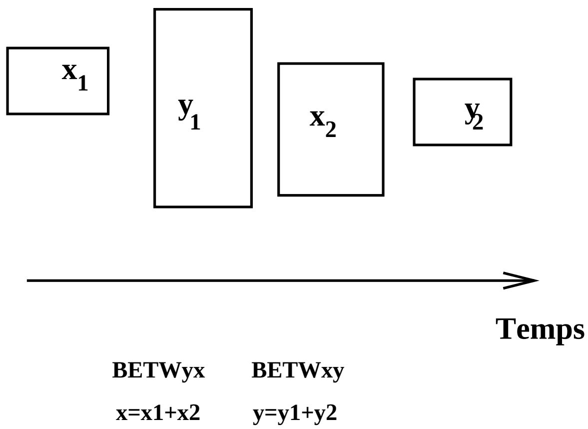


FIG. 4.6 - *Entremêlage réciproque.*

Cela nous donne les propriété suivantes :

**Th 4.25** BETW$yx \rightarrow\ \exists y'($PMCT$y'y \rightarrow\ \exists x_1 \exists x_2\ (x = x_1 + x_2\ \wedge\ x_1 < y' < x_2)$

**Th 4.26** $($AT$x \wedge$ AT$y) \rightarrow\ ($ORD$(x, y)\ \vee\ x \equiv_t y)$

(deux atomes sont soit ordonnés soit temporellement équivalents.)

**Th 4.27** $(\mathrm{CON}_t x \wedge \mathrm{CON}_t y) \rightarrow\ (x < y\ \vee\ x \between y\ \vee\ y < x)$

**Th 4.28** $\forall x[(\exists y(y < x)) \rightarrow\ (p(x) < -p(x))]$

(le passé est avant son complément.)

**Th 4.29** $\forall x[(\exists y(x < y)) \rightarrow\ (-f(x) < f(x))]$

(le futur est après son complément.) La démonstration de ces deux théorèmes se fait cas par cas en se servant de l'axiome 4.28 et de l'axiome de "normalité" 4.27 [7] :

**1** soit $BETW(-p(x), p(x))$ : $\exists u_1, u_2, v(Pu_1p(x) \wedge Pu_2p(x) \wedge Pv(-(p(x))) \wedge u_1 < v < u_2)$
de $Pu_2p(x)$ on déduit $u_2 < x$ et donc $v < u_2 < x$
d'où $Pv(p(x))$ et donc $Op(x)(-p(x))$ : contradiction.

**2** soit $BETW(p(x), -p(x))$ : $\exists u_1, u_2, v(Pu_1 - p(x) \wedge Pu_2 - p(x) \wedge Pv(p(x)) \wedge u_1 < v < u_2)$
$Pv(p(x))$ implique $v < x$ et donc $u_1 < x$ d'où $Pu_1p(x)$
et donc $Op(x)(-p(x))$ : contradiction.

**3** soit $-p(x) < p(x)$ : d'où $-p(x) < x$ d'où $P(-p(x))p(x)$.

**4** soit $p(x) \lessgtr -(p(x))$ : avec l'axiome de "normalité" et parce que TS$p(x)a$, on obtient alors
$Cp(x)(-p(x))$ qui est une contradiction.

Le seul cas possible reste donc $p(x) < -p(x)$. On montre le théorème analogue pour $f$ de la même façon.
Ces théorèmes a pour corollaires (ces théorèmes sont à comprendre comme étant valides quand les entités introduites, $p(x)$, $f(x)$ existent, c'est-à-dire qu'à chaque fois, les hypothèses en plus sont respectivement $\exists y\ (y < x)$ et $\exists y\ (x < y)$) :

**Th 4.30** $-f(x) = p(f(x))$

**Th 4.31** $-p(x) = f(p(x))$

**Th 4.32** $a = p(x) + f(p(x))$

**Th 4.33** $a = f(x) + p(f(x))$

## 4.5 Étude des modèles

Nous allons dans cette section étudier les modèles de la théorie présentée dans les sections précédentes, que nous noterons ST, et qui correspond aux axiomes 4.1-4.29. Nous suivrons le même genre de démarche que (Asher et Vieu, 1995) et nous reprenons en partie leurs résultats, notamment pour ce qui concerne la structure de base méréo-topologique.

