

# Séparation de sources autorégressives gaussiennes par maximum de vraisemblance et filtrage de Kalman

Éric LE CARPENTIER, Cédric FÉVOTTE

IRCCyN

École Centrale de Nantes

1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 03, France

Eric.Lecarpentier@irccyn.ec-nantes.fr, Cedric.Fevotte@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé** – Nous proposons dans cet article une méthode de séparation aveugle de mélanges instantanés de sources autorégressives gaussiennes. Le problème est formalisé à l'aide d'une représentation dans l'espace d'état, l'état contenant les sources et autant de versions retardées que l'ordre des modèles AR. La matrice de mélange et les paramètres AR sont estimés par maximum de vraisemblance, puis les sources sont reconstruites à l'aide d'un observateur de Kalman. Ce dernier permet en particulier de reconstruire les sources dans le cas sous-déterminé (plus de sources que d'observations).

**Abstract** – We address in this paper a method of blind separation of instant mixtures of gaussian autoregressive sources. The problem is formalized with state-space representation, the state being composed of the sources and as many lagged versions as the order of the AR models. The mixing matrix and the AR parameters are estimated with maximum likelihood, then the sources are reconstructed with a Kalman estimator. The latter allows in particular to reconstruct the sources in the underdetermined case (more sources than observations).

## 1 Introduction

Le problème de la séparation aveugle de sources sous sa forme la plus élémentaire (identifier  $n$  sources inconnues mais indépendantes d'après la seule connaissance de  $m$  mélanges linéaires instantanés - les observations - sans information *a priori* ni sur les sources ni sur le mélange) a été largement étudié et plusieurs méthodes de résolution existent, mais généralement sous certaines hypothèses supplémentaires. Ainsi un cas favorable consiste à supposer les sources comme étant indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d) et de disposer d'autant d'observations que de sources. De nombreux algorithmes ont été développés à partir de ces hypothèses (voir à titre de référence [1, 2]). D'autres travaux ont été effectués dans les cas où l'un des "i" de l'hypothèse i.i.d n'est plus valide. Par exemple la non-stationnarité d'un signal (lorsque les sources ne sont plus identiquement distribuées dans le temps) peut se révéler être une information utile pour la séparation [3]. Il est aussi possible d'exploiter la corrélation temporelle des sources (lorsque les sources ne sont pas indépendamment distribuées dans le temps, [4]).

Nous proposons dans cet article une méthode de séparation de sources autorégressives gaussiennes. Soit donc  $s_1[k], \dots, s_n[k]$ ,  $n$  sources autorégressives d'ordre  $p$  gaussiennes indépendantes et  $y_1[k], \dots, y_m[k]$ ,  $m$  mélanges linéaires de ces sources. On définit :

$$\mathbf{s}[k] = [s_1[k], \dots, s_n[k]]^T$$

et

$$\mathbf{y}[k] = [y_1[k], \dots, y_m[k]]^T$$

On a :

$$\mathbf{y}[k] = M \mathbf{s}[k] \quad (1)$$

où  $M$  désigne la matrice de mélange, de dimensions  $m \times n$ . Les sources vérifient pour  $i \in [1, n]$  :

$$s_i[k] = - \sum_{j=1}^p a_{i,j} s_i[k-j] + v_i[k-1] \quad (2)$$

où  $v_i[k]$  est une séquence blanche gaussienne de variance unitaire. Les séquences  $(v_i[k])_{1 \leq i \leq n}$  sont supposées indépendantes entre elles (et donc les sources sont indépendantes entre elles). D'après la seule connaissance des observations  $\mathbf{y}[k]$  et de l'ordre des sources on cherche à estimer les sources  $\mathbf{s}[k]$  ainsi que les coefficients de la matrice de mélange  $M$ . Une étude de ce problème dans le cas déterminé (autant de sources que d'observations) a été réalisée par S.Dégerine et A.Zaidi qui proposent une méthode par maximum de vraisemblance décomposé en deux problèmes d'optimisation [5]. L'approche que nous proposons se décompose en deux étapes :

- Estimation des paramètres (coefficients AR et de mélange) par maximum de vraisemblance exact ;
- Reconstruction des sources par filtrage de Kalman sur la représentation du modèle dans l'espace d'état.

