La logique modale des modèles d'équilibre

Luis Fariñas del Cerro — Andreas Herzig

Université de Toulouse
IRIT, CNRS
`http://www.irit.fr`

RÉSUMÉ. Les modèles ici-et-là-bas et les modèles d'équilibre ont été étudiés comme cadre sémantique pour la programmation par ensembles réponses par Pearce, Cabalar, Lifschitz, Ferraris et d'autres. La sémantique de la logique de l'équilibre est indirecte dans le sens que la notion de satisfiabilité est définie en termes de satisfiabilité dans la logique ici-et-là-bas. Nous donnons ici une sémantique directe de la logique de l'équilibre en termes d'un langage modal dans lequel le langage de la logique de l'équilibre peut être traduit.

ABSTRACT. Here-an-there models and equilibrium models were investigated as a semantical framework for answer ensemble programming by Pearce, Cabalar, Lifschitz, Ferraris and others. The semantics of equilibrium logic is indirect in that the notion of satisfiability is defined in terms of satisfiability in the logic of here-and-there. We here give a direct semantics of equilibrium logic, stated in terms of a modal language into which the language of equilibrium logic can be embedded.

MOTS-CLÉS : modèles ici-et-là-bas, logique de l'équilibre, logique bi-modale, programmation par ensembles réponses

KEYWORDS: equilibrium logic, here-and-there models, bimodal logic, answer-set programming

1. Introduction

Une grande partie des contributions de Pascal Nicolas porte sur la programmation par ensembles réponse (*answer set programming*, ASP), où il a contribué autant aux méthodes de preuve et implémentations (Stéphan *et al.*, 2009) qu'à ses extensions (Nicolas *et al.*, 2006; Nicolas *et al.*, 2005). Le présent article s'intéresse à la sémantique de ce formalisme.

Il existe plusieurs sémantiques pour la programmation par ensembles réponse (Lifschitz, 2010). Ici nous allons re-examiner le cadre sémantique fourni par les modèles de l'équilibre. Ces derniers sont définis eux-mêmes à partir des modèles ici-et-là-bas (*here-and-there models* en anglais, appelés dorénavant modèles HT). Notre travail adopte la perspective de la logique modale : nous allons concevoir une sémantique des mondes possibles qui permettra une axiomatisation des formules valides dans les modèles d'équilibre. Nous espérons que cette nouvelle sémantique modale pour le ASP facilitera son extension par des concepts modaux tels que le temps ou le savoir et le croire.

Un modèle ici-et-là-bas (*here-and-there model* en anglais, appelé dorénavant modèle HT) est constitué de deux ensembles de variables propositionnelles : un ensemble 'ici' H (*here* en anglais) et un ensemble 'là-bas' T (*there* en anglais) tel que $H \subseteq T$. Le langage logique de ces modèles possède des connecteurs $\bot$, $\wedge$, $\vee$, et $\Rightarrow$. Ce dernier est interprété d'une manière non-classique et diffère donc de l'implication matérielle $\rightarrow$ de la logique classique.

$$H, T \models \varphi \Rightarrow \psi \quad \text{ssi} \quad H, T \models \varphi \rightarrow \psi \text{ et } T, T \models \varphi \rightarrow \psi$$

où $\rightarrow$ est interprété exactement comme en logique classique :

$$H, T \models \varphi \rightarrow \psi \quad \text{ssi} \quad H, T \not\models \varphi \text{ or } H, T \models \psi$$

De tels modèles ont été étudiés depuis Gödel afin de donner une sémantique à une implication ayant une force située entre l'implication intuitionniste et l'implication matérielle (Heyting, 1930). Plus tard ils ont été étudiés par Pearce, Cabalar, Lifschitz, Ferraris et d'autres comme base de la logique de l'équilibre. Cette dernière fournit un cadre sémantique pour la programmation par ensembles réponse (*answer set programming*, ASP) (Pearce, 1996; Lifschitz *et al.*, 2001; Pearce *et al.*, 2000; Cabalar *et al.*, 2007a; Cabalar *et al.*, 2007b; Ferraris *et al.*, 2007; Lifschitz, 2010). Nous référons le lecteur à la page web sur la logique de l'équilibre [1] pour plus de détails.

Les modèles d'équilibre d'une formule φ sont définis d'une manière indirecte basée sur les modèles HT : un modèle d'équilibre de φ est un ensemble de variables propositionnelles T tel que

1) $T, T \models \varphi$, et

1. http://www.equilibriumlogic.net

2) il n'y a pas de modèle HT (H, T) tel que H est *plus faible* que T et $H, T \models \varphi$,

où 'plus faible' signifie que H est strictement inclus dans T. Par exemple, $T = \emptyset$ est un modèle d'équilibre de $p \Rightarrow \bot$ car (1) pour le modèle HT $(\emptyset, \emptyset)$ nous avons $\emptyset, \emptyset \models p \Rightarrow \bot$ et car (2) il n'y a pas d'ensemble H qui est strictement inclus dans l'ensemble vide.

Nous donnons ici une sémantique directe de la logique de l'équilibre en termes d'un langage modal avec deux opérateurs modaux [T] et [S]. En gros, [T] permet de parler du monde-là-bas : une valuation qui est au moins aussi forte que la valuation actuelle ; et [S] permet de parler de tous les mondes-ici qui sont possibles si nous prenons le monde actuel comme monde-là-bas : il quantifie sur toutes les valuations qui sont plus faibles que le monde actuel. Ce langage est également interprété dans des modèles HT. Nous donnons aussi une sémantique en termes de modèles de Kripke. Nous appelons notre **MEM** : la logique modale des modèles d'équilibre (*the Modal logic of Equilibrium Models*). Nous relions le langage de la logique de l'équilibre à notre langage bimodal moyennant une traduction *tr*. La clause principale de la traduction est la suivante :

$$tr(\varphi \Rightarrow \psi) = (tr(\varphi) \to tr(\psi)) \land [\mathrm{T}](tr(\varphi) \to tr(\psi))$$

Nous démontrons que φ a un modèle HT si et seulement si sa traduction $tr(\varphi)$ est satisfaisable dans **MEM**. Cela ouvre le chemin à la preuve que φ est une conséquence de χ dans la logique de l'équilibre si et seulement si la formule modale

$$[\mathrm{T}]\,(tr(\chi) \land [\mathrm{S}]\neg tr(\chi)) \to [\mathrm{T}]tr(\varphi)$$

est valide dans **MEM**.

Notre article est organisé comme suit. En section 2 nous introduisons notre logique modale des modèles d'équilibre **MEM** en présentant la sémantique et l'axiomatique. En section 3 nous rappellons la logique de ici-et-là-bas et la logique de l'équilibre. En section 4 nous définissons la traduction *tr* du langage de la logique ici-et-là-bas à la logique modale ; nous démontrons qu'une formule φ du premier langage a un modèle HT si et seulement si $tr(\varphi)$ a un modèle HT, et que φ a un modèle d'équilibre si et seulement si $[\mathrm{T}](tr(\varphi) \land [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi))$ a un modèle HT. La section 5 conclut.