### 4.5.1 Définition des modèles

On considère un espace topologique classique $\langle \mathcal{E}, T \rangle$, $\mathcal{E}$ est un ensemble de points et $T$ un ensemble d'ouverts sur $\mathcal{E}$.
On va considérer une structure $\langle \mathcal{E}, T, \mathcal{G}, \prec, [\cdot]\!] \rangle$ telle que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Les opérateurs topologiques seront notés "int" et "cl". L'intersection et l'union classiques seront notées $\cap$ et $\cup$. L'ensemble $\mathcal{G}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{E} \in \mathcal{G}$.

7. Nous la donnons ici comme exemple pour montrer l'intérêt des axiomes de "normalité" et de "pseudo" linéarité.

(b) Régularité : l'intérieur d'un élément de $\mathcal{G}$ n'est pas vide et est régulier ($int(cl(X)) = int(X)$) et est dans $\mathcal{G}$. sa fermeture est régulière : ($cl(int(X)) = cl(X)$) et appartient à $\mathcal{G}$. Les opérateurs $\cup^*$ and $\cap^*$ désignent alors les opérateurs d'union et d'intersection qui préservent la “régularité” des intérieurs et des fermetures :

$$X \cup^* Y = X \cup Y \cup int(cl(X \cup Y))$$
$$X \cap^* Y = X \cap Y \cap cl(int(X \cap Y))$$

(c) si $X \in \mathcal{G}$ et $X \neq \mathcal{E}$ alors $(\mathcal{C}(X)/_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{G}$ (si le complément de X n'est pas vide, il est dans $\mathcal{G}$)

(d) si $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ et $int(X \cap Y) \neq \emptyset$, alors $X \cap^* Y \in \mathcal{G}$. (l'intersection $\cap^*$ de deux éléments de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$ si cette intersection a un intérieur non vide).

(e) si $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$, $X \cup^* Y \in \mathcal{G}$. (L'union $\cup^*$ de deux éléments de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$)

Ces propriétés caractérisent les modèles pour l'axiomatisation de C que l'on a repris de (Asher et Vieu, 1995) et où on a enlevé les axiomes nécessaires à la définition du contact faible.
Nous considérons quant à nous une structure plus contrainte dans la mesure où l'on a un ordre strict partiel sur les points, noté $\prec$. On notera $\approx_t$ la relation d'équivalence [8] sur les points suivante :

$\alpha \approx_t \beta$ si et seulement si : pour tout $\gamma$ $(\gamma \prec \alpha \Leftrightarrow \gamma \prec \beta)$ et $(\alpha \prec \gamma \Leftrightarrow \beta \prec \gamma)$

La structure considérée a les propriétés supplémentaires suivantes, où les lettres grecques désignent des éléments de $\mathcal{E}$ :

(f) pour tout $\alpha \in \mathcal{E} \quad \alpha \not\prec \alpha$

(g) pour tout $\alpha \in \mathcal{E}, \beta \in \mathcal{E}, \gamma \in \mathcal{E}$, $\alpha \prec \beta$ et $\beta \prec \gamma$ impliquent $\alpha \prec \gamma$

(h) pour tout $\alpha \in \mathcal{E}, \beta \in \mathcal{E}$, $\alpha \approx_t \beta \ \vee \ \beta \prec \alpha \ \vee \ \alpha \prec \beta$

On définit alors, par commodité, les fonctions suivantes de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ :

$\text{TPS}(X) = \{ \alpha \mid \exists \beta \in X \ \beta \approx_t \alpha \}$

$f^*(X) = \{ \alpha \mid \forall \beta \in X \ \beta \prec \alpha \}$

$p^*(X) = \{ \alpha \mid \forall \beta \in X \ \alpha \prec \beta \}$

Et la relation suivante :

$X < Y$ si et seulement si $\forall \alpha \in X \ \forall \beta \in Y$, on a $\alpha \prec \beta$

On a encore les contraintes suivantes :

(i) pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $\text{TPS}(X) \subseteq \text{TPS}(Y)$ on a aussi $Y \cap \text{TPS}(X) \in \mathcal{G}$
Cette contrainte est facilement compatible avec les autres puisque $Y \cap \text{TPS}(X)$ a un intérieur non vide puisque $Y$ et $X$ (et donc $\text{TPS}(X)$) ont des intérieurs non vides.

(j) pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $X < Y$ on a aussi $f^*(X) \in \mathcal{G}$ et $p^*(Y) \in \mathcal{G}$. Là aussi les nouvelles entités ont forcément un intérieur non vide et une fermeture régulière. Cet axiome correspond aux axiomes d'existence du passé et du futur des entités convenables.

