

# Déformations invisibles

## Non Visible Deformations

Jean-Denis DUROU<sup>1</sup>

Laurent MASCARILLA<sup>2</sup>

Didier PIAU<sup>3</sup>

<sup>1</sup> IRIT - 118, route de Narbonne - 31062 Toulouse Cedex, France  
E-mail : durou@irit.fr

<sup>2</sup> PST/L3I - Avenue Marillac - 17042 La Rochelle, France  
E-mail : lmascaril@cri.univ-lr.fr

<sup>3</sup> Laboratoire de Probabilités - 43, bd du 11 Novembre 1918 - 69622 Villeurbanne Cedex, France  
E-mail : piau@jonas.univ-lyon1.fr

### Résumé

*Le nombre de solutions non isomorphes de l'équation eikonale peut être infini. Nous montrons que cette équation peut admettre une famille de solutions analytiques non isomorphes, indexée par un paramètre continu. Une première conséquence est que le problème général de la reconnaissance du relief à partir de l'éclairage (shape from shading) peut être un problème mal posé en l'absence de connaissances supplémentaires sur la surface à reconstruire, contrairement à ce qui est parfois annoncé dans la littérature. Une deuxième conséquence est qu'il peut exister des déformations invisibles d'une surface donnée : ce sont des déformations continues de la surface de départ telles que l'image reste inchangée.*

### Mots Clef

shape from shading, équation eikonale, problème mal posé, reconstruction.

### Abstract

*The number of non isomorphic solutions of the eikonal equation can be infinite. We show that there can exist a whole family of non isomorphic solutions, indexed by a continuous parameter. This implies, first, that the general problem of shape from shading can be ill-posed when no additional condition on the shape is imposed. This is in contradiction with what is sometimes stated in the litterature. Furthermore, this implies that there can exist non visible deformations of a given surface, that is continuous deformations of the surface which do not modify the image.*

### Keywords

shape from shading, eikonal equation, ill-posed problem, shape reconstruction.

## 1 Introduction

La reconnaissance du relief d'une surface à partir d'une seule image de cette surface, c'est-à-dire dans le cadre de la monovision, peut être faite grâce à plusieurs critères : la texture (*shape from texture*) ; les ombres portées (*shape from shadows*) ; les contours (*shape from contour*) ; l'ombre propre, ou éclairage (*shape from shading*). Pour une surface non texturée, sans arêtes ni parties cachées, et si l'image ne contient aucun contour, alors seule la dernière de ces méthodes, dont la traduction en français est «reconnaissance du relief à partir de l'éclairage», est utilisable. En 1970, B. Horn a inauguré les recherches dans ce domaine [6, 7] et a montré, en particulier, que son équation de base s'écrivait :

$$R(f_x(x, y), f_y(x, y)) = E(x, y), \quad (1)$$

équation dans laquelle les notations suivantes ont été adoptées :

- un point  $(x, y)$  de l'image est caractérisé par son éclairage  $E(x, y)$  ;
- le relief de la surface observée est défini par l'équation  $z = f(x, y)$ , où l'axe  $zOz'$  est parallèle à la direction d'observation, et où  $f(x, y)$  est appelée «altitude au point  $(x, y)$ » ;

- le comportement de la surface vis-à-vis de la ré-émission de la lumière est décrit par la fonction  $R(f_x, f_y)$ ,  $f_x$  et  $f_y$  désignant les dérivées partielles de  $f$  par rapport à  $x$  et à  $y$ .

Pour une surface éclairée de face, c'est-à-dire dans la direction de l'axe  $zOz'$ , on montre facilement que  $R(f_x, f_y)$  est une fonction de la forme  $r(f_x^2 + f_y^2)$ , ce qui signifie que l'éclairement lu sur l'image ne dépend que de la pente de la surface. Dans ce cas, l'équation (1) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 = g(x, y), \quad (2)$$

où  $g(x, y) = r^{-1} \circ E(x, y)$  est connue. Cette équation s'appelle l'équation *eikonale*. Elle n'est qu'un cas particulier de l'équation (1), mais bon nombre d'articles se sont intéressés à sa résolution [3, 9, 2]. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre en  $f(x, y)$ , non linéaire, tout comme (1). Une question majeure est de savoir si une telle équation a un nombre fini de solutions non isomorphes (c'est-à-dire ayant des formes vraiment différentes) ou pas, en l'absence de conditions aux limites, donc si on ne connaît l'altitude en aucun point de l'image *a priori*.

