Méthodes incomplètes d'optimisation combinatoire Techniques Avancées d'IA – Oct-Déc.. 2015

On n'a pas d'algorithme permettant de trouver "directement" (efficacement) et à tous les coups la solution optimale de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire.
Mais on connaît des algorithmes "gloutons".

⇒ On peut essayer d'améliorer la solution gloutonne, par succession de petites modifications.
Par exemples, pour le problème du sac-à-dos :

- échanger deux objets (un dans le sac, l'autre en dehors)
- ajouter un objet (au cas où un échange aurait fait suffisamment de place)

Algorithme générique de recherche locale

Algorithme d'exploration de base :
(où $S \succ S'$ signifie : S est meilleure que S')
(a) $S \leftarrow$ une solution initiale ; `fini` $\leftarrow$ `faux` ;
(b) tant que *pas fini* faire :
$S' \leftarrow$ `choisir_un_voisin`(S) ;
si $S' \succ S$ alors $S \leftarrow S'$;
sinon `fini` $\leftarrow$ `vrai` ;
(c) retourner S.

Choix d'un voisin :

- Un *voisin* de la solution courante S est une solution S' obtenue à partir de S en appliquant une "petite" modification.
- rapide : un algo qui calcule un seul voisin !
- plus long : on énumère tous les voisins, on garde le meilleur (*montée selon la plus grande pente*)
- intermédiaire : on génère un échantillon de voisins, on garde le meilleur

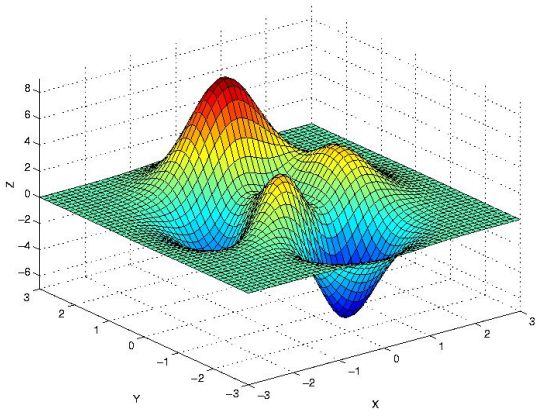
Problème important : les optimums locaux

- moins de chance d'en rencontrer si voisinage "grand"
- mais grand voisinage = modifications complexes et plus de voisins

⇒ **Algorithme d'exploration *avec redémarrages* :**
1. $S^* \leftarrow$ une solution initiale ;
2. Tant que *on a du temps* faire :
   (a) $S \leftarrow$ une nouvelle solution initiale ; `fini` $\leftarrow$ `faux` ;
   (b) Tant que *pas fini* faire :
   $S' \leftarrow$ `choisir_un_voisin`(S) ;
   si $S' \succ S$ alors $S \leftarrow S'$; sinon `fini` $\leftarrow$ `vrai` ;
   (c) si $S \succ S^*$ alors $S^* \leftarrow S$;
3. *retourner*(S^*).

- À l'étape 2a : génération de solutions (partiellement) aléatoires

⇒ on ne tombe pas toujours sur les mêmes optimums locaux



⇒ **Mémoire à court terme : liste *tabou*** Pour sortir d'un optimum local : autoriser le passage par une solution un peu moins optimale.
Problème : on risque de retomber immédiatement après dans le même minimum local
⇒ on mémorise à l'aide d'une *liste tabou* les solutions récemment explorées, où ça n'est pas la peine de retourner.

1. $S^* \leftarrow$ une solution initiale ;
2. tant que *on a du temps* faire :
   (a) $S \leftarrow$ une nouvelle solution initiale ; tabous $\leftarrow$ [] ;
   (b) ~~tant que *pas fini*~~ pour i allant de 1 à NbPas faire :
   $S' \leftarrow$ `meilleur_voisin`$(S,$ tabous$)$;
   si tabous plein
   supprimer de tabous la solution la plus ancienne ;
   tabous $\leftarrow$ tabous $+ S$;
   ~~si $S' \succ S$ alors~~ $S \leftarrow S'$;
   (c) si $S \succ S^*$ alors $S^* \leftarrow S$; ~~sinon `fini` $\leftarrow$ `vrai` ;~~
3. *retourner*(S^*).

Condition d'arrêt : on ne s'arrête plus à un optimum local, donc on utilise par exemple un compteur, et on ne fait la boucle 2b qu'un nombre fixé de fois.

Exemple : capacité 12kg, objets ci-dessous :

numéro	0	1	2	3
poids	3	4	5	6
valeur	8	10	11	12

Init: $S = \{(5,11),(6,12)\}$ = optimum local ;
Voisins : $\{(4,10),(6,12)\}; \{(3,8),(6,12)\}$ $\{(4,10),(5,11)\}; \{(3,8),(5,11)\}$
solution suivante $= \{(4,10),(6,12)\}$; solution initiale $\rightarrow$ liste tabou ;
solution suivante $= \{(4,10),(5,11)\}$;
solution suivante par ajout de $(3,8)$;
une taille de 1 a suffi pour sortir de l'optimum local.