(k) il existe $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$, tels que $X < Y$

(l) il existe $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que TPS$(X)\cap$TPS$(Y) \neq \emptyset$ et $X \cap Y = \emptyset$

(m) "normalité" de l'univers : pour tout $X \in \mathcal{G}$, tel que il existe $Y$ avec $X =$TPS$(Y)$ et pour tout $Z \in \mathcal{G}$ tel que $cl($TPS$(X)) \cap cl($TPS$(Z)) \neq \emptyset$ alors on a aussi $X \cap Z \neq \emptyset$. Il resterait à étudier la signification en termes de points de cette contrainte, de façon plus intuitive (elle correspond à l'axiome 4.27).

### 4.5.2 Sémantique

La fonction $[\![\cdot]\!]$ est une fonction d'interprétation sur le domaine ; elle assigne une dénotation dans $\mathcal{G}$ aux termes du langage de la théorie spatio-temporelle présentée, et une valeur de vérité aux propositions. En notant $g$ une fonction d'assignation de variables dans $\mathcal{G}$, on donne l'interprétation suivante aux primitives du langage :

$[\![Cxy]\!]_g =$vrai si et seulement si $[\![x]\!]_g \cap [\![y]\!]_g \neq \emptyset$

$[\![x \between y]\!]_g =$vrai si et seulement si TPS$([\![x]\!]_g)\cap$TPS$([\![y]\!]_g) \neq \emptyset$

$[\![x < y]\!]_g =$vrai si et seulement si $[\![x]\!]_g < [\![y]\!]_g$

On appellera S les structures contraintes par (a)-(m) et munies de l'interprétation ci-dessus.

### 4.5.3 Consistance de la théorie

Les contraintes imposées sur les structures présentées à la section précédente sont compatibles, il suffit de considérer un exemple particulier, comme par exemple l'ensemble construit sur $\mathbb{Q}^2$ avec comme ouverts les rectangles ouverts [9] et pour relation d'ordre $\prec$ :

$$\langle a, b\rangle \prec \langle c, d\rangle \Leftrightarrow b < d.$$

Cela induit la relation $\approx_t$ :

$$\langle a, b\rangle \approx_t \langle c, d\rangle \Leftrightarrow b = d.$$

On va montrer maintenant que les structures S sont des modèles de la théorie axiomatique regroupant les axiomes présentés section 4.3.1-4.4.3. Il suffit pour cela de montrer pour tout axiome $A$ de la théorie que $S \models A$. Ayant gardé les contraintes imposées par Asher et Vieu il suffit en fait de vérifier les axiomes des sections 4.3.2 à 4.4.3. Asher et Vieu ont de plus montré que :

$[\![x \cdot y]\!]_g = [\![x]\!]_g \cap^* [\![y]\!]_g$

$[\![x + y]\!]_g = [\![x]\!]_g \cup^* [\![y]\!]_g$

$[\![-x]\!]_g = \mathcal{C}_{/\mathcal{E}}([\![x]\!]_g)$

$[\![ix]\!]_g = int([\![x]\!]_g)$

9. Définis par deux points $\langle a_0, b_0\rangle$ et $\langle a_1, b_1\rangle$ de $(\mathbb{Q}\cup\{+\infty, -\infty\})^2$, avec $a_0 \neq a_1$ et $b_0 \neq b_1$ ; le rectangle correspondant à l'ensemble $\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Q}^2 \mid a_0 < a < a_1 \text{ et } b_0 < b < b_1\}$.

$[\![cx]\!]_g = cl([\![x]\!]_g)$

- les axiomes 4.11 à 4.14 sont vérifiés de façon évidente par la définition de la sémantique de $<$ et $\asymp$. L'axiome 4.19 est trivialement vérifié également. L'axiome 4.20 est vérifié car P$xy$ implique directement que TPS$(x)$ $\subseteq$TPS$(y)$ et donc $x \subseteq_t y$.

- l'axiome 4.15 est vérifié car :
  $X < Y$ et TPS$(Y)\cap$TPS$(Z) \neq \emptyset$ et $Z < T$ impliquent d'une part que pour tout $\alpha \in X \beta \in Y \gamma \in Z, \theta \in U$, $\alpha \prec \beta$ et $\gamma \prec \theta$ (1) et d'autre part que $\exists \beta_2 \in Y\ \exists \gamma_2 \in Z\ \beta_2 \approx_t \gamma_2$ (2). De (1) et (2) on déduit donc que :
  $\forall \alpha \in X \forall \theta \in U\ (\alpha \prec \beta_2 \approx_t \gamma_2 \prec \theta)$, d'où $\alpha \prec \theta$ et donc $X < U$.

