Réflexion sur quelques relations d'inférence non-monotone graduelles

Claudette CAYROL
Marie-Christine LAGASQUIE-SCHIEX

Rapport IRIT / 97.28.R

Juin 1997

Réflexion sur quelques relations d'inférence non-monotone graduelles

Claudette Cayrol
Marie-Christine Lagasquie-Schiex
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex
FRANCE

e-mail : {testemal, lagasq}@irit.fr

Résumé

Ce rapport présente un nouvel axe de recherche qui prolonge les travaux présentés dans [LS95]. On reste toujours dans le cadre d'une base ordonnée et, à partir de sous-bases ordonnées issues de la base initiale, on cherche à définir une relation d'inférence non-monotone basée sur un processus de vote qui permettrait de déduire une formule α quand il existe plus de "voix" pour cette formule que pour son contraire (une telle relation sera dite graduelle). Ceci revient à présenter un nouveau principe d'inférence dans le sens défini par [PL92].

Table des matières

Chapitre 1

Origine de l'idée

On part d'une formule propositionnelle α et d'une base stratifiée inconsistante de formules propositionnelles $(E,<) = (E_1,\ldots,E_m)$ avec E_1 la strate la plus prioritaire et E_m la strate la moins prioritaire. On se situe toujours dans le cadre de la restauration de cohérence : à partir de $(E,<)$, on sélectionne des sous-bases consistantes, puis on définit $E \mid\!\sim \alpha$ à partir de l'inférence classique de α par les sous-bases sélectionnées. Il existe ainsi de très nombreux procédés menant à la définition d'une relation d'inférence non-monotone (voir une synthèse comparative dans [LS95]).
Dans ce document, on cherche à définir une relation d'inférence non-monotone qui ne nécessiterait pas l'accord de toutes les sous-bases pour inférer une formule, tout en restant une relation sûre (impossibilité d'inférer à la fois α et sa négation). L'idée est de prendre en compte tous les "avis" et de déduire une formule s'il y a plus d'avis pour cette formule que pour son contraire. Nous considérerons qu'un avis doit être au minimum une sous-base consistante maximale pour l'inclusion de la base initiale.
Nous allons donc utiliser et développer une idée donnée initialement par [PL92], puis reprise par [Sme93, Lan94].
Le processus est le suivant :

Base		Sous-bases préférées (les avis)		Fonction de poids		Fonction de notation		Relation d'inférence non- monotone
	étape 1		étape 2		étape 3		étape 4	
	sélection		*pondération*		*notation*		*inférence*	
$(E,<)$	$\longrightarrow$	$\{Y_i\}$	$\longrightarrow$	$p : Y_i \rightarrow p(Y_i)$	$\longrightarrow$	$n : \alpha \rightarrow n(\alpha)$	$\longrightarrow$	$(E,<) \mid\!\sim \alpha$
				fc. de $(E,<)$		fc. de p		fc. de n

Si on veut utiliser la stratification de la base initiale, on peut agir soit au niveau de l'étape 1 (les sous-bases sélectionnées seront les préférées pour une relation dépendant de la stratification), soit au niveau de l'étape 2 (les poids attribués seront dépendants de la stratification).
Les différentes étapes de ce processus ont déjà fait l'objet de quelques études :

- l'étape 1 qui consiste à définir des sous-bases préférées Y_i à partir d'une base $(E,<)$ stratifiée a été traitée par de nombreux chercheurs (voir par exemple [Bre89, CRS92, DLP91, BCD$^+$93]) ; une synthèse de ces travaux est proposée dans [LS95] ;
- l'étape 2 qui consiste à définir un poids pour chaque sous-base sélectionnée a été traitée dans une optique possibiliste (voir [DLP91]) et dans une optique probabiliste (voir [Lan94]) ;
- l'étape 3 qui consiste à attribuer une note à une formule α a été traitée dans [Lan94] à l'aide de "belief functions" (fonctions de croyances représentant la probabilité de la déduction dans la théorie de Dempster-Shafer – voir [Sme93]) ;
- l'étape 4 qui consiste à définir la relation d'inférence non-monotone à partir des notes calculées précédemment a été étudiée dans [PL92, Lan94].

