



# **Acoustique des Salles : Modélisation de l'Environnement Sonore**

Rapport de DEA AIA  
Septembre 2000

**Cédric FEVOTTE**  
Elève Ingénieur ECN  
DEA AIA

# Sommaire

## **1. Acoustique unidimensionnelle – Exemple du piston**

- 1.1 Présentation d'un système acoustique simple
- 1.2 Equation d'onde unidimensionnelle
- 1.3 Solutions de l'équation d'onde
- 1.4 Linéarité et principe de superposition
- 1.5 Impédance acoustique spécifique d'un milieu
- 1.6 Ondes stationnaires, fréquences propres, modes propres

## **2. Acoustique tridimensionnelle – Espaces clos**

- 2.1 Enoncé du problème général
  - 2.1.1 Equation des ondes
  - 2.1.2 Equation d'Helmutz tridimensionnelle
  - 2.1.3 Conditions aux limites
  - 2.1.4 Oscillations libres, fréquences propres et modes propres
- 2.2 Enceintes parallélépipédiques
  - 2.2.1 Fréquences et modes propres pour le problème de Neumann
  - 2.2.2 Fréquences et modes de résonance pour le problème de Robin
  - 2.2.3 Résolution de systèmes non homogènes par développement en série
- 2.3 Modes résonants et durée de réverbération
- 2.4 Champ acoustique aux fréquences élevées

## **3. Fonctions de transfert de salles**

- 3.1 Identification par modèle MA (séquence de pondération)
- 3.2 Identification par modèle ARMA
- 3.3 Modèles ARMA à pôles acoustiques communs
- 3.4 Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés d'équation
- 3.5 Estimation des pôles acoustiques par moyenne de fonction de transfert
- 3.7 Interpolation et extrapolation de fonctions de transfert

## **4. Une méthode originale : l'identification par bandes de fréquences**

### 4.1 Décomposition de signaux en sous-bandes fréquentielles

4.1.1 Base de cosinus locaux : ondelettes de Malvar

4.1.2 Ondelettes de Malvar fréquentielles :

4.1.3 Construction de signaux de sous-bandes

### 4.2 Traitement basses fréquences

### 4.3 Traitement hautes fréquences par estimation de variance et premier ordre

4.3.1 Estimation d'une variance temporelle par un premier ordre [11]

4.3.2 Estimation d'une variance par l'enveloppe

4.3.3 Génération du signal simulé

### 4.4 Traitement hautes fréquences par utilisation d'un second ordre

## **5. Simulations**

5.1 Identification d'une fonction de transfert

5.2 Identification par bandes de fréquence et variance

## **6. Conclusions**

L'Automatique offre aujourd'hui, et depuis un certain temps, des méthodes efficaces de contrôle, régulation et asservissement de « processus dynamiques ». L'idée d'appliquer ses outils à des processus acoustiques est alléchante et fait déjà ses preuves. Ainsi, et par exemple, une salle comprenant une ou plusieurs sources sonores (haut-parleur, instrument de musique...) et des récepteurs (microphones, oreille humaine...) peut-être considérée comme un système comportant entrées (les sources) et sorties (les récepteurs). La géométrie et la constitution physique de la salle ont une influence sur les signaux sonores émis et transférés aux récepteurs (par exemple par phénomènes d'écho, d'absorption des parois...).

On peut imaginer de représenter la façon dont est transféré un son depuis sa source jusqu'à un récepteur par une fonction de transfert entre cette source et ce récepteur (qui peut se définir simplement comme la transformée de Laplace de la réponse enregistrée par le récepteur à une excitation impulsionnelle de la source sonore). Cependant la fonction de transfert est fortement liée aux positions respectives de la source et du récepteur, et des positions différentes conduiront à une fonction de transfert différente, à certains coefficients près comme nous le verront ultérieurement. Il n'est pas possible d'imaginer une façon de représenter toute l'acoustique d'une salle par une seule fonction de transfert ou par une forme d'état dans la mesure où chaque point de la salle peut devenir un récepteur ou une source. C'est pourquoi nous présenterons une manière d'interpoler ou d'extrapoler des fonctions de transfert entre sources et récepteurs connaissant les fonctions de transfert entre des points de positions déterminées.

Cependant nous verrons que la représentation par fonction de transfert globale atteint rapidement ses limites lorsque la fréquence augmente et nous présenterons une méthode originale de caractérisation de l'acoustique d'une salle par segmentation de l'axe des fréquence et identification de modèles par bandes de fréquences.

Les méthodes que nous développerons s'appuient sur des notions d'acoustique peu triviales et donc dans un premier temps nous présenterons quelques pré-requis fondamentaux. Notre propos n'étant pas de présenter de manière exhaustive la théorie de l'acoustique, certains aspects ne seront abordés que succinctement et le lecteur désirant approfondir ses connaissances en la matière est invité à consulter les ouvrages de référence cités dans la bibliographie.

Si la théorie de l'acoustique (et plus généralement la théorie des vibrations) est applicable à différents types de fluides, nous choisirons dans notre cas l'air comme médium de référence. Afin de bien comprendre les propriétés inhérentes à la propagation des sons, nous présenterons le cas unidimensionnel avant d'aborder le cas tridimensionnel. Ce dernier sera traité dans le cadre de la propagation du son en espaces clos. Nous détaillerons notamment le cas des salles parallélépipédiques dans la mesure où les caractéristiques fréquentielles de ce type de salle sont bien déterminées par la théorie et donc que ces salles permettront la validation de nos méthodes d'estimation.

## 1. Acoustique unidimensionnelle – Exemple du piston [1]

### 1.1 Présentation d'un système acoustique simple

La nature physique de la propagation du son peut être illustrée par le piston. Considérons un tube rempli d'air, de longueur semi-infinie et comportant un piston mobile à l'une de ses extrémités. Supposons que le piston initialement au repos soit quasi-instantanément animé d'une vitesse  $u$  (Figure 1.1). L'air au niveau du piston est alors comprimé et sa pression augmente. La *perturbation* créée par le mouvement du piston est alors transmise progressivement à tout l'air contenu dans le tube, avec une célérité  $c_o$  qui est la *vitesse du son* dans le médium (en l'occurrence l'air). A 20°C la vitesse du son dans l'air est  $343 \text{ m s}^{-1}$ . Ainsi à 20°C, si le tube fait 100m de long, la perturbation se transmet d'une extrémité du tube à l'autre en environ 1/3 s. La vitesse du son varie selon le médium ; dans l'eau elle est de l'ordre de  $1500 \text{ m s}^{-1}$ . Elle dépend aussi des conditions de température et autres paramètres du milieu.

La perturbation créée par le piston a pour effet de mettre ponctuellement le fluide en mouvement (qui acquiert dans notre cas la vitesse  $u$ ) et ceci s'accompagne d'une variation de la pression du fluide. La pression est uniforme sur les sections du tube et la variation évolue dans l'espace selon la direction de propagation de la perturbation (l'axe du piston). On parle d'*onde plane*.

Il faut bien distinguer la vitesse de la perturbation ( $c_o$ ) de la vitesse des particules du fluide engendrée au passage de la perturbation. La vitesse des particules est généralement bien inférieure à la vitesse du son.

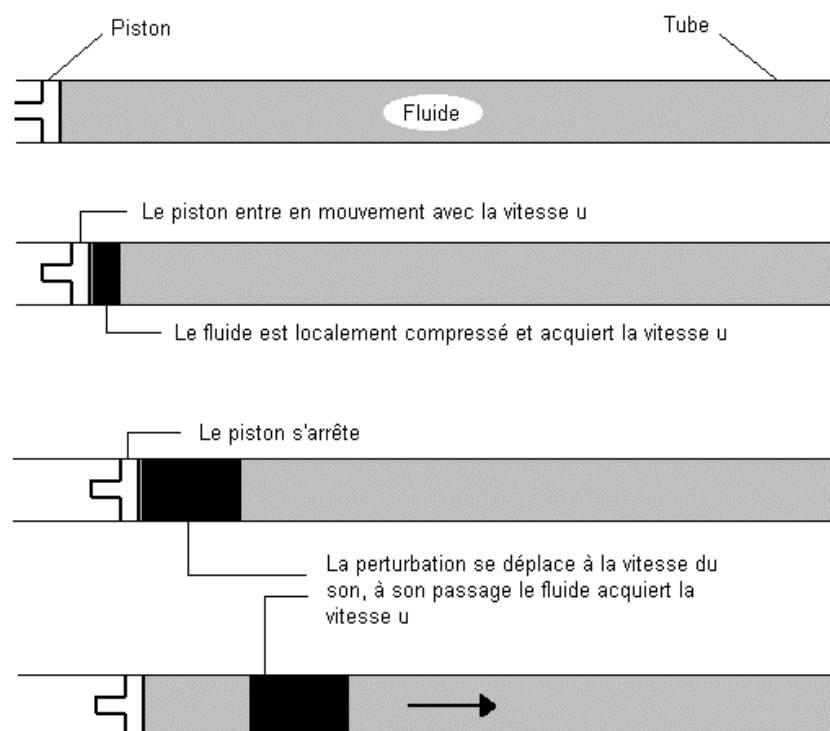


Figure 1.1 - Propagation d'une impulsion sonore dans un tube semi-infini

Les phénomènes sonores sont souvent générés par des surfaces en vibration autour d'une position d'équilibre. Un cas particulier courant est celui des vibrations sinusoïdales.

Supposons que notre piston soit animé d'un mouvement sinusoïdal de période  $T$  et qu'à l'instant  $t=0$  il se trouve en mouvement à sa vitesse maximale vers l'avant (Figure 1.2). Le piston crée dans ces conditions une augmentation de la pression du fluide à son contact qui s'avère être proportionnelle à sa vitesse (création d'une perturbation). A mesure que le piston avance sa vitesse diminue et la pression du fluide à son environnement diminue semblablement. Pendant ce temps la perturbation initiale se propage dans le tube à la vitesse du son et reproduit le long du tube les phénomènes de variation de pression ayant lieu au niveau du piston. A  $t=T/4$  le piston atteint sa position extrême avant puis revient en arrière. Il reprend de la vitesse, ce qui a pour effet de raréfier le fluide à son environnement et donc de diminuer la pression de celui-ci. A  $t=T/2$  le piston repasse par sa position initiale avec une vitesse maximale et la raréfaction du fluide à son environnement est maximale : on a un minimum de pression en position  $x=0$ .

Les perturbations créées au niveau du piston se propagent à la vitesse  $c_0$ . Cela signifie que la fluctuation de pression en  $x=0$  et à l'instant  $t$  est répétée en abscisse  $x$  à l'instant  $t + \frac{x}{c_0}$ .

Ceci implique que l'expression de la pression soit de la forme :

$$p(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right),$$

qui est une forme caractéristique des mouvements ondulatoires.

Au bout d'une période (donc à l'instant  $t=T$ ) une distribution de pression s'est donc créée entre les abscisses  $x=0$  et  $c_0T$ . Cette distribution s'avère être cosinusoidale selon  $x$ , de période  $\lambda=c_0T$ .  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'ondulation, elle correspond à la distance parcourue par la perturbation durant une période du mouvement cyclique du piston.

A l'instant  $t=T$ , la pression selon  $x$ , entre  $x=0$  et  $x=\lambda$ , est donc de la forme :

$$p(x) = A \cos(kx),$$

en posant  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Mais la pression en un point d'abscisse  $x$  varie au cours du temps et il s'avère qu'elle varie dans le temps de manière synchronisé avec les variations du piston, c'est à dire de manière sinusoïdale. Finalement, en tout point du tube où la perturbation est déjà passée et à l'instant  $t$ , la pression peut s'écrire sous la forme :

$$p(x,t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right) \quad (1.1)$$

en posant  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

$A$  est une constante dépendant de l'amplitude de la vitesse du piston qui pourra être déterminée ultérieurement.

Cette solution obtenue de manière informelle caractérise les variations de type ondulatoire de la pression dans le tube sous l'effet du piston animé d'un mouvement

harmonique. Cette expression de la pression se démontre formellement en résolvant l'équation d'onde à laquelle obéit le fluide.

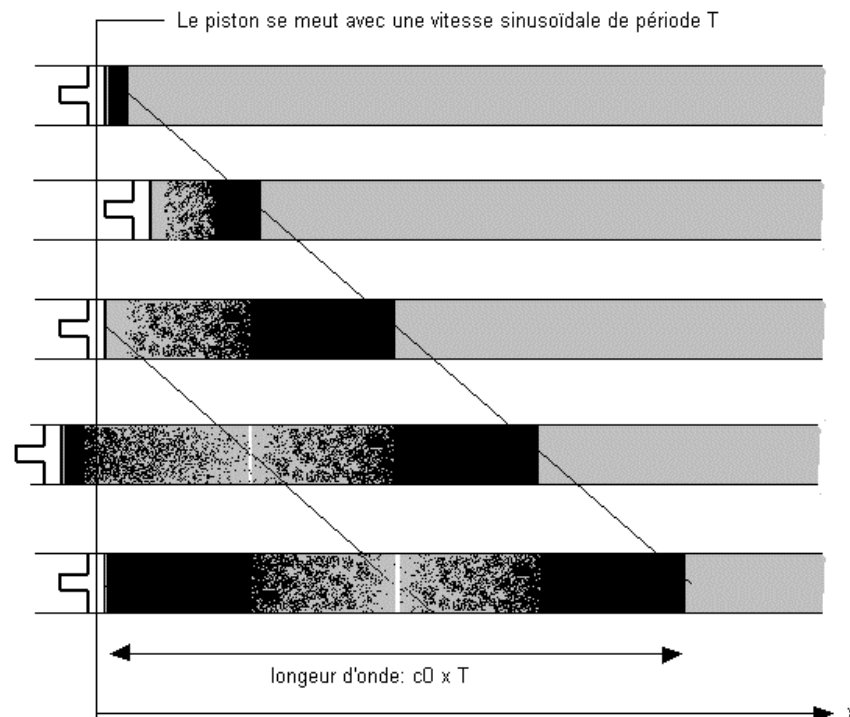


Figure 2 - Distribution de pression créée par un déplacement à vitesse sinusoïdale du piston

## 1.2 Equation d'onde unidimensionnelle

Des considérations de mécanique des fluides peuvent nous amener à déterminer l'équation que satisfait l'air dans le piston.

- La pression du fluide contraint ( $p_{tot}$ ) est une fonction de sa masse volumique ( $\rho_{tot}$ ) :

$$p_{tot} = f(\rho_{tot}) \quad (1.2)$$

- Les variations de la pression et de masse volumique du fluide autour des conditions ambiantes (typiquement  $10^5$  Pa et  $1.2 \text{ kg m}^{-3}$  pour l'air) sont très petites. Par exemple les variations de pression mesurées au voisinage du moteur d'une voiture roulant à vitesse maximum n'excèdent pas 10 Pa. De sorte que si  $p_{tot} = p_0 + p$  et  $\rho_{tot} = \rho_0 + \rho$  alors, en linéarisant l'expression précédente et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 on obtient :

$$p = \rho \frac{df}{d\rho_{tot}}(\rho_0) \quad (1.3)$$

- Du principe de conservation des moments appliqué à la région du fluide située devant le piston on déduit :

$$p = \rho_0 c_0 u \quad (1.4)$$

( $\rho_0 c_0$  est appelé l'impédance acoustique caractéristique du milieu).

- Le principe de conservation de la masse appliqué à la région du fluide située devant le piston aboutit à :

$$u = \frac{c_0}{\rho_0} \rho \quad (1.5)$$

- Des deux dernières équations on déduit :

$$p = c_0^2 \rho \quad \text{et donc} \quad c_0^2 = \frac{df(\rho_0)}{d\rho_{tot}} \quad (1.6)$$

(Ces deux relations sont toujours vraies si on considère les compressions acoustiques comme étant adiabatiques).

- L'équation générale de conservation de la masse linéarisée appliquée à un élément de fluide s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

- L'équation générale de conservation des moments appliquée à un élément de fluide s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

- En différentiant l'équation (1.7) par rapport à  $t$ , l'équation (1.8) par rapport à  $x$ , et en utilisant l'équation (1.6), on obtient l'équation des ondes unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

Cette équation (**l'équation d'onde**) établit le comportement des variations de la pression acoustique selon le temps et l'espace. Cette équation est soumise à l'hypothèse des petites perturbations ( $p$ ,  $\rho$ ,  $u$  respectivement négligeables devant  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $c_0$ ), hypothèse permettant de négliger les termes non-linéaires dans les équations et d'obtenir la linéarité mutuelle entre les variables  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ .



### 1.3 Solutions de l'équation d'onde

On voit aisément que les fonctions de pression possédant une dépendance espace/temps de la forme :

$$p(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \quad \text{et} \quad p(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c_0}\right)$$

sont solutions de l'équation d'onde. La fonction  $f$  implique que la fluctuation de pression à l'abscisse  $x = 0$  et à l'instant  $t$  est répétée à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t = t + \frac{x}{c_0}$ , elle traduit une onde de pression voyageant dans le sens des  $x$  positifs. La fonction  $g$  traduit une onde de pression voyageant dans le sens des  $x$  négatifs.

Une forme particulière de solution est celle de l'onde harmonique se propageant dans le sens des  $x$  positifs, expression trouvée de manière informelle de la pression dans le piston au paragraphe 1.1 (équation (1.1)). La représentation complexe de ce type de solution s'écrit :

$$p(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right) = \operatorname{Re}\left\{A e^{j\omega(t-x/c_0)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{A e^{j(\omega t - kx)}\right\} \quad (1.10)$$

où  $\omega = 2\pi/T$  est la pulsation de l'onde de pression harmonique de période  $T$  et  $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde.  $A$  est un nombre complexe et en notant  $|A|$  son module et  $\phi_A$  sa phase, la pression peut s'écrire :

$$p(x,t) = |A| \cos(\omega t - kx + \phi_A) \quad (1.11)$$

Pour les ondes harmoniques se propageant dans le sens des  $x$  négatifs, les formes équivalentes sont :

$$g\left(t + \frac{x}{c_0}\right) = \operatorname{Re}\left\{A e^{j(\omega t + kx)}\right\} \quad \text{soit} \quad p(x,t) = |B| \cos(\omega t + kx + \phi_B) \quad (1.12)$$

On définit généralement pour les problèmes d'acoustique harmonique une pression complexe  $p(x)$  qui ne dépend que des variables de l'espace et pas du temps. Le lien entre cette pression et la pression réelle est :

$$p(x,t) = \operatorname{Re}\left\{p(x) e^{j\omega t}\right\} \quad (1.13)$$

Ainsi dans le cas particulier des ondes planes harmoniques étudié précédemment on a  $p(x) = A e^{-jkx}$  ou  $p(x) = B e^{jkx}$ , suivant le sens de propagation des ondes. L'équation d'onde (1.9) s'écrit alors :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \text{Re}\{p(x) e^{j\omega t}\} = 0$$

Donc, en commutant l'opérateur partie réelle avec les opérateurs différentiels, il vient :

$$\text{Re}\left\{ \left[ \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x) \right] e^{j\omega t} \right\} = 0$$

Cette expression devant être vérifiée à chaque instant  $t$ , on en déduit l'équation que vérifie la pression spatiale  $p(x)$  :

$$\boxed{\frac{d^2 p(x)}{dx^2} + k^2 p(x) = 0} \quad (1.14)$$

Cette équation est l'**équation d'Helmholtz unidimensionnelle**.

#### 1.4 Linéarité et principe de superposition

L'équation d'onde ne faisant intervenir que des opérateurs linéaires, si deux champs de pression satisfont l'équation d'onde, leur somme est aussi solution de l'équation d'onde. En d'autres termes deux champs sonores intervenant ensemble dans un même espace se superposent sans effet de distorsion l'un sur l'autre : la voix d'une personne n'a pas d'effet sur le signal d'une radio allumée et inversement. La variation de pression en un instant et en une position donnés est la somme des variations de pression dues à chacun des deux champs sonores. Ce phénomène est le *principe de superposition*.

Le principe de superposition reste vrai tant que l'équation d'onde est valable, c'est à dire principalement lorsque l'hypothèse des petites perturbations est possible (et donc que les variables  $p$ ,  $\rho$  et  $u$  sont linéaires entre elles). Il existe des cas où cette hypothèse est erronée et où donc l'équation d'onde ne régit plus la propagation des sons. Ce genre de cas se produit par exemple sur des problèmes de propagation sur longues distances et avec de fortes fluctuations de pression. Pour notre étude d'acoustique des salles l'hypothèse des petites perturbations sera justifiée.

### 1.5 Impédance acoustique spécifique d'un milieu

De la même façon que nous avons défini une pression spatiale complexe, on peut définir une vitesse particulaire spatiale complexe  $u(x)$  telle que :

$$u(x, t) = \text{Re}\{u(x)e^{j\omega t}\} \quad (1.15)$$

$u(x)$  et  $p(x)$  sont liés par l'équation linéarisée de la conservation des moments (1.8) qui s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}\{u(x)e^{j\omega t}\} + \frac{\partial}{\partial x} \text{Re}\{p(x)e^{j\omega t}\} = 0,$$

soit :

$$j\omega\rho_0 u(x) + \frac{dp(x)}{dx} = 0 \quad (1.16)$$

On définit l'impédance acoustique spécifique locale  $z(x)$  du champ sonore par :

$$z(x) = \frac{p(x)}{u(x)} \quad (1.17)$$

Dans le cas de l'onde plane harmonique (comme pour le piston), on a  $p(x) = A e^{jkx}$  et donc  $z(x) = \rho_0 c_0$ . L'impédance est réelle (et égale à l'impédance acoustique caractéristique du milieu) ce qui montre que  $p(x, t)$  et  $u(x, t)$  sont en phase. On retrouve le résultat correspondant à l'équation (1.4).

### 1.6 Ondes stationnaires, fréquences propres, modes propres

Après avoir considéré le cas d'un piston manœuvrant dans un tube sans fin considérons désormais un tube fini de longueur  $L$ . Si dans le premier cas l'onde engendrée par le piston était supposée ne jamais rencontrer d'obstacle, dans le second cas l'onde émise se réfléchit à l'extrémité droite du tube. En réponse à une excitation harmonique du piston une solution possible à l'équation d'onde est la superposition d'une onde plane se propageant dans le sens des  $x$  positifs et d'une autre se propageant dans le sens des  $x$  négatifs, soit une pression spatiale de la forme :

$$p(x) = Ae^{-jkx} + Be^{jkx}$$

où  $A$  et  $B$  sont des nombres complexes indéterminés représentant les amplitudes complexes respectives des deux ondes superposées. L'équation linéarisée de la conservation du moment (1.8) permet d'évaluer  $u(x)$  :

$$u(x) = \frac{Ae^{-jkx}}{\rho_0 c_0} - \frac{Be^{jkx}}{\rho_0 c_0}$$

L'écriture des conditions aux limites va nous permettre de déterminer les paramètres  $A$  et  $B$ . Soit  $U$  la vitesse complexe du piston animé d'un mouvement sinusoïdal de période  $T$  ( $|U|$  représente l'amplitude de la vitesse,  $\arg(U)$  la phase initiale). Les conditions aux limites du problème s'écrivent :

$$\begin{cases} u(0) = U \\ u(L) = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \rho_0 c_0 U = A - B \\ A e^{-jkL} = B e^{jkL} \end{cases}$$

d'où :

$$A = \frac{\rho_0 c_0 U e^{jkL}}{2j \sin kL}, \quad B = \frac{\rho_0 c_0 U e^{-jkL}}{2j \sin kL}$$

et finalement :

$$\boxed{p(x) = \frac{-j\rho_0 c_0 U \cos k(L-x)}{\sin kL}, \quad u(x) = \frac{U \sin k(L-x)}{\sin kL}} \quad (1.18)$$

Les deux ondes planes interfèrent pour produire une *onde stationnaire*. Remarquons que pour les fréquences de déplacement du piston telles que  $\sin kL = 0$ , la pression et la vitesse particulaire complexes deviennent théoriquement infinies. Cela se produit pour des nombres d'ondes  $k_n$  tels que :

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{IN}^+} \quad (1.19)$$

soit encore, sachant que  $k = 2\pi/\lambda$ , lorsque :

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{IN}^+$$

c'est à dire lorsque la longueur du tube est un multiple d'une demie longueur d'onde. Les fréquences de pulsation du piston (et de l'onde) correspondantes s'écrivent :

$$\boxed{\omega_n = c_0 \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{IN}^+} \quad (1.20)$$

Ces fréquences particulières sont appelées les *fréquences naturelles* ou encore *fréquences propres* du fluide dans le piston. Bien entendu dans la réalité la réponse du fluide à ces fréquences n'est pas infinie dans la mesure où l'énergie passée au fluide se dissipe, par exemple au niveau des parois absorbantes du tube. Aux fréquences propres, la pression varie selon  $\cos\frac{n\pi}{L}(L-x)$  soit donc selon  $(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ . Ces modes particuliers de la variation en pression sont appelés les *modes propres*.

Nous allons voir dans le cas tridimensionnel que ces fréquences propres sont la « signature fréquentielle » d'un système acoustique et que l'ensemble des modes propres d'un système acoustique constitue une base de décomposition du champ de pression. Nous verrons que dans le cas d'une salle, la connaissance des valeurs propres et des modes propres associés est une information déterminante pour évaluer les fonctions de transfert du lieu.

## 2 Acoustique tridimensionnelle – Espaces clos [2]

Le premier chapitre nous a permis de poser quelques notions d'acoustique en nous appuyant sur l'exemple simple d'un piston. Nous allons désormais nous intéresser à l'acoustique des espaces clos afin de mettre en évidence les notions dont nous aurons besoin pour établir des fonctions de transfert de salles. L'équation des ondes tridimensionnelle généralisée aux espaces clos ne sera pas démontrée mais elle repose sur les mêmes considérations de Mécanique des Fluides que celles évoquées en 1.2. Nous développerons le cas des enceintes parallélépipédiques dont les caractéristiques fréquentielles sont bien déterminées par la théorie, la résolution de l'équation des ondes demeurant assez simple dans ce cas particulier. Les résultats théoriques obtenus pour ces salles nous permettront de valider nos méthodes d'identification de fonction de transfert.

### 2.1 Énoncé du problème général

On considère un domaine fermé  $\Omega$  bidimensionnel ou tridimensionnel dont la frontière  $\sigma$  est composée de portions surfaces (ou de courbes dans  $\mathbb{R}^2$ ) indéfiniment différentiables.  $\mathbf{n}$  désignera en tout point de la frontière la normale à  $\sigma$ , définie partout sauf sur les arêtes. A l'intérieur du domaine se trouvent des sources sonores produisant une propagation acoustique dans le fluide contenu dans  $\Omega$  et de caractéristiques  $\rho_0$  et  $c_0$ . Ces sources seront caractérisées par une fonction  $F(M,t)$  dépendant à la fois de points  $M$  de l'espace et du temps  $t$ . A titre d'exemple une source ponctuelle placée en un point  $S$  de l'enceinte et émettant des ondes planes de pulsation  $\omega$  sera caractérisée par une fonction de la forme  $ae^{j\omega t}\delta_S$  où  $\delta_S$  représente le Dirac spatial situé en  $S$ .

#### 2.1.1 Equation des ondes

La pression acoustique  $p(M,t)$  ainsi générée en tout point  $M$  de  $\Omega$  et à l'instant  $t$  vérifie l'équation des ondes :

$$\boxed{\begin{cases} \left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(M,t) = F(M,t) & M \in \Omega, t \in ]-\infty, +\infty[ \\ p(M,t) = \frac{\partial p(M,t)}{\partial t} = 0 & t < t_0 \end{cases}} \quad (2.1)$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien et  $t_0$  l'instant où les sources  $F(M,t)$  se mettent en mouvement. En général l'émission des sources cesse au bout d'une durée limitée. Mais le mouvement du fluide ne s'arrête pas pour autant. Les équations de conservation de l'énergie montrent que, après arrêt des sources, l'énergie sonore dans l'enceinte décroît exponentiellement, à moins que l'enceinte ne comporte aucun matériau absorbant et qu'il n'y ait pas de pertes d'énergie, ce qui n'est jamais tout à fait le cas dans la réalité. Lorsqu'un front d'onde percute un obstacle, une certaine quantité d'énergie est transmise à ce dernier, puis l'onde est réfléchi. Théoriquement on ne devrait considérer l'annulation de la pression acoustique qu'au bout d'un temps infini. Dans la pratique on la considère comme nulle lorsqu'elle n'est plus audible ou mesurable.

### 2.1.2 Equation d'Helmutz tridimensionnelle

Comme pour le cas du piston nous nous proposons d'étudier ce que devient l'équation des ondes en régime harmonique (c'est à dire lorsque les phénomènes acoustiques, sous l'effet d'excitations harmoniques, dépendent sinusoidalement du temps) et donc de généraliser l'équation d'Helmholtz.

Supposons donc que la source  $F(M,t)$  est animée d'un mouvement sinusoidal et qu'elle est représentée par la quantité complexe  $f(M)$  vérifiant :

$$F(M,t) = \operatorname{Re}\{f(M)e^{j\omega t}\}$$

On définit comme dans le cas unidimensionnel une pression  $p(M)$  et une vitesse particulaire  $\mathbf{u}(M)$  spatiales complexes définies par les relations :

$$\boxed{p(M,t) = \operatorname{Re}\{p(M)e^{j\omega t}\} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}(M,t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}(M)e^{j\omega t}\}} \quad (2.2)$$

En remplaçant les grandeurs  $p(M,t)$  et  $F(M,t)$  par leurs expressions complexes dans l'équation d'onde, on aboutit comme dans le premier chapitre à l'**équation d'Helmutz** :

$$\boxed{(\Delta + k^2)p(M) = f(M) \quad M \in \Omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}} \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Conditions aux limites

L'équation (2.1) est accompagnée de conditions aux limites de l'enceinte. On peut considérer plusieurs types de conditions aux limites notamment selon que la frontière absorbe de l'énergie ou non.

- **Condition aux limites de Neumann :**

La frontière  $\sigma$  est supposée constituée d'un matériau parfaitement rigide, ce qui impose que la composante normale de la vitesse particulaire  $\mathbf{u}(M,t)$  des points  $M$  situés sur la frontière est nulle.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir le lien entre pression et vitesse :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}(M,t)}{\partial t} + \nabla p(M,t) = 0$$

où  $\nabla$  désigne l'opérateur gradient.

Donc sur la frontière  $\sigma$  on a :

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \nabla p(M, t) = \frac{\partial p(M, t)}{\partial n} = 0 \quad M \in \sigma, \forall t} \quad (2.4)$$

- **Condition aux limites de Dirichlet :**

La frontière est supposée non absorbante et telle que la pression en chacun de ses points est égale à la pression ambiante extérieure (parois très peu rigides):

$$p_{tot}(M, t) = p_0 \quad M \in \sigma, \forall t$$

D'où :

$$\boxed{p(M, t) = 0 \quad M \in \sigma, \forall t} \quad (2.5)$$

On montre que l'équation (2.1) jointe à l'une ou l'autre des conditions aux limites (2.4) ou (2.5), possède une seule solution. Il en est de même si la condition (2.4) est imposée sur une partie  $\sigma'$  de  $\sigma$  et la condition (2.5) sur l'autre partie.

- **Condition aux limites de Robin**

Dans le cas où la frontière  $\sigma$  absorbe de l'énergie, il n'est pas toujours facile de traiter la condition aux limites. En toute rigueur il faudrait modéliser la façon dont l'énergie est absorbée au niveau des parois et donc traiter un problème couplé vibration du fluide / vibration élastique de la frontière. En général on peut se contenter d'une approximation simple : le rapport entre la pression acoustique et la vitesse normale des particules est constant sur la surface absorbante. On est alors assuré de l'unicité de la solution. Cette approximation se traduit en régime harmonique par la condition aux limites de Robin :

$$\boxed{\frac{\partial p(M)}{\partial n} - \frac{jk}{\zeta(M)} p(M) = 0 \quad M \in \sigma} \quad (2.6)$$

Cette condition aux limites traduit très correctement la réalité chaque fois que l'onde acoustique qui pénètre dans le matériau constituant la frontière est rapidement atténuée dans la direction tangente à  $\sigma$ , c'est en particulier le cas des matériaux poreux utilisés comme revêtement muraux.

La quantité  $\zeta(M)$  est appelée *impédance normale spécifique* de la frontière. C'est une quantité complexe dont la partie réelle (appelée *résistance acoustique*) est obligatoirement positive. La partie imaginaire de  $\zeta(M)$  est appelée *réactance acoustique*. En règle générale, à basse fréquence tout matériau est réfléchissant ( $|\zeta| \rightarrow \infty$ ) et à haute fréquence tout matériau est parfaitement absorbant ( $\text{Re}\{\zeta\} = 1$ ,



$\text{Im}\{\zeta\} = 0$ ). Il existe de nombreux modèles caractérisant  $\zeta$ , tel que le modèle Delany et Bazley (pour les parois constituées d'une couche épaisse de matériau poreux) qui ne dépend que d'un seul coefficient  $s$ , la résistance à l'écoulement :

$$\zeta = 1 + 9,08 \left( \frac{s}{f} \right)^{0,75} + 11,9 \left( \frac{s}{f} \right)^{0,73} i \quad (2.7)$$

Finalement on peut regrouper les trois types de conditions aux limites sous la forme suivante :

$$\alpha \frac{\partial p(M)}{\partial n} + \beta p(M) = 0 \quad M \in \sigma \quad (2.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha = 1, \beta = 0 &: \text{condition aux limites de Neumann ;} \\ \alpha = 0, \beta = 1 &: \text{condition aux limites de Dirichlet ;} \\ \alpha = 1, \beta \neq 0 &: \text{condition aux limites de Neumann.} \end{aligned}$$

Si la frontière  $\sigma$  est constituée de différents matériaux homogènes, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions constantes par morceaux. On peut également envisager que les propriétés acoustiques de  $\sigma$  varient continûment : alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions continues. Enfin, le cas le plus général est celui où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions continues par morceaux.