Dans le présent article, nous nous intéressons à la surface  $S_1$ , définie par l'équation  $z = 2x^2 + y^2$ . Cette surface est représentée sur la figure 1.

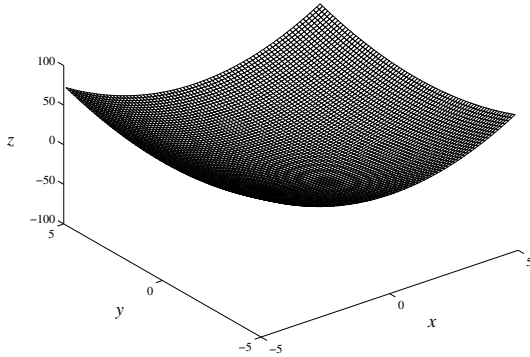


FIG. 1 - Surface  $z = 2x^2 + y^2$ .

Son image, calculée par le logiciel Matlab 4.2, dans l'hypothèse d'un éclairage de face et d'une réflexion diffuse, est représentée sur la figure 2. Nous souhaitons répondre à la question suivante : combien de surfaces donnent la même image que  $S_1$ , avec un éclairage de face ? Cela revient à chercher le nombre de solutions de l'équation eikonale correspondant à la surface  $S_1$ , équation qui s'écrit :

$$f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 = 16x^2 + 4y^2. \quad (3)$$

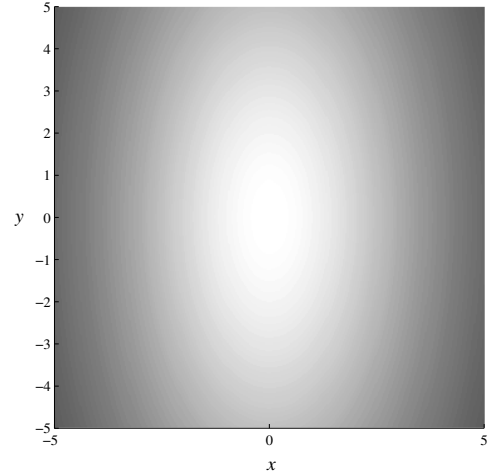


FIG. 2 - Surface  $z = 2x^2 + y^2$  éclairée de face.

Une remarque évidente est que si la surface  $S$  d'équation  $z = f(x, y)$  est solution de (3), alors les surfaces  $z = f(x, y) + c$  et  $z = -f(x, y) + c$  sont aussi solutions, pour tout réel  $c$ . Nous appelons ces surfaces des solutions *isomorphes* à  $S$ . Ainsi,  $S_2$  d'équation  $z = -(2x^2 + y^2)$  est une solution de (3) isomorphe à  $S_1$ . Outre  $S_1$  et  $S_2$ , on voit que la surface  $S_3$  d'équation  $z = 2x^2 - y^2$  est une solution, ainsi que la surface  $S_4$  isomorphe à  $S_3$ , d'équation  $z = -(2x^2 - y^2)$ . Nous montrons que l'équation (3) possède en fait beaucoup plus de solutions analytiques que les quatre solutions évidentes que nous venons de mentionner. En effet, nous démontrons le théorème suivant, qui est le principal résultat de cet article.

### Théorème

Il existe une famille  $(f_c)_{c \in \mathbb{R}_+}$  de fonctions  $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour  $c > 0$ ,  $f_c$  est analytique réelle sur le disque  $D(0, c)$  ;
2. pour  $c > 0$ ,  $f_c$  est solution de (3) sur le voisinage  $D(0, c)$  de  $(0, 0)$  ;
3. la fonction  $(c, x, y) \mapsto f_c(x, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$  ;
4. si  $c \neq c'$ , alors  $f_c$  et  $f_{c'}$  ne sont pas isomorphes.

Chaque fonction  $f_c$ ,  $c > 0$ , représente donc une surface dont l'image, restreinte au disque  $D(0, c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < c^2\}$  et éclairée de face, coïncide avec l'image de la surface  $S_1$  représentée sur la figure 2. Ainsi, on peut envisager, à partir d'une des solutions

$f_c$ ,  $c > 0$ , une déformation continue pour laquelle l'image ne change pas dans un voisinage de l'origine. Ceci explique notre titre un peu mystérieux de «déformations invisibles».