## 2 Représentation dans l'espace d'état

On définit pour chaque source  $s_i[k]$  le vecteur d'état

$$\mathbf{x}_i[k] = [s_i[k], s_i[k-1], \dots, s_i[k-p+1]]^T \quad (3)$$

et on note  $\mathbf{y}_i[k]$  la contribution de la  $i^e$  source à l'observation. On obtient le modèle d'état suivant :

$$\mathbf{x}_i[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{i,1} & -a_{i,2} & \cdots & \cdots & -a_{i,p} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F_i} \mathbf{x}_i[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{L_i} v_i[k] \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_i[k] = [m_i \ 0 \ \cdots \ \cdots \ 0] \mathbf{x}_i[k] \quad (6)$$

où  $m_i$  est la  $i^e$  colonne de la matrice  $M$ . L'équation (6) s'écrit encore :

$$\mathbf{y}_i[k] = m_i L_i^T \mathbf{x}_i[k] \quad (7)$$

Chaque source admet ainsi une représentation dans l'espace d'état définie par les matrices  $F_i, L_i$  de dimensions respectives  $p \times p, p \times 1$ . En concaténant les vecteurs d'état  $\mathbf{x}_i[k]$  en un unique vecteur  $\mathbf{x}[k] = [\mathbf{x}_1[k]^T \dots \mathbf{x}_n[k]^T]^T$ , les séquences blanches  $v_i[k]$  en un unique vecteur  $\mathbf{v}[k] = [v_1[k] \dots v_n[k]]^T$  de matrice de covariance unitaire, et avec  $\mathbf{y}[k] = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i[k]$ , notre modèle global admet la représentation suivante :

$$\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_n \end{bmatrix}}_F \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_n \end{bmatrix}}_L \mathbf{v}[k] \quad (8)$$

$$\mathbf{y}[k] = M L^T \mathbf{x}[k] \quad (9)$$

Notre problème se formalise donc simplement dans l'espace d'état à l'aide de la matrice de mélange  $M$  et des matrices  $F$  et  $L$  de dimensions  $np \times np$  et  $np \times n$ .

### 3 Identification par maximum de vraisemblance

La représentation précédente est paramétrée par les coefficients des modèles AR ( $F(\theta_{AR})$ ) et les coefficients du mélange ( $M$ ). On cherche dans un premier temps à identifier  $\theta_{AR}$  et  $M$  à partir d'un enregistrement de  $N$  points de l'observation  $(\mathbf{y}[k])_{1 \leq k \leq N}$  par maximum de vraisemblance sur le modèle :

$$\mathbf{x}[k+1] = F(\theta_{AR}) \mathbf{x}[k] + L \mathbf{v}[k] \quad (10)$$

$$\mathbf{y}[k] = M L^T \mathbf{x}[k] \quad (11)$$

Soit la matrice de covariance du vecteur  $\mathbf{x}[k]$ ,  $P[k] = E \mathbf{x}[k] \mathbf{x}[k]^T$ . D'après (10) on a la récurrence :

$$P[k+1] = F(\theta_{AR}) P[k] F^T(\theta_{AR}) + L L^T \quad (12)$$

En remplaçant  $P[k]$  par sa valeur constante stationnaire  $P$ , la covariance de  $\mathbf{x}[k]$  est posée comme étant la solution de l'équation de Lyapunov :

$$P = F(\theta_{AR}) P F^T(\theta_{AR}) + L L^T \quad (13)$$

Elle est donc paramétrée par  $\theta_{AR}$  ( $P(\theta_{AR})$ ). Soit  $\mathbf{Y}$  le vecteur des observations concaténées,  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}[1]^T \dots \mathbf{y}[N]^T]^T$ , de dimensions  $Nm \times 1$  et soit  $V$  sa matrice de covariance. Pour  $(i, j) \in [1, N]^2, j \geq i$  on a :

$$\begin{aligned} E \mathbf{y}[i] \mathbf{y}[j]^T &= (M L^T) E \mathbf{x}[i] (F^{j-i} \mathbf{x}[i])^T (M L^T)^T \\ &= (M L^T) P (F^T)^{j-i} (L M^T) \end{aligned} \quad (14)$$