Une première tentative de relier la logique modale à la logique de l'équilibre dans le style de notre approche a été présentée dans (Fariñas del Cerro *et al.*, 2011a). Le présent article est une version légèrement étendue de l'article (Fariñas del Cerro *et al.*, 2011b). [2]

2. Avec l'aimable permission de Springer Science+Business Media : Luis Fariñas del Cerro and Andreas Herzig, The Modal Logic of Equilibrium Models. Cesare Tinelli, Viorica Sofronie-Stokkermans (Eds.), Frontiers of Combining Systems, 8th International Symposium, FroCoS 2011. Lecture Notes in Computer Science, Volume 6989, 2011, Pages 135-146.

2. La logique modale des modèles d'équilibre MEM

Nous introduisons maintenant la logique modale des modèles d'équilibre **MEM**. Nous procédons de la manière classique : nous commençons par définir son langage bimodal et sa sémantique, avant d'axiomatiser l'ensemble de ses formules valides.

2.1. *Langage*

Tout au long de cet article nous supposons un ensemble dénombrable de variables propositionnelles $\mathbb{P}$. Les éléments de $\mathbb{P}$ sont dénotés par p, q, etc. Notre langage $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ est bimodal : il a deux opérateurs modaux [T] et [S]. Précisément, $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ est défini par la grammaire suivante :

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi \to \varphi \mid [\mathrm{T}]\varphi \mid [\mathrm{S}]\varphi$$

où p est un élément de $\mathbb{P}$. La formule $[\mathrm{T}]\varphi$ peut être lue "φ est vrai dans le monde-là-bas" et $[\mathrm{S}]\varphi$ peut être lue "φ est vrai dans tout monde plus petit".

L'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans la formule φ est dénoté par $\mathbb{P}_\varphi$.

$\mathcal{L}_{[\mathrm{T}]}$ est le sous-langage des formules de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ sans [S]. Les formules de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}]}$ sont donc construites seulement à partir de [T] et les connecteurs booléens.

Nous utilisons les abréviations standard des connecteurs booléens : $\top \stackrel{\mathsf{def}}{=} \perp \to \perp$, $\neg\varphi \stackrel{\mathsf{def}}{=} \varphi \to \perp$, $\varphi \vee \psi \stackrel{\mathsf{def}}{=} \neg\varphi \to \psi$, et $\varphi \wedge \psi \stackrel{\mathsf{def}}{=} \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De plus, $\langle \mathrm{T}\rangle\varphi$ et $\langle \mathrm{S}\rangle\varphi$ abrévient respectivement $\neg[\mathrm{T}]\neg\varphi$ et $\neg[\mathrm{S}]\neg\varphi$.

2.2. *Les modèles de Kripke de* MEM

Nous interprétons les formules de notre langage $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ dans des modèles de Kripke satisfaisant certaines contraintes. Nous donnons ensuite une axiomatique de l'ensemble des formules valides dans cette classe de modèles et démontrons sa complétude.

Les modèles de **MEM** sont la classe de modèles de Kripke $M = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ tels que

– W est un ensemble (les mondes possibles) ;

– V est une valuation sur W associant à chaque monde possible $w \in W$ un ensemble de variables propositionnelles $V_w \subseteq \mathbb{P}$;

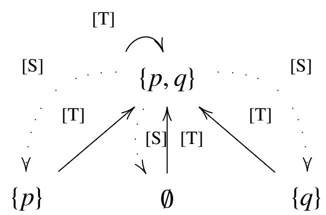

Figure 1. *Exemple de modèle* **MEM**

– $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subseteq W \times W$ sont des relations on W tels que :

(d)	pour tout w il y a un monde $v \in W$ tel que $w\mathcal{T}v$;
(alt)	pour tout w, si $w\mathcal{T}v$ et $w\mathcal{T}v'$ alors $v = v'$;
(hérédité)	pour tout w, u, si $w\mathcal{S}u$ alors $V_u \subseteq V_w$;
(compl)	pour tout w, pour tous les sous-ensembles finis P, Q de V_w tels que $P \cap Q = \emptyset$ et $P \neq \emptyset$ il y a un u tel que : $w\mathcal{S}u$, $V_u \cap P = \emptyset$ et $Q \subseteq V_u$;
(mtrans)	pour tout w, u, v, si $w\mathcal{S}u$ et $u\mathcal{T}v$ alors $w\mathcal{T}v$;
(wconv)	pour tout w, v, si $w\mathcal{T}v$ alors $w = v$ or $v\mathcal{S}w$;

Les deux premières contraintes sont à propos de la relation $\mathcal{T}$; les deux suivantes sont à propos de la relation $\mathcal{S}$, et les deux dernières sont à propos des deux. Les contraintes (d) et (alt) stipulent qu'en tout monde w il y a exactement un monde possible qui est accessible à travers $\mathcal{T}$. La contrainte (hérédité) est identique à la contrainte d'hérédité de la logique intuitionnistique, mis à part le fait que la relation intuitionniste est l'inverse de $\mathcal{S}$. Dans le cas fini la contrainte (compl) de complétude du passé dit essentiellement que pour tout w, l'ensemble des mondes accessibles à partir de w contient tous les mondes u dont les valuations V_u sont incluses dans V_w. La contrainte de transitivité mixte (mtrans) ensemble avec (d) et (alt) entraîne que dans des parties du graphe M qui sont connexes à travers $\mathcal{S}$ il y a un monde-là-bas unique. La contrainte de l'inverse faible (wconv) stipule que $\mathcal{T}$ est contenu dans $\mathcal{S}^{-1} \cup id_W$, où $id_W = \{\langle w, w\rangle \ : \ w \in W\}$ est l'identité sur W.

Un exemple de modèle est dans la figure 1. Les ensembles attachés aux nœuds donnent la valuation ; par exemple, dans le monde d'en haut il y a p et q qui sont tous les deux vrais.

Écrivons $\mathcal{T}(w)$ pour l'unique monde qui est est accessible par $\mathcal{T}$ à partir de w. La fonction $\mathcal{T}$ est bien définie grâce aux contraintes (d) et (alt). La contrainte (wconv) peut alors être reformulée comme : $\mathcal{T}(w) = w$ or $\mathcal{T}(w)\mathcal{S}w$ pout tout $w \in W$.

Proposition 1 *Chaque modèle de* **MEM** *satisfait les propriétés suivantes.*

1) Pour tout w, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(w)) = \mathcal{T}(w)$.

2) Pour tout w, u, si $w\mathcal{S}u$ alors $\mathcal{T}(w) = \mathcal{T}(u)$.