#### 2.1.4 Oscillations libres, fréquences propres et modes propres

Les *modes propres* d'une enceinte sont *à priori* de nature purement mathématique. D'une façon générale, on appelle fonctions propres d'un opérateur  $A$  les solutions de l'équation  $AU = \lambda U$ . Lorsque l'on s'intéresse à la réponse d'une enceinte à une fréquence donnée, l'opérateur qui définit le problème est le couple « laplacien-conditions aux limites ». Dans la mesure où les conditions aux limites peuvent dépendre de la fréquence, les modes propres peuvent aussi dépendre de la fréquence.

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p(M) = f(M) & M \in \Omega \\ \alpha \frac{\partial p(M)}{\partial n} + \beta p(M) = 0 & M \in \sigma \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $\sigma$  est supposée  $C^\infty$  par morceaux.

Alors on a le théorème suivant :

### Théorème 2. 1

- a) Il existe une suite dénombrable  $k_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) de nombres d'ondes tels que le système homogène (2.9) possède des solutions non identiquement nulles. A ces nombres d'onde, dits *nombres d'onde propres*, correspondent des fréquences  $f_n$  dites *fréquences propres*.
- b) A chaque nombre d'onde  $k_n$  correspond un nombre fini  $N_n$  de solutions  $\psi_{nm}$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$  ;  $m = 1, 2, \dots, N_n < \infty$ ), du problème homogène, qui sont linéairement indépendantes. Ces solutions sont appelées *modes propres* de l'opérateur de Helmholtz pour la condition aux limites (2.8). Le nombre  $N_n$  de modes correspondant à  $k_n$  est appelé *ordre de multiplicité* de ce nombre d'onde.
- c) Les nombres d'onde propres  $k_n$  sont réels si  $\alpha\beta$  est réel ; si  $\alpha\beta$  est de partie imaginaire non nulle, les  $k_n$  sont également de partie imaginaire non nulle.
- d) Si  $k$  est égal à l'un des nombres d'onde propres, le système non homogène (2.12) ne possède pas de solution. Si  $k$  n'est pas égal à l'un des  $k_n$ , la solution  $p(M)$  existe et est unique, quel que soit  $f(M)$ .

Lorsque l'on considère le problème aux limites de Robin, problème où la condition aux limites dépend de la fréquence et prend en compte les pertes d'énergie, ce qui correspond de façon plus tangible à la réalité, on désigne plus volontiers les modes propres et leurs fréquences associées par *modes de résonances* (ou *modes résonants*) et *fréquences de résonances*. Deux modes de résonances, correspondant à des fréquences de résonances différentes, vérifient des conditions aux limites différentes (puisqu'elles dépendent de la fréquence). Ainsi dans la pratique, les dénominations *modes propres* et *fréquences propres* sont plutôt employées pour les problèmes académiques aux limites indépendantes de la fréquence.

Les solutions du problème homogène de Robin (donc les *modes résonants*) correspondent à des mouvements du fluide sans apport d'énergie extérieure : on parle donc aussi d'*oscillations libres*. Le régime a-causal est bien sûr une vue d'esprit mais il n'est pas sans réalité physique. Il est bien connu qu'une note chantée à proximité d'une table de piano a pour effet de faire vibrer la corde correspondante : bien que l'apport d'énergie mécanique soit extrêmement faible, le son rendu par la corde est tout à fait audible.

## 2.2 Enceintes parallélépipédiques

Nous nous proposons d'appliquer les notions développées précédemment en calculant les modes propres et modes résonants d'un domaine  $\Omega$  rectangulaire défini en coordonnées cartésiennes par les inégalités suivantes :

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2}.$$

### 2.2.1 Fréquences et modes propres pour le problème de Neumann

Le système à résoudre est :

$$\left[ \begin{array}{l} (\Delta + k^2)p(x, y, z) = 0, \quad X \in \left] -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2} \right[ , \quad Y \in \left] -\frac{b}{2}, +\frac{b}{2} \right[ , \quad Z \in \left] -\frac{c}{2}, +\frac{c}{2} \right[ \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} \left( +\frac{a}{2}, y, z \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} \left( x, +\frac{b}{2}, z \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} \left( x, y, +\frac{c}{2} \right) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} \left( -\frac{a}{2}, y, z \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} \left( x, -\frac{b}{2}, z \right) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} \left( x, y, -\frac{c}{2} \right) = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

La résolution du système est assez simple, notamment en cherchant les solutions sous la forme :

$$p(x, y, z) = p_x(x) p_y(y) p_z(z).$$

On montre alors (Théorème 2.1) qu'il existe une suite dénombrable de nombres d'onde  $k_{rst}$  tels que le système possède une solution non nulle. Ces nombres d'ondes propres et leurs modes propres sont donnés par :

$$\left[ \begin{array}{l} k_{rst} = \pi \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2}} \\ p_{rst}(x, y, z) = A_{rst} \cos \frac{r\pi(x-a/2)}{a} \cos \frac{s\pi(y-b/2)}{b} \cos \frac{t\pi(z-c/2)}{c} \\ (r, s, t) \in \mathbb{IN}^3 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$A_{rst}$  est une constante arbitraire réelle ou complexe que l'on peut éventuellement fixer égale à  $\frac{1}{\sqrt{8abc}}$  pour imposer aux modes d'être de norme unitaire (norme  $L^2$ ).

### 2.2.2 Fréquences et modes de résonance pour le problème de Robin

Le système à résoudre est :

$$\left[ \begin{array}{l}
 (\Delta + k^2)p(x, y, z) = 0, \quad x \in \left] -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right[ , \quad y \in \left] -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right[ , \quad z \in \left] -\frac{c}{2}, \frac{c}{2} \right[ \\
 + \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, z) - jk\alpha p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } x = +\frac{a}{2} \\
 - \frac{\partial p}{\partial x}(x, y, z) - jk\alpha p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } x = -\frac{a}{2} \\
 + \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, z) - jk\beta p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } y = +\frac{b}{2} \\
 - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, z) - jk\beta p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } y = -\frac{b}{2} \\
 + \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z) - jk\gamma p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } z = +\frac{c}{2} \\
 - \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z) - jk\gamma p(x, y, z) = 0, \quad \text{en } z = -\frac{c}{2}
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont les inverses des impédances normales spécifiques de chacun des murs. Ils sont supposés indépendants de la fréquence (et donc de  $k$ ).

Bien que le système admette des solutions (d'après le théorème 2.1), on ne sait pas le résoudre analytiquement. On admet qu'il existe bien une suite dénombrable de nombres propres  $k_{rst}$  (complexes) solutions du système :

$$\left[ \begin{array}{l}
 k_{rst}^2 = \xi_r^2 + \eta_s^2 + \zeta_t^2 \\
 e^{2j\xi_r a} = \left( \frac{\xi_r + k_{rst} \alpha}{\xi_r - k_{rst} \alpha} \right)^2 \\
 e^{2j\eta_s b} = \left( \frac{\eta_s + k_{rst} \beta}{\eta_s - k_{rst} \beta} \right)^2 \\
 e^{2j\zeta_t c} = \left( \frac{\zeta_t + k_{rst} \gamma}{\zeta_t - k_{rst} \gamma} \right)^2 \\
 (r, s, t) \in \mathbb{IN}^3
 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Le mode de résonance correspondant est donné par :

$$p_{rst}(x, y, z) = A_{rst} \left[ e^{j\xi_r(x-a/2)} + \left( \frac{\xi_r - k_{rst}\alpha}{\xi_r + k_{rst}\alpha} \right) e^{-j\xi_r(x-a/2)} \right] * \left[ e^{j\eta_s(y-b/2)} + \left( \frac{\eta_s - k_{rst}\beta}{\eta_s + k_{rst}\beta} \right) e^{-j\eta_s(y-b/2)} \right] \left[ e^{j\zeta_t(z-c/2)} + \left( \frac{\zeta_t - k_{rst}\gamma}{\zeta_t + k_{rst}\gamma} \right) e^{-j\zeta_t(z-c/2)} \right] \quad (2.14)$$

Nous verrons dans le paragraphe 2.3 quel est le rôle de ces modes résonants lors de l'extinction du son dans une salle.

### 2.2.3 Résolution de systèmes non homogènes par développement en série

On peut montrer que la série des modes propres trouvés pour les problèmes de Neumann ou Robin constitue une base de l'espace de Hilbert des fonctions définies sur  $\Omega$  de module carré sommable et vérifiant la condition aux limites sur la frontière  $\sigma$ . La connaissance des modes propres peut donc permettre de résoudre le système non homogène (soumis à l'excitation de sources) par développement de la solution et des fonctions sources et par identification termes à termes des coefficients du développement.

## 2.3 Modes résonants et durée de réverbération

Nous avons vu que l'expression des fréquences de résonances et des modes résonants, même pour une salle parallélépipédique, est difficile à obtenir. Cependant on montre que pour n'importe quelle salle il existe une suite

$$\omega_m = \Omega_m + j\tau_m, \quad \tau_m > 0 \quad (2.15)$$

de pulsations de résonance, à chacune desquelles correspond un mode de résonance  $p_m(M)$  solution de l'équation de Helmholtz accompagnée de conditions aux limites de type dissipatif.  $\Omega_m$  correspond à une pulsation réelle de résonance et dépend en général principalement des caractéristiques géométriques de la salle.  $\tau_m$  correspond à un taux d'amortissement du mode résonant et dépend en général principalement des coefficients d'absorption des parois.

Considérons une salle  $\Omega$  quelconque initialement excitée par une source monochromatique de pulsation  $\omega_0$  dont le mouvement s'arrête à l'instant  $t=0$ . On montre alors que la pression acoustique décroît temporellement suivant la loi :

$$p(M, t) = Y(t) \sum_m \frac{a_m p_m(M)}{j(\omega_0 - \Omega_m) - \tau_m} e^{-j\Omega_m t} e^{-\tau_m t} \quad (2.16)$$

où les coefficients  $a_m$  dépendent de la fonction représentant la source.

Supposons que  $\omega_0$  soit égale à l'une des pulsations de résonance  $\Omega_q$ . Supposons aussi que les parois de la salle soient modérément absorbantes de sorte que les taux d'amortissement  $\tau_m$  soient très petits. Alors  $p(M, t)$  est bien approchée par :

$$p(M, t) \approx -Y(t) \frac{a_q p_q(M)}{\tau_q} e^{-j\omega_0 t} e^{-\tau_q t}.$$

L'amplitude de la pression décroît alors globalement selon une loi exponentielle et on définit alors la *durée de réverbération*  $T_r$  comme étant la durée nécessaire pour que le niveau de pression acoustique baisse de 60 dB ;  $T_r$  est donnée par :

$$60 = 20 \log_{10} e^{\tau_q T_r},$$

soit :

$$T_r = \frac{6,91}{\tau_q} \quad (2.17)$$

Dans le cas plus général où un mode ne prédomine pas sur les autres, la notion de durée de réverbération est moins évidente, dans la mesure où chaque mode s'amortit différemment.

Cependant, lorsque l'expérience montre que globalement le niveau sonore de la salle décroît selon une loi à peu près linéaire (c'est à dire que l'amplitude de la pression acoustique décroît de façon exponentielle), on peut relier la pente de la décroissance aux propriétés acoustiques des parois des salles. Ainsi si les murs, de surface totale  $S$ , ont des propriétés acoustiques à peu près identiques et sont caractérisés par un coefficient d'absorption moyen  $\bar{\alpha}$  alors la formule de Sabine (basée sur des analogies optique/acoustique) permet de calculer un temps de réverbération moyen :

$$T_r = 0,16 \frac{V}{S\bar{\alpha}} \quad (2.18)$$

Il arrive que l'on suppose que tous les modes ont le même taux d'amortissement  $\tau_m = \tau_0$  [3]. La formule de Sabine permet alors de calculer un temps de réverbération moyen puis on peut estimer  $\tau_0$  par :

$$\tau_0 = \frac{6,91}{T_r} \quad (2.19)$$

La connaissance de la série  $\omega_m$  et des modes résonants  $p_m(M)$  associés permet d'évaluer la fonction de transfert entre une source monochromatique et un récepteur présents dans la salle : si une source monochromatique émet en un point  $S$  de  $\Omega$  alors la fonction de transfert entre l'émetteur en  $S$  et un récepteur placé en  $R$  est ([3]):

$$H(\omega) = C_1 \sum_m \frac{p_m(S)p_m(R)}{\omega^2 - \omega_m^2} \quad (2.20)$$

La connaissance a priori de cette expression est à la base des méthodes d'extrapolation que nous présenterons dans le prochain chapitre.

## 2.4 Champ acoustique aux fréquences élevées

Par « fréquences élevées », il faut entendre fréquences pour lesquelles la longueur d'onde est relativement petite par rapport aux dimensions de la salle, ce qui peut être exprimé, par exemple, par la relation  $\lambda < \frac{1}{3}V^{1/3}$ . A ces fréquences, l'expression approchée du nombre de modes résonants compris entre les fréquences  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  est de la forme [9] :

$$dN = \frac{4\pi\nu^2V}{c_0^3} d\nu \quad (2.21)$$

En conséquence, à de hautes bandes de fréquences, le nombre de modes excités devient très important et bien que la théorie modale présentée précédemment soit toujours celle qui fasse autorité physiquement, elle devient inutilisable dans la pratique. La réponse fréquentielle en amplitude d'une salle à basse fréquences est du type présenté sur la figure 2.1 :

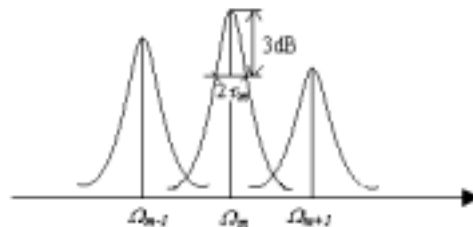


Figure 2.1 - Réponse en amplitude de quelques modes en basse fréquences

En revanche, à hautes fréquences les réponses en amplitude des modes se chevauchent, ce qui donne une réponse globale beaucoup plus uniforme dans la mesure où les modes ne sont pas vraiment plus prépondérants les uns que les autres (figure 2.2) :

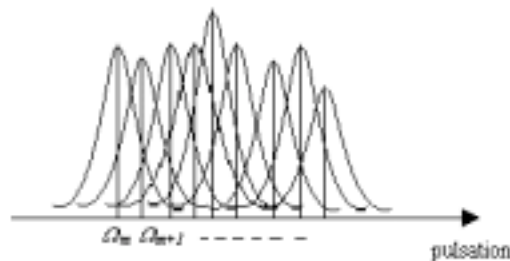


Figure 2.2 - Réponse en amplitude de quelques modes à hautes fréquences

L'influence des modes sera certes différente d'une position de réception à une autre mais dans la mesure où la réponse fréquentielle est aussi « diffuse » d'un endroit à l'autre le champ de pression peut-être considéré comme uniforme dans la salle. On parle alors de « champ acoustique diffus ». On le caractérise par la moyenne sur tout l'espace de la salle du carré de la valeur efficace de la pression  $p_{rms}(M,t)$ , qui correspond au résultat d'une mesure microphonique sur une plage de temps  $T$  centrée sur un instant  $t$ :

$$p_{rms}^2(M,t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} |p(M,t)|^2 dt \quad (2.23)$$

$$\langle p_{rms}^2 \rangle_V(t) = \frac{1}{V} \iiint_V p_{rms}^2(M,t) dV \quad (2.22)$$

En régime stationnaire, la valeur efficace de la pression  $p_{rms}(M,t)$  est calculée sur une période et ne dépend plus du temps. Ainsi, en régime harmonique, si le champ de pression est de la forme  $p(M,t) = \text{Re}\{p(M)e^{j\omega t}\}$  alors  $p_{rms}(M) = \frac{|p(M)|}{\sqrt{2}}$ .

En régime transitoire, le comportement du champ de pression peut être comparé à un système du premier ordre. Nous avons vu au paragraphe précédent que l'extinction du champ sonore après arrêt des sources suit globalement une loi exponentielle. Ceci est encore plus vrai à hautes fréquences où un nombre considérable de modes est excité et où le champ de pression est quasiment uniforme.