En posant pour la lisibilité  $G = M L^T$  et en omettant dans les notations les dépendances en  $\theta_{AR}$  et  $M$  de  $F$  et  $G$ , la matrice  $V$  a donc la forme bloc-Toeplitz suivante :

$$V(\theta_{AR}, M) = \begin{bmatrix} G P G^T & G P F^T G^T & \cdots & G P (F^T)^{N-1} G^T \\ G F P G^T & G P G^T & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & G P F^T G^T \\ G F^{N-1} P G^T & \cdots & G F P G^T & G P G^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sans autre information sur la distribution de  $\mathbf{Y}$ , les valeurs estimées de  $\theta_{AR}$  et  $M$  au sens du maximum de vraisemblance sous hypothèse gaussienne sont celles qui maximisent la valeur d'une distribution gaussienne centrée de variance  $V(\theta_{AR}, M)$  pour la réalisation  $\mathbf{Y}$ . En prenant le logarithme de la vraisemblance on obtient ainsi le critère à minimiser :

$$J(\theta_{AR}, M) = \log \det V(\theta_{AR}, M) + \mathbf{Y}^T V^{-1}(\theta_{AR}, M) \mathbf{Y} \quad (16)$$

Ce critère est calculé par un algorithme de Levinson en tirant parti de la structure bloc-Toeplitz de  $V(\theta_{AR}, M)$ . Dans nos simulations, la minimisation est effectuée par la méthode du simplexe de Nelder-Mead.

### 4 Reconstruction des sources

Les paramètres  $\theta_{AR}$  et  $M$  ayant été identifiés on reconstruit le vecteur d'état  $\mathbf{x}[k]$  par un filtrage de Kalman standard stationnaire sur les équations (10) et (11). L'estimation des sources correspond à certaines composantes du vecteur d'état estimé; d'après la définition de l'état  $\mathbf{x}[k]$  on a :

$$\mathbf{s}[k] = L^T \mathbf{x}[k] \quad (17)$$

Soit  $\hat{\theta}_{AR}$  et  $\hat{M}$  les valeurs estimées de  $\theta_{AR}$  et  $M$  par minimisation du critère  $J(\theta_{AR}, M)$  et soit  $\hat{F} = F(\hat{\theta}_{AR})$ . L'estimation  $\hat{\mathbf{x}}[k]$  de l'état  $\mathbf{x}[k]$  par filtrage de Kalman stationnaire s'obtient de façon récurrente par :

$$\hat{\mathbf{x}}[k] = \hat{F} \hat{\mathbf{x}}[k-1] + K (\mathbf{y}[k] - \hat{M} L^T \hat{F} \hat{\mathbf{x}}[k-1]) \quad (18)$$

où le gain de Kalman  $K$  s'exprime par :

$$K = \bar{P} L \hat{M}^T (\hat{M} L^T \bar{P} L \hat{M}^T)^{-1} \quad (19)$$

et où  $\bar{P}$  est la solution de l'équation de Riccati discrète :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \hat{F} \bar{P} \hat{F}^T + L L^T \\ &\quad - \hat{F} \bar{P} L \hat{M}^T (\hat{M} L^T \bar{P} L \hat{M}^T)^{-1} L \hat{M}^T \bar{P} \hat{F}^T \end{aligned} \quad (20)$$