Comment ce théorème s'intègre-t-il dans les résultats connus? Parmi les articles traitant de la résolution de l'équation eikonale, ceux de Brooks, Chojnacki et Kozera [2] et de Horn, Szelisky et Yuille [8] présentent un intérêt particulier. En effet, il est montré, dans ces deux articles, que certaines équations eikonales peuvent n'avoir aucune solution continûment différentiable, classe de fonctions qui est pourtant la plus large, puisqu'une équation eikonale ne peut admettre de solution non différentiable. Nous montrons un résultat qui décrit une situation opposée, en prouvant l'existence d'une équation eikonale pour laquelle il existe une infinité de solutions analytiques sur un voisinage de l'origine, qui sont des solutions non seulement lisses, mais aussi les plus régulières possibles. Ces deux cas extrêmes démontrent par conséquent que le nombre de solutions de l'équation eikonale (2) peut varier de zéro à l'infini, suivant son second membre  $g(x, y)$ . Un certain nombre d'articles ont cherché à définir des conditions sur ce second membre  $g(x, y)$  pour que l'équation (2) n'admette qu'une seule solution continûment différentiable [3, 9, 1]. Signalons au passage que tous ces théorèmes d'unicité supposent l'existence d'une «silhouette» sur l'image analysée, c'est-à-dire d'une courbe fermée sur laquelle  $g(x, y)$  est infinie (l'image représentée sur la figure 2 ne rentre pas dans cette catégorie). Une telle situation est intéressante, car elle correspond au souhait initial de Horn [6], qui était de pouvoir associer à toute image une surface et une seule. Néanmoins, il était certain d'avance que cette situation ne pourrait survenir que dans des cas particuliers, puisque la reconnaissance du relief à partir de l'éclairage est le problème inverse de celui de la formation des images, et qu'il n'y a pas bijection entre les surfaces possibles et les images possibles. Nous prouvons ici que ce problème inverse peut être, dans certains cas, un problème mal posé, c'est-à-dire possédant une infinité de solutions (contrairement à ce qui est annoncé dans [4]).

Le reste de l'article est organisé comme suit. Dans la partie 2, nous résolvons l'équation (3) par un développement en série entière à l'origine, résolution valide si l'on cherche les solutions analytiques de (3) sur un voisinage de l'origine. Nous montrons en particulier que la résolution diffère nettement suivant que l'on considère les solutions localement convexes (comme  $S_1$ ) ou localement concaves (comme  $S_2$ ) à l'origine, ou bien les solutions présentant un col à l'origine (comme  $S_3$

ou  $S_4$ ). Dans la partie 3, nous exhibons une famille continue de fonctions  $f_c$ , satisfaisant aux conditions du théorème. Nous montrons, en particulier, que les fonctions  $f_c$  sont des solutions de l'équation (3). De plus, elles présentent toutes un col à l'origine. Nous énonçons au début de cette partie d'autres propriétés satisfaites par ces fonctions.

## 2 Résolution de l'équation eikonale (3)

Cherchons les solutions  $f(x, y)$  de l'équation (3) analytiques sur un voisinage de l'origine, c'est-à-dire sur un ouvert  $\Omega$  du plan contenant l'origine  $(0, 0)$ . Une telle solution est égale à la somme de sa série de Taylor en tout point de  $\Omega$ . Nous chercherons dorénavant  $f$  sous la forme suivante:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^n a_{n,p} x^p y^{n-p}. \quad (4)$$

Les solutions de (3) ne peuvent être connues qu'à une constante près. Nous fixons la valeur des solutions à l'origine à 0, c'est-à-dire que nous posons :

$$a_{0,0} = 0. \quad (5)$$

On obtient facilement, à partir de (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x(x, y) = a_{1,1} + a_{2,1}y + 2a_{2,2}x \\ \quad + \sum_{n=3}^{+\infty} \sum_{p=1}^n p a_{n,p} x^{p-1} y^{n-p}, \\ f_y(x, y) = a_{1,0} + a_{2,1}x + 2a_{2,0}y \\ \quad + \sum_{n=3}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n-1} (n-p) a_{n,p} x^p y^{n-p-1}. \end{array} \right. \quad (6)$$