Dans chacune des études menées précédemment, les auteurs se plaçaient dans un cadre particulier. Par exemple :

- dans [PL92], Pinkas et Loui cherchent à définir différentes relations d'inférence non-monotone et ils s'intéressent plus particulièrement aux divers principes d'inférence utilisables en proposant une taxonomie des relations d'inférence ainsi définies du point de vue de la prudence ;

- dans [Sme93], Smets utilise les “belief functions” de la théorie de Dempster-Shafer exprimant la probabilité de la déduction afin de faire de la révision de croyances ;
- dans [Lan94], Lang part de problèmes de diagnostic et utilise des “belief functions” afin de définir des relations d'inférence non-monotone.

Les possibilités d'étude d'un tel processus sont très vastes puisqu'on peut jouer sur chacune des étapes indépendamment des autres (bien-sûr toutes les configurations ne sont pas forcément exploitables !). Récapitulons ici *quelques-unes* des options qui se présentent à nous :

- dans l'étape 1, les sous-bases préférées peuvent être soit des thèses (sous-bases maximales pour l'inclusion et consistantes), soit des thèses incl-préférées (voir [Bre89, CRS92, DLP91]), soit des thèses lex-préférées (voir [BCD+93]) ;
- dans l'étape 2, le poids des sous-bases sélectionnées peut être obtenu soit par l'emploi de probabilités soit par l'emploi de degrés possibilistes soit en donnant un poids identique à chaque sous-base ;
- dans l'étape 3, on peut jouer sur l'opérateur définissant la note d'une formule à partir des poids des sous-bases qui l'infèrent ; on a par exemple le choix entre l'addition ou le max ;
- dans l'étape 4, la définition de $E \mid\!\sim \alpha$ peut dépendre soit de la différence entre les notes de α et de $\neg\alpha$, soit du rapport entre ces mêmes notes ; on peut aussi faire intervenir la note de la formule “ni α, ni $\neg\alpha$”.

Chapitre 2

Nos choix et leurs justifications

Dans ce document, nous avons choisi d'étudier les 4 relations d'inférence non-monotone suivantes :

GRAD-POSADD-T sélectionnant en étape 1 les *thèses*, utilisant en étape 2 une fonction de poids issue des *degrés possibilistes*, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-POSMAX-T sélectionnant en étape 1 les *thèses*, utilisant en étape 2 une fonction de poids issue des *degrés possibilistes*, calculant les notes en faisant le *max des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-BEL-T sélectionnant en étape 1 les *thèses*, utilisant en étape 2 une fonction de poids issue des *probabilités*, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* (les notes sont alors des "belief functions" – voir [Lan94]) et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-EQU-INCL sélectionnant en étape 1 les *thèses incl-préférées*, utilisant en étape 2 une fonction de poids donnant le *même poids* à chaque sous-base sélectionnée, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

Les justifications Les thèses représentent des interprétations (au sens commun) de la base initiale $(E, <)$. Lorsqu'on ne tient pas compte de la stratification, chacune de ces sous-bases exprime donc un avis (une théorie, un comportement) et chaque avis est incohérent avec les autres avis. Si on veut prendre en compte la stratification de la base, les thèses incl-préférées (resp. lex-préférées) représentent alors des avis particuliers jugés plus pertinents : maximalité pour l'inclusion (resp. la cardinalité) strate par strate, de la plus prioritaire à la moins prioritaire. On utilise donc la stratification mais cela présente l'inconvénient de "cacher" certains avis (ceux jugés moins pertinents). Remarquons en particulier que l'application de la préférence lexicographique mène très souvent à limiter de manière drastique les sous-bases préferées. Cette préférence est donc peut-être un peu trop forte dans le cas qui nous préoccupe. En effet, l'idée de comparer les notes de α et de $\neg\alpha$ n'a de sens que si on a *plusieurs avis* à traiter (donc plusieurs sous-bases sélectionnées).
Dans les étapes 1 et 2, on va donc traiter deux cas bien distincts :

- sélection des thèses associée à l'utilisation d'un mécanisme de pondération prenant en compte le fait que certains avis sont préférés à d'autres ; on utilisera ainsi deux types de poids :
  - soit les poids issus de degrés possibilistes qui tiennent compte de la stratification : *on préférera les avis contenant le plus possible de formules prioritaires* ;
  - soit les poids issus des probabilités qui ne tiennent pas compte de la stratification mais introduisent une autre préférence basée sur la cardinalité : *on préférera les avis qui contiennent le plus possible de formules* ;
- sélection des thèses incl-préférées mais en utilisant cette fois une pondération considérant que tous les avis sélectionnés sont de même poids.