3) Pour tout w tel que V_w est fini, l'ensemble $\{V_u : w\mathcal{S}u\}$ est ou bien égal à $\{V : V \subseteq V_w\}$, or bien à $\{V : V \subset V_w\}$.

Cette dernière propriété est due à la contrainte (compl) et stipule que pour des valuations V_w finies, l'ensemble des valuations associées aux mondes accessibles à partir de w à travers $\mathcal{S}$ est ou bien l'ensemble des sous-ensembles de V_w, ou bien l'ensemble des sous-ensembles stricts de V_w : ou bien il est égal à 2^{V_w}, ou bien il est égal à $2^{V_w} \setminus \{V_w\}$. Nous allons faire usage de cette propriété dans la démonstration de la proposition 8.

2.3. *Conditions de vérité*

Les conditions de vérité pour notre langage bimodal sont standard. La relation $\mathcal{T}$ interprète [T] et la relation $\mathcal{S}$ interprète [S] :

$$\begin{array}{lll} M, w \models p & \text{ssi} & p \in V_w \\ M, w \not\models \bot & & \\ M, w \models \varphi \to \psi & \text{ssi} & M, w \not\models \varphi \text{ ou } M, w \models \psi \\ M, w \models [\mathrm{T}]\varphi & \text{ssi} & M, \mathcal{T}(w) \models \varphi \\ M, w \models [\mathrm{S}]\varphi & \text{ssi} & M, u \models \varphi \text{ pour tout } u \text{ tel que } w\mathcal{S}u \end{array}$$

Par exemple, dans le monde d'en haut du modèle de la figure 1 la formule

$$p \wedge q \wedge [\mathrm{T}](p \wedge q) \wedge [\mathrm{S}]\neg(p \wedge q)$$

est vraie.

Quand $M, w \models \varphi$ alors nous disons que φ possède un modèle de **MEM**. De plus, nous disons que φ est *valide dans les modèles* **MEM** si et seulement si $M, w \models \varphi$ pour tout modèle M et monde possible w de M. Finalement, φ est *satisfaisable dans les modèles* **MEM** si et seulement si $\neg\varphi$ n'est pas **MEM** valide, c.-à-d. si et seulement si il existe un modèle M et un monde possible w de M tels que $M, w \models \varphi$.

La proposition suivante affirme que lorsque nous souhaitons savoir si une formule est satisfaisable alors il suffit d'examiner des modèles avec des valuations finies.

Proposition 2 *Soit φ une formule de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$. Soit $M = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ un modèle de* **MEM***, c.-à-d. un modèle de Kripke satisfaisant (d), (alt), (hérédité), (compl), (mtrans), et (wconv). Soit la valuation V^φ définie par :*

$$V_w^\varphi = V_w \cap \mathbb{P}_\varphi, \text{ pour tout } w \in W$$

Alors $M^\varphi = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V^\varphi\rangle$ est un modèle de de **MEM** *(un modèle de Kripke satisfaisant (d), (alt), (hérédité), (compl), (mtrans) et (wconv)), et $M, w \models \varphi$ si et seulement si $M^\varphi, w \models \varphi$.*

DÉMONSTRATION. Il peut être montré par induction sur la forme de φ que $M, w \models \varphi$ si et seulement si $M^\varphi, w \models \varphi$.

Quant aux contraintes, celles portant seulement sur les deux relations d'accessibilité sont clairement préservées car nous n'avons modifié que la valuation. Le modèle M^φ satisfait la contrainte (hérédité) : supposons que $w\mathcal{S}u$; comme M satisfait (hérédité) nous avons $V_u \subseteq V_w$; d'où $V_u^\varphi \subseteq V_w^\varphi$. Finalement, le modèle M^φ satisfait (compl) : supposons $P, Q \subseteq V_w^\varphi = V_w \cap \mathbb{P}_\varphi$ sont des ensembles finis tels que $P \neq \emptyset$; comme M satisfait (compl) il existe un monde u tel que $w\mathcal{S}u$ et $V_u \cap P = \emptyset$ et $Q \subseteq V_u$. Pour cet u nous avons clairement aussi $V_u^\varphi \cap P = \emptyset$; et pour le même u nous avons aussi $Q \subseteq V_u^\varphi = V_u \cap \mathbb{P}_\varphi$. q.e.d.

Notons que cette propriété diffère de la propriété de modèle fini habituelle en logique modale (qui elle requiert également un ensemble fini de mondes possibles).

2.4. *Axiomatisation*

Nous allons maintenant donner une axiomatique des formules valides de **MEM**.

Nous commençons par définir le fragment des *formules booléennes positives* de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ par la grammaire suivante :

$$\varphi^+ ::= p \mid \varphi^+ \wedge \varphi^+ \mid \varphi^+ \vee \varphi^+$$

Notons que toute formule booléenne positive est falsifiable. Notons également que $\top$ n'est pas une formule booléenne positive.

K([T])	les axiomes et règles d'inférence de la logique modale **K** for [T]	
K([S])	les axiomes et règles d'inférence de la logique modale **K** pour [S]	
D([T])	$[\mathrm{T}]\varphi \to \langle \mathrm{T}\rangle\varphi$	
Alt([T])	$\langle \mathrm{T}\rangle\varphi \to [\mathrm{T}]\varphi$	
Hérédité([S])	$\langle \mathrm{S}\rangle\varphi^+ \to \varphi^+$	pour φ^+ formule booléenne positive
Niable([S])	$(\varphi^+ \wedge \psi^+) \to \langle \mathrm{S}\rangle(\neg\varphi^+ \wedge \psi^+)$	pour φ^+, ψ^+ formule booléenne positive telle que $\mathbb{P}_{\varphi^+} \cap \mathbb{P}_{\psi^+} = \emptyset$
MTrans([S], [T])	$[\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{S}][\mathrm{T}]\varphi$	
WConv([T], [S])	$\varphi \to [\mathrm{T}](\varphi \vee \langle \mathrm{S}\rangle\varphi)$	

Tableau 1. *Axiomatisation de* **MEM**

Nous dressons la liste de nos schémas d'axiome et règles d'inférence dans le tableau 1. Nous rappelons que **K**([T]) et **K**([S]) ensemble axiomatisent la logique bimodale de base $\mathbf{K}([\mathrm{T}]) \oplus \mathbf{K}([\mathrm{S}])$. Les schémas d'axiome D([T]) et Alt([T]) sont standard en logique modale. Le schéma Hérédité([S]) est la contrepartie syntaxique de la contrainte sémantique d'hérédité de la logique intuitionniste. Notons qu'il pourrait être remplacé par le schéma d'axiome $\langle \mathrm{S} \rangle p \to p$, où p est une variable propositionnelle. Il pourrait également être remplacé par $\neg\varphi^+ \to [\mathrm{S}]\neg\varphi^+$, où φ^+ est une formule booléenne positive. Le schéma Niable([S]) garantit que l'opérateur modal [S] quantifie sur tous les sous-ensembles stricts de la valuation actuelle. Le schéma MTrans([S], [T]) est un axiome de transitivité mutuelle. Le schéma WConv([T], [S]) est un axiome de conversion faible qui est familier des logiques du temps (*tense logics*).