En reportant ces expressions dans (3), et en identifiant les termes de degrés 0, 1 et 2 en  $x$  et en  $y$ , on obtient les six équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}^2 + a_{1,0}^2 = 0, \\ a_{1,0}a_{2,1} + 2a_{1,1}a_{2,2} = 0, \\ a_{1,1}a_{2,1} + 2a_{1,0}a_{2,0} = 0, \\ a_{2,1}^2 + 4a_{2,2}^2 = 16, \\ a_{2,1}(a_{2,2} + a_{2,0}) = 0, \\ a_{2,1}^2 + 4a_{2,0}^2 = 4. \end{array} \right. \quad (8)$$

D'après (8), on a :

$$a_{1,1} = a_{1,0} = 0, \quad (14)$$

et ceci assure que (9) et (10) sont vérifiées. Pour l'équation (12), deux cas se présentent. Supposons d'abord

que  $a_{2,1} \neq 0$ . Il résulte de (12) :

$$a_{2,2} + a_{2,0} = 0. \quad (15)$$

De cette égalité, on déduit :

$$a_{2,2}^2 = a_{2,0}^2, \quad (16)$$

ce qui mène à une contradiction entre les équations (11) et (13). Cela permet d'affirmer que  $a_{2,1} = 0$ , puis, grâce à (11) et (13), que l'on a :

$$\begin{cases} a_{2,2} = \pm 2, \\ a_{2,0} = \pm 1. \end{cases} \quad (17)$$

Passons maintenant à la résolution de (3) pour les termes de degré 3 en  $x$  et en  $y$ . On obtient les quatre équations suivantes :

$$\begin{cases} 3a_{2,2}a_{3,3} = 0, & (19) \\ a_{3,2}(2a_{2,2} + a_{2,0}) = 0, & (20) \\ a_{3,1}(a_{2,2} + 2a_{2,0}) = 0, & (21) \\ 3a_{2,0}a_{3,0} = 0. & (22) \end{cases}$$

En tenant compte des valeurs déjà calculées de  $a_{2,2}$  et  $a_{2,0}$ , les équations (19), (20) et (22) donnent :

$$a_{3,3} = a_{3,2} = a_{3,0} = 0. \quad (23)$$

En revanche, on ne peut pas déduire à coup sûr, de l'équation (21), la nullité de  $a_{3,1}$ . Il faut distinguer deux cas qui, nous le verrons, mènent à des résultats très différents. Ces deux cas sont les suivants :

- cas 1 :  $a_{2,2}$  et  $a_{2,0}$  sont de même signe, ce qui est caractéristique d'une fonction localement concave ou localement convexe à l'origine ;
- cas 2 :  $a_{2,2}$  et  $a_{2,0}$  sont de signes opposés, ce qui est caractéristique d'une fonction présentant un col à l'origine (on dit aussi que la fonction est en forme de selle de cheval à l'origine).

## 2.1 Cas 1 : fonctions concaves ou convexes à l'origine

Grâce à (17) et (18), on déduit facilement, dans ce cas :

$$a_{2,2} + 2a_{2,0} = \pm 4, \quad (24)$$

ce qui permet de conclure, à partir de (21) :

$$a_{3,1} = 0. \quad (25)$$

Ainsi, tous les termes de degré 3 du développement de  $f(x, y)$  sont nuls. On peut montrer, par récurrence [5], qu'il en est de même pour tous les termes de degré supérieur ou égal à 3. Les solutions de l'équation (3), correspondant au cas 1, s'écrivent donc :

$$f(x, y) = \pm(2x^2 + y^2), \quad (26)$$

qui correspondent aux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  déjà mentionnées dans l'introduction.

## 2.2 Cas 2 : fonctions présentant un col à l'origine

Dans ce cas, on constate que :

$$a_{2,2} + 2a_{2,0} = 0, \quad (27)$$

ce qui suffit pour que l'équation (21) soit vérifiée, sans que  $a_{3,1}$  soit forcément nul. Le développement d'une solution de (3) correspondant au cas 2 s'écrit donc :

$$f(x, y) = \pm(2x^2 - y^2) + a_{3,1}xy^2 + \sum_{n=4}^{+\infty} \sum_{p=0}^n a_{n,p}x^p y^{n-p}, \quad (28)$$

où  $a_{3,1}$  est un réel quelconque. La résolution de l'équation (3) n'est pas terminée : il resterait à calculer les coefficients  $a_{n,p}$ , pour  $n \geq 4$  et  $p \in [0, n]$ , en fonction de  $a_{3,1}$ . Plutôt que de terminer le calcul, qui est assez long, nous montrons que, dans le cas 2, l'ensemble des solutions est non dénombrable, et nous exhibons une famille continue de solutions.