- l'axiome 4.16 en vérifiant que $X < Y$ et non $X < Z$ implique qu'on a pas TPS$(Z)$ $\subseteq$TPS$(Y)$. En effet la deuxième condition implique $\exists \alpha \in X$ tel que $\forall \beta \in Z\ \neg \alpha < \beta$ d'où par linéarité, soit (1) il existe un $\beta \approx_t \alpha$ et donc TPS$(Z)\cap$TPS$(X) \neq \emptyset$ et comme par hypothèse $(X < Y)$ on a TPS$(Z)\cap$TPS$(Y) = \emptyset$, on a bien la conclusion. Soit (2) $\forall \beta \in Z\ \beta < \alpha$, d'où $\alpha \in f^*(Z)$. Alors de $Z < f^*(Z)$, TPS$(f^*(Z))\cap$TPS$(X)$ et $X < Y$ on a (de par la vérification de l'axiome 4.15) $Z < Y$ et donc on n'a pas TPS$(Z)$ $\subseteq$TPS$(Y)$.

- les axiomes 4.17 et 4.18 sont vérifiés grâce à la condition (j).

- Les axiomes 4.22 et 4.21 sont vérifiés grâce aux conditions (k) et (l).

- Les axiomes 4.23 et 4.24 sont trivialement vérifiés puisque l'interprétation de la somme est $\cup^*$.

- L'axiome 4.26 est vérifié grâce à la condition (i).

- L'axiome 4.27 est vérifié avec la condition (m)

- L'axiome 4.29 est vérifié car les entités ayant un intérieur non vide, elles ont forcément une ou des composantes connexes qui sont alors temporellement connexes, et il existe une somme de ces composantes qui est maximalement connexe temporellement.

- L'axiome 4.28 est vérifié avec la condition (h). En effet, en considérant $X$ et $Y$ dans $\mathcal{G}$, pour toute composante maximalement connexe temporellement de $X$ et toute partie connexe de $Y$, on a

### 4.5.4 Complétude

Nous allons reprendre la démonstration de (Asher et Vieu, 1995) qui prouve la complétude de leur théorie par rapport aux structures vues plus haut, en ajustant les conditions à notre théorie (nous l'appellerons ST) puisqu'elle étend leur théorie de base. La complétude revient à la complétude d'une théorie du premier ordre particulière, que Asher et Vieu prouve en suivant la méthode de Henkin, qui s'appuie sur les trois lemmes suivants :

Lindenbaum : tout ensemble consistant de formules de ST peut être étendu en un ensemble consistant maximal.

Lemme de saturation : tout ensemble consistant $\Sigma$ de formules de ST peut être étendu en un ensemble saturé $\Sigma'$ dans une extension du langage avec les constantes $c_0, c_1, \ldots$, tel que $\Sigma' \vdash \exists x A \rightarrow A(c_i/x)$ pour toute formule A avec une variable libre et $c_i$ est un témoin pour $x$.

Lemme de Henkin : tout ensemble maximalement consistant saturé $\Sigma$ de formules de ST donne un modèle $\mathcal{M}_\Sigma$ tel que $\mathcal{M}_\Sigma \models \phi$ si et seulement si $\phi \in \Sigma$.

Les preuves des deux premiers lemmes sont standards, seul le dernier demande que l'on précise la façon de construire les modèles. De même que Asher et Vieu, les objets de la théorie étendue en $\Sigma$, (maximalement consistant et saturé) sont les classes d'équivalences des constantes de la théorie (formant un ensemble $\Sigma_c$). Ces classes sont les ensembles $\overline{c_n} = \{ c_j \,|\Sigma \vdash_{\mathrm{ST}} c_j = c_n \}$. La connection correspondant à une intersection non vide, les objets de la théorie doivent être représentés par des ensembles de points qui sont construits par ultra-filtres comme on l'a vu au chapitre 3. Nous rappelons ici leur construction :

**Point intérieur** $\alpha$ est un point intérieur (IP($\alpha$)) si et seulement si :

(a) $\forall x \forall y \; ((x \in \alpha \;\wedge\; y \in \alpha) \rightarrow \; (Oxy \;\wedge\; x \cdot y \in \alpha)))$

(b) $\forall x \forall y \; ((x \in \alpha \;\wedge\; Pxy) \rightarrow \; y \in \alpha)$

(c) $\alpha \neq \emptyset$

(d) $\alpha$ est maximum par rapport aux conditions précédentes.

