Équations linéaires et vecteur propres

Matrice M de dimensions $n \times p$: n lignes, p colonnes ; M_{ij}= terme de la i-ème ligne et de la j-ième colonne.

Convention : on numérote les lignes et les colonnes à partir de 0.

Cas particulier : vecteur (colonne) lorsque $p{=}1 \Rightarrow$ une colonne.

Opérations

$C{=}A{+}B$**:** si A et B de mêmes dimensions, C est alors de mêmes dimensions et $C_{ij}{=}A_{ij}{+}B_{ij}$;
$D{=}\alpha A$**:** si α est un réel, D a alors les mêmes dimensions que A et $D_{ij}{=}\alpha A_{ij}$;
$E{=}A^t$ **(transposition):** si A est de dimension $n \times p$, alors E est de dimensions $p \times n$ et $E_{ij}{=}A_{ji}$;
$F{=}A{\times}B$**:** si A et B sont de dimensions respectives $n \times p$ et $p \times q$,
alors F est de dimensions $n \times q$ et $F_{ij}{=}\sum_{k=0}^{p-1} A_{ik} B_{kj}$
(en termes de vecteurs, F_{ij} est le produit scalaire de la i-ème ligne de A et de la j-ième colonne de B).

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Étant donnés une matrice carré A de dimension n, et un vecteur colonne b à n composantes, on cherche un vecteur x tel que $A{\times}x{=}b$.

Méthode par éliminations successives (Gauss)

1. Pour i allant de 0 à $n{-}2$:
   (a) Si $A_{ji}{=}0$ pour tout $i{\leq}j{<}n$: « Impossible de résoudre »
   (b) $j{\leftarrow}$ « un $j{\geq}i$ tel que $A_{ji}{\neq}0$ » ; si $j{\neq}i$: échanger lignes i et j de A et de b ;
   (c) Pour j allant de $i{+}1$ à $n{-}1$:
   $m{\leftarrow}\frac{A_{j,i}}{A_{i,i}}$; ligne[j]$\leftarrow$ligne[j]$-m\times$ligne[i] (dans A et dans b) ;
2. Pour i allant de $n{-}1$ à 0 : $x_i{\leftarrow}(b_i{-}\sum_{j=i+1}^{n-1} A_{i,j} x_j)/A_{i,i}$.

Exemple Montrer le déroulement de l'algorithme d'élimination sans recherche de pivot *en arithmétique à 4 chiffres* sur le problème suivant :

$$A{=}\begin{pmatrix} 10000{,}003000 & 59{,}14 \\ 5{,}291 & -6{,}130 \end{pmatrix} \quad b{=}\begin{pmatrix} 59{,}17 \\ 46{,}78 \end{pmatrix} \quad \text{(solution exacte : } x{=}\begin{pmatrix} 10{,}00 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}\text{)}$$

Montrer maintenant le déroulement de l'algorithme, toujours en arithmétique à 4 chiffres, mais en faisant une recherche d'un bon pivot.

Recherche d'un (bon) pivot à l'étape 1b, lorsqu'on autorise l'échange de lignes :

- premier j tel que $A_{ji}{\neq}0$;
- j qui maximise $|A_{ji}|$.

Méthode de Jacobi : pour résoudre un système linéaire de la forme $Ax{=}b$, où A est une matrice carrée de dimension n, et b vecteur de $\mathbf{R}^n$, on calcule :

$$r^{(k+1)}{=}{-}D^{-1}(L{+}U)r^{(k)}{+}D^{-1}b$$

où D est la matrice des termes diagonaux de A, L celle des termes sous la diagonale, U celle des termes au-dessus de la diagonale. La convergence est garantie ssi toutes les valeurs propres de $D^{-1}(L{+}U)$ ont une valeur absolue $<$1. Il suffit par exempe que A soit à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que $|A_{ii}|{>}\sum_{j\neq i}|A_{ij}|$ pour tout i. On peut prendre comme condition d'arrêt $\|r^{(k+1)}{-}r^{(k)}\|{<}\epsilon$, où $\|A\|$ désigne par exemple la plus grande valeur absolue des éléments de A (d'autres normes sont possibles).