## 3 Une famille à un paramètre de fonctions solutions de (3)

Dans ce paragraphe, nous construisons une famille  $(f_c)_{c \in \mathbb{R}_+}$  de fonctions  $f_c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant aux propriétés 1-2-3-4 du théorème. Ces fonctions vérifient également :

5. la fonction  $(c, x, y) \mapsto f_c(x, y)$  est analytique réelle sur  $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2) \setminus \Delta$ , avec  $\Delta = \{y = 0, x + c \leq 0\}$  ;
6. - si  $c$  tend vers  $+\infty$ , alors  $f_c(x, y)$  tend vers  $f_\infty(x, y) = 2x^2 - y^2$  ;  
- si  $c$  tend vers  $0^+$ , alors  $f_c(x, y)$  tend vers  $f_0(x, y) = 2x|x| + y^2$ .

En fait, pour  $c \neq 0$ ,  $f_c$  est même analytique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ , avec  $\Delta_c = ]-\infty, -c] \times \{0\}$ . En  $P_c = (-c, 0)$ ,  $f_c$  est différentiable mais pas de classe  $C^2$ . En un point de  $\Delta_c$  différent de  $P_c$ ,  $f_c$  est continue et non différentiable.

Dans cet article, nous démontrons seulement la propriété 2 du théorème, en prouvant que la fonction  $f_c$  est solution de (3) sur l'intégralité de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ , ainsi qu'au point  $P_c$ .

### 3.1 Construction de $f_c$

Soit  $c \geq 0$ . On définit  $f_c$  grâce à la formule suivante :

$$f_c(x, y) = 2x^2 + y^2 + \frac{16}{3}g_c(x, y)(x + c - g_c(x, y)), \quad (29)$$

où la famille de fonctions  $(g_c)_{c \in \mathbb{R}_+}$  va être définie dans le paragraphe qui suit.

## Remarques

1. Contrairement à ce que pourrait laisser penser (29), les fonctions  $f_c(x, y)$  ont en fait un développement au voisinage de l'origine qui s'écrit sous la forme (28), c'est-à-dire que ces fonctions correspondent bien au cas 2.
2. La définition de  $f_c(x, y)$ , ainsi qu'un certain nombre d'autres définitions qui vont être données dans le prochain paragraphe, peuvent sembler extrêmement arbitraires. Néanmoins, le raisonnement complet permettant de trouver les fonctions  $f_c(x, y)$  étant assez long, il nous a semblé opportun de ne pas le faire figurer dans cet article.

## 3.2 Construction de $g_c$

Soit  $c \geq 0$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Posons :

$$\begin{cases} a = x + c, & (30) \\ b = \frac{27}{32}cy^2, & (31) \\ r = a^3 + 4b, & (32) \\ s = 8b(a^3 + 2b). & (33) \end{cases}$$

Soit l'équation en  $g$  :

$$\Phi(g, a, b) = 0, \quad (34)$$

où  $\Phi(g, a, b)$  est définie par :

$$\Phi(g, a, b) = g^3 - \frac{3}{4}a^2g - \frac{1}{4}(a^3 + 4b). \quad (35)$$

En chaque point  $(x, y)$ , la fonction  $g_c(x, y)$  est égale, par définition, à la plus grande racine réelle de l'équation (34). On peut montrer [5] que l'expression analytique de  $g_c(x, y)$  est :

$$g_c(x, y) = \frac{1}{2} \left( \sqrt[3]{r + \sqrt{s}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{s}} \right), \quad (36)$$

en convenant de désigner par  $\sqrt{s}$ , lorsque  $s < 0$ , la valeur  $i\sqrt{-s}$ , où  $i^2 = -1$ , et de désigner par  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , lorsque l'argument est complexe, la racine cubique complexe ayant la plus grande partie réelle. Il est facile de montrer que l'expression (36) est toujours positive ou nulle.

Sur la figure 3, on a représenté la fonction  $g_1(x, y)$ . Sur la figure 4, on a représenté la fonction  $f_1(x, y)$ , calculée à partir de  $g_1(x, y)$  grâce à la formule (29). D'autre part, les fonctions  $g_0(x, y)$  et  $f_0(x, y)$  ont été représentées sur les figures 5 et 6.