L'estimation des sources est alors (d'après (17)) :

$$\hat{\mathbf{s}}[k] = L^T \hat{\mathbf{x}}[k] \quad (21)$$

Cette estimation des sources par filtrage de Kalman stationnaire est non biaisée et asymptotiquement optimale

(c'est-à-dire que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $E[(\mathbf{s}[k] - \hat{\mathbf{s}}[k])(\mathbf{s}[k] - \hat{\mathbf{s}}[k])^T]$  converge vers sa valeur optimale). On pourra remarquer que le filtre est à reconstruction parfaite puisqu'on a :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}[k] &= \hat{M} \hat{\mathbf{s}}[k] \\ &= \hat{M} L^T \hat{\mathbf{x}}[k] \\ &= \hat{M} L^T \hat{F} \hat{\mathbf{x}}[k-1] + \\ &\quad \hat{M} L^T K (\mathbf{y}[k] - \hat{M} L^T \hat{F} \hat{\mathbf{x}}[k-1]) \\ &= \mathbf{y}[k] \quad (\text{car } M L^T K = I, \text{ d'après (19)})\end{aligned}$$

Il est bien connu qu'en matière de séparation de sources, dans le cas général, les sources ne peuvent être reconstruites qu'à une inversion, une permutation et un gain près. Dans notre cas l'indétermination sur le gain est levée en fixant une variance unitaire des séquences blanches  $(v_i[k])_{1 \leq i \leq n}$ .

## 5 Simulations

Nous avons réalisé plusieurs simulations avec 2 sources autorégressives d'ordre 1 ou 2 et 1 ou 2 observations. Pour chaque simulation nous avons tracé l'observation, les sources reconstruites, comparées aux sources réelles, et les densités spectrales de puissance (DSP) des sources d'après les coefficients AR estimés et comparés aux DSP réelles.

Dans le premier exemple (figure 1) nous considérons un mélange de deux sources AR d'ordre 1 de coefficients respectifs  $a_1 = -0.99$  et  $a_2 = 0$  (l'une des sources est donc un bruit blanc), la matrice de mélange vaut  $[1 \ 4]$  et on ne possède donc qu'une observation. Les coefficients de simulation et les coefficients estimés sont regroupés dans le tableau 1.

TAB. 1 – Identification de 2 sources d'ordre 1 d'après 1 observation.

	$s_1$	$s_2$	M
Simulation	$a_1 = -0.990$	$a_2 = 0.000$	[1.000 4.000]
Estimation	$a_1 = -0.986$	$a_2 = -0.002$	[1.038 4.156]

Dans le deuxième exemple (figure 2) nous considérons un mélange de deux sources AR d'ordre 2 dont on ne dispose que d'une observation. Les sources sont construites de façon à avoir des DSP disjointes (tableau 2).

TAB. 2 – Identification de 2 sources d'ordre 2 de DSP disjointes d'après 1 observation.

	$s_1$	$s_2$	M
Sim.	$a_{1,1} = -1.718$ $a_{1,2} = 0.854$	$a_{2,1} = 1.585$ $a_{2,2} = 0.854$	[1.000 1.500]
Estim.	$a_{1,1} = -1.678$ $a_{1,2} = 0.830$	$a_{2,1} = 1.548$ $a_{2,2} = 0.846$	[1.105 1.474]

Les résultats de la séparation dans le cas sous-déterminé restent bons tant que les sources sont de DSP essentiellement disjointes, comme dans l'exemple précédent. Dans le cas où les DSP des sources ne sont plus disjointes, on peut améliorer la qualité des résultats en rajoutant une observation, comme dans le troisième exemple où l'on considère

