Introduction à l'optimisation combinatoire

Exemples

Le sac à dos

- n objets, dont on connaît le *poids* et la *valeur*
- un sac qui supporte une charge maximale de C kilos

$\Rightarrow$ choisir autant d'objets que possible de manière à prendre la plus grande valeur possible

Exemple : capacité 20kg, objets suivants :

num.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
poids	11	7	5	5	4	3	3	2	2	2	2	1
valeur	20	10	25	11	5	50	15	12	6	5	4	30

(Sol.: $\{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ poids 20, valeur 147)

2^n "sacs" d'objets possibles, on cherche le meilleur (plus grande valeur) qui respecte la contrainte de poids.

Algorithme "glouton":

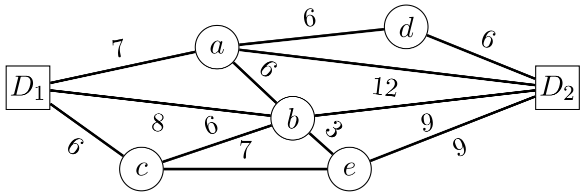
- on examine les objets l'un après l'autre
- on les ajoute au sac si ça ne dépasse pas le poids limite

Ordre d'examen des objets:

1. par ordre valeur décroissante ; ou
2. par ordre de (valeurs/poids) décroissants

Routage de véhicules

- m camions, initialement garés dans m dépots (qui contiennent les mêmes marchandises, en quantités supposés suffisantes)
- n clients à livrer
- on connaît les distance entre les clients



$\Rightarrow$ Pour optimiser le coût des livraisons, il s'agit de répartir, en les ordonnants, les livraisons entre les camions, en minimisant la distance parcourue par l'ensemble des camions – en comptant le retour de chaque camion à son dépôt initial.

Allocation de tâches

- m machines identiques, fonctionnant en parallèle
- n tâches à réaliser
- on connaît la durée de chaque tâche

Exemple : 3 machines, 9 tâches :

tâche	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
durée	10	9	6	7	6	4	8	7	20

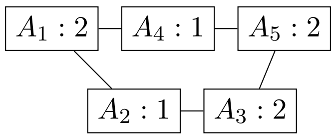
$\Rightarrow$ On veut répartir les tâches sur les m machines de manière à minimiser le temps total d'exécution. On suppose qu'on n'a pas de contrainte sur l'ordre dans lequel les tâches doivent être exécutées.

Allocation de fréquences

- m antennes $A_1, \dots A_m$;
- chaque antenne A_i doit avoir N_i fréquences ;
- n fréquences utilisables $f_1, \dots f_n$, avec $n < \sum_1^m N_i$;
- interférence si même fréquence sur 2 antennes adjacentes

$\Rightarrow$ Minimiser le nombre d'interférences

Exemple : 5 antennes, 4 fréquences :



Les déménageurs

- n objets à déménager, chaque objet a un volume connu ;
- m camions de capacité maximale connue V ;

$\Rightarrow$ Il faut prévoir le nombre minimal de camions nécessaire au déménagement.

(Pour simplifier, on suppose que la forme des objets ne pose pas de problème...)

Définition

Un *problème combinatoire* nécessite de trouver un groupement, un ordre ou une affectation d'un ensemble fini d'objets $\mathcal{O}$ qui satisfait certaines conditions.

On cherche donc $S : \mathcal{O} \longrightarrow E$, où $E = \{0, 1\}$, ou $E = \{1, \dots, |\mathcal{O}|\}$ (permutations) ou ....

Conditions : injection si on cherche une permutation, ...

Solution faisable $= S$ qui vérifie les conditions requises.

Solution candidate $= S$ qui ne vérifie pas nécessairement les conditions requises.

Un problème d'*optimisation combinatoire* est défini par :

- l'ensemble $\mathcal{S}$ de **solutions faisables** (on sait donc **énumérer** les solutions de cet ensemble)
- et une fonction de coût / valeur $v : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R}$

On cherche une solution S^* de valeur optimale – maximale ou minimale suivant les problèmes :

$$S^* \in \underset{S \in \mathcal{S}}{\operatorname{argmax}}\{v(S)\}$$

<u>Mauvaise nouvelle</u> : pour les problèmes ci-dessus, on pense qu'il n'y a pas de méthode permettant de trouver "directement" (efficacement) et à tous les coups la solution optimale (ce sont des problèmes *NP-complets*).