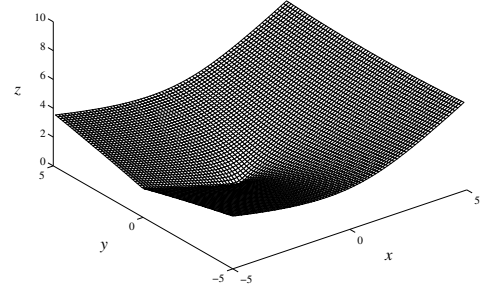


FIG. 3 -  $g_1(x, y)$ .

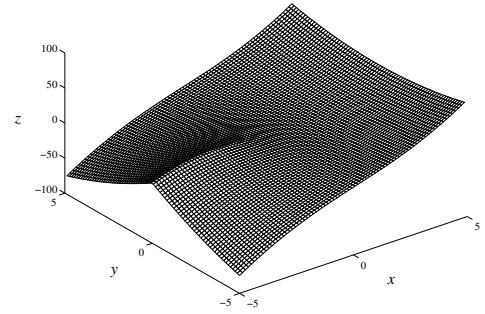


FIG. 4 -  $f_1(x, y)$ .

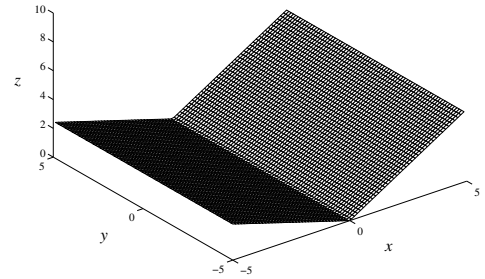


FIG. 5 -  $g_0(x, y)$ .

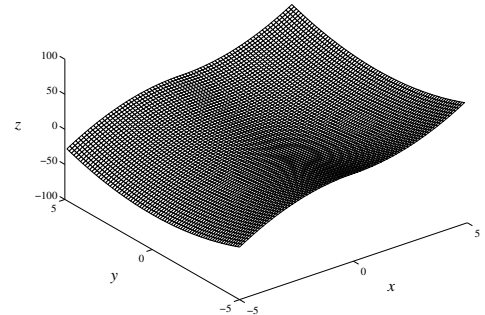


FIG. 6 -  $f_0(x, y)$ .

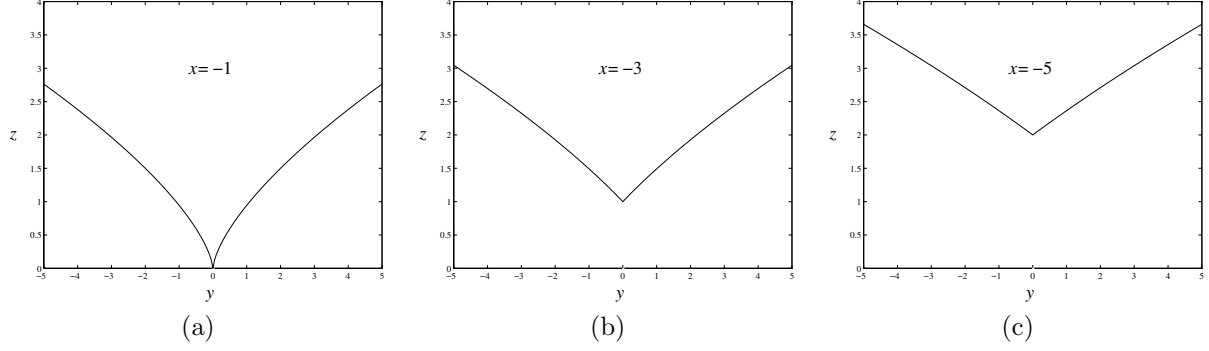


FIG. 7 - Trois coupes de  $g_1(x, y)$ .