Ainsi, des considérations énergétiques macroscopiques permettent d'aboutir à une équation de comportement de la moyenne spatiale du carré de la pression efficace. Supposons qu'à l'instant  $t=0$  une source commence d'émettre avec une puissance acoustique stationnaire de valeur efficace  $W$  (flux énergétique efficace traversant la surface extérieure de la source rapporté à une unité de temps), la pression vérifie alors l'équation [1] :

$$\frac{d}{dt} \langle p_{rms}^2 \rangle_V + \frac{S \bar{\alpha}(f)}{4V} \langle p_{rms}^2 \rangle_V = \frac{2\rho_0 c_0^2}{V} W \quad (2.23)$$

où  $S$  désigne la surface des murs. Cette équation définit un système du premier ordre dont les constantes de temps et de gain dépendent de la fréquence puisque le coefficient moyen d'absorption des parois  $\bar{\alpha}(f)$  varie avec la fréquence (cf équation 2.7).

Remarque : La constante de temps du système  $\tau = \frac{4V}{S\bar{\alpha}c_0}$  permet de retrouver la formule de

Sabine (2.18) sachant que l'intensité acoustique décroît exponentiellement suivant le carré de la pression (donc avec une constante de temps  $\tau/2$ ).



### 3. Fonctions de transfert de salles

Considérons une salle de géométrie quelconque au sein de laquelle on aura disposé une source sonore et un récepteur (Figure 3.1). La salle peut être considérée comme un système acoustique dont l'entrée serait le signal émis par la source sonore et la sortie le signal enregistré par le récepteur. On peut donc caractériser ce système (linéaire) par une fonction de transfert. Cette fonction de transfert dépend entièrement des positions de la source et du récepteur.

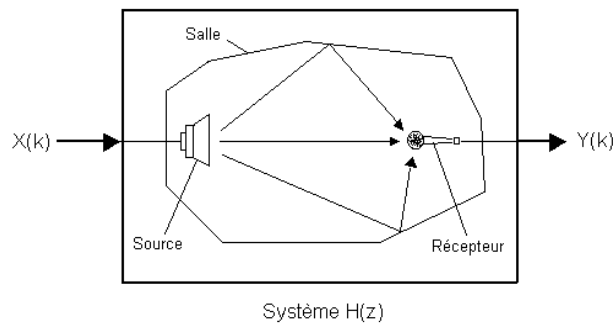


Figure 3.1 - Fonction de transfert entre une source et un récepteur

Supposons que nous voulions caractériser l'acoustique d'une salle par une série de fonctions de transfert entre une source fixe et  $M$  récepteurs situés à différentes positions déterminées (Figure 3.2). Plusieurs types de modèles s'offrent alors à nous. Les plus classiques sont de type MA (séquence de pondération) et ARMA. Ces modèles peuvent être déterminés directement d'après les signaux enregistrés grâce aux méthodes classiques d'identification et sans pré-requis acoustique, mais les méthodes conduisent à des ordres élevés et à de nombreux coefficients. Les fonctions de transfert déterminées étant logiquement vouées à être programmées dans des systèmes automatiques de régulation (comme par exemple des annulateurs d'écho ou des égaliseurs), il convient de minimiser le nombre de coefficients nécessaire à modéliser l'acoustique de la salle afin de minimiser la place mémoire et surtout les temps de calcul. C'est pourquoi nous nous étendrons d'avantage sur une méthode d'identification plus efficace fournissant aussi des modèles ARMA mais s'appuyant sur certains principes acoustiques qui ont été développés précédemment. Le modèle résultant prendra le nom de « modèle ARMA à pôles acoustiques communs » et il a été développé par **Y.Haneda, S.Makino et Y.Kaneda** du laboratoire *NNT Human Interface Laboratories* au Japon [4-6].

Notons que le fait de choisir une seule source n'est pas restrictif : on peut aussi imaginer de vouloir caractériser l'acoustique d'une salle par l'identification des fonctions de transfert entre plusieurs sources et plusieurs récepteurs, les méthodes proposées restent applicables.

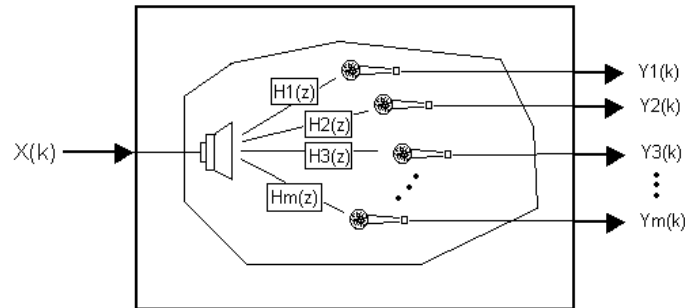


Figure 3.2 - Fonctions de transfert correspondant à différentes positions des récepteurs

### 3.1 Identification par modèle MA (séquence de pondération)

Ce type d'identification consiste à trouver un modèle entre chaque récepteur et la source de la forme :

$$H^j(z) = \sum_{i=0}^Q b_i^j z^{-i} \quad (3.1)$$

$j$  désigne le  $j^{\text{ème}}$  récepteur auquel est associé la séquence de pondération  $\{b_i^j\}$ .  $Q$  est l'ordre du modèle, supposé ou non identique pour chaque récepteur. La séquence de pondération correspond à la réponse impulsionnelle du système et peut être implémentée par un filtre FIR. Ainsi la caractérisation acoustique de la salle par une série de  $M$  fonctions de transfert associés à une source et  $M$  récepteurs requiert  $M \times (Q + 1)$  coefficients.

Ce modèle n'est pas d'une utilisation très performante dans la mesure où il requiert un grand nombre de coefficients pour des salles ayant un temps de réverbération élevé, surtout si la fréquence d'échantillonnage est elle aussi importante. Ainsi à titre d'exemple, une salle caractérisé par un temps de réverbération de l'ordre de 500 ms (ce qui n'est pas extraordinaire) induit un modèle MA de l'ordre de 4000 coefficients (à une fréquence d'échantillonnage de 8 kHz) pour satisfaire une erreur de modélisation de  $-60$  dB. Un tel nombre de coefficients appliqué à des systèmes de régulation implique de larges zones mémoire et de longs temps de calcul.

### 3.2 Identification par modèle ARMA

Le bien connu modèle ARMA consiste à modéliser les transferts source-émetteurs sous la forme :

$$H^j(z) = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i^j z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^P a_i^j z^{-i}} \quad (3.2)$$

Ce type de modèle est plus adapté aux caractéristiques physiques des salles : les pôles de la fonction de transfert représente des modes résonants et les zéros des retards ou des anti-résonances (nœuds, voir Figure 3.3). Pour des performances comparables à basses fréquences ce modèle nécessite généralement moins de coefficients qu'un modèle MA. Cependant à des hautes fréquences le modèle MA peut s'avérer être plus efficace et c'est pourquoi certains simulateurs acoustiques utilisent des modèles ARMA aux basses bandes de fréquences et des modèles MA aux hautes bandes de fréquences.

Les estimations successives des fonctions de transfert entre chaque récepteur et la source conduit à l'estimation au total de  $M \times (P + Q + 1)$  coefficients.

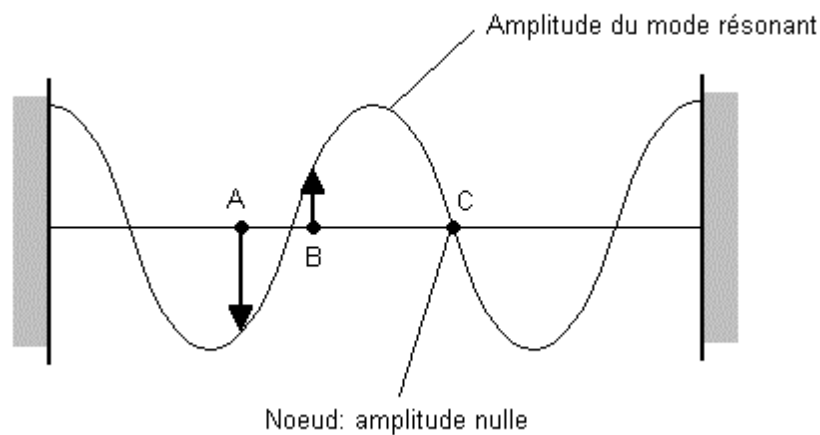


Figure 3.3 - Mode résonant d'une pièce unidimensionnelle

### 3.3 Modèles ARMA à pôles acoustiques communs [4-6]

Les pôles d'un modèle ARMA correspondent aux modes de résonance du système identifié, ainsi pour une salle, ces pôles doivent être renvoyés aux pulsations complexes de résonance présentées au paragraphe 2.3, dont les parties réelles sont les pulsations réelles des modes résonants et dont les parties imaginaires sont les taux d'amortissement de ces modes. Or ces pulsations complexes (que nous appellerons dorénavant *pôles acoustiques*) ne dépendent pas de l'espace et sont identiques en tout point. Cela signifie que les dénominateurs des différentes fonctions de transfert identifiées ne dépendent en fait pas de l'espace et donc qu'ils sont identiques.

Le transfert entre la source et le récepteur  $j$  peut donc être modélisé sous la forme :

$$H^j(z) = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i^j z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}} \quad (3.3)$$

où la série  $\{a_i\}$  ne dépend plus de l'espace, et donc du récepteur. Cela ne fait donc plus que  $P + M \times (Q + 1)$  coefficients à identifier.

La caractérisation acoustique de la salle va donc passer par l'identification commune de la série  $\{a_i\}$  et des différentes séries  $\{b_i^j\}$  propres chacune à un récepteur. Y.Haneda, S.Makino et Y.Kaneda proposent deux méthodes d'estimation de ces séries, ce sont ces méthodes qui seront présentées dans les deux paragraphes suivants.

D'après l'équation (2.21) le nombre de modes résonants d'une salle quelconque excités sur une bande de fréquence  $[0; f_c]$  est :

$$n_p = \frac{4\pi}{3} V \left( \frac{f_c}{c_0} \right)^3 \quad (3.4)$$

où  $V$  désigne le volume de la salle. Il s'ensuit que sur de larges bandes de fréquences utiles le nombre de modes résonants excités croît très rapidement, ce qui a pour conséquence d'augmenter semblablement le nombre de pôles complexes intervenant au dénominateur des fonctions de transfert (égal au double des modes résonants i.e  $2 \times n_p$  - deux pôles conjugués par résonance). Donc à hautes fréquences l'ordre des fonctions de transfert peut devenir important et c'est pourquoi ce modèle est plus performant à basses fréquences.

### 3.4 Estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés d'équation [4]

Contrairement à ce que l'on pourrait supposer tous les pôles acoustiques (ou tout du moins la série  $\{a_i\}$ ) ne peuvent être identifiés correctement sur la base du seul enregistrement d'un unique récepteur, bien que les pôles acoustiques ne dépendent pas de la position des récepteurs. En effet, lors de l'identification de fonctions de transfert, les zéros identifiés (ou les coefficients du numérateur) ont une influence sur les pôles et peuvent parfois « annuler » certains de ces pôles. Par exemple, si le récepteur se situe sur un nœud d'un mode résonant (par exemple au point  $C$  de la Figure 3.3), le pôle acoustique associé à ce mode ne sera pas détecté. Il convient donc de faire une estimation de la série  $\{a_i\}$  sur différents enregistrements de plusieurs récepteurs situés à différentes positions.

Soit  $\{h^j(k)\}_k$  la réponse impulsionnelle mesurée par le récepteur  $j$  (donc la réponse à une impulsion Dirac  $\delta(k)$  de la source).

Le principe de l'identification par moindres carrés d'équation (ou encore moindres carrés ordinaires) est rappelé par le diagramme présenté sur la Figure 3.4 [8] ( $\theta$  désigne le vecteur composé des coefficients  $a_i$  et  $b_j$  estimés).

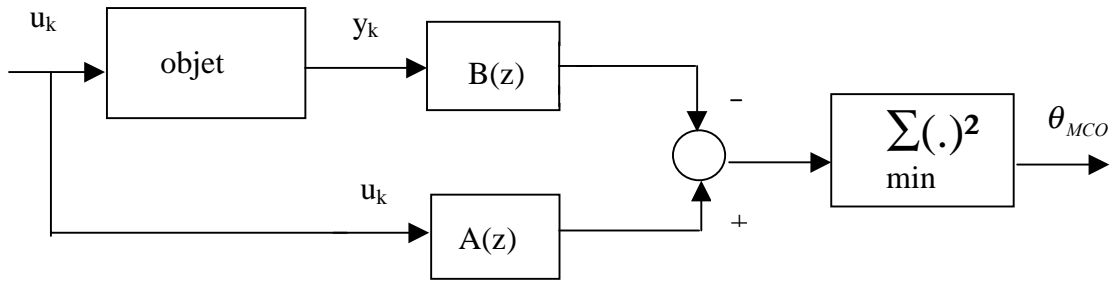


Figure 3.4 – Diagramme des moindres carrés ordinaires

On définit ainsi l'erreur de modélisation par moindres carrés d'équation du  $j^{ème}$  transfert par :

$$\varepsilon_{eq}^j(k) = h_k^j + \sum_{i=1}^P a_i h^j(k-i) - \sum_{i=0}^Q b_i^j \delta(k-i) \quad (3.5)$$

L'ordre des réponses impulsionnelles ayant été supposé être  $N$ ,  $\varepsilon_k^j$  est nul pour  $k > N+P$ . Les coefficients des fonctions de transferts estimés par la méthode sont ceux qui minimisent le critère :

$$J_{eq} = \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N+P} \varepsilon_{eq}^j(k)^2 \quad (3.6)$$

On rappelle que  $M$  est le nombre de récepteurs,  $P$  l'ordre du dénominateur commun et  $N$  est l'ordre des réponses impulsionnelles.

L'équation (3.5), pour  $j = 1, \dots, M$  et  $k = 0, \dots, N+P$  peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} - \mathbf{A}\theta$$

avec :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{eq}^j(0) \\ \varepsilon_{eq}^j(1) \\ \vdots \\ \varepsilon_{eq}^j(N+P) \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M \end{bmatrix}} \right\} N+P+1 \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_j = \begin{bmatrix} h^j(0) \\ h^j(1) \\ \vdots \\ h^j(N+P) \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M \end{bmatrix}} \right\} N+P+1$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^M \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}^j = \begin{bmatrix} b_0^j \\ b_1^j \\ \vdots \\ b_Q^j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{D} & & \\ & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} & \ddots \\ & & & & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{M(N+P+1)\} \times \{P+M(Q+1)\} \quad \{N+P+1\} \times \{Q+1\}$$

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h^j(0) & 0 & \dots & 0 \\ h^j(1) & h^j(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^j(P-1) & h^j(P-2) & \dots & h^j(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^j(N) & h^j(N-1) & \dots & h^j(N-P+1) \\ 0 & h^j(N) & \dots & h^j(N-P+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h^j(N) \end{bmatrix}$$

$$\{N+P+1\} \times \{P\}$$

On a posé  $h^j(k) = 0$  pour  $k = -P, \dots, -1$ .

Le critère à minimiser  $J_{eq}$  défini par l'équation (3.6) peut alors s'écrire sous la forme :

$$J_{eq} = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

où  $^T$  désigne l'opérateur de transposition. L'argument du minimum de ce critère est donné par :

$$\boxed{\theta_{MCO} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{h}} \quad (3.7)$$

La méthode a l'avantage de proposer une solution algébrique mais rien ne garantit la stabilité des pôles identifiés (sauf dans le cas  $Q = 0$  où on peut démontrer la stabilité de la fonction de transfert estimée).

### 3.5 Estimation des pôles acoustiques par moyenne de fonction de transfert [4]

Lorsque  $P$  et  $Q$  sont choisis grands, les calculs qu'imposent la précédente méthode peuvent devenir extrêmement longs. Dans un pareil cas on peut commencer par identifier l'une après l'autre les fonctions de transfert entre la source et chacun des signaux (par exemple par la méthode des moindres carrés ordinaires en minimisant pour chaque récepteur le critère  $J_{eq}^j = \sum_{k=0}^{N+P} \varepsilon_{eq}^j(k)^2$ ). On obtient donc pour chaque récepteur  $j$  deux jeux de coefficients :  $\{a_i^j\}$  et  $\{b_i^j\}$ . La méthode consiste alors à moyenner les séries  $\{a_i^j\}$  obtenues et donc à fixer :

$$a_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M a_i^j \quad (i = 1, \dots, P) \quad (3.8)$$

La méthode ne repose sur aucun fondement théorique solide et la stabilité des pôles estimés n'est pas garantie.

