

Programmation impérative et langage C

feuille de TD n° 8 : Ecriture de programmes avec preuves.

1 Rappels de cours

Notre but est d'écrire des programmes en utilisant les techniques de preuve de programme. A cette fin, on utilise les prédicats donnés par la spécification (en particulier celui de sortie) pour définir l'invariant de boucle, la condition de boucle et la phase d'initialisation.

Pour cela, il existe plusieurs techniques :

- élimination d'une conjonction,
- introduction d'une variable.

Ces 2 techniques partent du prédicat de sortie et le modifient de telle sorte que l'on puisse en extraire l'invariant de boucle et la négation de la condition de boucle. On utilise ainsi la propriété suivante qui doit être vérifiée lors de la preuve :

$$(\text{INV} \wedge \neg \text{Condition_Boucle}) \rightarrow \text{Prédicat de sortie}$$

Dans le premier cas, on isole une partie du prédicat de sortie liée au reste du prédicat par une conjonction :

$$\text{Prédicat de sortie} = (A \wedge B)$$

A sera alors la négation de la condition de boucle et B l'invariant.

Dans le second cas, on remplace une constante du prédicat de sortie par une variable en rajoutant les contraintes sur cette variable :

$$\text{Prédicat de sortie} = P(N) \text{ qui est impliqué par } (P(i) \wedge (i = N) \wedge C(i))$$

avec $i = N$ la négation de la condition de boucle et $(P(i) \wedge C(i))$ l'invariant.

2 Recherche d'invariants par élimination d'une conjonction

◇ Exercice 1 : Écrire un programme qui calcule la partie entière de la racine carrée d'un nombre $N \geq 0$.

◇ Exercice 2 : Soit $B(0..N-1)$ un tableau d'entiers croissants (non strictement) et X une valeur entière telle que $B(0) \leq X < B(N-1)$. Écrire un programme qui détermine la position de la dernière occurrence du plus grand nombre du tableau inférieur ou égal à X .

3 Recherche d'invariants par introduction d'une variable

◇ Exercice 3 : Écrire un programme qui calcule A^B avec $A \geq 0$ et $B \geq 0$ deux entiers.

◇ Exercice 4 : Écrire un programme qui calcule la partie entière de la racine carrée d'un nombre $N \geq 0$.

◇ Exercice 5 : Soit $B(0..N-1)$ un tableau d'entiers croissants (non strictement) et X une valeur entière telle que $B(0) \leq X < B(N-1)$. Écrire un programme qui détermine la position de la dernière occurrence du plus grand nombre du tableau inférieur ou égal à X . On utilisera une méthode dichotomique.

◇ Exercice 6 : Écrire un programme itératif qui calcule l'arrangement A_N^P pour $N \geq P \geq 0$. N et P sont des entiers. L'arrangement A_N^P est défini de la façon suivante (rappelons que $A_K^0 = 1$) :

$$A_N^P = \frac{N!}{(N-P)!} \text{ avec } 0! = 1 \text{ et } N! = N \times (N-1)!$$

◇ Exercice 7 : Écrire et faire la preuve du programme qui reçoit un tableau $T[0..N-1]$ de N entiers tous différents ($N > 0$) et renvoie la position des 2 plus grands éléments de ce tableau.