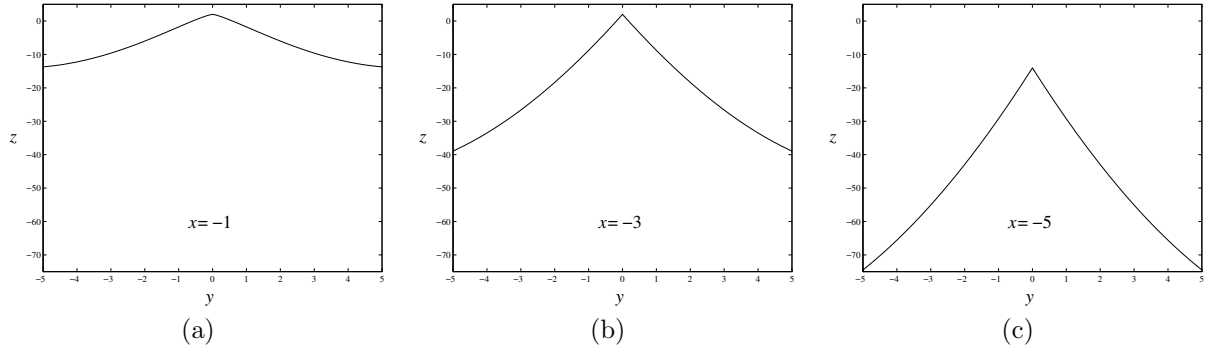


FIG. 8 - Trois coupes de  $f_1(x, y)$ .

### 3.3 Analyticité de $g_c(x, y)$ et de $f_c(x, y)$

– Pour  $c > 0$ , on peut montrer [5] que  $g_c(x, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et analytique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ , avec  $\Delta_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -c; y = 0\}$ . Le long de la demi-droite  $\Delta_c$ ,  $g_c(x, y)$  n'est pas différentiable. Ceci est mis en évidence par les figures 7(a), 7(b) et 7(c), sur lesquelles on a représenté les coupes de  $g_1(x, y)$  pour des valeurs de  $x$  égales à  $-1$ ,  $-3$  et  $-5$ . Quant à  $f_c$ , elle est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , non différentiable sur  $\Delta_c \setminus \{P_c\}$  et analytique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ . Sur les figures 8(a), 8(b) et 8(c), on a représenté les coupes de  $f_1(x, y)$  pour des valeurs de  $x$  égales à  $-1$ ,  $-3$  et  $-5$ .

– Pour  $c = 0$ , on vérifie sur les figures 5 et 6 que  $g_0(x, y)$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , analytique sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  mais non différentiable sur  $yOy'$ , et que  $f_0(x, y)$  est continue et différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ , et analytique sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

### 3.4 $f_c(x, y)$ est solution de l'équation (3)

Soit  $c > 0$ . Calculons les deux dérivées partielles  $g_x$  et  $g_y$  de  $g_c(x, y)$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ . En dérivant l'équation (34) par rapport à  $x$  et à  $y$ , et en utilisant l'expression (35) de  $\Phi(g, a, b)$ , ainsi que les expressions (30) et (31) de

$a$  et de  $b$ , on obtient :

$$\begin{cases} \left(g^2 - \frac{1}{4}a^2\right)g_x = \frac{1}{2}ag + \frac{1}{4}a^2, \\ \left(g^2 - \frac{1}{4}a^2\right)g_y = \frac{9}{16}cy. \end{cases} \quad (37)$$

On peut montrer [5] que  $2g + a$  ne s'annule jamais. Les équations (37) et (38) peuvent donc se réécrire :

$$\begin{cases} (a - 2g)g_x = -a, \\ (a - 2g)g_y = -\frac{9}{4} \frac{cy}{2g + a}. \end{cases} \quad (39)$$

Les dérivations par rapport à  $x$  et à  $y$  de l'équation (29), qui définit  $f_c(x, y)$ , donnent par ailleurs :

$$\begin{cases} f_x = 4x + \frac{16}{3}g + \frac{16}{3}(a - 2g)g_x, \\ f_y = 2y + \frac{16}{3}(a - 2g)g_y. \end{cases} \quad (41)$$

En utilisant (39) et (40), ces expressions deviennent :

$$\begin{cases} f_x = 4x + \frac{16}{3}(g - a), \\ f_y = 2y - 12 \frac{cy}{2g + a}. \end{cases} \quad (42)$$

$$\quad (44)$$

Le premier membre de l'équation (3) s'écrit par conséquent :

$$f_x^2 + f_y^2 = 16x^2 + 4y^2 + A, \quad (45)$$

avec :

$$A = 8x \frac{16}{3}(g-a) + \left(\frac{16}{3}\right)^2 (g-a)^2 - 48 \frac{cy^2}{2g+a} + 144 \frac{c^2 y^2}{(2g+a)^2}. \quad (46)$$

Or, en utilisant (31) et en factorisant l'expression de  $\Phi(g, a, b)$  donnée en (35), l'équation (34) peut se réécrire :

$$12 \frac{cy^2}{(2g+a)^2} = \frac{32}{9}(g-a), \quad (47)$$

ce qui donne, en reportant dans (46) :

$$A = \frac{64}{9}(g-a)[6x + 4(g-a) - 2(2g+a) + 6c]. \quad (48)$$

Le terme entre crochets de la dernière équation est nul, donc  $f_c(x, y)$  est solution de l'équation (3) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_c$ . Il est facile de vérifier qu'elle l'est également au point  $P_c$ , donc  $f_c(x, y)$  est finalement solution de l'équation (3) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{-\infty, -c\} \times \{0\}$ .

