Résolution d'équations différentielles

Exemple Pour pouvoir aller la chercher en voiture au bon endroit, une amie d'une cycliste du dimanche essaie d'estimer combien de kilomètres celle-ci aura parcouru en 3 heures, durée prévue de la ballade.

Question 0.1 Le premier dimanche, notre cycliste part de Toulouse le long du Canal du Midi, à une vitesse régulière de 25 km/h. Combien de kilomètres parcourt-elle en 3 heures ?

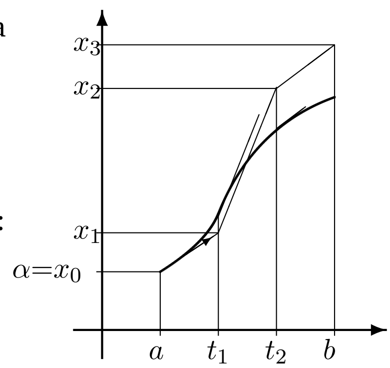
Question 0.2 Le second dimanche, notre cycliste décide de partir « à fond » : elle commence à 40km/h, mais, la fatigue n'aidant pas, sa vitesse diminue de 20% toutes les 1/2 heures. Combien de kilomètres parcourt-elle en 3 heures ?

Question 0.3 Le troisième dimanche, notre cycliste décide encore d'attaquer à fond, mais va cette fois-ci explorer les coteaux autour de Toulouse : la route est plate sur les 20 premiers km, puis il y a une montée sur 7,2 km, puis une portion de plat de 10 km, ensuite une descente sur 8 km, qui lui permet de rejoindre le canal pour retrouver une route plate. Combien de kilomètres parcourt-elle en 3 heures, sachant que son énergie – et donc sa vitesse – diminue encore de 20% toutes les 1/2 heures, et qu'en montée sa vitesse est le 1/4 de sa vitesse sur une route plate, alors qu'en descente sa vitesse est 3 fois plus grande ?

Formulation générale du problème On cherche à approximer sur un intervalle $[a,b]$ une fonction inconnue $x{:}\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$; on dispose d'informations sur les dérivées de x, par exemple $x''(t)=3x'(t)+t^2+1\ldots$
$\Rightarrow$ on divise $[a,b]$ en N sous-intervalle délimités par $t_0=$, t_1, $\ldots$, t_{N-1}, $t_N=b$, et on essaye d'estimer $x(t_k)$ pour chacun des t_k.
Dans la suite : $\underline{t_k=a+kh, \text{ où } h=(b-a)/N.}$

Méthode d'Euler Pour des équations du premier ordre à condition initiale, de la forme :

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)) \\ x(a)=\alpha \end{cases}$$



Alors on définit : $\boxed{x_0=\alpha,\ x_{k+1}=x_k+hf(t_k,x_k)}$; x_k est une approximation de $x(t_k)$.
Exemple Résoudre $x'(t)=1+t\sin(tx(t))$, sur $[0,2]$, avec $x(0)=0$ et un « pas » de $0{,}2$:

$$N=10,\quad h=0{,}2,\quad x_0=0,\quad x_{k+1}=x_k+h(1+\sin(t_kx_k))...$$

Calcul d'erreur : si f est continue sur $[a,b]$, s'il existe deux constantes L et M telles que $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leq L|x_1-x_2|$ pour tout $t,x_1,x_2\in[a,b]\times\mathbf{R}$, et $|x''(t)|\leq M$ pour tout $t\in[a,b]$, alors $|x_i-x(t_i)|\leq(e^{L(t_i-a)}-1)hM/2L$.
En général, ce terme surestime largement l'écart réel. On voit surtout que l'écart est une fonction linéaire de h.

Conditions aux limites Pour des équations de la forme : $\begin{cases} x''(t)=f(t,x(t),x'(t)) \\ x(a)=\alpha \text{ et } x(b)=\beta \end{cases}$

On sait que : $x'(t_i)\approx\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}$. On a aussi (développement de Taylor) :

$$\left.\begin{array}{r} x(t_i+h)\approx x(t_i)+hx'(t_i)+\frac{h^2}{2}x''(t_i)+\frac{h^3}{6}x'''(t_i) \\ x(t_i-h)\approx x(t_i)-hx'(t_i)+\frac{h^2}{2}x''(t_i)-\frac{h^3}{6}x'''(t_i) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x''(t_i)\approx\frac{x_{i-1}-2x_i+x_{i+1}}{h^2}\Rightarrow$ systèmes d'équations : $\frac{x_{i-1}-2x_i+x_{i+1}}{h^2}=f(t_i,x_i,\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h})\ldots$

Exemple $\begin{cases} x''(t)=x'(t)+2x(t)+\cos(t), \text{ pour } 0\leq x\leq\pi/2 \\ x(0)=-0{,}3, x(\pi/2)=-0{,}1 \end{cases}$

Ici, $f(t,y,z)=z+2y+\cos(t)$, et donc $\frac{x_{i-1}-2x_i+x_{i+1}}{h^2}=\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}+2x_i+\cos(t_i)$ ce qui est équivalent à:

$$(2+h)x_{i-1}-4(1+h^2)x_i+(2-h)x_{i+1}=2h^2\cos(t_i)$$

En prenant $h=\pi/8$, on a donc à résoudre le système de 5 équations linéaires à 5 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_0 & & & & & & & & & = & -0{,}3 \\ \frac{16+\pi}{8}x_0 & - & \frac{64+\pi^2}{16}x_1 & + & \frac{16-\pi}{8}x_2 & & & & & = & \frac{\pi^2}{32}\cos(\frac{\pi}{8}) \\ & & \frac{16+\pi}{8}x_1 & - & \frac{64+\pi^2}{16}x_2 & + & \frac{16-\pi}{8}x_3 & & & = & \frac{\pi^2}{32}\cos(\frac{\pi}{4}) \\ & & & & \frac{16+\pi}{8}x_2 & - & \frac{64+\pi^2}{16}x_3 & + & \frac{16-\pi}{8}x_4 & = & \frac{\pi^2}{32}\cos(\frac{3\pi}{8}) \\ & & & & & & & & x_4 & = & -0{,}1 \end{array}\right.$$