Les notions de démonstration et de *démontrabilité* d'une formule sont définies comme d'habitude en logique modale. Par exemple la formule $[\mathrm{S}]\bot \to \neg p$ peut être démontrée à partir de Niable([S]) par $\mathbf{K}([\mathrm{S}])$, c.-à-d. par des principes modaux standard. Les démonstration de l'axiome de transitivité $[\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{T}][\mathrm{T}]\varphi$ et de son inverse sont un peu plus longues.

Proposition 3 *Le schéma* $[\mathrm{T}]\varphi \leftrightarrow [\mathrm{T}][\mathrm{T}]\varphi$ *est démontrable.*

DÉMONSTRATION.

1) $[\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{T}]([\mathrm{T}]\varphi \vee \langle \mathrm{S} \rangle [\mathrm{T}]\varphi)$ (axiome WConv([T], [S]))
2) $\langle \mathrm{S} \rangle [\mathrm{T}]\varphi \to \langle \mathrm{S} \rangle \langle \mathrm{T} \rangle \varphi$ (axiome D([T]) et $\mathbf{K}$([S]))
3) $\langle \mathrm{S} \rangle \langle \mathrm{T} \rangle \varphi \to \langle \mathrm{T} \rangle \varphi$ (axiome MTrans([S], [T]))
4) $\langle \mathrm{T} \rangle \varphi \to [\mathrm{T}]\varphi$ (axiome Alt([T]))
5) $\langle \mathrm{S} \rangle [\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{T}]\varphi$ (de 2, 3, 4)
6) $[\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{T}]([\mathrm{T}]\varphi \vee [\mathrm{T}]\varphi)$ (de 1 et 5)
7) $[\mathrm{T}]\varphi \to [\mathrm{T}][\mathrm{T}]\varphi$ (de 6)
8) $[\mathrm{T}][\mathrm{T}]\varphi \to \langle \mathrm{T} \rangle \langle \mathrm{T} \rangle \varphi$ (axiome D([T]) deux fois, et $\mathbf{K}$([S]))
9) $\langle \mathrm{T} \rangle \varphi \to \langle \mathrm{T} \rangle \langle \mathrm{T} \rangle \varphi$ (de 4, 7, 8)
10) $[\mathrm{T}]\varphi \leftrightarrow [\mathrm{T}][\mathrm{T}]\varphi$ (de 7, 9)

q.e.d.

Le schéma suivant va également s'avérer utile dans la suite.

Proposition 4 *Le schéma de formule suivant est démontrable :*

Niable′([S]) $\quad \big((\bigwedge_{p \in P} p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q)\big) \to \langle \mathrm{S} \rangle \big((\bigwedge_{p \in P} \neg p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q)\big)$
pour $P, Q \subseteq \mathbb{P}$ *fini,* P *non vide, et* $P \cap Q = \emptyset$

Démonstration. Niable′([S]) peut être démontré à partir de Niable([S]) comme suit. Supposons $P, Q \subseteq \mathbb{P}$ fini, P non vide et $P \cap Q = \emptyset$. L'implication

$$((\bigwedge_{p \in P} p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q)) \rightarrow ((\bigvee_{p \in P} p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q))$$

est valide en logique classique propositionnelle. Alors Niable′([S]) suit avec le schéma d'axiome Niable([S]). q.e.d.

Notre axiomatique est adéquate et complète par rapport à l'ensemble des formules valides en **MEM**.

Théorème 1 *Soit φ une formule de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$. φ est valide en* **MEM** *si et seulement si φ est démontrable à partir des axiomes et règles d'inférence de* **MEM**.

Démonstration. L'adéquation se montre comme d'habitude, en démontrant que toute instance d'axiome est valide et que les règles d'inférence préservent la validité. Considérons juste le cas de l'axiome Niable([S]). Soient φ^+ et ψ^+ des formules booléennes positives telles que $\mathbb{P}_{\varphi^+} \cap \mathbb{P}_{\psi^+} = \emptyset$. Supposons que $M, w \models \varphi^+ \wedge \psi^+$. Mettons φ^+ en forme normale conjonctive, et soit $\kappa = (\bigvee P)$ une clause ce cette forme normale conjonctive, pour un $P \subseteq \mathbb{P}_{\varphi^+} \neq \emptyset$. (Observons que $P \neq \emptyset$ par la définition des formules positives.) Soit $P_w = P \cap V_w$. Nous avons $P_w \neq \emptyset$ car $M, w \models \kappa$. Soit $Q = \mathbb{P}_\varphi \setminus P_w$. Comme M satisfait (compl) il y a un $u \in W$ tel que $u\mathcal{T}w$, $V_u \cap P_w = \emptyset$ et $Q \subseteq V_w$. Donc $M, u \not\models \kappa$, d'où $M, u \not\models \varphi^+$. Comme $\mathbb{P}_{\varphi^+} \cap \mathbb{P}_{\psi^+} = \emptyset$ et comme V_u diffère de V_w seulement par des variables de $\mathbb{P}_{\varphi^+}$, nous avons également $M, u \models \psi^+$. Donc $M, u \models \neg\varphi^+ \wedge \psi^+$, d'où $M, w \models \langle \mathrm{S} \rangle(\neg\varphi^+ \wedge \psi^+)$.

Afin de démontrer la complétude par rapport aux modèles de **MEM** nous faisons appel aux modèles canoniques (Blackburn *et al.*, 2001; Carnielli *et al.*, 2009). Considérons l'ensemble W d'ensembles maximaux consistants de **MEM**. Définissons les relations d'accessibilité $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ sur W de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} u\mathcal{T}w & \text{ssi } \{\varphi \ : \ [\mathrm{T}]\varphi \in u\} \subseteq w \\ u\mathcal{S}w & \text{ssi } \{\varphi \ : \ [\mathrm{S}]\varphi \in u\} \subseteq w \end{array}$$

et définissons une valuation V telle que $V_w = w \cap \mathbb{P}$ pour tout $w \in W$. Démontrons que le modèle canonique est un modèle légal de **MEM**.

– Les axiomes D([T]) et Alt([T]) garantissent que $\mathcal{T}$ est une fonction totale, c.-à-d. le modèle canonique satisfait les contraintes (d) et (alt).

– L'axiome Hérédité([S]) garantit que le modèle canonique satisfait la contrainte d'hérédité, à savoir que $w\mathcal{S}u$ implique $V_u \subseteq V_w$. En effet, supposons $w\mathcal{S}u$ et $p \in u$. Comme u contient $\langle \mathrm{S} \rangle p \rightarrow p$ et comme w est maximal consistant nous avons $p \in w$.