Remarques :

- Liste tabou implémentée en FIFO
- Détermination de la taille de la liste par expérimentation. On peut utiliser une liste plus courte si on ne parcours pas tout le voisinage mais seulement un échantillon de celui-ci (cela réduit le risque de cycle)
- Lorsque les problèmes sont décrites par bcp d'attributs, on ne stocke pas les solutions entières, mais certains attributs de ces solutions – ou des mouvements permettant d'arriver à ces solutions.

Mémoire à moyen terme

Intensification de la recherche lorsqu'on est dans une zone prometteuse.

On stocke pour chaque valeur de chaque / certains attribut des solutions le nombre de fois où il a été présent dans une solution récente ; on peut alors poursuivre la recherche pendant un moment en fixant certains attributs à des valeurs qui semblent apparaître souvent dans des bonnes solutions. (ce qui peut revenir à changer la structure du voisinage durant cette phase)

Mémoire à long terme

Diversification de la recherche.

Pour éviter d'ignorer certaines parties de l'espace de recherche.
On stocke pour chaque valeur de chaque certains attributs les fréquences d'apparition dans les solutions parcourues ; lorsqu'on génère une nouvelle solution, on force certaines valeurs peu apparues jusque là.

Autres améliorations possibles

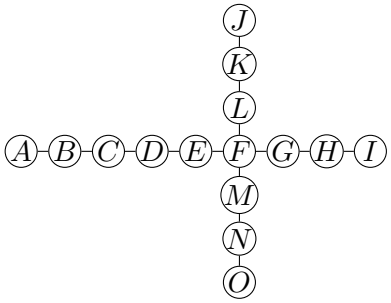
Aspiration On peut autoriser une solution $S' \succ S$, même si le mouvement est interdit par la liste tabou.

Fonction de coût/valeur auxiliaire Pour guider la recherche, notamment lorsque la fonction à optimiser ne prend que peu de valeurs. Par exemples, dans le problème des déménageurs, on peut chercher à maximiser $\sum_i^N Vi^\beta / N^\alpha$, avec $\alpha, \beta \geq 1$, ça favorise les répartions plus homogènes.

Exercices

Exercice 1 On suppose qu'on doit choisir des villes où construire des hôpitaux, afin qu'aucune ville ne soit à une distance plus grande qu'un d fixé d'un hôpital. On cherche bien entendu à construire le moins d'hôpitaux possible.

Par exemple, on suppose qu'on a 15 villes A à O, disposées ainsi :



Sur ce graphe, la distance entre deux villes adjacentes est d, la distance entre deux villes non adjacentes est $> d$. Ainsi, si on construit un hôpital en F, cela couvre les besoins des habitants des villes E, G, L et M. Si on construit des hôpitaux en A, C, F, I, K et O, on a une solution qui permet de "couvrir" toutes les villes. On note S_1 cette solution.

Question 1.1 Donnez un solution optimale sur cet exemple.

De manière générale, on suppose qu'on a n villes V_1, ..., V_n, et qu'on connaît les distances entre les villes ; on note d_{ij} la distance entre V_i et V_j.

Question 1.2 Donnez un algorithme *glouton* simple pour résoudre approximativement le problème. Déroulez votre algorithme sur l'exemple ci-dessus, et indiquez la solution finale obtenue.

On veut maintenant résoudre ce problème à l'aide d'une recherche locale.

Question 1.3 Donnez une définition intéressante de la notion de voisinage pour ce problème. Peut-on arriver à la solution optimale à partir de S_1 avec une montée selon la plus grande pente avec votre notion de voisinage ?

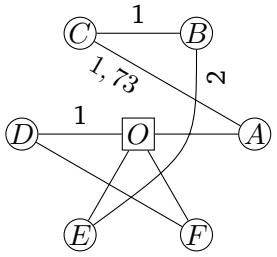
Question 1.4 Que peut-on stocker dans une liste tabou pour passer les minimums locaux ? Quelle longueur minimale de liste tabou faudrait-il pour arriver à coup sûr à une solution optimale à partir de S_1 ?

Exercice 2 On a m camions, initialement garés dans m dépots (qui contiennent les mêmes marchandises) et n clients à livrer. On connaît les distance entre les clients. Pour optimiser le coût des livraisons, il s'agit de répartir, en

les ordonnants, les livraisons entre les camions, en minimisant la distance parcourue par l'ensemble des camions – en comptant le retour de chaque camion à son dépôt initial.

On a m camions $C_1, \ldots, C_m$ qui partent tous de la même ville, et n clients à livrer dans n villes $V_1, \ldots V_n$. On suppose qu'on connaît les distances entre les villes. Pour optimiser le coût des livraisons, il s'agit de répartir, en les ordonnant, les livraisons entre les camions, en minimisant la distance parcourue par l'ensemble des camions – en comptant le retour de chaque camion à son dépôt initial.