### 3.6 Choix de l'ordre des modèles

Le choix de l'ordre d'un modèle est toujours une étape délicate et peu facile. On peut choisir d'utiliser les critères Akaike [8]. On peut aussi imposer une exactitude relative des modèles identifiés en imposant une valeur à un critère de précision tel que :

$$J_{out} = \sum_{j=1}^M \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{out}^j(k)^2}{\sum_{k=0}^N h^j(k)^2}$$

où  $\{\varepsilon_{out}^j(k)\}_k$  désigne l'erreur de sortie objet / modèle ( $\varepsilon_{out}^j(k) = h^j(k) - \hat{h}^j(k)$ ).

L'équation théorique (3.4) permet cependant de connaître l'ordre exact du nombre de pôles acoustiques excités sur la bande de fréquence utile et donc de connaître l'ordre théorique du dénominateur des fonctions de transfert. En revanche nous ne possédons pas d'information théorique concernant l'ordre des numérateurs.

Comme nous l'avons dit précédemment l'ordre des pôles acoustiques augmente proportionnellement au cube de la fréquence maximum de la bande utile. A des hautes fréquences, les modèles prennent donc des ordres démesurés si l'on respecte l'ordre théorique du dénominateur. Ainsi dans la pratique, lorsque la bande de fréquence utile prend des valeurs trop grandes, on pourra choisir volontairement un ordre de dénominateur inférieur à l'ordre théorique. Seuls les modes résonnants avec les plus grands taux d'amortissement seront alors représentés. Cette approximation peut se révéler être satisfaisante.

### 3.7 Interpolation et extrapolation de fonctions de transfert [7]

Y.Haneda et Y.Kaneda proposent une méthode permettant de déduire une fonction de transfert inconnue entre une source et un récepteur d'après la connaissance des fonctions de transfert entre une source et des récepteurs donnés (interpolation et extrapolation).

La fonction de transfert théorique discrète entre une source et un récepteur équivalente à l'expression du transfert (2.20) en continu est de la forme:

$$H(z) = \sum_m \left( \frac{A_m(S, R)}{1 - pa_m z^{-1}} + \frac{A_m(S, R)^*}{1 - pa_m^* z^{-1}} \right) \quad (3.10)$$

avec  $A_m(S, R) = \frac{1}{2} C_2 p_m(S) p_m(R)$

\* désigne l'opérateur de conjugaison,  $\{ pa_m \}$  la série des pôles acoustiques en discret,  $p_m$  le  $m^{\text{ème}}$  mode résonnant,  $C_2$  une constante de gain et  $R$  et  $S$  sont les positions respectives du récepteur et de la source. Les coefficients  $\{ A_m(S, R) \}$  sont les résidus du développement ; ce sont ces seuls coefficient qui dépendent des positions  $S$  et  $R$  de la source et du récepteur.

Supposons que nous ayons identifié la série des pôles acoustiques d'une salle et un ensemble de fonctions de transfert entre différents récepteurs et une source sous forme de modèles ARMA à pôles communs. Après factorisation du dénominateur on dispose d'un jeu de fonctions de transferts du type :

$$H^j(z) = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i^j z^{-i}}{\prod_{i=1}^P (1 - pc_i z^{-1})}$$

où  $\{ pc_i \}$  désigne la série des pôles identifiés jusqu'à l'ordre  $P$ . La décomposition de  $H^j(z)$  en fraction élémentaires peut s'écrire :

$$H^j(z) = \sum_{i=1}^P \left( \frac{A_i(S, R_j)}{1 - pc_i z^{-1}} \right) \quad (3.11)$$

avec  $A_i(S, R_j) = (1 - pc_i z^{-1}) \frac{\sum_{i=0}^Q b_i^j z^{-i}}{\prod_{i=1}^P (1 - pc_i z^{-1})} \Big|_{z = pc_i}$

où  $S$  et  $R_j$  sont les positions respectives de la source et du récepteur  $j$ .



D'après l'équation (3.10), à source fixée, les variations des résidus  $A_i(S, R_j)$  dues à un changement de position de récepteur ne dépendent à priori que de la variation du mode résonant correspondant et de manière proportionnelle. Ainsi si l'on connaît la forme des modes résonants on peut effectuer une interpolation ou extrapolation des résidus, en déduire les valeurs à une autre position de réception et finalement reconstituer la fonction de transfert entre la source et cette nouvelle position de réception.

#### Application à une salle parallélépipédique :

Nous avons vu dans les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2 que la théorie permet de déterminer explicitement la forme des modes résonants. Ces modes résonants se décomposent en un produit de trois fonctions à variables séparées. Ainsi l'expression du  $m^{\text{ème}}$  mode résonant (associé à un triplet d'entiers  $(r, s, t)$ ) en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère cartésien centré utilisé dans les paragraphes cités est de la forme :

$$p_m(M) = p_{m_x}(x)p_{m_y}(y)p_{m_z}(z)$$

Si les murs sont supposés non absorbants,  $p_u(u)$  (où  $u$  désigne  $x, y$  ou  $z$ ) est de la forme (d'après (2.11)) :

$$\boxed{p_{m_u}(u) = A_u \cos(k_{m_u} u)} \quad (3.12)$$

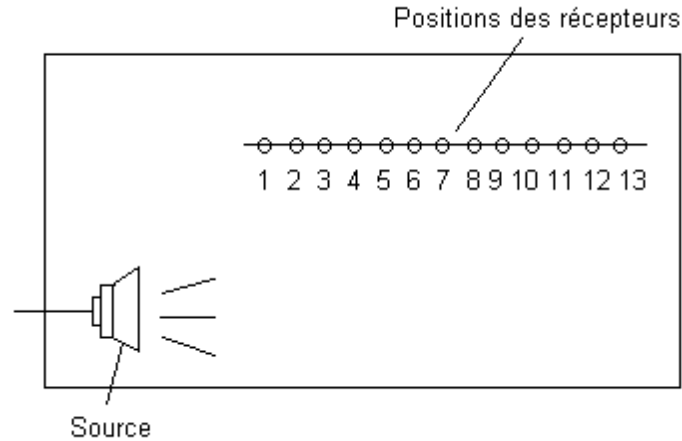
où  $k_{m_u}$  désigne une constante réelle et  $A_u$  une constante réelle ou complexe.

Si les murs sont supposés absorbants,  $p_u(u)$  est de la forme (d'après (2.14)) :

$$\boxed{p_{m_u}(u) = A_{u1} e^{-jk_{m_u} u} + A_{u2} e^{jk_{m_u} u}} \quad (3.13)$$

où  $A_{u1}$ ,  $A_{u2}$  et  $k_{m_u}$  désignent des constantes complexes.

Supposons qu'une source sonore fixe placée en  $S$  émette un signal enregistré par un récepteur que l'on déplace à des positions successives sur un axe  $D$  parallèle à l'un des axes  $u$  du repère cartésien (Figure 3.4).



**Figure 3.4 – Interpolation et extrapolation de FT sur un axe horizontal**

D'après l'équation (3.10) la série de résidus  $\{ A_m(S,R) \}_m$  des FT entre la source et les différentes positions de réception sur l'axe ne varie qu'en fonction de la coordonnée  $u$  :

$$A_m(S, R) = \frac{1}{2} C_2 p_m(S) p_m(R) = C_3 p_{mu}(u) = A_m(S, u) \quad (3.14)$$

Ainsi si les murs sont non absorbants le  $m^{\text{ème}}$  résidu de la FT entre la source et un récepteur placé sur l'axe  $D$  à l'ordonnée  $u$  est de la forme :

$$A_m(S, u) = B_m \cos(k_{mu} u) \quad (3.15)$$

où  $B_m$  est une constante complexe.

Si les murs sont absorbants le  $m^{\text{ème}}$  résidu de la FT entre la source et un récepteur placé sur l'axe  $D$  à l'ordonnée  $u$  est de la forme :

$$A_m(S, u) = B_{m1} e^{-jk_{mu} u} + B_{m2} e^{jk_{mu} u} \quad (3.16)$$

où  $B_{m1}$  et  $B_{m2}$  sont des constantes complexes.

En déterminant suivant le cas les coefficients  $B_m$  ou  $B_{m1}$  et  $B_{m2}$  à partir de quelques fonctions de transfert entre la source et diverses positions du récepteur sur l'axe  $D$  on est en mesure de connaître la loi d'évolution des résidus sur tout l'axe et d'en déduire les fonctions de transfert entre la source et n'importe quel point de l'axe.

Si on estime la fonction de transfert entre la source et un récepteur situé entre des récepteurs où les fonctions de transfert sont connues, on parle d'interpolation. Si on estime la fonction de transfert entre la source et un récepteur situé sur l'axe après des récepteurs où les fonctions de transfert sont connues on parle d'extrapolation.

#### 4. Une méthode originale : la simulation par bandes de fréquences

L'inconvénient de l'identification de fonctions de transfert par les méthodes Haneda, Makino, Kaneda est de nécessiter un trop grand nombre de coefficients sur de hautes bandes de fréquence, à cause du nombre élevé de modes sollicités.

L'approche que nous proposons est de segmenter l'axe des fréquences et d'identifier un modèle paramétrique sur chaque segment. Ainsi la simulation de la réponse d'une salle en un point donné de réception à une excitation sonore consisterait à (figure 4.1) :

- 1) Décomposer le signal d'entrée en ses composantes fréquentielles,
- 2) Appliquer à chaque composante le modèle adapté à la bande de fréquence concernée,
- 3) Recomposer la réponse de la salle à partir des composantes simulées.

Conformément aux notions d'acoustique des salles présentées précédemment :

- A basses fréquences la théorie modale fait autorité et, rigoureusement, des modèles d'ordre égal au double du nombre de pôles excités sur la bande seront nécessaires.
- A hautes fréquences, en présence d'un champ acoustique diffus, un modèle de premier ordre appliqué à la pression démodulée  $\langle p_{rms}^2 \rangle_V$  sera envisagé.

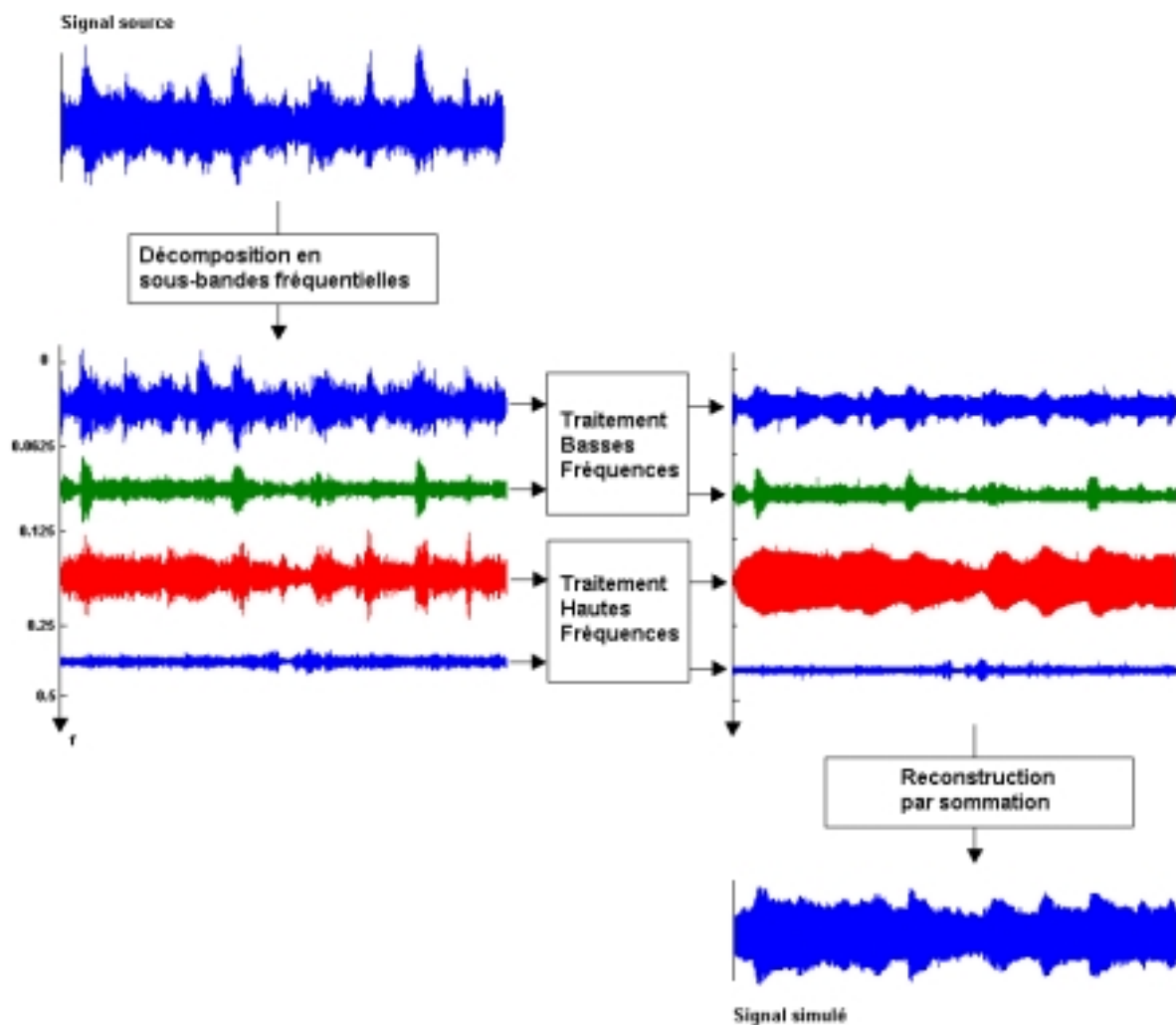


Figure 4.1 – Principe de la méthode de simulation par bandes de fréquences

## 4.1 Décomposition de signaux en sous-bandes fréquentielles [10]

L'objectif est de décomposer un signal en une série de signaux de sous-bandes fréquentielles, c'est-à-dire en une série de signaux correspondant chacun à une portion du contenu fréquentiel du signal initial. La méthode de décomposition doit permettre une reconstruction parfaite, c'est-à-dire sans perte ni redondance d'information.

La méthode présentée ici est basée sur la décomposition d'un signal en paquets de Malvar fréquentiels (PMF), méthode duale de la décomposition en paquets de Malvar temporels qui consiste à partitionner un signal en segments (temporels) et à observer le contenu fréquentiel de chacun des segments. La décomposition en PMF consiste à partitionner la transformée en cosinus discrète du signal (DCT, décomposition du signal sur une base de cosinus - image du contenu fréquentiel du signal) et à observer le contenu temporel de chacun des segments par DCT inverse.

### 4.1.1 Base de cosinus locaux : ondelettes de Malvar

Les ondelettes de Malvar sont à la base de la décomposition en paquets de Malvar (temporels ou fréquentiels). Ayant considéré un signal de longueur finie, l'axe des temps est segmenté en intervalles successifs  $[a_p, a_{p+1}]$ . On construit alors des fenêtres  $g^p(t)$  qui couvrent chacun de ces intervalles (figure 4.3). Afin d'éviter une troncature trop brutale de l'axe temporel, une zone de recouvrement est définie d'une fenêtre à l'autre. Considérant les notations utilisées sur la figure 4.2, une série de conditions est imposée aux fenêtres pour permettre une reconstruction parfaite du signal :

- Deux fenêtres consécutives  $g^p(t)$  et  $g^{p+1}(t)$  sont symétriques par rapport à  $a_{p+1}$ , sur leur intervalle commun  $[a_{p+1} - \mu_{p+1}, a_{p+1} + \mu_{p+1}]$ ,
- La fenêtre  $g^p(t)$  ne chevauche que ses deux voisines  $g^{p-1}(t)$  et  $g^{p+1}(t)$ ,
- L'axe des temps est uniformément couvert par la somme du carré des fenêtres :

$$\sum |g^p(t)|^2 = 1$$

Comme seules les fenêtres consécutives se chevauchent, cela implique :

- Sur le support commun  $[a_{p+1} - \mu_{p+1}, a_{p+1} + \mu_{p+1}]$  :  

$$g^p(t)^2 + g^{p+1}(t)^2 = 1$$
- Sur le support ne subissant pas de recouvrement  $[a_p - \mu_p, a_{p+1} - \mu_{p+1}]$  :  

$$g^p(t) = 1$$

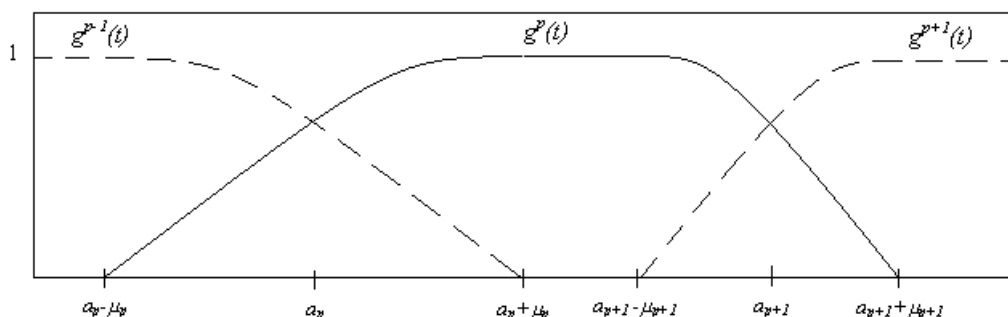


Figure 4.2 – Segmentation de l'axe des temps, fenêtre  $g^p(t)$

Si une fenêtre  $g^p(t)$  respecte ces conditions, alors on peut montrer que la famille des fonctions cosinus locales :

$$\left\{ f^p(t, k) = g^p(t) \sqrt{\frac{2}{a_{p+1} - a_p}} \cos \left[ \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{t - a_p}{a_{p+1} - a_p} \right] \right\}_{k \in N, p \in Z} \quad (4.1)$$

est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ . Chaque fenêtre modulée  $f^p(t, k)$  est localisée en temps par l'exposant  $p$  et en fréquence par le paramètre  $k$ .