– L'axiome Niable([S]) garantit la contrainte (compl). Pour le voir considérons un $w \in W$ et deux ensembles finis de variables propositionnelles $P, Q \subseteq w \cap V_w$ telles que

P est non vide. Comme w est un ensemble maximal consistant il contient $(\bigwedge_{p \in P} p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q)$. Comme par proposition 4 w contient chaque instance de Niable$'$([S]) il doit également contenir $\langle S \rangle((\bigwedge_{p \in P} \neg p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q))$. Donc par définition de $\mathcal{S}$ il y a un $u \in W$ tel que $u\mathcal{S}w$ et u contient $(\bigwedge_{p \in P} \neg p) \wedge (\bigwedge_{q \in Q} q)$. Donc $P \cap u = \emptyset$ et $Q \subseteq u$.

– L'axiome de conversion faible WConv([T], [S]) garantit la contrainte (wconv).

– L'axiome de transitivité mixte MTrans([S], [T]) garantit la contrainte (mtrans).

En résumé, le modèle canonique satisfait toutes les contraintes. Il est donc un modèle légal de **MEM**.

La démonstration du lemme de vérité (*truth lemma*) se fait comme d'habitude. q.e.d.

3. Logique HT et logique de l'équilibre

Dans cette section nous allons définir formellement la logique HT et la logique de l'équilibre.

3.1. *Le langage $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$*

Le langage $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$ est commun à la logique HT et la logique de l'équilibre. Il est défini par la grammaire suivante :

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \Rightarrow \varphi$$

où p est un élément de $\mathbb{P}$. Les autres connecteurs booléens sont définis comme abréviations de la même manière que pour notre langage modal : la négation $\neg\varphi$ est définie comme $\varphi \Rightarrow \bot$, et $\top$ est défini comme $\bot \Rightarrow \bot$.

3.2. *Logique ici-et-là-bas*

Un *modèle HT* est un couple (H, T) tel que $H \subseteq T \subseteq \mathbb{P}$. L'ensemble T est appelé 'là-bas' et H est appelé 'ici'.

Soit (H, T) un modèle HT. Les conditions de vérité pour les formules de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$ sont comme suit :[3]

$$
\begin{array}{lll}
H, T \models p & \text{ssi} & p \in H \\
H, T \not\models \bot & & \\
H, T \models \varphi \wedge \psi & \text{ssi} & H, T \models \varphi \text{ et } H, T \models \psi \\
H, T \models \varphi \vee \psi & \text{ssi} & H, T \models \varphi \text{ ou } H, T \models \psi \\
H, T \models \varphi \Rightarrow \psi & \text{ssi} & H, T \models \varphi \to \psi \text{ et } T, T \models \varphi \to \psi
\end{array}
$$

Quand $H, T \models \varphi$ alors nous disons que (H, T) est un modèle HT de φ. Une formule φ est *HT valide* si et seulement si chaque modèle HT est aussi un modèle HT de φ.

3.3. *Logique de l'équilibre*

Un *modèle d'équilibre* d'une formule φ de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$ est un ensemble de variables propositionnelles $T \subseteq \mathbb{P}$ tel que

1) (T, T) est un modèle HT de φ ;
2) aucun (H, T) avec $H \subset T$ est un modèle HT de φ.

Voici deux exemples. D'abord, l'ensemble vide est le seul modèle d'équilibre et de $\top$ et de $\neg p$: par exemple pour $\{q\}$ il existe le sous-ensemble strict $\emptyset$ tel que $\emptyset, \{q\} \models \top$ et $\emptyset, \{q\} \models p$. Ensuite, l'ensemble $\{p\}$ n'est *pas* un modèle d'équilibre de $\neg p \Rightarrow q$ car $\emptyset, \{p\} \not\models \neg p \Rightarrow q$.

Soient φ et χ des formules de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$. φ est une *conséquence de χ dans les modèles d'équilibre*, écrit $\chi \models_{HT^*} \varphi$, si et seulement si pour tout modèle d'équilibre T de χ, (T, T) est un modèle HT de φ. Par exemple nous avons $\top \models_{HT^*} \neg p$ et $\neg p \Rightarrow q \models_{HT^*} q$.

3.4. *Une remarque sur l'interprétation de $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ dans des modèles HT*

À ce point le lecteur peut se poser la question pourquoi nous n'avons pas interprété le langage $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ de **MEM** directement dans les modèles HT. Les conditions de vérité seraient naturellement les suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
H, T \models p & \text{ssi} & p \in H \\
H, T \not\models \bot & & \\
H, T \models \varphi \to \psi & \text{ssi} & H, T \not\models \varphi \text{ or } H, T \models \psi \\
H, T \models [\mathrm{T}]\varphi & \text{ssi} & T, T \models \varphi \\
H, T \models [\mathrm{S}]\varphi & \text{ssi} & h, T \models \varphi \text{ pour tout } h \subset H
\end{array}
$$

Ces conditions sont naturelles car elles permettent d'exprimer par $[\mathrm{S}]\varphi$ que φ est vrai dans chaque valuation H qui est strictement plus faible que la valuation actuelle.

3. Dans la dernière clause nous utilisons l'implication matérielle comme raccourci afin de donner une formulation plus concise. En détail, la condition de vérité pour $\to$ est la condition habituelle pour l'implication matérielle : $H, T \models \varphi \to \psi$ ssi $H, T \not\models \varphi$ ou $H, T \models \psi$.

Cependant, il y a des $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ formules qui sont valides dans les modèles HT mais non dans les modèles de **MEM**. Prenons la formule suivante :

$$\varphi = [\mathrm{S}](\neg p \vee \neg q) \wedge \langle \mathrm{S}\rangle\langle \mathrm{S}\rangle p$$

D'abord, φ est insatisfaisable dans les modèles HT. En effet, pour tout H tel que $H, T \models [\mathrm{S}](\neg p \vee \neg q)$ nous avons ou bien $H = \{p, q\}$, ou bien $p \notin H$, or $q \notin H$; pour cette raison nous ne pouvons avoir $H, T \models \langle \mathrm{S}\rangle\langle \mathrm{S}\rangle p$. Ensuite, considérons le **MEM** modèle $M = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ tel que

$$\begin{array}{lcl} W & = & 2^{\{p,q\}} \cup \{p'\} \\ \mathcal{T} & = & W \times \{\{p, q\}\} \\ \mathcal{S} & = & \supset \cup \{(\{p\}, \{p'\}), (\{p'\}, \emptyset))\} \\ V_w & = & \begin{cases} \{p\} & \text{si } w = \{p'\} \\ w & \text{si } w \neq \{p'\} \end{cases} \end{array}$$

M est bien un modèle de **MEM**, et $M, \{p, q\} \models \varphi$.