Exemple Résoudre à 10^{-3} près avec la méthode de Jacobi le système ci-contre, et comparer avec la solution exacte :

$$\begin{cases} 10x_0 & -x_1 & & =9 \\ -x_0 & +10x_1 & -2x_2 & =7 \\ & x_1 & -10x_2 & =6 \end{cases}$$

Calcul de valeurs et vecteurs propres

Pour une matrice carrée A de dimension n : $v{\in}\mathbf{R}^n$, $v{\neq}0$, est un est un *vecteur propre* de A s'il existe $\lambda{\in}\mathbf{R}$ tel que $Av{=}\lambda v$; λ est alors une *valeur propre* de A associée à v.

Propriété : Les valeurs propres de A sont les racines de l'équation : $\mathtt{det}(A{-}\lambda I){=}0$, où I est la matrice identité (des 1 sur la diagonale, des 0 partout ailleurs), et où $\mathtt{det}(A{-}\lambda I)$ dénote le déterminant de $A{-}\lambda I$, c'est un polynôme de degré n en λ.

Les valeurs propres, et les composantes des vecteurs propres, peuvent être complexes. Toutefois, certains types de matrices n'ont pas de valeurs propres complexes :

- si A est symétrique, alors toutes ses valeurs propres sont réelles ;
- si A est de la forme $A{=}U{\times}U'$ alors toutes ses valeurs propres sont réelles et ≥ 0 (A est *symétrique semi-définie positive*).

Exemple Déterminer analytiquement les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Introduire la méthode des puissances sur un exemple : on boit bien l'utilité de repérer l'index quand on norme avec la norme infinie

Calcul de valeurs / vecteurs propre par la méthode des puissances On suppose que toutes les valeurs propres de A sont réelles. Si λ_1 est la plus grande valeur propre (en valeur absolue), on peut montrer que pour tout vecteur non nul u, la suite $(A^k v/\|A^k v\|)$ tend vers un vecteur propre de norme 1 associé à λ_1, et donc naturellement $|\lambda_1|{=}\lim_{k\to+\infty}\|A{\times}A^k v/\|A^k v\|\|$. L'algorithme ci-contre permet donc d'obtenir la plus grande (en valeur absolue) valeur propre de A. (Si le vecteur initial est un vecteur propre de A, alors l'algorithme retourne la valeur propre associée à ce vecteur, même si ça n'est pas la valeur propre dominante.)

1. $v{\leftarrow}$ un vecteur quelconque ;
2. trouver i tq $\|v\|_\infty{=}|v_i|$; $v{\leftarrow}\frac{1}{v_i}v$; ecart$=\epsilon{+}1$;
3. Tant que ecart$>\epsilon$ faire :
   (a) $v'{\leftarrow}Av$;
   (b) Si $\|v'\|_\infty{=}0$: retourner $0{,}v$;
   (c) $\lambda{\leftarrow}v'_i$;
   (d) trouver i tq $\|v\|'_\infty{=}|v'_i|$;
   (e) $v'{\leftarrow}\frac{1}{v'_i}v'$; ecart$\leftarrow\|v'{-}v\|_\infty$; $v{\leftarrow}v'$;
4. retourner $\lambda{,}v$.

Calcul d'une seconde valeur propre : déflation On connaît déjà un vecteur propre v de A, et la valeur propre λ associée. On cherche une seconde valeur propre et un vecteur propre associé. Soit i tel que $v_i{\neq}0$, on définit :

$$B{=}A{-}\frac{1}{v_i}v{\times}A[i]$$

où $A[i]$ dénote le vecteur ligne formé des éléments de la i-ème ligne de A.

$\Rightarrow$ B et A ont les mêmes valeurs propres, sauf que B a 0 pour valeur propre au lieu de λ.

De plus, si w est un vecteur propre de B associé à μ, alors un vecteur propre associé à μ pour A est :

$$v_\mu{=}(\mu{-}\lambda)w{+}\frac{1}{v_i}(A[i]{\times}w)v$$

Remarque : Dans ce calcul, on peut supprimer la i-ème ligne et la i-ème colonne de B, il faudra ajouter ensuite un 0 comme i-ème composante de w. Cela permet de travailler en dimension $n{-}1$.

Références sur la méthode des puissances :

- `www.math.tamu.edu/~dallen/linear_algebra/chpt6.pdf`
- `people.math.gatech.edu/~loss/07falltea/2605/PROJECTS/PROJECTDESCRIPTIONS/POWERproject.pdf`