```
THEORY Approximation
  IMPORT THEORY PROJECTS
    /SimpleDEq THEORIES /SimpleDEq/ApproximationBase.dtf|org.eventb.theory.core.deployedTheoryRoot#
        ApproximationBase
  TYPE PARAMETERS E,F1,F2,F3,UF1,UF2,F
  OPERATORS
    FDeltaNeighborhood <predicate> (PE: ℙ(E),delta: RRealPlus,a: F,f2: E ⇸ F)
      well-definedness PE ⊆ dom(f2)
      direct definition
        ∀ x · x ∈ PE ⇒ DeltaNeighborhood(delta,a,f2(x))
    DeltaApproximation <predicate> (PE: ℙ(E),delta: RRealPlus,f1: E ⇸ F,f2: E ⇸ F)
      well-definedness PE ⊆ dom(f1),PE ⊆ dom(f2)
      direct definition
        ∀ x · x ∈ PE ⇒ DeltaNeighborhood(delta,f1(x),f2(x))
    DeltaApproximationEq <predicate> (DR: ℙ(RReal),delta: RRealPlus,e1: DE(F),e2: DE(F))
      well-definedness Solvable(DR,e1),Solvable(DR,e2)
      direct definition
        ∀ eta1,eta2 ·
          eta1 ∈ RReal ⇸ F ∧ eta2 ∈ RReal ⇸ F ∧
          DR ⊆ dom(eta1) ∧ DR ⊆ dom(eta2) ∧
          solutionOf(DR,eta1,e1) ∧ solutionOf(DR,eta2,e2)
            ⇒ DeltaApproximation(DR,delta,eta1,eta2)
    DeltaApproximationEqObs <predicate> (DR: ℙ(RReal),delta: RRealPlus,ee1: DE(F1),g1: F1 → F,ee2: DE(F2)
        ,g2: F2 → F)
      well-definedness Solvable(DR,ee1),Solvable(DR,ee2)
      direct definition
        ∀ eta1,eta2 ·
          eta1 ∈ RReal ⇸ F1 ∧ eta2 ∈ RReal ⇸ F2 ∧
          DR ⊆ dom(eta1) ∧ DR ⊆ dom(eta2) ∧
          solutionOf(DR,eta1,ee1) ∧ solutionOf(DR,eta2,ee2)
            ⇒ DeltaApproximation(DR,delta,g1 ∘ eta1,g2 ∘ eta2)
    DeltaApproximationEqF <predicate> (DR: ℙ(RReal),delta: RRealPlus,e: DE(F),g: RReal ⇸ F)
      well-definedness Solvable(DR,e),DR ⊆ dom(g)
      direct definition
        ∀ eta ·
          eta ∈ RReal ⇸ F ∧ DR ⊆ dom(eta) ∧ solutionOf(DR,eta,e)
            ⇒ DeltaApproximation(DR,delta,eta,g)
    ProjectiveHull <expression> (delta: RRealPlus,SF: ℙ(F))
      direct definition
        { f2 | f2 ∈ F ∧ (∃ f1 · f1 ∈ SF ∧ DeltaNeighborhood(delta,f1,f2)) }
    DeltaNeighborhoodSet <expression> (delta: RRealPlus,x: E)
      direct definition
        { y | y ∈ E ∧ DeltaNeighborhood(delta,x,y) }
  AXIOMATIC DEFINITIONS simulation_functions:
    OPERATORS
      SimulationFunctions <expression> (DF1: ℙ(F1),DF2: ℙ(F2),DUF1: ℙ(UF1),DUF2: ℙ(UF2),f1: F1×UF1 ⇸ F1,