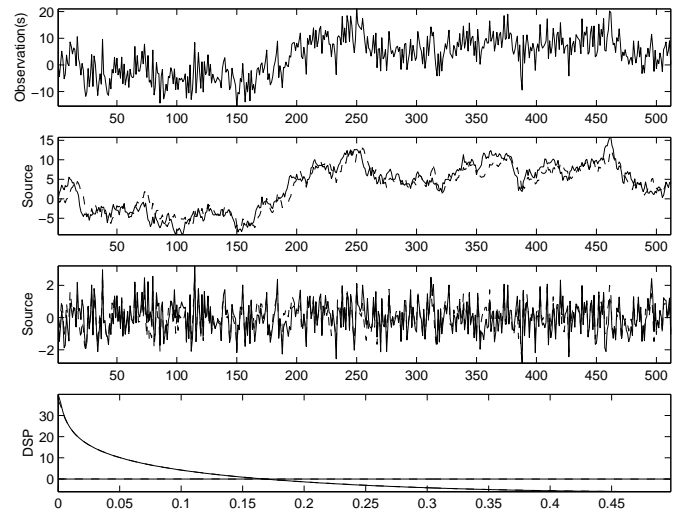


FIG. 1 – 2 sources d'ordre 1, 1 observation - Simulations en trait plein, estimations en tirets.

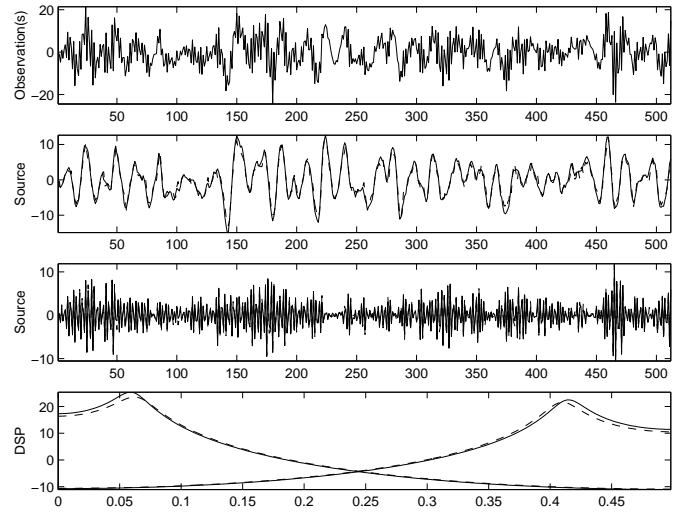


FIG. 2 – 2 sources d'ordre 2, 1 observation - Simulations en trait plein, estimations en tirets.

un mélange de deux sources AR d'ordre 2 de DSP non disjointes et deux observations (figure 3 et tableau 3).

## 6 Conclusions

Les résultats de ces simulations montrent qu'il est possible de séparer des sources autorégressives gaussiennes dans le cas sous-déterminé. Cela est rendu possible en apportant comparativement aux méthodes complètement aveugles l'hypothèse supplémentaire d'une structure particulière des sources (elles sont supposées autorégressives).

La précision des résultats dépend dans une large mesure du contenu spectral des sources (les DSP). Des sources de DSP disjointes sont très bien estimées sur la base d'une seule observation, en revanche la qualité des résultats s'estompe lorsque les sources ne sont plus de support spectral disjoint. Dans ce cas, afin d'améliorer la séparation, il est nécessaire de rajouter une observation ce qui a pour effet

TAB. 3 – Identification de 2 sources d'ordre 2 de DSP non disjointes d'après 2 observations.

	$s_1$	$s_2$	M	
Sim.	$a_{1,1} = -0.842$	$a_{2,1} = 0.000$	1.000	2.000
	$a_{1,2} = 0.158$	$a_{2,2} = 0.158$	-1.000	1.000
Estim.	$a_{1,1} = -0.857$	$a_{2,1} = -0.058$	0.927	1.965
	$a_{1,2} = 0.178$	$a_{2,2} = 0.169$	-1.042	0.965

