Plus faibles préconditions

23 novembre 2005

1 Affectation et Séquences

1. Calculer les wp suivantes :
   - [i :=i+1] (i $\leq$1)
   - [i :=i+2 ;j :=j-2] (i+j=0)
   - [i :=i+1 ;j :=j-1] (i*j=0)
   - [z :=z*j ; i :=i-1] (z*j^{i}=c)
   - [x,y :=x-y,y-x] (x+y=c)
   - [x,y :=x-y,y+x] (x+y=c)
2. Vérifier le programme suivant :

```
- spécification
permut ≜ - x0,y0 et z0 dénotent les valeurs initiales de x,y et z
  BEGIN
    x,y,z :(x = y0 ∧  y = z0 ∧  z = x0)
  END

- implantation
permut ≜
  BEGIN
    x := x + y + z;
    z := x - y - z;
    y := x - y - z;
    x := x - y - z;
  END
```

3. Vérifier la validité des implications suivantes, en sachant que $0! = 1$ et $\forall i.\ (i \in N^* \Rightarrow i! = i \times (i-1)!)$:
   P0 : (f = i !) $\Rightarrow$[i := i+1 ; f := f*i] (f = i !)
   P1 : (f = i !) $\Rightarrow$[f := f*i ; i := i+1] (f = i !)
   P2 : (f = i !) $\Rightarrow$[f,i := f*i,i+1] (f = i !)
   P3 : (f = i !) $\Rightarrow$[f,i := f*(i+1),i+1] (f = i !)

2 Sélection

1. Calculer les wp suivantes :
   - [**IF** x $\geq$y **THEN** z :=x **ELSE** z :=y **END**] (z=max(x,y))
   - [**IF** x $\geq$y **THEN** z :=x **ELSE** z :=y **END**] (z=y-1)
2. Ecrire un programme qui trie trois variables en utilisant des sélections et des affectations multiples.

3 Répétition

Nous proposons des programmes qui prétendent calculer dans la variable p, la valeur en X d'un polynôme de degré $N \geq 0$. Les coefficients de ce polynôme sont des entiers mémorisés dans un tableau A[0..N]. Le résultat de ce programme doit satisfaire la propriété :

R $\triangleq p = \sum_{K=0}^{N} A[K]X^K$.

Le calcul de cette somme, necéssitant une répétition, nous a conduit à proposer l'invariant suivant :

INV $\triangleq 0 \leq i \leq N \wedge p = \sum_{K=0}^{i} A(K)X^K \wedge y = X^i$

1. Indiquer, en justifiant votre réponse, parmi les deux instructions suivantes celles qui satisfont l'invariant `INV`. On étudiera pour cela la validité de la formule $\texttt{N} \geq 0 \Rightarrow$`[Initi](INV)`.
   - `Init0` $\triangleq$`i, p, y := 0, 0, 1`
   - `Init1` $\triangleq$`i, p, y := 0, A(0), 1`
2. L'invariant étant initialement vérifié, indiquer avec une preuve, que si les boucles suivantes se terminent alors elles se terminent en satisfaisant la propriété **R**. Il s'agit de montrer les deux propriétés suivantes sur une boucle de la forme
   WHILE `cond` **DO** `corps` **INVARIANT** `INV` **END** :

   $(\texttt{INV} \wedge \neg\ \texttt{cond}) \Rightarrow \texttt{R}$
   $(\texttt{INV} \wedge \texttt{cond}) \Rightarrow \texttt{[corps](INV)}$

   - `b0` $\triangleq$**WHILE** `i` $\leq$`N` **DO** `i, p, y := i+1, p+A(i)*y, y*X` **END**
   - `b1` $\triangleq$**WHILE** `i` $<$`N` **DO** `i, p, y := i+1, p+A(i)*y, y*X` **END**
   - `b2` $\triangleq$**WHILE** `i` $<$`N` **DO** `i, p, y := i+2, p+(A(i+1)+A(i+2)*X)*y*X, y*X*X` **END**
   - `b3` $\triangleq$**WHILE** `i` $<$`N` **DO** `i, p, y := i+1, p+A(i+1)*y*X, y*X` **END**