**Point frontière** $\alpha$ est un point frontière (BP($\alpha$)) si et seulement si :

(a) $\exists x \exists y \; (x \in \alpha \;\wedge\; y \in \alpha \;\wedge\; ECxy)$

(b) $\forall x \forall y \; [(x \in \alpha \;\wedge\; y \in \alpha) \rightarrow \; ((Oxy \;\wedge\; x \cdot y \in \alpha) \vee \exists t \exists z (z \in \alpha \;\wedge\; t \in \alpha \;\wedge\; Pzx \;\wedge\; Pty \;\wedge\; ECzt))]$

(c) $\forall x \forall y \; ((x \in \alpha \;\wedge\; Pxy) \rightarrow \; y \in \alpha)$

(d) $\alpha$ est maximum par rapport aux conditions précédentes.

On a donc aussi que tout point $\alpha$ appartient à $\Sigma_c$. Les ensembles de points sont donc les ensembles suivants :

$$c_n^* = \{ \alpha | \; (IP(\alpha) \;\vee\; BP(\alpha)) \;\wedge\; c_n \in \alpha \}$$

Le domaine de $\mathcal{M}_\Sigma$ est donc $\mathcal{D}_{\mathcal{M}_\Sigma} = \{c_n^* \mid c_n \in \Sigma_c\}$. L'interprétation d'une constante $c_n$ est alors un élément du domaine $[\![c_n]\!] = c_n^*$. On définit ensuite la relation d'ordre sur les points par (cf. ce qui se fait en logique temporelle, chapitre 3) :

$$\alpha \prec \beta \triangleq \exists u \in \alpha \; \exists v \in \beta \;\; (u < v)$$

Et $[\![x < y]\!]_g = \forall \alpha \; \forall \beta \; (x \in \alpha \;\wedge\; y \in \beta) \rightarrow \; \alpha \prec \beta)$.
La relation de contemporanéité est définie par[10] :

$$\alpha \approx_t \beta \triangleq \forall u (u \in \alpha \rightarrow \; \exists v \; (v \in \beta \;\wedge\; v \subseteq_t u) \;\wedge\; (u \in \beta \rightarrow \; \exists v \; (v \in \alpha \;\wedge\; v \subseteq_t u))$$

Le modèle que l'on considère est donc défini par cette fonction d'interprétation et par $\mathcal{D}_{\mathcal{M}_\Sigma}$.

10. En reprenant une définition classique d'équivalence de filtres, comme dans (Whitehead, 1929), et l'en adaptant pour le temps.

Il faut maintenant montrer $\mathcal{M}_\Sigma \models \phi$ ssi $\phi \in \Sigma$. Suivant en cela (Asher et Vieu, 1995), la preuve se faisant par induction de façon standard, il suffit de montrer que cela est vrai pour les clauses de base (relations primitives et termes constants), c'est-à-dire de montrer que :

– $\mathcal{M}_\Sigma \models$C$(a,b)$ ssi C$(a,b) \in \Sigma$. Asher et Vieu ont montré que cela est assuré par la construction par ultra-filtres et les axiomes de base.

– $\mathcal{M}_\Sigma \models a \asymp b$ ssi $(a \asymp b) \in \Sigma$. On rappelle que l'interprétation de $\asymp$ est : $[\![u \asymp v]\!]$ est vraie si et seulement si $\exists\alpha\exists\beta\ (u \in \alpha\ \wedge\ v \in \beta)$ et $\alpha \approx_t \beta$.

– $\mathcal{M}_\Sigma \models u < v$ ssi $u < v \in \Sigma$.

On va tout d'abord montrer quelques propriétés des relations introduites sur le modèle.
La relation $\prec$ est irréflexive :

**Th 4.34** $\neg\alpha \prec \alpha$

En effet, par définition d'un point, $\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha$ C$xy$, d'où $x \asymp y$ et donc
$\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha (\neg x < y\ \wedge\ \neg y < x)$.
La relation $\prec$ est également transitive :

**Th 4.35** $(\alpha \prec \beta\ \wedge\ \beta \prec \gamma \rightarrow\ \alpha \prec \gamma)$

En effet, par hypothèse, $\exists x \in \alpha, y \in \beta, z \in \beta, t \in \gamma(x < y\ \wedge\ z < t)$ et puisque $z$ et $y$ appartiennent à un même point, on a C$yz$ et donc $y \asymp z$, puis par l'axiome de transfert (4.15) on a $x < t$ d'où $\alpha \prec \gamma$.
Ainsi $\prec$ est également antisymétrique, et est bien un ordre strict sur le domaine. Si on considère maintenant la relation $\approx_t$, on vérifie que c'est bien une relation d'équivalence:

**Réflexivité** $\forall u \in \alpha, u \subseteq_t u$ d'où $\alpha \approx_t \alpha$

**Symétrie** la définition de $\approx_t$ étant symétrique par rapport à $\alpha$ et $\beta$, la relation l'est aussi :
$\alpha \approx_t \beta \rightarrow\ \beta \approx_t \alpha$

**Transitivité** supposons $\alpha \approx_t \beta$ et $\beta \approx_t \gamma$. Alors $\forall u \in \alpha \exists v\ (v \in \beta\ \wedge\ v \subseteq_t u)$ et donc $\exists w \in \gamma\ (w \subseteq_t v)$ ; par transitivité de $\subseteq_t$ on obtient $\forall u \in \alpha \exists w\ (v \in \gamma\ \wedge\ w \subseteq_t u)$ ; l'autre moitié de la définition de $\approx_t$ se montre de façon similaire, la relation étant symétrique.

On a aussi les propriétés suivantes :

**Th 4.36** $\alpha \approx_t \beta \leftrightarrow \forall\gamma\ ((\gamma \prec \alpha \leftrightarrow \gamma \prec \beta)\ \wedge\ (\alpha \prec \gamma \leftrightarrow \beta \prec \gamma))$

Preuve:
$\forall\gamma\ \gamma \prec \alpha \rightarrow\ \exists u \in \gamma \exists v \in \alpha\ u < v$
de plus $\alpha \approx_t \beta \rightarrow\ \exists w \in \beta\ w \subseteq_t u$
de $w \subseteq_t u$ et $u < v$ on tire $w < v$ (Th. 4.8) et donc $\gamma \prec \beta$.
Les autres inégalités se montrent de la même façon.
Un corollaire de ce dernier théorème est également:

**Th 4.37** $\alpha \approx_t \beta \rightarrow\ (\neg\beta \prec \alpha\ \wedge\ \neg\alpha \prec \beta)$

Si on considère un domaine atomique, on peut aussi montrer facilement la réciproque, et donc la linéarité temporelle :

**Th 4.38** $\alpha \approx_t \beta \ \vee \ \beta \prec \alpha \ \vee \ \alpha \prec \beta$

En effet, si on considère des régions atomiques, les points sont tous engendrés par des atomes : les points intérieurs sont des ensembles de régions contenant un même atome, et les points frontières sont engendrés par deux fermetures d'atomes en connection externe (et sont l'ensemble des régions contenant au moins une de ces deux régions génératrices). Dans la plupart des cas réalistes les représentations que l'on utilise sont finies (c'est d'ailleurs un des intérêts d'une représentation qualitative), donc atomiques. L'autre cas correspond à une suite de régions emboîtées les unes dans les autres à l'infini, qui converge vers une limite assimilable aux points tels qu'on les conçoit classiquement. En toute rigueur, il faudrait montrer le théorème précédent dans le cas général (une conjecture qui paraît raisonnable), mais nous nous contenterons de cette version affaiblie dans la suite de ce travail.
La démonstration se ramène à une étude de cas, fastidieuse mais simple, à partir de la nature des points :

1. on a deux points intérieurs : IP$(\alpha)$ et IP$(\beta)$. Alors ils sont générés par deux atomes respectivement $u$ et $v$. Les seules relations temporelles possibles entre ces deux atomes sont $u < v$ ou $v < u$ ou $u \equiv_t v$ (cf th. 4.26), ce qui donne immédiatement, respectivement pour chaque cas, $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \alpha$ ou $\alpha \approx_t \beta$.

2. on a deux points frontières : BP$(\alpha)$ et BP$(\beta)$. Alors ils sont générés par deux couples de régions en connexion externe, respectivement $u_1$ et $u_2$, et $v_1$ et $v_2$, tels que EC$u_1 u_2$ et EC$v_1 v_2$, et AT$(i(u_1))$, AT$(i(u_2))$, AT$(i(v_1))$, AT$(i(v_2))$.
Les cas possibles de relations temporelles se réduisent aux situations suivantes :

   (a) $i(u_1) \equiv_t i(u_2)$ ; alors soit $i(v_1)$ et $i(v_2)$ sont également équivalents temporellement à $iu_1$ et $\alpha \approx_t \beta$, soit $iv_1$ ou $iv_2$ sont ordonnés par rapport aux autres, par exemple $i(v_1) < i(u_1)$ et alors $\beta \prec \alpha$.