          f2: F2×UF2 ⇸ F2,g1: F1 → F,g2: F2 → F) : ℙ(ℙ((F1×F2)×RReal))
        well-definedness DF1×DUF1 ⊆ dom(f1),DF2×DUF2 ⊆ dom(f2)
    AXIOMS
      SimulationFunctions_char:
        ∀ DF1,DF2,DUF1,DUF2,f1,f2,g1,g2,V ·
          DF1 ⊆ F1 ∧ DF2 ⊆ F2 ∧ DUF1 ⊆ UF1 ∧ DUF2 ⊆ UF2 ∧
          f1 ∈ F1×UF1 ⇸ F1 ∧ f2 ∈ F2×UF2 ⇸ F2 ∧
          g1 ∈ F1 → F ∧ g2 ∈ F2 → F ∧
          DF1×DUF1 ⊆ dom(f1) ∧ DF2×DUF2 ⊆ dom(f2) ∧
          V ∈ SimulationFunctions(DF1,DF2,DUF1,DUF2,f1,f2,g1,g2) ∧
          V ∈ F1×F2 ⇸ RReal
            ⇒ (
              DF1×DF2 ⊆ dom(V)
                  ∧ (∀ x1,x2 · x1 ∈ DF1 ∧ x2 ∈ DF2 ⇒ V(x1↦x2) ∈ RRealPlus)
            )
      SimulationFunction_control_ODE:
        ∀ DR,eta01,eta02,t0,DF1,DF2,DUF1,DUF2,f1,f2,g1,g2,u1,u2,V ·
          DR ⊆ RReal ∧ t0 ∈ DR ∧ eta01 ∈ F1 ∧ eta02 ∈ F2 ∧
          DF1 ⊆ F1 ∧ DF2 ⊆ F2 ∧ DUF1 ⊆ UF1 ∧ DUF2 ⊆ UF2 ∧
          f1 ∈ F1×UF1 ⇸ F1 ∧ DF1×DUF1 ⊆ dom(f1) ∧
          f2 ∈ F2×UF2 ⇸ F2 ∧ DF2×DUF2 ⊆ dom(f2) ∧
          g1 ∈ F1 → F ∧ g2 ∈ F2 → F ∧
          u1 ∈ RReal ⇸ UF1 ∧ DR ⊆ dom(u1) ∧ ran(u1) ⊆ UF1 ∧
          u2 ∈ RReal ⇸ UF2 ∧ DR ⊆ dom(u2) ∧ ran(u2) ⊆ UF2 ∧
          V ∈ SimulationFunctions(DF1,DF2,DUF1,DUF2,f1,f2,g1,g2) ∧
          SolvableWith(DR,caode(f1,eta01,t0),u1) ∧ SolvableWith(DR,caode(f2,eta02,t0),u2) ⇒
            (∃ delta ·
```

```
                delta ∈ RRealPlus ∧
                DeltaApproximationEqObs(DR, delta ,
                  withControl(DR, caode(f1 , eta01 , t0) ,u1) , g1 ,
                  withControl(DR, caode(f2 , eta02 , t0) ,u2) , g2
                )
              )
    SimulationFunction_control_ODE_delta :
      ∀ DR, eta01 , eta02 , t0 , DF1 , DF2 , DUF1 , DUF2 , f1 , f2 , g1 , g2 , u1 , u2 , V, delta ·
        DR ⊆ RReal ∧ t0 ∈ DR ∧ eta01 ∈ F1 ∧ eta02 ∈ F2 ∧
        DF1 ⊆ F1 ∧ DF2 ⊆ F2 ∧ DUF1 ⊆ UF1 ∧ DUF2 ⊆ UF2 ∧
        f1 ∈ F1×UF1 ⇸ F1 ∧ DF1×DUF1 ⊆ dom(f1) ∧
        f2 ∈ F2×UF2 ⇸ F2 ∧ DF2×DUF2 ⊆ dom(f2) ∧
        g1 ∈ F1 → F ∧ g2 ∈ F2 → F ∧
        u1 ∈ RReal ⇸ UF1 ∧ DR ⊆ dom(u1) ∧ ran(u1) ⊆ UF1 ∧
        u2 ∈ RReal ⇸ UF2 ∧ DR ⊆ dom(u2) ∧ ran(u2) ⊆ UF2 ∧
        V ∈ SimulationFunctions(DF1, DF2, DUF1, DUF2, f1 , f2 , g1 , g2) ∧