Par exemple, on peut considérer deux camions, un dépôt O, 6 villes à visiter A à F, disposées en hexagone régulier toutes à la distance 1 du dépot : deux villes adjacentes sont à une distance 1, et deux villes X et Z situées de part et d'autre d'une ville Y sont à une distance de $\sqrt{3} = 1,73$. Les arcs indiquent les trajets de deux camions dans une solution initiale $S_0 = \{(ACBE), (DF)\}$:



Question 2.1 Qu'est-ce qui définit une solution du problème ?

Question 2.2 Donnez une définition intéressante de la notion de voisinage d'une solution.

Question 2.3 Donnez une solution optimale.

Question 2.4 Combien faut-il de mouvements pour arriver à un optimum (local ou global) avec votre notion de voisinage sur cet exemple ?

Question 2.5 Que peut-on stocker dans une liste tabou sur ce type de problème pour s'autoriser à sortir des optimums locaux ?

Exercice 3 Pour construire un décor de théatre, un charpentier a besoin de planches de même section, et de longueurs variables. Plus précisément, il a besoin des longueurs suivantes : 240, 240, 150, 90, 150, 150, 150, 180, 180, 240, 240, 120, 120, 60 centimètres. La menuiserie où il se fournit vend ces planches en longueur fixe : 360 centimètres. Il s'agit d'acheter le moins de planches possibles. (C'est un problème équivalent au problème des déménageurs).

Question 3.1 Donnez un algorithme glouton pour résoudre approximativement ce problème - quelle solution obtenez-vous.

Question 3.2 Pour une méthode de recherche locale, comment peut-on définir le voisinage d'une solution ?

Question 3.3 Si on ne veut pas stocker des solutions entières dans une liste tabou, quelles informations sur les solutions rencontrées peut-on y mémoriser ?

Autres méthodes incomplètes

Algorithmes génétiques

- On maintient un ensemble de K solutions courantes.
- À chaque itérations, on sélectionne certaines de ces solutions courantes et on les modifie :
  - par "croisement" / mélange de deux solutions courantes
  - par "mutation" (cf voisinage)
- La sélection des solutions courantes à modifier se fait de manière aléatoire, en donnant une probabilité plus élevées aux meilleurs solutions courantes.

Un algorithme type :

1. $P \leftarrow$ population initiale = K solutions initiales ;
2. Tant qu'on a du temps, faire :
   (a) $C \leftarrow \{\}$; $P_1 \leftarrow \mathsf{select}(P)$; $P \leftarrow P - P_1$;
   (b) Tant que $|P_1| \geq 2$ faire :
      i. $\mathsf{parent}_1, \mathsf{parent}_2 \leftarrow$ 2 éléments distincts de P_1 ; $P_1 \leftarrow P_1 - \{\mathsf{parent}_1, \mathsf{parent}_2\}$;
      ii. $\mathsf{enfant}_1, \mathsf{enfant}_2 \leftarrow \mathsf{croisement}(\mathsf{parent}_1, \mathsf{parent}_2)$;
      iii. $C \leftarrow C \cup \{\mathsf{mutation}(\mathsf{enfant}_1), \mathsf{mutation}(\mathsf{enfant}_2)\}$;
   (c) $P \leftarrow P \cup C$;

Problème : dans certaines applications, définir des opérations de croisement / mutation qui retournent des solutions possibles n'est pas évident.

Recherche informée incomplète

On fait une recherche informée, type A^*, mais on élague la recherche.

Exemple sur le problème du routage / voyageur de commerce :

- un état de la recherche est une séquence (partielle) de clients à visiter ;
- l'état initial est la séquence vide ;
- à partir d'un état $[c_1, \ldots, c_k]$, on produit toutes les séquences obtenues en ajoutant un client pas déjà présent dans la séquences ;
- la "valeur" d'un état est le trajet "déjà parcouru".

Recherche type A^* :

- on remplace la séquence $[c_1, \ldots, c_k]$ par tous ses successeurs
- à chaque itération, on développe la séquence qui a le coût courant le plus faible

Remarque : l'heuristique (coût déjà parcouru) est minorante, donc certitude de trouver la route la plus courte.

Problème : la taille de la file d'attente !
$\Rightarrow$ recherche incomplète : on ne garde qu'une partie de la file d'attente.

Recherche "en faisceau" :

- la taille de la file d'attente est fixée à un T donné
- on fait une recherche *en largeur d'abord* :
  1. générer tous les successeurs possibles de tous les états de la file d'attente
  2. on ne remet dans la file d'attente que les T successeurs les meilleurs (coût minimal)

Exercices

Exercice 4 Définir des opérations de mutation et de croisement qui permettraientt de résoudre les problèmes suivants avec un algorithme génétique : le compte est bon, le sac-à-dos, le voyageur de commerce (routage avec un seul camion), les déménageurs.