Ainsi, quand la stratification est prise en compte, elle ne l'est qu'une seule fois : soit à l'étape 1, soit à l'étape 2.

Pour l'étape 3, nous avons tout d'abord choisi d'utiliser l'addition pour calculer la fonction de notation à partir de la fonction de poids. Cela revient donc à compter les avis. Remarquons que, dans le cas de poids d'origine probabiliste, notre fonction de notation correspond aux "belief functions" (voir [Lan94]), alors que dans le cas des poids d'origine possibiliste, l'utilisation de l'addition ne correspond à rien de particulier. D'autre part, pour les poids d'origine possibiliste, nous avons aussi utilisé comme opérateur le max, ce qui nous ramène à un mécanisme d'inférence proche de l'inférence possibiliste (sans en avoir les défauts : pas de phénomène de "noyade" – voir [DLP91]).
Pour la dernière étape, nous avons choisi une définition de la relation d'inférence se rapprochant d'un processus de vote. En effet, on voit chaque sous-base sélectionnée comme un avis, et parmi ces avis, il y en a des plus ou moins pertinents (donc de poids plus ou moins importants). Puis "on vote" : certains pour α, d'autres pour $\neg\alpha$, d'autres ni pour α, ni pour $\neg\alpha$ (ceux sont les abstentions). Dans l'optique où l'on additionne les poids, cela revient à compter les "voix" pour et les "voix" contre (les avis considérés comme les plus pertinents représentant donc plus de "voix" que les autres) et c'est la proposition qui remporte le plus de "voix" qui l'emporte. Dans l'optique où l'on utilise le max des poids, cela revient à déterminer qui a le plus fort poids (ceux en faveur du pour ou ceux en faveur du contre) et c'est la proposition qui "pèse le plus lourd" qui l'emporte. Dans les deux cas, ces procédés nous conduisent donc à définir $E \mid\!\sim \alpha$ par $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$. La première inégalité doit être stricte puisque nous cherchons à obtenir une relation d'inférence non-monotone sûre. Quant à la seconde inégalité (non-stricte), elle s'explique par le fait que l'on cherche à inférer un maximum d'informations tout en restant crédible.
Pour finir, une remarque concernant le choix du nom de ces relations : le terme "graduelle" dans l'expression "relation d'inférence non-monotone graduelle" permet d'insister sur le fait que $E \mid\!\sim \alpha$ signifie juste que la note obtenue par α est meilleure que celle obtenue par $\neg\alpha$ et au moins aussi bonne que celle obtenue par ni α, ni $\neg\alpha$. Il permet aussi de signaler qu'il existe éventuellement des "avis" pour $\neg\alpha$ mais pas suffisamment pour contrebalancer ceux pour α.

Chapitre 3

Les définitions

On part d'une base stratifiée de formules propositionnelles $(E, <) = (E_1, \ldots, E_m)$ avec E_1 la strate la plus prioritaire et E_m la strate la moins prioritaire. On en déduit les thèses (sous-ensembles maximaux pour l'inclusion et consistants) notées Y_i $(i = 1 \ldots n)$.
Rappelons qu'il existe plusieurs techniques pour ordonner des thèses :

- à partir de l'ordre initial sur les formules, on obtient par exemple l'ordre Incl défini dans [Bre89, DLP91, CRS92] ;
- à partir de la cardinalité des thèses, et indépendamment de l'ordre initial entre les formules, on obtient l'ordre Car ;
- à partir de la cardinalité des thèses, et en utilisant l'ordre initial entre les formules, on obtient l'ordre Lex (voir dans [BCD+93]).

Tous ces ordres ont été étudiés dans [LS95].
Posons les définitions suivantes.

3.1 Définition du processus de sélection des sous-bases

Les processus de sélection présentés ici sont les mécanismes T et Incl (ces notations sont les mêmes que celles utilisées dans [LS95]).