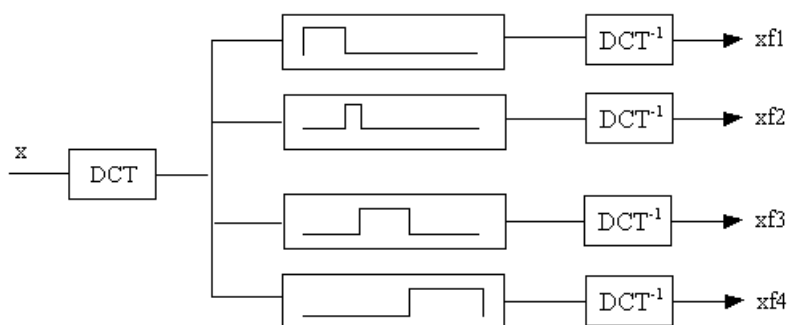
#### 4.1.2 Ondelettes de Malvar fréquentielles :

De manière analogue à la décomposition temporelle présentée précédemment, on peut réaliser une décomposition du signal fondée sur une segmentation fréquentielle de celui-ci : il suffit d'appliquer la décomposition en paquets de Malvar non pas au signal lui-même mais à sa DCT. Les fenêtres de Malvar définissent alors des bandes fréquentielles dont les paquets obtenus après décomposition sur la base d'une DCT ont un caractère temporel.

#### 4.1.3 Construction de signaux de sous-bandes

Dans la décomposition en paquets de Malvar fréquentiels, chaque paquet représente l'information relative à tout le signal dans une bande de fréquences donnée. Un paquet peut donc être assimilé à un filtre et une base à un ensemble de filtres réalisant une segmentation de l'axe fréquentiel.

Ayant choisi un fenêtrage de l'axe fréquentiel satisfaisant les conditions énoncées précédemment, on obtient les composantes de sous-bande du signal par DCT inverse des différents segments (figure 4.3)



**Figure 4.3 – Schéma de synthèse de signaux de sous-bandes d'après une décomposition PMF.**

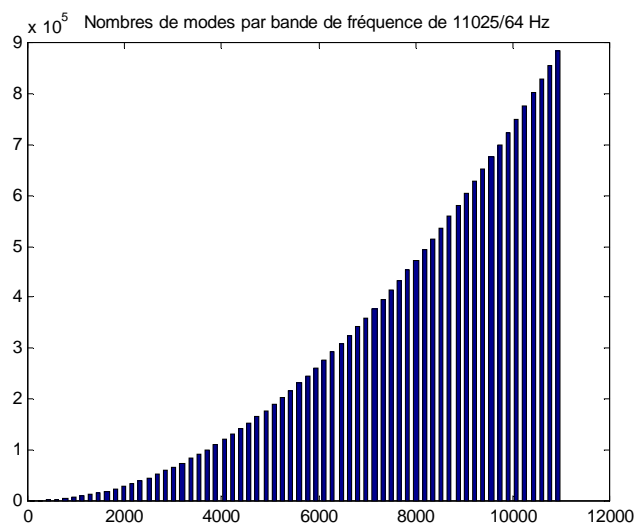
Pour nos réalisations pratiques nous avons utilisé des fenêtres de type troncature, de longueurs égales pour une segmentation homogène de l'axe fréquentiel, de longueurs variables pour une segmentation par octave.

## 4.2 Traitement basses fréquences

Lorsque le nombre de pôles acoustiques n'est pas encore trop élevé sur la bande de fréquence étudiée (c'est-à-dire pour des fréquences basses, relativement aux dimensions de la salle), la théorie modale fait autorité et dans ces conditions on considère sur chaque bande de fréquence un modèle ARMA d'ordre égal au double du nombre de modes excités dans la bande étudiée.

Ayant décomposé en sous-bandes un signal source et le signal réceptionné à un autre endroit d'une pièce à modéliser, on effectue au moyen des sous-bandes basses fréquences source / récepteur une identification sur chaque bande.

Au-delà d'un certain ordre, c'est-à-dire d'un certain nombre de modes excités, on utilisera un modèle mieux adapté. Il convient donc de définir un seuil sur le nombre de pôles acoustiques au-delà duquel on passera au modèle hautes fréquences. A titre d'exemple la figure 4.3 représente le nombre de modes d'une salle de  $150 \text{ m}^3$  sur 64 bandes de fréquences régulièrement réparties entre 0 et 11025 Hz. La deuxième bande de fréquence contient déjà plus de 500 modes !. Sur un découpage de 128 bandes la troisième bande contient plus de 300 modes. Très rapidement le modèle ARMA devient donc dépassé et il faut utiliser un modèle plus adéquat.



**Figure 4.4 – Nombres de modes d'une pièce de  $150 \text{ m}^3$  par bandes de 11025/64 Hz**

## 4.3 Traitement hautes fréquences par estimation de variance et premier ordre

Nous l'avons vu précédemment, lorsque le nombre de modes excités devient grand, on peut adopter l'hypothèse du champ diffus qui consiste à représenter le champ de pression dans une pièce par une moyenne spatiale de la valeur efficace au carré de la pression, dont les variations obéissent à une loi du premier ordre (§ 2.4).

Dans notre cas nous supposons ne travailler qu'avec un seul récepteur placé à un endroit fixe de la pièce et nous ne nous préoccupons pas de la moyenne sur l'espace. Calculer la valeur efficace temporelle de la pression revient à effectuer une estimation de variance temporelle du signal sur un horizon restreint. Sur chacune des (hautes) bandes de fréquence la salle se comporte sur les variances temporelles des signaux de sous-bandes comme un système du premier ordre dont les paramètres dépendent des coefficients

d'absorption des parois sur ces bandes de fréquence. On peut estimer ces paramètres par une identification d'après les variances de signaux de sous-bandes source / récepteur.

En simulation, une fois les modèles de premier ordre estimés, on est en mesure de simuler sur chaque bande la variance des signaux de sous-bandes. Il faut alors générer des signaux ayant ces variances. C'est que nous verrons après avoir étudié différentes manières d'estimer une variance.

#### 4.3.1 Estimation d'une variance temporelle par un premier ordre [11]

La variance temporelle d'un signal de moyenne nulle peut-être estimée par application d'un filtre de premier ordre de gain unitaire au carré du signal (figure 4.5). Cela revient à appliquer une fenêtre glissante au carré du signal et à faire une moyenne des points dans la fenêtre. Le filtre a l'allure suivante :

$$F(z) = \frac{\frac{1}{l}}{1 - \left(1 - \frac{1}{l}\right) z^{-1}} \quad (4.2)$$

Le paramètre  $l$  est homogène à un nombre de points et correspond à l'horizon de calcul de la variance à un instant précis du signal. En d'autres termes il est assimilable à la taille de la fenêtre glissante. Pour avoir une bonne estimation de la variance d'un signal périodique l'horizon de calcul doit couvrir au moins deux à trois périodes. Ce qui implique que le paramètre  $l$  doit être adapté à la fréquence du signal. Pour un signal stationnaire à fréquence unique, plus le paramètre  $l$  sera grand et meilleure sera l'estimation de la variance mais plus le filtre sera lent.

C'est pourquoi ce paramètre ne doit pas être trop grand pour des signaux non-stationnaires (figure 4.6). Ainsi pour des signaux fortement non-stationnaires (avec variations fréquentes d'amplitude) cette estimateur de variance n'est pas adéquat, et d'autant plus si le signal est polychromatique.

On lui préférera l'estimateur de variance basé sur le calcul d'enveloppe présenté ci-après.

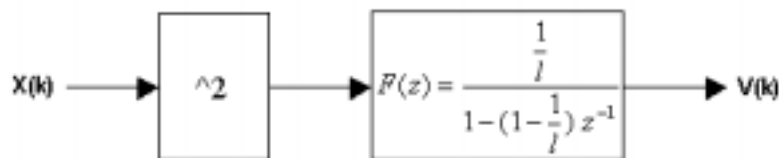
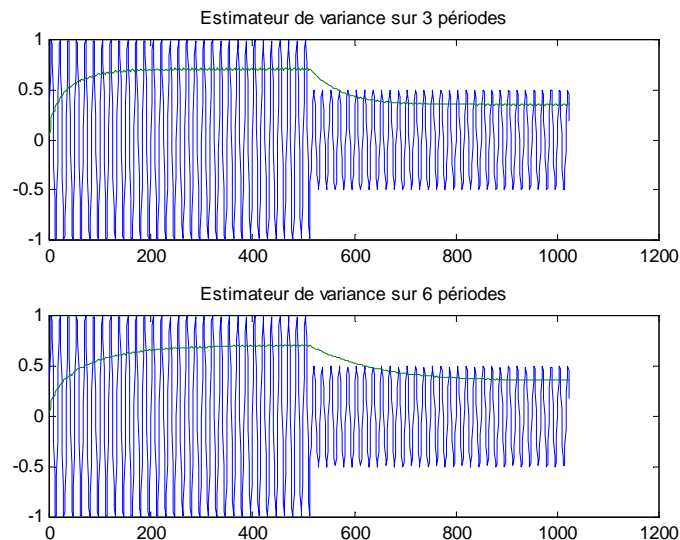


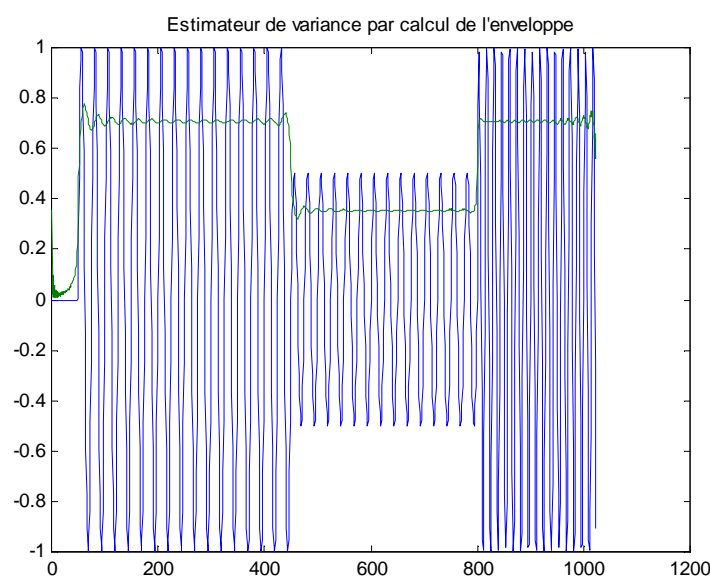
Figure 4.5 – Estimateur de variance par filtre de premier ordre.  
Le paramètre  $l$  doit être adapté à la fréquence du signal.



**Figure 4.6 – Estimateurs de variances sur un signal monochromatique et stationnaire par morceaux. Une bonne estimation nécessite un filtre lent.**  
(Les tracés correspondent aux écarts types)

#### 4.3.2 Estimation d'une variance par l'enveloppe

On peut estimer l'écart type temporel d'un signal comme étant l'enveloppe de celui-ci au facteur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  près. L'enveloppe d'un signal peut être approximée par le module de la transformée de Hilbert du signal. En particulier, pour une cosinusoïde, la transformée de Hilbert donne l'exponentielle complexe correspondante et sa valeur absolue donne donc l'amplitude du cosinus. Cette méthode est plus robuste aux variations d'amplitude et de fréquence que la précédente (figure 4.7). Appliquée à des signaux quelconques, elle donne une bonne approximation de l'enveloppe (figure 4.8).



**Figure 4.7 – Estimation de l'écart type temporel d'un signal stationnaire et monochromatique par morceaux.**



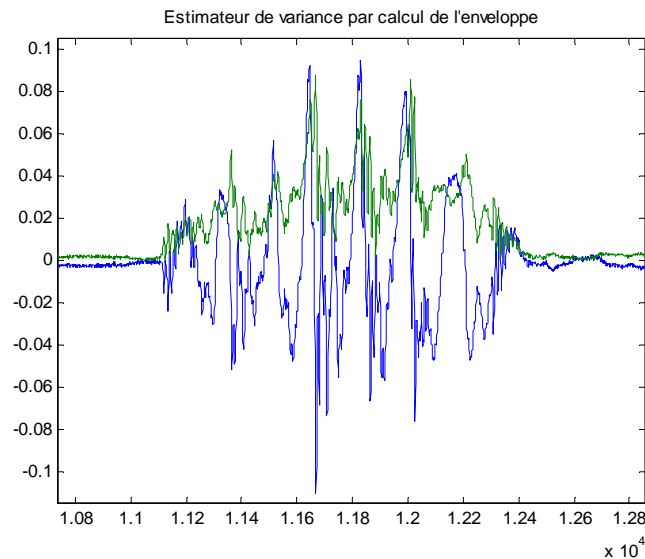


Figure 4.8 – Estimation de l'écart type temporel d'un signal quelconque

#### 4.3.3 Génération du signal simulé

Après que la variance en réponse d'un des signaux de sous-bandes ait été simulée, il faut générer un signal ayant cette variance. Deux méthodes ont été étudiées, l'une s'appuyant sur le calcul d'un gain applicable au signal de sous-bande source, l'autre faisant intervenir un oscillateur.

a) La première méthode consiste à calculer un gain temporel, rapport de l'écart type simulé sur l'écart type de la sous-bande source (figure 4.9). Ce gain est alors appliqué à la sous-bande source.

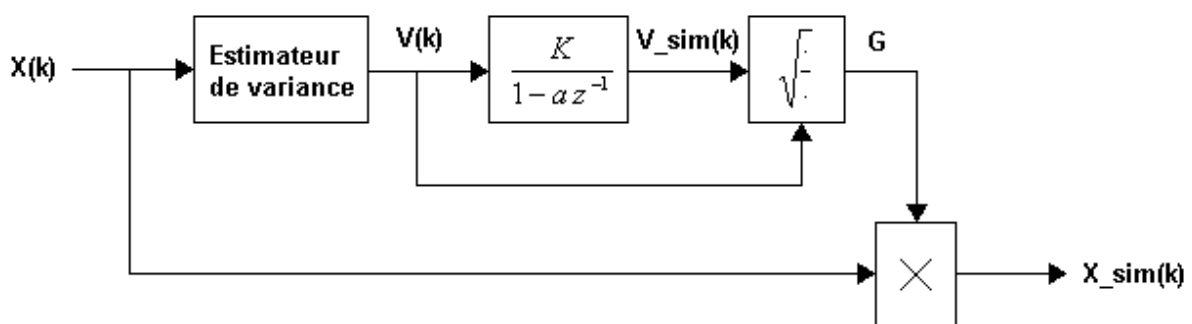
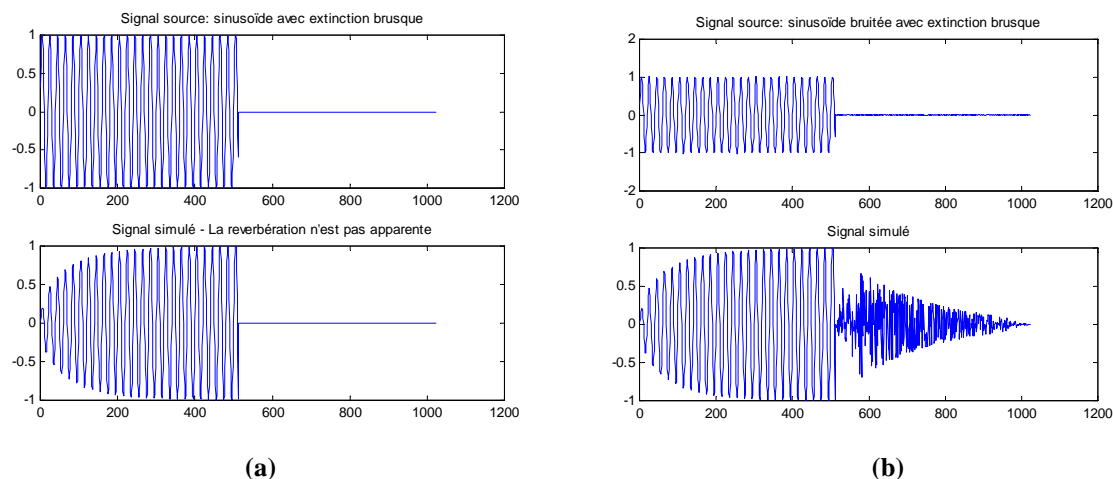