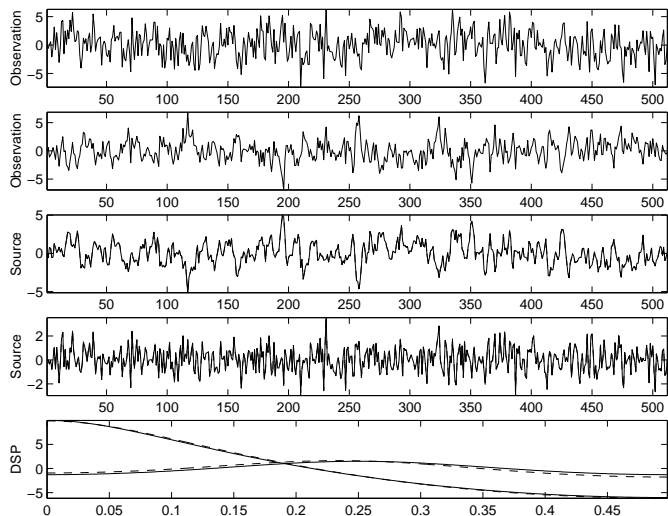


FIG. 3 – 2 sources d'ordre 2, 2 observations - Simulations en trait plein, estimations en tirets.

de considérablement améliorer la précision de l'estimation.

Le point sensible de la méthode demeure la minimisation du critère de vraisemblance  $J(\theta_{AR}, M)$ . Les caractéristiques de ce dernier n'ont pas été étudiées en détail et l'optimisation échoue parfois sur des minima locaux, notamment lorsque l'on augmente le nombre de paramètres (plus de sources ou plus de coefficients AR). De surcroît la procédure de minimisation par la méthode employée (calcul du critère par algorithme de Levinson et optimisation par la méthode du simplexe de Nelder-Mead) est très longue. Des améliorations doivent donc être apportées à ce niveau de la procédure, dont les résultats statistiques sur plusieurs essais restent à valider.

Outre ce point sensible, un intérêt de cette méthode est que l'on peut envisager de l'appliquer à des sources autorégressives de distribution autre que gaussienne. En effet le critère de maximum de vraisemblance reste valide (bien qu'il soit écrit ici sous hypothèse gaussienne de l'observation) et le filtre de Kalman tel qu'il est écrit (18) reste l'estimateur des sources optimal dans la classe des estimateurs linéaires. Des essais encourageants ont été effectués avec des séquences autorégressives de Bernoulli afin de modéliser des trains d'impulsions.

Enfin, il semble naturel d'étendre la méthode au cas ARMA. Mais se pose alors le problème des modèles spectralement équivalents; même dans le cas AR, existe-t-il des lots de paramètres  $(\theta_{AR}, M)$  pour lesquels le modèle proposé n'est pas localement identifiable? Si c'est le cas, on peut proposer, dans le cas de sources non gaussiennes, de lever l'indetermination à l'aide des

statistiques d'ordre supérieur, en sélectionnant, parmi tous les modèles spectralement équivalents, celui qui maximise le kurtosis des entrées  $v_i[k]$  reconstruites [6].

## Références

- [1] Jean-François Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proceedings of the IEEE. Special issue on blind identification and estimation*, 9(10) :2009–2025, October 1998.
- [2] Dinh-Tuan Pham and Phillippe Garat. Blind separation of mixture of independant sources through a quasi-maximum likelihood approach. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(7) :1712–1725, 1997.
- [3] Dinh-Tuan Pham and Jean-François Cardoso. Blind separation of instantaneous mixtures of non stationary sources. In *Proceedings of ICA*, pages 187–192, Helsinki, Finlande, 2000.
- [4] Adel Belouchrani, Karim Abed Meraim, Jean-François Cardoso, and Éric Moulines. A blind source separation technique based on second order statistics. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(2) :434–44, February 1997.
- [5] S. Dégerine and A. Zaidi. Maximum de vraisemblance exact pour la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives gaussiennes. In *GRETSI*, volume 4, pages 1141–1144, Vannes, France, September 1999.
- [6] M. Boumahdi and J.L. Lacoume. Blind identification of non-minimum phase filters by maximising the kurtosis. In *EUSIPCO*, pages 195–198, Edimbourg, Écosse, September 1994.