TD1 : Diagonalisation et maximisation de l'inertie

Exercice 1 Soit n un entier naturel non nul et soit u_1 un vecteur colonne, donné, de $\mathbf{R}^n$ de norme 1. La matrice identité de taille n sera notée I_n. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère la matrice $n \times n$ $A := I_n + \lambda u_1 u_1^T$

Question 1.1 Dire pourquoi A est diagonalisable?

Question 1.2 Montrer que $1 + \lambda$ est une valeur propre de A associé au vecteur propre u_1.

Question 1.3 Soit $u_2, \cdots, u_n$ des vecteurs colonnes tous de norme 1 tels que, pour $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $i \neq j$ on a $u_i^T u_j = 0$. Montrer que $u_2, \cdots, u_n$ sont des vecteurs propres de A.

Question 1.4 Déterminer une matrice inversible M telle que la matrice $D := M^{-1}AM$ soit diagonale.

Question 1.5 Que vaut le déterminant de A?

Question 1.6 Pour quelles valeurs de λ la matrice A est inversible? positive? définie positive?

Exercice 2 On rappelle que, si A et B sont deux matrices carrées $p \times p$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Question 2.1 On suppose que A est inversible. Montrer que $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

On rappelle que A est dite diagonalisable s'il existe une matrice M inversible et une matrice diagonale D telle que $A = MDM^{-1}$.

Question 2.2 On suppose A diagonalisable, et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres. Montrer que

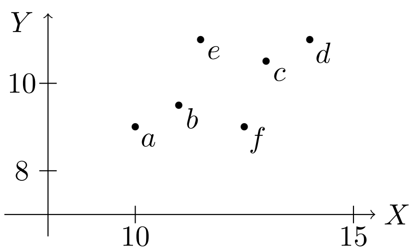
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i.$$

Exercice 3 Soit A et B sont deux matrices carrées $p \times p$. On définit la trace de A comme la somme des termes diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,i}.$$

On admet que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Montrer que, si A est diagonalisable, sa trace est la somme des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

Exercice 4 On considère le tableau de données ci-dessous, donnant les valeurs de deux variables X et Y pour les individus a, b, c, d, e et f.



	X	Y
a	10	9
b	11	9.5
c	13	10.5
d	14	11
e	11.5	11
f	12.5	9

Question 4.1 Calculer les coordonnées (X et Y) du barycentre g de ces individus, et calculer l'inertie de chacun des points par rapport à g.

Question 4.2 Quelle semble être la direction de plus grande inertie de l'ensemble des points ? Donner les coordonnées d'un vecteur directeur U de cette direction, de norme 1.

Question 4.3 Tracer sur la figure ci-dessus la droite passant par g et ayant cette direction. Quelle est l'inertie du nuage projeté sur cette droite par rapport à g ?

Question 4.4 Donner les coordonnées d'un vecteur V orthogonal à U et de norme 1, et tracer la droite dirigée par V passant par g. Quelle est l'inertie du nuage projeté sur cette droite par rapport à g ?

Question 4.5 Calculer la matrice T_c obtenue par centrage des variables X et Y. Dans la suite, on note X_c et Y_c les variables après centrage, et on note a_c, b_c, $\ldots$ f_c les individus correspondants.

Question 4.6 Calculer la matrice des corrélation $T_c'\, T_c$, et vérifier que U et V sont vecteurs propres de cette matrice. Quelles valeurs propres retrouve-t-on ?

Question 4.7 Donner la matrice P de passage de la base (U, V) à la base (X, Y). Montrer que $P' = P^{-1}$.

Question 4.8 Calculer les coordonnées des points a_c, b_c,… f_c dans le « nouveau » repère f_c, ainsi que la nouvelle matrice des corrélations. Quel résultat retrouve-t-on ?

On remplace maintenant e et f par e' et f' de coordonnées respectives $(10, 14)$ et $(14, 6)$ en X et Y.

Question 4.9 Quelle est maintenant la direction de plus grande inertie ?

Question 4.10 Calculer les variables centrées réduites X_{cr} et Y_{cr}. U et V sont-ils vecteurs propres du nouveau tableau centré réduit ?

Exercice 5 On a relevé les notes de quelques élèves dans 7 matières : le Français, le Latin, le Dessin, la Musique, le Sport, les Maths et la Physique. Le tableau suivant donne les notes après centrage et réduction:

	Math	Physique	Français	Latin	Musique	Sport	Dessin
Monique	1.35	1.47	1.43	1.70	-0.96	1.38	1.34
Pierre	-1.16	-0.89	1.03	0.51	-0.32	-0.39	-1.22
Annie	-1.02	-0.89	0.21	-0.17	0.00	0.49	1.04
Evelyne	-0.19	-0.11	0.62	0.68	2.24	-0.39	-0.02
Jean	-1.02	-1.21	-1.42	-1.53	-0.96	0.49	1.34
Aline	-0.47	-0.58	-0.60	-0.68	-0.64	0.49	-1.07
Didier	1.21	1.31	0.48	0.68	-0.32	0.49	-0.62
André	0.37	0.05	-1.28	-1.02	0.64	-0.39	-0.47
Brigitte	0.93	0.84	-0.47	-0.17	0.32	-2.16	-0.32

Afin de voir s'il y a des ressemblances entre élèves et des corrélations entre matières, on veut réaliser une ACP sur ce tableau. Le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice des corrélations donne les 5 vecteurs propres suivants (les autres valeurs propres sont négligeables) :

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
Math	0.46	-0.18	0.52	0.021	-0.15
Physique	0.52	-0.16	0.39	-0.0083	-0.057
Français	0.46	0.1	-0.55	-0.073	0.24
Latin	0.54	0.03	-0.35	0.0048	0.13
Musique	0.0003	-0.52	-0.33	0.62	-0.48
Sport	0.13	0.64	-0.066	-0.074	-0.75
Dessin	0.044	0.49	0.2	0.78	0.34

On étudie la projection dans le plan défini par les vecteurs propres V_1 et V_3.

Question 5.1 Calculer les coordonnées de Monique, Pierre, Annie et Evelyne sur les axes correspondant aux vecteurs propres 1 et 3, et représenter ces indivdus sur un graphique.

Le calcul des corrélations entre les variables initiales et les vecteurs propre donne le tableau suivant :

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
Math	-0.78	-0.25	0.56	0.019	-0.086
Physique	-0.88	-0.21	0.42	-0.0074	-0.033
Français	-0.78	0.14	-0.6	-0.064	0.14
Latin	-0.92	0.041	-0.38	0.0042	0.075
Musique	-0.00048	-0.7	-0.36	0.55	-0.28
Sport	-0.22	0.87	-0.071	-0.064	-0.44
Dessin	-0.075	0.66	0.21	0.69	0.2

Question 5.2 Dessiner sur un graphique les projection dans le plan 1-3 des variables, sans oublier de dessiner le cercle de rayon 1.

Question 5.3 D'après les graphiques, les affirmations suivantes sont-elles fondées (répondre par Vrai ou Faux):

1. Monique est très différente de Pierre.
2. Pierre et Evelyne se ressemblent.
3. Evelyne ressemble plus à Pierre qu'à Annie
4. Les notes en Sport et en Dessin sont très fortement corrélées
5. Les notes en Maths et en Physique sont très fortement corrélées
6. Il y a une corrélation positive entre les notes de Sports et de Maths

Question 5.4 Vérifier vos réponses en calculant d'une part les distances entre les 4 élèves, et d'autre part les corrélations entre notes dans les 4 matières étudiées.