Nous laissons ouverte la question d'une axiomatique complète des formules valides dans les modèles HT.

4. De la logique HT et la logique de l'équilibre à la logique modale

Dans cette section nous allons traduire la logique HT et la logique de l'équilibre en notre logique **MEM**.

4.1. *Traduction de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$ à $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}]}$*

Nous commençons par une traduction du langage $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$ (qui est à la fois celui de la logique HT et de la logique de l'équilibre) vers le langage $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}]}$ de **MEM**. Nous définissions récursivement l'application *tr* comme suit :

$$\begin{array}{lcl} tr(p) & = & p \quad \text{pour } p \in \mathbb{P} \\ tr(\bot) & = & \bot \\ tr(\varphi \wedge \psi) & = & tr(\varphi) \wedge tr(\psi) \\ tr(\varphi \vee \psi) & = & tr(\varphi) \vee tr(\psi) \\ tr(\varphi \Rightarrow \psi) & = & (tr(\varphi) \to tr(\psi)) \wedge [\mathrm{T}](tr(\varphi) \to tr(\psi)) \end{array}$$

La traduction combine la traduction de Gödel de la logique intuitionniste vers la logique modale **S4**, avec la traduction de Boolos de la logique modale **S4** vers la logique modale **K4**. La clause principale de la première est $tr(\varphi \Rightarrow \psi) = \Box(tr(\varphi) \to tr(\psi))$, pour un opérateur $\Box$ de la **S4**. La clause principale de la dernière est $tr(\Box\varphi) = tr(\varphi) \wedge [\mathrm{T}]tr(\varphi)$, où [T] est un opérateur de **K4** (l'opérateur de notre logique bimodale).

Voici quelques exemples.

$$tr(\top) = tr(\bot \Rightarrow \bot) = (\bot \rightarrow \bot) \wedge [\mathrm{T}](\bot \rightarrow \bot).$$

La dernière formule est équivalente à $\top$ dans toute logique modale normale.

$$tr(\neg p) = tr(p \Rightarrow \bot) = (p \rightarrow \bot) \wedge [\mathrm{T}](p \rightarrow \bot).$$

Cette dernière formule est équivalente à $\neg p \wedge [\mathrm{T}]\neg p$ dans toute logique modale normale.

$$tr(p \vee \neg p) = tr(p) \vee tr(p \Rightarrow \bot) = p \vee ((p \rightarrow \bot) \wedge [\mathrm{T}](p \rightarrow \bot)).$$

Cela est équivalent à $p \vee [\mathrm{T}]\neg p$ dans toute logique modale normale.

Notons qu'une formule traduite peut être exponentiellement plus longue que la formule d'origine.

Notre traduction va nous servir à relier la logique HT et la logique de l'équilibre, à la logique modale **MEM**.

4.2. *De la logique HT à la logique* MEM

Sur les modèles HT le fragment $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}]}$ du langage $\mathcal{L}_{[\mathrm{T}],[\mathrm{S}]}$ est au moins aussi expressif que as $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$, modulo la traduction *tr*.

Proposition 5 *Soit T un ensemble de variables propositionnelles et soit $M_T = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ un quadruple tel que :*

$$\begin{array}{lcl} W & = & 2^T; \\ V_h & = & h, \quad \textit{pour tout } h \in W; \\ \mathcal{T} & = & W \times \{T\}; \\ \mathcal{S} & = & \supset. \end{array}$$

Alors M est un modèle de **MEM***, et $(H, T) \models \varphi$ si et seulement si $M_T, H \models tr(\varphi)$, pour tout $H \subseteq T$ et pour toute formule φ de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$.*

Ainsi, dans la dernière ligne $\mathcal{S}$ est définie comme étant la relation de sur-ensemble strict sur 2^T. Par exemple pour le modèle HT $(\emptyset, \emptyset)$ nous obtenons $M_\emptyset = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ avec $W = \{\emptyset\}$, $\mathcal{T} = \{\langle\emptyset, \emptyset\rangle\}$, et $\mathcal{S} = \emptyset$; et pour le modèle HT $(\emptyset, \{p\})$ nous obtenons $M_{\{p\}} = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ avec $W = \{\emptyset, \{p\}\}$, $\mathcal{T} = \{\langle\emptyset, \{p\}\rangle, \langle\{p\}, \{p\}\rangle\}$, et $\mathcal{S} = \{\{p\}, \emptyset\}\}$.

Démonstration. D'abord, M est un modèle légal de **MEM** : M satisfait les contraintes (d), (alt), (hérédité), (compl), (mtrans), et (wconv). Ensuite, on peut montrer par induction sur la forme de φ que $H, T \models \varphi$ ssi $M, T \models \varphi$, pour tout $H \subseteq T$. Un autre exemple est le modèle de la figure 1 qui peut être obtenu à partir des modèles HT $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \{p\})$, $(\emptyset, \{q\})$ et $(\emptyset, \{p, q\})$. q.e.d.

Proposition 6 *Soit $M = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ be a un modèle de* **MEM***. Alors $M, w \models tr(\varphi)$ si et seulement si $V_w, V_{\mathcal{T}(w)} \models \varphi$, pour tout $w \in W$ et pour toute formule φ de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$.*

DÉMONSTRATION. Comme le lecteur s'y attendait probablement, la démonstration est par induction sur la forme de φ. Le seul cas non trivial est celui de l'implication intuitionniste $\psi_1 \Rightarrow \psi_2$. Nous avons :

$$\begin{array}{lll} M, w \models tr(\psi_1 \Rightarrow \psi_2) & \text{ssi} & M, w \models tr(\psi_1) \rightarrow tr(\psi_2) \text{ et } M, \mathcal{T}(w) \models tr(\psi_1) \rightarrow tr(\psi_2) \\ & \text{ssi} & V_w, V_{\mathcal{T}(w)} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2 \text{ et } V_{\mathcal{T}(w)}, V_{\mathcal{T}(w)} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2 \quad \text{(par H.I.)} \\ & \text{ssi} & V_w, V_{\mathcal{T}(w)} \models \psi_1 \Rightarrow \psi_2 \end{array}$$

q.e.d.

Théorème 2 *Soit φ une formule de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$. Alors φ est HT valide si et seulement si $tr(\varphi)$ est* **MEM** *valide.*

DÉMONSTRATION. Ceci est une conséquence de la proposition 5 et de la proposition 6.
q.e.d.

4.3. *De la logique de l'équilibre à la logique* MEM

C'est exactement la même construction que pour la logique HT qui nous permet de transformer des modèles d'équilibre en modèles de **MEM**.