        delta ∈ RReal ∧ Rzero ↦ delta ∈ lt ∧ boundedBy(DF1×DF2, V, Rzero , delta) ∧
        SolvableWith(DR, caode(f1 , eta01 , t0) ,u1) ∧ SolvableWith(DR, caode(f2 , eta02 , t0) ,u2) ⇒
          DeltaApproximationEqObs(DR, delta ,
            withControl(DR, caode(f1 , eta01 , t0) ,u1) , g1 ,
            withControl(DR, caode(f2 , eta02 , t0) ,u2) , g2
          )  neighborhoods :
AXIOMS
    deltaNSet_open :
      ∀ delta , x · delta ∈ RRealPlus ∧ Rzero ↦ delta ∈ lt ∧ x ∈ E ⇒
        IsOpen(DeltaNeighborhoodSet(delta , x))
THEOREMS
    deltaA_restriction :
      ∀ PE, PE2 , delta , f1 , f2 ·
        PE ⊆ E ∧ PE2 ⊆ PE ∧ delta ∈ RRealPlus ∧
        f1 ∈ E ⇸ F ∧ f2 ∈ E ⇸ F ∧
        PE ⊆ dom(f1) ∧ PE ⊆ dom(f2) ∧
        DeltaApproximation(PE, delta , f1 , f2)
          ⇒
            DeltaApproximation(PE2 , delta , f1 , f2)
    deltaAeq_restriction :
      ∀ DR, DR2 , delta , e1 , e2 ·
        DR ⊆ RReal ∧ DR2 ⊆ DR ∧ delta ∈ RRealPlus ∧
        e1 ∈ DE(F) ∧ e2 ∈ DE(F) ∧
        Solvable(DR, e1) ∧ Solvable(DR2 , e2) ∧
        DeltaApproximationEq(DR, delta , e1 , e2)
          ⇒
            DeltaApproximationEq(DR2 , delta , e1 , e2)
    deltaAeqobs_restriction :
      ∀ DR, DR2 , delta , e1 , e2 , g1 , g2 ·
        DR ⊆ RReal ∧ DR2 ⊆ DR ∧ delta ∈ RRealPlus ∧
        e1 ∈ DE(F1) ∧ e2 ∈ DE(F2) ∧
        g1 ∈ F1 → F ∧ g2 ∈ F2 → F ∧
        Solvable(DR, e1) ∧ Solvable(DR2 , e2) ∧
        DeltaApproximationEqObs(DR, delta , e1 , g1 , e2 , g2)
          ⇒
            DeltaApproximationEqObs(DR2 , delta , e1 , g1 , e2 , g2)
    deltaA_comp :
      ∀ DF1, PE, f , g , h, delta ·
        DF1 ⊆ F1 ∧ PE ⊆ E ∧
        g ∈ F1 ⇸ E ∧ f ∈ E ⇸ F ∧ h ∈ E ⇸ F ∧
        DF1 ⊆ dom(g) ∧ PE ⊆ dom(f) ∧ PE ⊆ dom(h) ∧
        DeltaApproximation(PE, delta , f , h) ∧
        (∀ x · x ∈ DF1 ⇒ g(x) ∈ PE) ⇒
          DeltaApproximation(DF1, delta , f ∘ g , h ∘ g)
    deltaA_commutative :
      ∀ PE, delta , f1 , f2 ·
        PE ⊆ E ∧ delta ∈ RRealPlus ∧ f1 ∈ E ⇸ F ∧ f2 ∈ E ⇸ F ∧
          PE ⊆ dom(f1) ∧ PE ⊆ dom(f2) ⇒
        (DeltaApproximation(PE, delta , f1 , f2) ⇔ DeltaApproximation(PE, delta , f2 , f1))
    deltaAeq_commutative :
      ∀ DR, delta , e1 , e2 ·
