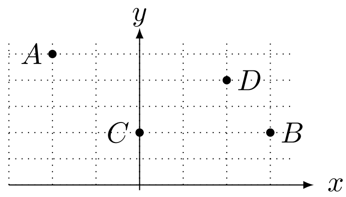
Interpolation polynomiale et intégration

Exemple Calculer les équations de courbes qui passent :

1. par les points A et B ;
2. par les points C, D et B ;
3. par les points A, B, C et D.



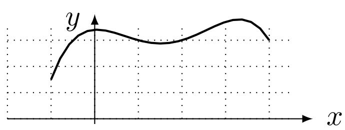
Théorème d'approximation de Weierstrass Si f est continue sur $[a,b]$, et si $\epsilon>0$, alors il existe un polynôme P tel que $|f(x)-P(x)|<\epsilon, \forall x\in[a,b]$.

Polynôme d'interpolation pour une fonction f définie en $n+1$ réels distincts $x_0, \ldots, x_n$: c'est l'unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(x_i)=f(x_i)$ pour tout $0\leq i\leq n$.
Propriétés :

- si $x,x_0,\ldots,x_n\in[a,b]$, si $f\in C^{n+1}([a,b])$ alors il existe $\varphi(x)\in[a,b]$ tq. : $f(x)-P(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\varphi(x))}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$;
- on définit les *polynômes de Lagrange* tels que $L_k(x_k)=1$ et $L_k(x_i)=0$ pour $i,k=0,\ldots n$ et $i\neq k$:
  $L_k(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\dfrac{X-x_j}{x_k-x_j}$, et alors $P(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$.

Exemple Donner une expression du polynôme passant par les points B,C,D de l'exercice 1 à l'aide des polynômes de Lagrange.

Exemple Calculer une approximation de $\int_{-1}^{4} f(t)dt$, où f est la fonction dont le graphe est représenté sur la courbe ci-contre.



Formules d'intégration, pour calculer une valeur numérique de $\int_a^b f(t)dt$ sans passer par une primitive de f, et en découpant l'intervalle en N sous intervalles de longueur $(b-a)/N$, d'où $a_k=a+k(b-a)/N$:
formule du trapèze = interpolation linéaire en a_k,a_{k+1}

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt\approx\frac{b-a}{2N}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)] \text{ ; terme d'erreur : } -\tfrac{(b-a)^3}{12N^2}f''(\psi) \text{ ;}$$

formule de Simpson = interpolation quadratique en a_k,a_{k+1} et $b_k=(a_k+a_{k+1})/2=a+(2k+1)\frac{b-a}{2N}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{6N}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(a_k)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(b_k)) \text{ ; terme d'erreur : } -\tfrac{(b-a)^5}{2880N^4}f^{(4)}(\chi)$$