   (b) $i(u_1) < i(u_2)$ (où l'inverse). Alors soit $i(v_1) \equiv_t i(v_2)$ et on est ramené à un cas symétrique du précédent, soit par exemple $i(v_1) < i(v_2)$. Suivant la relation ($<$, $>$, $\equiv_t$) liant $i(u_1)$ et $i(v_1)$ on a alors $\alpha \prec \beta$ ou $\beta \prec \alpha$ ou $\alpha \approx_t \beta$.

3. on a IP$(\alpha)$ et BP$(\beta)$. On a les mêmes situations que précédemment avec deux points frontières, mais avec des cas en moins à considérer (puisque le point intérieur n'est généré que par un seul atome).

On revient maintenant aux démonstrations de :

– $\mathcal{M}_\Sigma \models a \asymp b$ ssi $(a \asymp b) \in \Sigma$. On montre le résultat intermédiaire suivant, en restant dans un domaine atomique :

  **Th 4.39** $(a/u) \in \alpha \rightarrow \ \exists \beta \ (u \in \beta \ \wedge \ \alpha \approx_t \beta)$

  En effet :

  1. pour un point intérieur, soit $\alpha$ est généré par un atome $x$, avec P$x(a/u)$, et dans ce cas $x \subseteq_t u$ d'où $\exists u/x$ qui est temporellement atomique (et donc par la linéarité de la structure

de points, tous ses points sont contemporains), d'où il existe $\beta$, $(u/x) \in \beta$ et donc $u \in \beta$ et ce point est tel que $\beta \approx_t \alpha$. soit $\alpha$ n'est pas généré par un atome ; donc pour tout $x \in \alpha$ on peut trouver $y \in \alpha$ avec P$yx$, et on est sûr qu'à un moment on a $y \subseteq_t a/u$ ; alors il existe $u/y$, $u/y \equiv_t y$, et donc on est sûr que la série de régions déterminant $\alpha$ à une série correspondante dans $u$ qui va donc définir un point, par construction celui-ci est contemporain à $\alpha$.

2. Dans le cas où $\alpha$ est un point frontière, il est soit généré par deux fermetures d'atomes en contact et au moins l'un des deux (appelons le $x$) est inclus temporellement dans $u$, et donc on fait le même raisonnement que ci-dessus: $u/ix$ détermine au moins un point intérieur de $u$. Soit le point frontière est généré par deux séries infinies de régions en contact 2 par 2 et la suite des intérieurs d'un des deux va donner un point intérieur auquel on peut appliquer le raisonnement du 1)

On voit ici l'importance de l'axiome d'existence des tranches (4.26) et la raison de la définition de la contemporanéité par une inclusion temporelle des éléments de deux points.
On revient maintenant au résultat qui nous intéresse sur $\asymp$:
• supposons $u \asymp v$ alors par la "normalité" de l'univers on a C$(a/u)(a/v)$ et donc il existe $\alpha_1, a/u \in \alpha_1$ et $a/v \in \alpha_1$. on a alors par le théorème 4.39 : $\exists \alpha_2\ u \in \alpha_2 \ \wedge \ \alpha_2 \approx_t \alpha_1$ et $\exists \alpha_3\ v \in \alpha_3 \ \wedge \ \alpha_3 \approx_t \alpha_1$ et donc par transitivité de $\approx_t$ on $\alpha_2 \approx_t \alpha_3$ et donc $\mathcal{M}_\Sigma \models uCtv$.
• supposons maintenant que $\mathcal{M}_\Sigma \models uCtv$ ; alors $\exists\alpha\exists\beta\ (u \in \alpha \ \wedge \ v \in \beta \ \wedge \ \alpha \approx_t \beta)$. de là par définition de $\approx_t$ on tire $\exists x \in \beta\ x \subseteq_t u$ ; $x \in \beta$ implique C$xv$ et donc $x \asymp v$ et avec $x \subseteq_t u$ on a finalement $u \asymp v$.
On a donc bien vérifié que $\mathcal{M}_\Sigma \models u \asymp v$ ssi $(u \asymp v) \in \Sigma$.

– Pour montrer $\mathcal{M}_\Sigma \models u < v$ ssi $u < v \in \Sigma$ : le sens direct est évident par définition de $\prec$ et de $<$ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{M}_\Sigma}$. On a en effet $u < v \in \Sigma$ implique $\forall\alpha\forall\beta\ ((u \in \alpha \ \wedge \ v \in \beta) \to \ \alpha \prec \beta)$.
Réciproquement on montre que si $\neg u < v \in \Sigma$ alors on a $\mathcal{M}_\Sigma \models \neg u < v$ : il y a les possibilités suivantes (d'après l'axiome de "linéarité" 4.28) :

  – $v < u$ : dans ce cas, si on prend $\alpha, u \in \alpha$ et $\beta, v \in \beta$ , pour tout $x \in \alpha$, C$xu$ et donc $x \asymp u$ et de même pour tout $y \in \beta$, $y \asymp v$ ; si on pouvait avoir $x < y$ en plus de $u \asymp x$ et $v < u$, par l'axiome de transfert on aurait aussi $v < y$ ce qui est incompatible avec $v \asymp y$. d'où finalement, $\mathcal{M}_\Sigma \models \neg u < v$.