Proposition 7 *Soit $T \subseteq \mathbb{P}$ et soit $M_T = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V \rangle$ un quadruple tel que :*

$$\begin{array}{lll} W & = & 2^T \\ V_h & = & h, \quad \textit{pour tout } h \in W \\ \mathcal{T} & = & W \times \{T\} \\ \mathcal{S} & = & \supset \end{array}$$

Alors M_T est un modèle de **MEM***, et T est un modèle d'équilibre de φ si et seulement si $M_T, \mathcal{T}(H) \models tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi)$, pour tout $H \subseteq T$ et pour toute formule φ de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$.*

DÉMONSTRATION. D'abord, M_T est bien un modèle de **MEM** car il est défini de la même manière qu'en proposition 5. Par définition T est un modèle d'équilibre de φ si et seulement si $T, T \models tr(\varphi)$ et $H, T \not\models tr(\varphi)$ pour tout $H \subset T$. Selon la proposition 5, T est un modèle d'équilibre de φ si et seulement si $M_T, T \models tr(\varphi)$ et $M_T, H \not\models tr(\varphi)$ pour tout $H \subset T$. Comme $T\mathcal{S}H$ si et seulement si H est un sous-ensemble strict de T, il s'ensuit que $H \subset T$ si et seulement si $M_T, T \models tr(\varphi)$ et $M_T, H \not\models tr(\varphi)$ pour tout H tel que $T\mathcal{S}H$, c.-à-d. si et seulement si $M_T, T \models tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi)$. Donc $M_T, \mathcal{T}(H) \models [\mathrm{T}](tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi))$ pour tout $H \in W$ (car T est le seul élément de W tel que $H\mathcal{T}T$). q.e.d.

Proposition 8 *Soit $M = \langle W, \mathcal{T}, \mathcal{S}, V\rangle$ un modèle de* **MEM***, soit $q \in \mathbb{P} \backslash \mathbb{P}_\varphi$ une variable propositionnelle n'apparaissant pas dans φ, et soit T défini comme suit :*

$$T = \begin{cases} V_{\mathcal{T}(w)} & \textit{si } V_u \subset V_w \textit{ pour tout } u \textit{ tel que } w\mathcal{S}u \\ V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\} & \textit{si } V_u = V_w \textit{ for un certain } u \textit{ tel que } w\mathcal{S}u \end{cases}$$

Alors pour tout $w \in W$, $M, \mathcal{T}(w) \models tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi)$ si et seulement si T est un modèle d'équilibre de φ.

Démonstration. Par la proposition 2 nous pouvons supposer sans perte de généralité que V_w est fini pour tout $w \in W$. Considérons les deux cas séparément.

Le premier cas est quand $V_u \subset V_w$ pour tout u tel que $w\mathcal{S}u$. Par le point 3 de proposition 1 l'ensemble des mondes accessibles par $\mathcal{S}$ est égal à l'ensemble des sous-ensembles stricts de V_w. D'où :

$$\begin{array}{lll} & M, \mathcal{T}(w) \models tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi) & \\ \text{ssi} & M, \mathcal{T}(w) \models tr(\varphi) \text{ et } M, u \not\models tr(\varphi) \text{ pour tout } u \text{ tel que } \mathcal{T}(w)\mathcal{S}u & \\ \text{ssi} & V_{\mathcal{T}(w)}, V_{\mathcal{T}(w)} \models \varphi \text{ et } V_u, V_{\mathcal{T}(w)} \not\models \varphi \text{ pour tout } u \text{ tel que } \mathcal{T}(w)\mathcal{S}u & \text{(par prop. 6)} \\ \text{ssi} & V_{\mathcal{T}(w)}, V_{\mathcal{T}(w)} \models \varphi \text{ et } H, V_{\mathcal{T}(w)} \not\models \varphi \text{ pour tout } H \subset V_{\mathcal{T}(w)} & \text{(v.s.)} \\ \text{ssi} & T, T \models \varphi \text{ et } H, T \not\models \varphi \text{ pour tout } H \subset T & \end{array}$$

Dans le second cas, si $V_u = V_w$ pour u tel que $w\mathcal{S}u$ alors nous avons $T = V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\}$. D'où :

$$\begin{array}{lll} & M, \mathcal{T}(w) \models tr(\varphi) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\varphi) & \\ \text{ssi} & M, \mathcal{T}(w) \models tr(\varphi) \text{ et } M, u \not\models tr(\varphi) \text{ pour tout } u \text{ tel que } \mathcal{T}(w)\mathcal{S}u & \\ \text{ssi} & V_{\mathcal{T}(w)}, V_{\mathcal{T}(w)} \models \varphi \text{ et } V_u, V_{\mathcal{T}(w)} \not\models \varphi \text{ pour tout } u \text{ tel que } \mathcal{T}(w)\mathcal{S}u & \text{(par prop. 6)} \\ \text{ssi} & V_{\mathcal{T}(w)}, V_{\mathcal{T}(w)} \models \varphi \text{ et } H, V_{\mathcal{T}(w)} \not\models \varphi \text{ pour tout } H \subseteq V_{\mathcal{T}(w)} & \text{(v.s.)} \\ \text{ssi} & V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\}, V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\} \models \varphi \text{ et } H, V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\} \not\models \varphi \text{ pour tout } H \subseteq V_{\mathcal{T}(w)} \cup \{q\} & \\ \text{ssi} & T, T \models \varphi \text{ et } H, T \not\models \varphi \text{ pour tout } H \subset T & \end{array}$$

q.e.d.

Considérons par exemple l'ensemble $T = \emptyset$ et la formule $\varphi = \top$. Nous avons vu plus haut que $\emptyset$ est le seul modèle d'équilibre de $\top$. D'une manière similaire, $(\emptyset, \emptyset)$ est le seul modèle HT de $[\mathrm{T}]\,(tr(\top) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\top))$. Ceci peut être vu en simplifiant ce dernier :

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{T}]\,(tr(\top) \wedge [\mathrm{S}]\neg tr(\top)) & \leftrightarrow & [\mathrm{T}]\,(\top \wedge [\mathrm{S}]\neg\top) \\ & \leftrightarrow & [\mathrm{T}][\mathrm{S}]\bot \end{array}$$

Comme nous l'avons vu, le seule modèle HT de $[\mathrm{T}][\mathrm{S}]\bot$ est $(\emptyset, \emptyset)$.

Nous sommes maintenant prêts pour la grande finale où nous allons capturer la logique de l'équilibre dans notre logique **MEM**.

Théorème 3 *Soient φ et χ des formules de $\mathcal{L}_{\Rightarrow}$. Alors $\chi \models_{HT^*} \varphi$ si et seulement si*

$$[\mathrm{T}]\,(tr(\chi) \land [\mathrm{S}]\neg tr(\chi)) \rightarrow [\mathrm{T}]tr(\varphi)$$

est valide en **MEM**.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence des propositions 7 et 8. q.e.d.