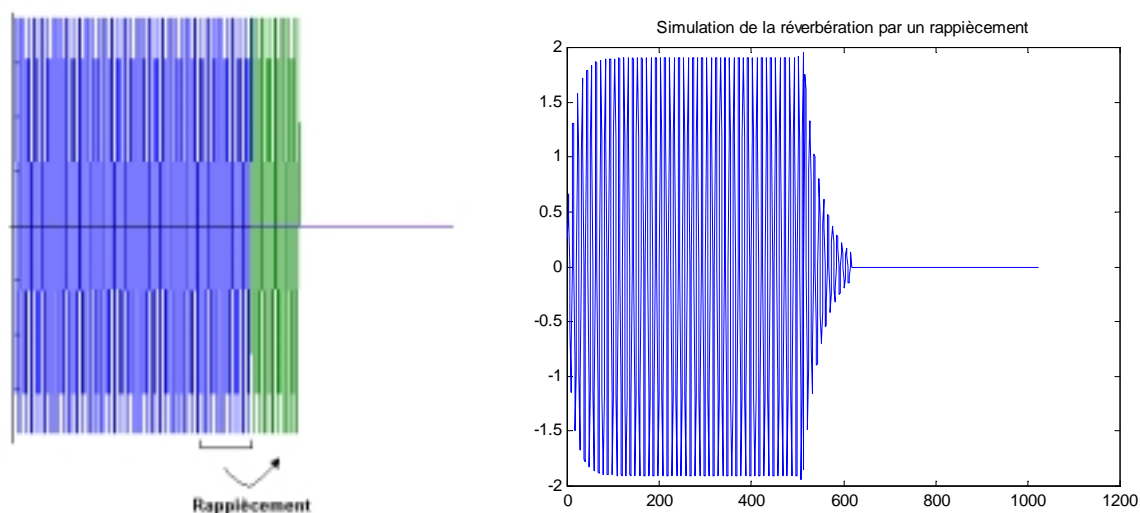
Figure 4.9 – Simulateur par calcul de gain

Le problème de ce simulateur réside en le fait que lorsque le signal d'entrée devient nul, le signal simulé devient aussi immédiatement nul et les phénomènes de réverbération ne sont donc pas visibles (figure 4.10). De surcroît lorsque le signal d'entrée est nul des problèmes de division par zéro surviennent au niveau du calcul de gain. En bruitant légèrement le signal source les problèmes de multiplication et division par zéro disparaissent mais l'on obtient des problèmes de transition lorsque le signal s'éteint et le signal simulé est déformé par le bruit (figure 4.11).



**Figures 4.10 – Réponses à une sinusoïde non bruitée (a) puis bruitée (b).**  
**(a) : le signal simulé est nul dès l'instant où la source le devient.**  
**(b) : le cas bruité, à l'extinction la transition est mauvaise et après cet instant le signal simulé devient du bruit amplifié.**  
*Les estimations de variance ont été effectuées par la méthode de l'enveloppe.*

Pour pallier à ce problème, une solution envisagée a été de travailler en alternance sur le signal source et une version déphasée. En d'autres termes cette solution consiste à localiser les points où le signal est nul et à leur substituer une portion précédente du signal, dont la taille est adaptée au temps de réponse du système d'ordre 1 caractérisant la salle sur la bande de fréquences considérée (Figure 4.11). La méthode permet alors de simuler la réverbération mais des problèmes de raccord se posent (Figure 4.12). On peut éventuellement envisager de lisser le raccord avec un premier ordre mais un déphasage subsistera.



**Figure 4.11 – Une portion du signal est rapiécée à l'extinction pour pouvoir simuler la réverbération.**

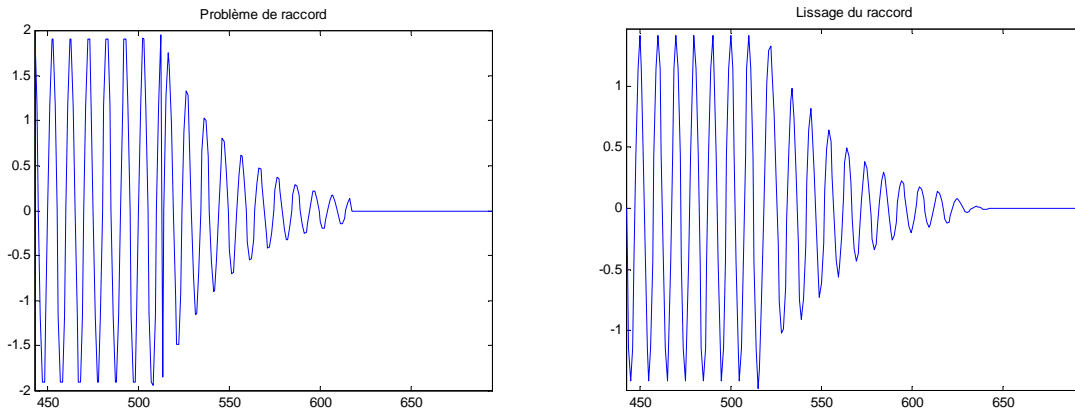


Figure 4.12 – Problème de raccord, lissage par un premier ordre

b) La seconde méthode envisagée pour générer le signal simulé dans la bande de fréquence étudiée a été d'utiliser un bruit coloré de variance unitaire multiplié par la variance simulée. Le bruit coloré est obtenu en décomposant un bruit blanc sur la série des sous-bandes de fréquence et en sélectionnant la bande adéquate au signal d'entrée (Figure 4.13).

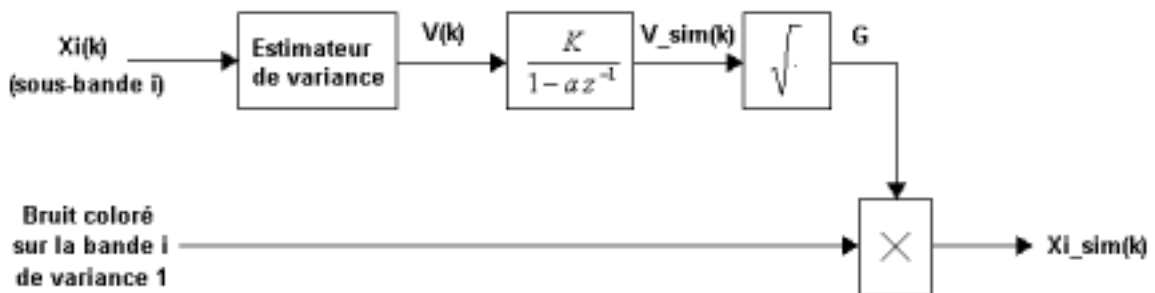
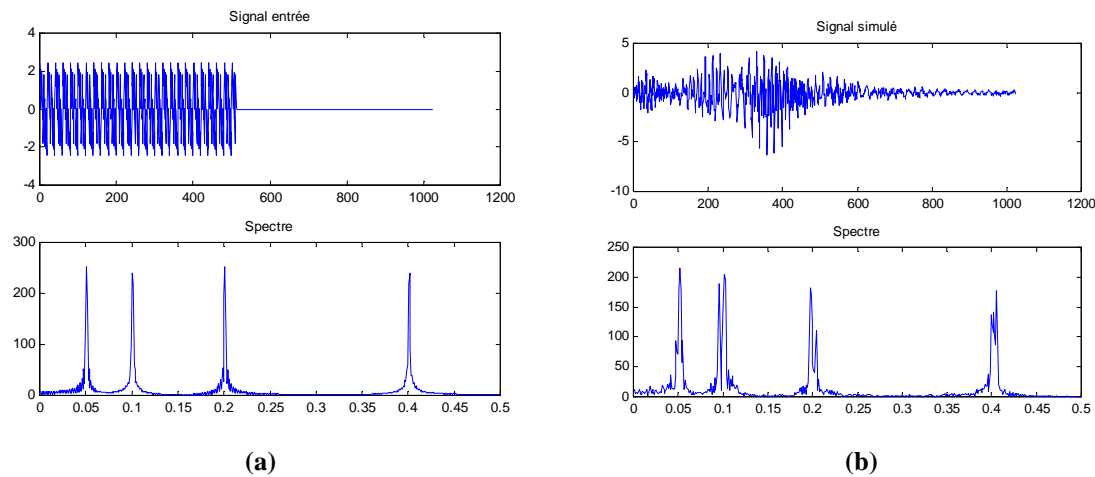


Figure 4.13 – Génération du signal simulé par un bruit coloré

La méthode a le mérite d'éviter toute multiplication ou division par zéro et toute opération de raccord comme précédemment mais elle ne sera pas retenue car elle donne de trop mauvais résultats. En effet, en générant le signal simulé avec un oscillateur on fait abstraction de tout le contenu fréquentiel du signal d'entrée pour le remplacer par un contenu aléatoire sur les bandes de fréquence données. Du coup le signal simulé devient très déformé en comparaison au signal d'entrée, comme l'attestent les figures 4.14. Dans cet exemple on a généré un signal de 1024 points contenant 4 sinusoïdes de fréquences réduites 0.05, 0.1, 0.2 et 0.4 s'éteignant au bout de 512 points. Le signal est découpé en 64 bandes homogènes dont les variances temporelles constituent les entrées de 64 premiers ordres arbitraires. On constate que le signal simulé est très déformé.



**Figures 4.14 – Simulation par utilisation d'oscillateurs (bruits colorés).  
Le signal d'entrée est composé de 4 sinusoïdes.**

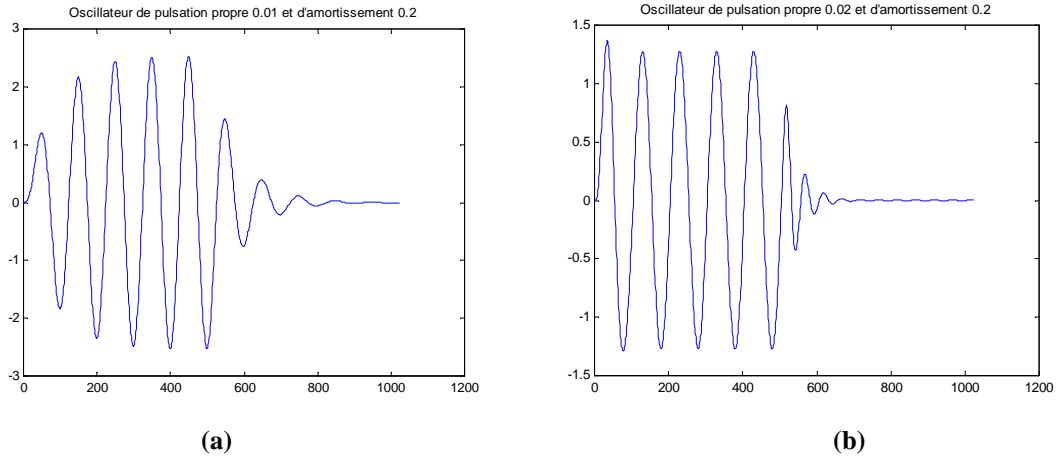
#### 4.4 Traitement hautes fréquences par utilisation d'un second ordre

Les exemples précédents montrent que la synthèse de signaux ayant les variances simulées est parfois délicate. Sur un signal sinusoïdal les modèles proposés précédemment reviennent à créer des oscillateurs générant un début d'oscillation et un amortissement du signal simulé avec une fréquence propre égale à celle de la sinusoïde. Ainsi un modèle adéquat pourrait être tout simplement l'estimation d'un système de deuxième ordre sur chacune des bandes de fréquences (Figures 4.15). Ce modèle imposera certes une fréquence propre d'oscillation (la sienne) mais on se passe ainsi de tous les nombreux problèmes rencontrés précédemment. Lors de l'identification du système d'ordre 2 correspondant à une bande, la pulsation propre identifiée sera celle qui représente le mieux la bande.

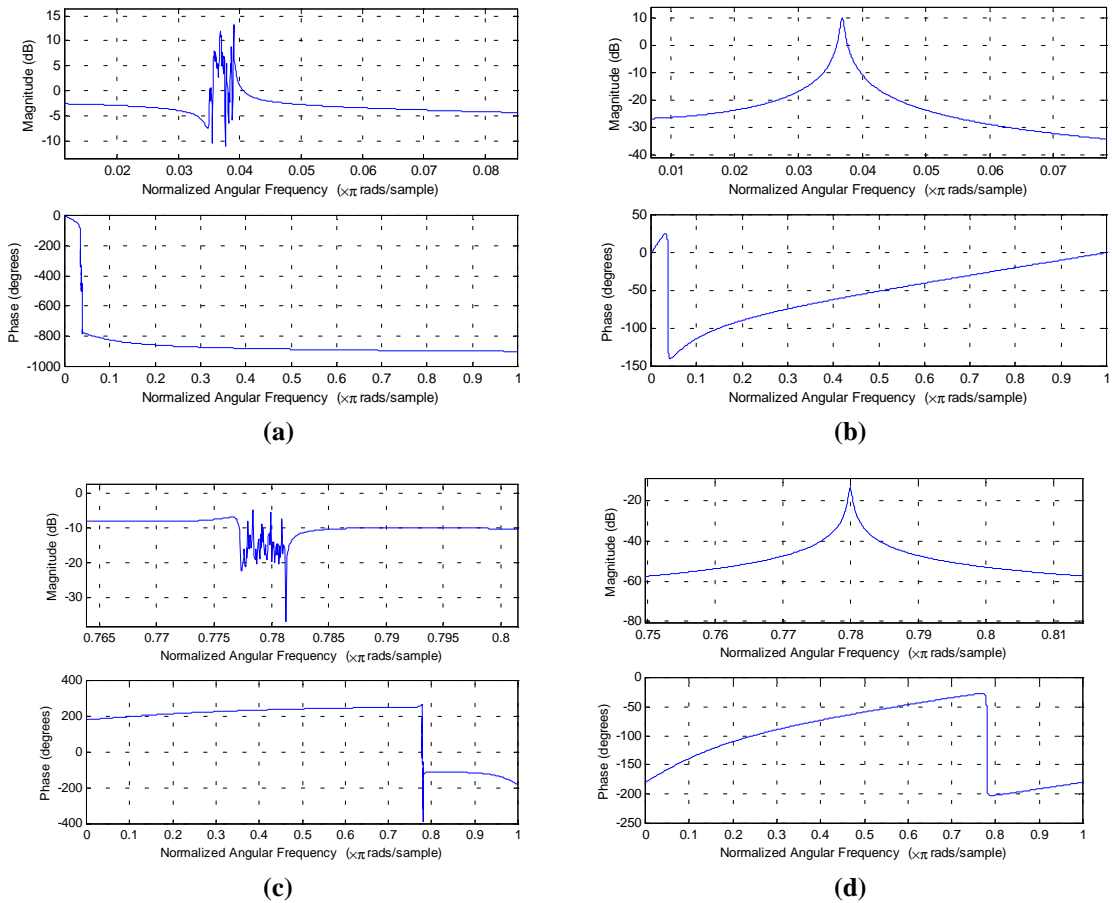
Physiquement chaque mode de résonance de la salle (caractérisé par une fréquence de résonance et un taux d'amortissement) se comporte comme un second ordre. Identifier une fonction de transfert d'ordre 2 sur une bande revient donc à assimiler tous les modes de la bande à un seul oscillateur équivalent imposant lui seul une fréquence propre et une fréquence de résonance sur la bande.

Bien que ce modèle soit celui qui s'écarte le plus de la théorie, c'est celui qui offre les meilleures performances (notamment à l'oreille) et c'est celui qui est le plus souple d'utilisation : il n'y a plus de variance à estimer ni de signal à générer.

L'ensemble des figures 4.16 montrent le résultat d'une modélisation par un second ordre sur deux bandes de fréquence distinctes, comparée à la réponse fréquentielle réelle de la salle sur ces bandes. L'approximation est assez grossière mais s'avère efficace.



**Figure 4.15 – Effets d'un second ordre sur une sinusoïde de fréquence 0.01 d'amplitude 1**  
**(a) : le système a une fréquence propre égale à la fréquence de la sinusoïde.**  
**(b) : le système a une fréquence propre double de la fréquence de la sinusoïde.**



**Figures 4.16 – Modélisation d'une salle par un second ordre par bande de fréquence**  
**Réponses fréquentielles réelles et modélisées – Découpage en 256 bandes,  $f_e=16000$  Hz**  
**(a) sur la bande [281.25 312.25] Hz**  
**(b) sur la bande [6219 6250] Hz**

## 5. Simulations

Les simulations et identifications ont été réalisées au moyen de signaux enregistrés avec l'aide de la SERDB à Nantes. Dans un premier temps une série d'enregistrements a été effectuée en chambre anéchoïque dans les locaux de la SERDB : séquences de guitare, un texte récité par différentes voix et une discussion banale. Les prises de son ont été réalisées avec un DAT 16 bits fonctionnant à la fréquence d'échantillonnage 16000 Hz.