Sur la figure 9, on a représenté l'image de la surface  $z = f_2(x, y)$ , avec un éclairage de face.

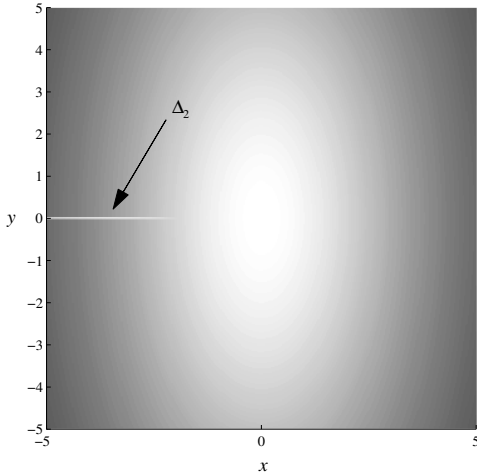


FIG. 9 - Surface  $z = f_2(x, y)$  éclairée de face.

Cette image est bien identique à celle de la figure 2, sauf sur  $\Delta_2 \setminus \{P_2\}$ , où  $f_2(x, y)$  n'est pas dérivable.

Quant à  $f_0(x, y)$ , on vérifie sans difficulté qu'elle est solution de (3) sur  $\mathbb{R}^2$ , sachant que :

$$f_0(x, y) = 2x|x| + y^2. \quad (49)$$

## 4 Application

Une application surprenante du théorème que nous venons de démontrer est l'existence de déformations invisibles. Une telle déformation a été simulée grâce au logiciel Matlab 4.2, à partir de la surface  $f_0(x, y)$ . L'image reste effectivement constante. En revanche, si l'on change un peu la direction d'observation ou la direction d'éclairage, la déformation devient visible, ce qui veut dire en particulier que ces déformations sont invisibles dans le cadre de la monovision, mais ne le sont pas dans le cadre de la stéréovision. Cette situation montre, s'il en est besoin, la supériorité des méthodes de stéréovision sur les méthodes de monovision en matière de reconnaissance du relief.

## Références

- [1] Blake (A.), Zisserman (A.) et Knowles (G.). – “Surface Descriptions from Stereo and Shading”. *Image and Vision Computing*, vol. 3, n° 4, 1985, pp. 183–191.
- [2] Brooks (M.J.), Chojnacki (W.) et Kozera (R.). – “Shading without Shape”. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. L, n° 1, 1992, pp. 27–38.
- [3] Bruss (A.R.). – “The Eikonal Equation: Some Results Applicable to Computer Vision”. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 23, n° 5, 1982, pp. 890–896.
- [4] Durou (J.D.). – “Reconnaissance du relief à partir de l'éclairage”. – Thèse de PhD, Université Paris XI-Orsay, 1993.
- [5] Durou (J.D.), Mascarilla (L.) et Piau (D.). – “Non visible distortions”. – Soumis à *IEEE PAMI*.
- [6] Horn (B.K.P.). – “Shape from Shading: a Method for Obtaining the Shape of a Smooth Opaque Object from One View”. – Thèse de PhD, Department of Electrical Engineering, MIT, 1970.
- [7] Horn (B.K.P.). – “Obtaining Shape from Shading Information”. In: *The Psychology of Computer Vision*, chap. 4, pp. 115–155. – P.H. Winston (ed.), New York, 1975.
- [8] Horn (B.K.P.), Szeliski (R.S.) et Yuille (A.L.). – “Impossible Shaded Images”. *IEEE PAMI*, vol. 15, n° 2, 1993, pp. 166–169.
- [9] Oliensis (J.). – “Uniqueness in Shape from Shading”. *International Journal of Computer Vision*, vol. 6, n° 2, 1991, pp. 75–104.