Étudions un exemple. Nous avons vu que $\top \models_{HT^*} \neg p$, c.-à-d. que $\neg p$ est une conséquence de $\top$ dans les modèles d'équilibre. Nous avons vu en section 4.1 que $tr(\top)$ est équivalent à $\top$ et que $tr(\neg p)$ est équivalent à $\neg p \land [\mathrm{T}]\neg p$. Le théorème 3 nous dit que la formule $\varphi = [\mathrm{T}](tr(\top) \land [\mathrm{S}]\neg tr(\top)) \rightarrow [\mathrm{T}](tr(\neg p))$ doit être démontrable à partir des axiomes et règles d'inférence de **MEM**. Ceci peut être établi par la séquence suivante de formules équivalentes :

1) $[\mathrm{T}](tr(\top) \land [\mathrm{S}]\neg tr(\top)) \rightarrow [\mathrm{T}](tr(\neg p))$

2) $[\mathrm{T}](\top \land [\mathrm{S}]\neg\top) \rightarrow [\mathrm{T}](\neg p \land [\mathrm{T}]\neg p)$ (v.s.)

3) $[\mathrm{T}][\mathrm{S}]\bot \rightarrow ([\mathrm{T}]\neg p \land [\mathrm{T}][\mathrm{T}]\neg p)$ (par **K**([T]))

4) $[\mathrm{T}][\mathrm{S}]\bot \rightarrow ([\mathrm{T}]\neg p \land [\mathrm{T}]\neg p)$ (par prop. 3)

5) $[\mathrm{T}][\mathrm{S}]\bot \rightarrow [\mathrm{T}]\neg p$

La dernière ligne est démontrable dans notre logique : en effet, nous avons vu que $[\mathrm{S}]\bot \rightarrow \neg p$ ne peut pas être démontré à partir de Niable([S]) par des principes modaux standard. À partir de cela nous pouvons démontrer la dernière formule de notre liste par des principes modaux standard. En conséquence la formule d'origine φ est démontrable dans notre logique.

5. Conclusion

Dans cet article nous avons introduit et étudié la logique modale **MEM** qui permet de caractériser les modèles d'équilibre. Nous avons montré qu'une logique avec deux opérateurs modaux [T] et [S] permet de capturer la minimisation qui est seulement exprimé dans le langage méta dans la définition standard des modèles d'équilibre. Nous avons montré que la satisfiabilité dans **MEM** est décidable et qu'elle peut être vérifiée en temps polynomial. Nous avons aussi formulé une axiomatique adéquate et complète.

Nous n'avons pas encore trouvé de borne inférieure pour la complexité de la satisfiabilité dans **MEM**. Il serait également intéressant de disposer d'une traduction du langage de la logique de l'équilibre vers notre logique **MEM** qui évite l'explosion exponentielle de la longueur de la formule de notre traduction actuelle. Ceci pourrait être fait d'une manière assez simple en intégrant un opérateur modal $[\mathrm{T}]_*$ dont la condition de vérité dans les modèles HT est :

$$H, T \models [\mathrm{T}]_*\varphi \quad \text{ssi} \quad H, T \models \varphi \text{ et } T, T \models \varphi$$

En termes de modèles de **MEM**, $[T]_*$ est interprété par la fermeture réflexive de la relation d'accessibilité $\mathcal{T}$ qui interprète [T]. Cependant, un désavantage de l'ajout d'un troisième opérateur modal est que le formalisme entier devient plus lourd.

Remerciements

Ce travail a été soutenu en partie par le laboratoire franco-espagnol *Laboratoire Européen Associé (LEA) "French-Spanish Lab de Advanced Studies in Information Representation et Processing"*. Nous remercions David Pearce et Levan Uridia pour leurs explications sur la logique de l'équilibre. Nous remercions Springer Verlag pour la permission de publier une version traduite de notre article (Fariñas del Cerro *et al.*, 2011b).

6. Bibliographie

Blackburn P., de Rijke M., Venema Y., *Modal Logic*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, University Press, 2001.

Cabalar P., Ferraris P., « Propositional theories are strongly equivalent to logic programs », *Theory and Practice of Logic Programming (TPLP)*, vol. 7, n° 6, p. 745-759, 2007a.

Cabalar P., Pearce D., Valverde A., « Minimal Logic Programs », *in* V. Dahl, I. Niemelä (eds), *Proc. ICLP*, vol. 4670 of *LNCS*, Springer Verlag, p. 104-118, 2007b.

Carnielli W. A., Pizzi C., Bueno-Soler J., *Modalities and Multimodalities*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, Springer Verlag, 2009.

Fariñas del Cerro L., Herzig A., « Contingency-based equilibrium logic », *in* J. Delgrande, W. Faber (eds), *Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning (LPNMR)*, n° 6645 in *LNCS*, Springer-Verlag, http ://www.springerlink.com/, p. 223-228, mai, 2011a.

Fariñas del Cerro L., Herzig A., « The modal logic of equilibrium models », *Frontiers of Combining Systems (FroCoS)*, Springer Verlag, http ://www.springerlink.com, 2011b.

Ferraris P., Lee J., Lifschitz V., « A New Perspective on Stable Models », *in* M. M. Veloso (ed.), *IJCAI*, p. 372-379, 2007.

Heyting A., « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik », *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, vol. 42-71, p. 158-169, 1930.

Lifschitz V., « Thirteen Definitions of a Stable Model », *in* A. Blass, N. Dershowitz, W. Reisig (eds), *Fields of Logic and Computation*, vol. 6300 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, p. 488-503, 2010.

Lifschitz V., Pearce D., Valverde A., « Strongly Equivalent Logic Programs », *ACM Transactions on Computational Logic*, vol. 2, n° 4, p. 526-541, 2001.

Nicolas P., Garcia L., Stéphan I., « Possibilistic Stable Models », *in* L. P. Kaelbling, A. Saffiotti (eds), *IJCAI*, Professional Book Center, p. 248-253, 2005.

Nicolas P., Garcia L., Stéphan I., Lefèvre C., « Possibilistic uncertainty handling for answer set programming », *Ann. Math. Artif. Intell.*, vol. 47, n° 1-2, p. 139-181, 2006.

Pearce D., « A New Logical Characterisation of Stable Models and Answer Sets », *in* J. Dix, L. M. Pereira, T. C. Przymusinski (eds), *NMELP*, vol. 1216 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, p. 57-70, 1996.

Pearce D., de Guzmán I. P., Valverde A., « A Tableau Calculus for Equilibrium Entailment », *in* R. Dyckhoff (ed.), *TABLEAUX*, vol. 1847 of *LNCS*, Springer Verlag, p. 352-367, 2000.

Stéphan I., Mota B. D., Nicolas P., « From (Quantified) Boolean Formulae to Answer Set Programming », *J. Log. Comput.*, vol. 19, n° 4, p. 565-590, 2009.