  – $v \asymp u$ mais dans ce cas on a montré que $\mathcal{M}_\Sigma \models u \asymp v$ et donc $\mathcal{M}_\Sigma \models \neg u < v$, par la sémantique de $\asymp$.

  – BETW$(u, v)$ : d'où il existe $u_1, v_1, u_2$ tels que P$u_1u \wedge$ P$u_2u \wedge$ P$v_1v$ et $u_1 < v_1 < u_2$. On peut alors prendre $\alpha$ et $\beta$ avec $v_1 \in \alpha$ et $u_1 \in \beta$ et on a $\beta \prec \alpha$ ; de $Pu_1u$ on tire $u \in \beta$ et de même $v \in \alpha$ et donc $\exists\beta, u \in \beta$ et $\exists\alpha, v \in \alpha$ avec $\alpha \prec \beta$ d'où $\mathcal{M}_\Sigma \models \neg u < v$.

  – BETW$(v, u)$ : on fait la même démonstration en prenant cette fois $v_1, v_2$ et $u_1$ tels que $v_1 < u_1 < v_2$ et en considérant des points contenant $u_1$ et $v_2$.

Il reste à vérifier que le modèle ainsi construit est bien un modèle de la théorie ST. Il faut donc vérifier les conditions (a)-(m). Il nous faut pour cela avoir une structure topologique sur $\mathcal{D}_{\mathcal{M}_\Sigma}$. L'ensemble de tous les points est déjà donné, c'est l'union des $\{ \ c_n^* \mid c_n \in \Sigma_c \ \}$, notons le $U$. Nous prendrons comme ensemble des ouverts les ensembles suivants, suivant en cela (Asher et Vieu, 1995) :

$\{ \ c_n^* | c_n \in \Sigma_c \text{et} \Sigma \vdash \mathrm{OP}(c_n) \ \}$

$\{ \ \emptyset \ \}$

$\{ \ \cup X | \ X \subseteq \{ \ c_n^* | c_n \in \Sigma_c \text{et} \Sigma \vdash \mathrm{OP}(c_n) \ \} \ \}$

Ce qui donne bien une topologie (l'intersection est un ouvert, grâce à l'axiome 4.10, l'ensemble vide et l'univers $U$ en font partie, et par construction l'union d'ouverts est un ouvert) , non vide grâce notamment à l'axiome 4.22 et la construction par ultra-filtres. Si on reprend les conditions portant sur les structures S, on peut voir que l'on a déjà vérifié ci-dessus les conditions (a)-(e) en reprenant en partie la structure de Asher et Vieu, et on a montré au fur et à mesure les conditions (f)-(h). Les conditions restantes sont respectivement vérifiées grâce aux axiomes suivants :

– (i) grâce à l'axiome 4.26.

– (j) grâce aux axiomes 4.17 et 4.18.

– (k) grâce à l'axiome 4.22.

– (l) grâce à l'axiome 4.21.

– (m) grâce à l'axiome 4.27.

Finalement par les lemmes de Lindenbaum, de saturation et de Henkin, on obtient que tout ensemble consistant de formules pour ST a un modèle dans la classe des modèles S.

## 4.6 Conclusion

Nous avons donné ici une théorie méréo-topologique de l'espace-temps en montrant les correspondances avec une structure de points sous-jacente.
L'espace-temps ainsi modélisé donne un espace relatif : il n'y a pas de colocation d'objets à des moments différents (l'expression "tel objet occupe l'espace qu'occupait avant lui un autre objet" est donc dénuée de sens), mais on peut considérer que le temps a une existence à part (via les tranches d'univers) car il y a la possibilité d'exprimer la simultanéité de deux régions spatialement différentes. Les propriétés de cet espace-temps en font donc un outil bien défini pour pouvoir maintenant raisonner sur le changement spatial. En particulier les problème des paradoxes liés au changement, que l'on a vus dans les chapitres précédents, sont résolus dans un tel cadre. Nous allons maintenant nous pencher sur une caractéristique essentielle du mouvement, et qui est un peu au mouvement ce que la connexité est à l'espace : la continuité.