Ces enregistrements ont par la suite été diffusés dans une salle de cours classique à l'ECN (dimensions de l'ordre de  $9 \times 6 \times 4$  m), très réverbérante et à nouveau enregistrés sur un autre DAT à un endroit différent de celui de la source.

De ces enregistrements nous avons sélectionné une série de courtes séquences de longueur multiple de 2 (impératif pour la décomposition en sous-bandes) pour effectuer nos identifications et simulations :

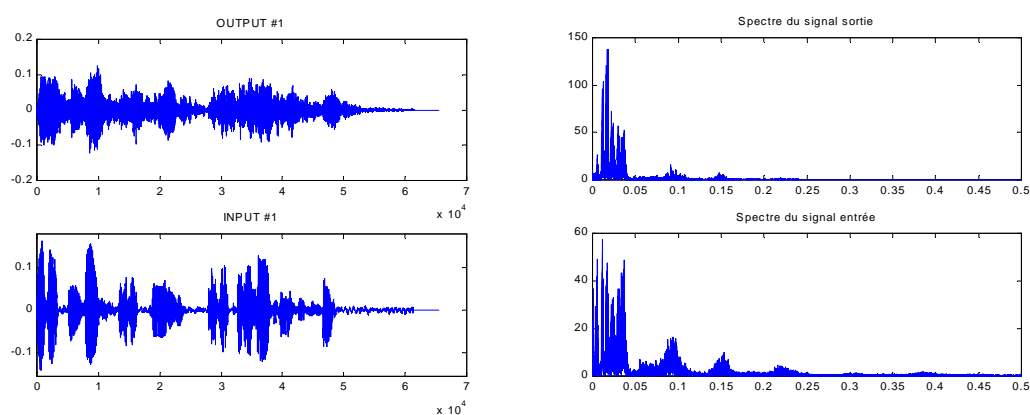
- une séquence de deux harmoniques de guitare,
- une séquence d'arpège de guitare,
- une séquence d'un texte lu.

Nous avons testé les différents modèles proposés précédemment : fonctions de transfert de salle (§ 3.), identification par bandes de fréquence par variance et par second ordre (§ 4.). Nous avons utilisé les séquences parlées pour les identifications car elles ont le contenu fréquentiel le plus riche.

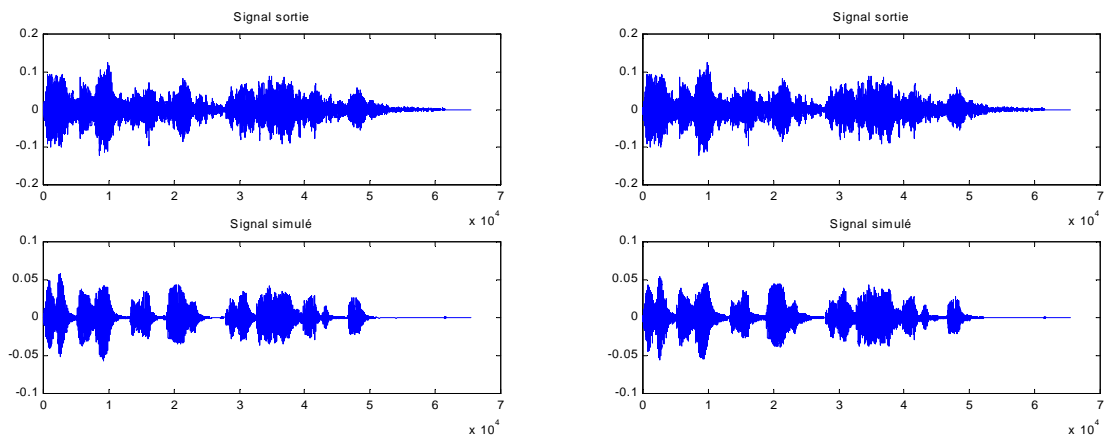
### 5.1 Identification d'une fonction de transfert

Nous avons commencé par tenter une identification directe entre les séquences parlées source et enregistrée en salle. Comme prédit au paragraphe 4. l'identification demande des ordres de modèle exorbitants. Nous avons essayé divers ordres de dénominateurs et de numérateurs en commençant par identifier un modèle par moindres carrés ordinaires puis en utilisant ce modèle pour initialiser un calcul par maximum de vraisemblance.

Les résultats, même avec un ordre élevé (nous sommes allés jusqu'à 1000 au dénominateur) sont très mauvais (voir figures 5.1, 5.2) et on remarquera qu'ils ne s'améliorent pas beaucoup en doublant l'ordre de 500 à 1000.



**Figure 5.1 – Signaux entrée/sortie utilisés pour l'identification**  
Extrait d'un texte. Séquence de 65536 ( $2^{16}$ ) points échantillonnée à 16000 Hz (3.8 s).



**Figure 5.2 – Simulations par modèle ARMA**  
**(a) : modèle d'ordre 500 au dénominateur, 100 au numérateur**  
**(b) : modèle d'ordre 1000 au dénominateur, 100 au numérateur**

## 5.2 Identification par bandes de fréquence et variance

Nous avons testé les identifications par bandes de fréquence d'abord sur une segmentation en 128 bandes puis en 256 bandes, en utilisant à chaque fois la méthode des variances et des modèles d'ordre 2. La qualité de la simulation de la réverbération est médiocre sur 128 bandes, en revanche elle est nettement meilleure lorsque l'on augmente la résolution fréquentielle à 256 bandes.

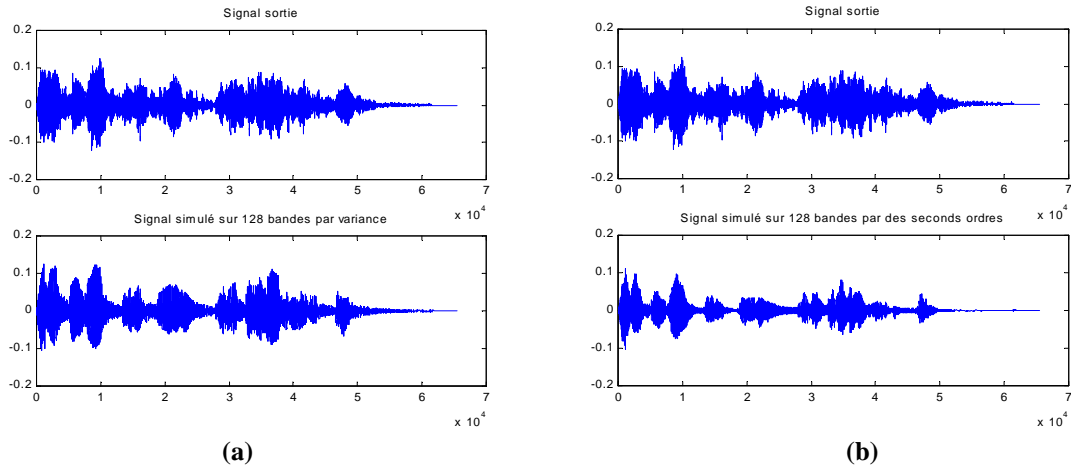
Les signaux simulés par la méthode de la variance ont le défaut de présenter un léger cliquetis que n'ont pas les signaux simulés par des seconds ordres.

On aimerait pouvoir éventuellement augmenter la résolution à un découpage en 512 bandes mais interviennent des problèmes de place mémoire sous MATLAB : les fichiers deviennent trop gros à manipuler. A titre d'exemple le découpage d'un signal 16 bits de  $2^{16}$  points (65536 points) échantillonné à 16000 bits (soit environ une longueur temporelle de 3.8 s) nécessite une place en mémoire de 131 Mo.

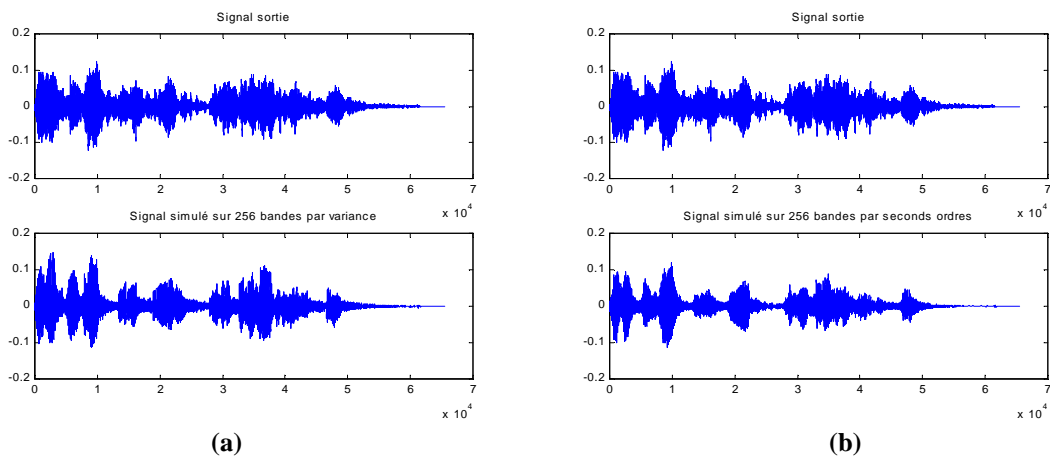
Les résultats des identifications / simulations sur le signal parlé sont exposés sur les figures suivantes (5.3, 5.4).

Si à la vue des graphiques les résultats peuvent paraître similaires d'une méthode et d'une résolution à l'autre, à l'oreille il en est tout autrement et c'est bien avec l'identification par seconds ordres sur une décomposition en 256 bandes qu'on obtient le meilleur résultat.

Nous avons donc retenu ce dernier modèle et nous l'avons soumis d'autres signaux tests, à savoir les signaux musicaux enregistrés à partir d'une guitare. Les résultats sont, à l'oreille, relativement satisfaisant (figures 5.5, 5.6) dans la mesure où l'effet de réverbération est sensible. Toutefois il apparaît des retards de phase embarrassants qui même s'il ne sont pas perceptibles à l'oreille rendrait impossible toute utilisation du modèle en vue de régulation. A ce niveau le modèle est encore imparfait.

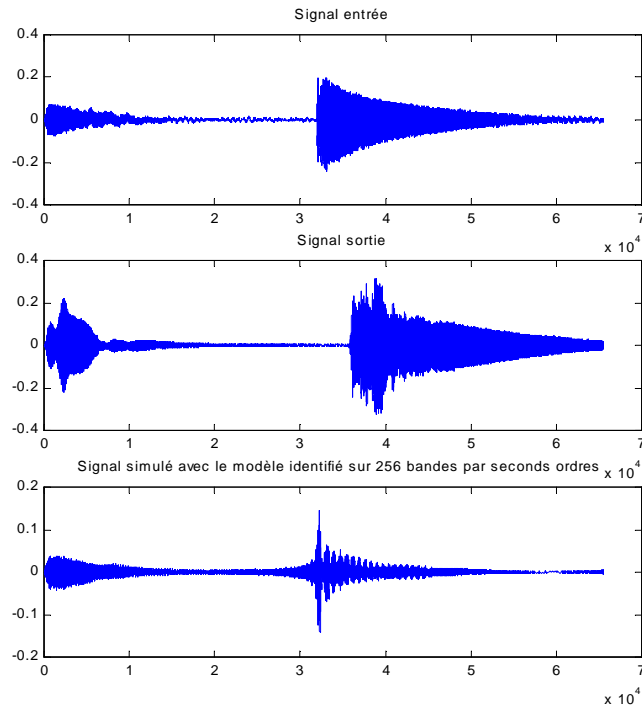


**Figures 5.3 – Identification et Simulation sur 128 bandes**  
**(a) par la méthode de variance**  
**(b) par des seconds ordres**

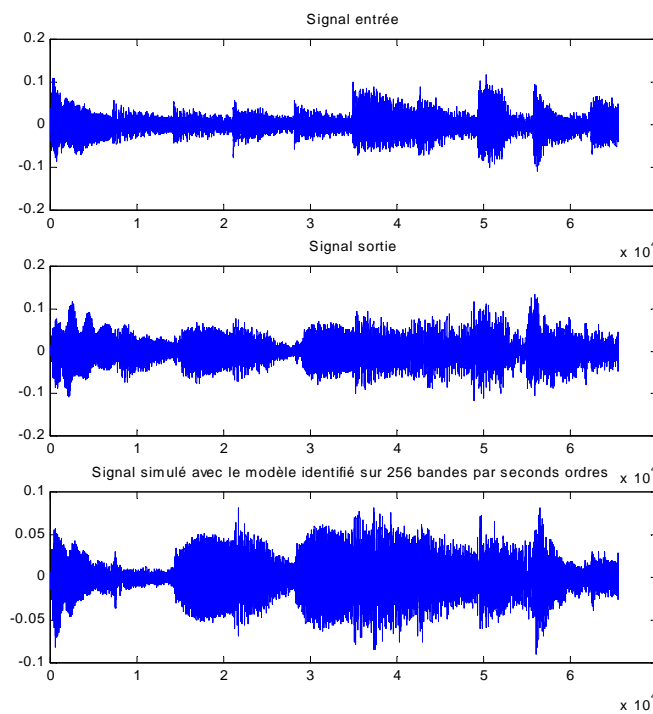


**Figures 5.4 – Identification et Simulation sur 256 bandes**  
**(a) par la méthode de variance**  
**(b) par des seconds ordres**





**Figure 5.5 – Simulation d’harmoniques de guitare avec le modèle précédemment identifié**  
On remarque qu’un fort déphasage du signal de sortie sur le signal d’entrée au niveau de la deuxième harmonique, ce déphasage n’est pas bien simulé.



**Figure 5.6 – Simulation d’arpèges de guitare avec le modèle précédemment identifié**

## **6. Conclusions**

Le modèle proposé par Haneda, Kaneda et Makino ne nous a pas semblé très convaincant et a donné des résultats très mauvais en simulation. Faut-il aller jusqu'à des ordres sensiblement plus élevés ? Si c'est le cas alors les modèles deviendraient vraiment peu maniables et nécessiteraient de longues procédures d'identification.

Le modèle que nous avons proposé nous a procuré des résultats plus probants à l'oreille. Mais n'oublions pas qu'il subsiste des retards de phase qui peuvent se révéler gênants pour de la régulation. De surcroît notre modèle nécessite une décomposition en sous-bandes des signaux d'entrée, ce qui reste un pré-traitement d'autant plus fastidieux que les signaux seront longs...

Le problème, bien qu'il ne soit plus entier, reste ouvert...

## Bibliographie

- [1] *Active Control of Sound*  
P.A. Nelson & S.J. Elliott  
Academic Press, Chapter One « An Introduction to Acoustics »
- [2] *Acoustique Générale*  
Coordonné par P.J.T. Filippi  
Les Editions de Physique, Chapitre 2 « Acoustique des Espaces Clos »
- [3] *The Nature and Technology of Acoustic Space*  
Mikio Tohyama, Hideo Suzuki, Yoichi Ando  
Academic Press, Chapter Three « Sound Propagation In An Enclosed Space »
- [4] *Common Acoustical Pole and Zero Modeling of Room Transfer Functions*  
Y. Haneda, S. Makino et Y. Kaneda  
IEEE Transactions On Speech And Audio Processing, vol.2, pp. 320-328, Avril 1994
- [5] *ARMA Modeling of a Room Transfer Function at Low Frequencies*  
Y. Haneda, S. Makino et Y. Kaneda  
J. Acoust. Soc. Jpn (E) **15**, 5 (1994)
- [6] *Modeling of a Room Transfer Function Using Common Acoustical Poles*  
Y. Haneda, S. Makino et Y. Kaneda
- [7] *Interpolation and Extrapolation of a Room Transfer Function Based on Common Acoustical Poles and their Residues*  
Y. Haneda et Y. Kaneda
- [8] *Identification des Systèmes Linéaires*  
J.M. Piasco  
Support de cours à l'ECN
- [9] *Manuel d'Acoustique Fondamentale*  
Michel Bruneau  
Hermès, Chapitre 9 « Acoustique des Espaces Clos »
- [10] *Sélection d'un banc optimal de filtres à partir d'une décomposition en paquets d'ondelettes*  
Eric Hitti  
Thèse de doctorat, IRCCyN, Chapitres 1,2,3
- [11] *Adaptativité et facteur d'oubli, Application à l'identification en ligne*  
Eric Le Carpentier