        DR ⊆ RReal ∧ delta ∈ RRealPlus ∧ e1 ∈ DE(F) ∧ e2 ∈ DE(F) ∧ Solvable(DR, e1) ∧ Solvable(DR, e2)
          ⇒
          (DeltaApproximationEq(DR, delta , e1 , e2) ⇔ DeltaApproximationEq(DR, delta , e2 , e1))
    deltaAeqobs_commutative :
      ∀ DR, delta , e1 , e2 , g1 , g2 ·
        DR ⊆ RReal ∧ delta ∈ RRealPlus ∧
        e1 ∈ DE(F1) ∧ e2 ∈ DE(F2) ∧
```

```
        Solvable(DR, e1) ∧ Solvable(DR, e2) ∧
        g1 ∈ F1 → F ∧ g2 ∈ F2 → F
          ⇒
            (DeltaApproximationEqObs(DR, delta , e1 , g1 , e2 , g2)
            ⇔
             DeltaApproximationEqObs(DR, delta , e2 , g2 , e1 , g1))
    deltaApp_induction:
      ∀ delta , eqA , eqC , etaA , etaC , etaAp , etaCp , t , tp , InvA , InvC ·
        delta ∈ RRealPlus ∧
        t ∈ RRealPlus ∧
        eqA ∈ DE(F) ∧ eqC ∈ DE(F) ∧
        etaA ∈ RReal ⇸ F ∧ Closed2Closed(Rzero , t) ⊆ dom(etaA) ∧
        etaC ∈ RReal ⇸ F ∧ Closed2Closed(Rzero , t) ⊆ dom(etaC) ∧
        DeltaApproximationEq(Closed2Closed(t , tp), delta , eqA , eqC) ∧
        DeltaApproximation(Closed2Closed(Rzero , t), delta , etaA , etaC) ∧
        CBAPsolutionOf(t , tp , etaA , etaAp , eqA , InvA) ∧ CBAPsolutionOf(t , tp , etaC , etaCp , eqC , InvC)
          ⇒ DeltaApproximation(Closed2Closed(Rzero , tp), delta , etaAp , etaCp)
    deltaApp_obs_induction:
      ∀ delta , eqA , eqC , gA , gC , etaA , etaC , etaAp , etaCp , t , tp , InvA , InvC ·
        delta ∈ RRealPlus ∧
        t ∈ RRealPlus ∧
        eqA ∈ DE(F1) ∧ eqC ∈ DE(F2) ∧ gA ∈ F1 → F ∧ gC ∈ F2 → F ∧
        etaA ∈ RReal ⇸ F1 ∧ Closed2Closed(Rzero , t) ⊆ dom(etaA) ∧
        etaC ∈ RReal ⇸ F2 ∧ Closed2Closed(Rzero , t) ⊆ dom(etaC) ∧
        DeltaApproximationEqObs(Closed2Closed(t , tp), delta , eqA , gA , eqC , gC) ∧
        DeltaApproximation(Closed2Closed(Rzero , t), delta , gA ∘ etaA , gC ∘ etaC) ∧
        CBAPsolutionOf(t , tp , etaA , etaAp , eqA , InvA) ∧ CBAPsolutionOf(t , tp , etaC , etaCp , eqC , InvC)
          ⇒ DeltaApproximation(Closed2Closed(Rzero , tp), delta , gA ∘ etaAp , gC ∘ etaCp)
    ProjectiveHull_INV:
      ∀ delta , xA , xC , IA , IC ·
        delta ∈ RRealPlus ∧
        IA ⊆ F ∧ xA ∈ F ∧
        IC ⊆ F ∧ xC ∈ F ∧ xC ∈ IC ∧
        ProjectiveHull(delta , IC) ⊆ IA ⇒
          xA ∈ IA
END
```