Rappel 3.1.1 *Soit $(E, <)$ une base propositionnelle stratifiée, l'ensemble des sous-bases de $(E, <)$ sélectionnées par le processus de sélection* T *est l'ensemble des sous-bases maximales pour l'inclusion et consistantes de E (appelées aussi* thèses*).*

Rappel 3.1.2 *(voir [Bre89, CRS92, DLP91]) Soit $(E, <)$ une base propositionnelle stratifiée, l'ensemble des sous-bases de $(E, <)$ sélectionnées par le processus de sélection* Incl *est l'ensemble des sous-bases consistantes de E maximales pour l'inclusion strate par strate en partant de la plus prioritaire vers la moins prioritaire. Ces sous-bases sont aussi appelées* thèses incl-préférées*.*

Voir dans [LS95] la description plus précise de ces mécanismes.

3.2 Définition de la fonction de poids

Soit S un processus de sélection de sous-bases ($S = \{$T, Incl$\}$ – voir section 3.1), nous proposons trois définitions du poids d'une sous-base de la base $(E, <)$. La première est issue de [DLP91], la seconde est présentée dans [Lan94] et la dernière est triviale (chaque sous-base sélectionnée a pour poids 1).

Définition 3.2.1 *(voir [DLP91]) On définit la notion de* poids possibiliste *d'une sous-base Y_i de $(E, <)$ sélectionnée par S : si $Y_i \neq E$ alors $p_{po}(Y_i) = x$ (x = numéro de la strate la plus prioritaire dans laquelle on a supprimé une formule pour rétablir la consistance) et sinon $p_{po}(E) = m + 1$ (m = nombre max de strates dans $(E, <)$).*

Puis, afin de pouvoir utiliser des poids définis à l'aide de probabilités, nous posons les hypothèses suivantes :

- chaque formule de la base $(E, <)$ est considérée comme formant un tout (aspect syntaxique de la base au sens de [Neb91]) et indépendante des autres,
- $\forall \Phi_i \in (E, <)$, la probabilité que Φ_i soit fausse est très faible et égale à ϵ.

Définition 3.2.2 *(voir [Lan94]) On définit la notion de* poids probabiliste *d'une sous-base Y_i de $(E, <)$ sélectionnée par S : soit p le nombre de sous-bases consistantes maximales pour la cardinalité, soit k leur cardinalité, si $|Y_i| = k$ alors $p_{pr}(Y_i) = 1/p + O(\epsilon)$ et sinon si $|Y_i| < k$ alors $p_{pr}(Y_i) = O(\epsilon^{k-|Y_i|})$.*

Remarquons que la notion de poids probabiliste proposée par [Lan94] repose sur la cardinalité des sous-bases consistantes et pas du tout sur la stratification de la base.

Définition 3.2.3 *On définit la notion d'*équi–poids *d'une sous-base Y_i de $(E, <)$ sélectionnée par S : $\forall Y_i$ sous-base de $(E, <)$ sélectionnée par S, $p_{eq}(Y_i) = 1$.*

3.3 Définition de la fonction de notation

Soit Φ une formule, soit S un processus de sélection de sous-bases ($S = \{\mathrm{T}, \textsc{Incl}\}$ – voir section 3.1 page précédente), soit une fonction de poids p (voir section 3.2 page précédente), on considérera qu'une fonction de notation attribue à chaque formule Φ un triplet de valeurs numériques représentant respectivement la note de Φ, celle de $\neg\Phi$ et celle de "ni Φ, ni $\neg\Phi$". On définit ainsi les deux types de fonctions de notation suivantes :

Définition 3.3.1 *La fonction* additive n_a :

- $n_a(\Phi) = \Sigma_{i=j_1 \ldots j_n} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = j_1 \ldots j_n$ les sous-bases sélectionnées par S qui infèrent classiquement la formule Φ ;*
- $n_a(\neg\Phi) = \Sigma_{i=k_1 \ldots k_p} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = k_1 \ldots k_p$ les sous-bases sélectionnées par S qui infèrent classiquement la formule $\neg\Phi$;*
- $n_a(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi) = \Sigma_{i=l_1 \ldots l_q} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = l_1 \ldots l_q$ les sous-bases sélectionnées par S qui n'infèrent classiquement ni la formule Φ, ni la formule $\neg\Phi$.*

Définition 3.3.2 *La fonction* max n_m :

- $n_m(\Phi) = Max_{i=j_1 \ldots j_n} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = j_1 \ldots j_n$ les sous-bases sélectionnées par S qui infèrent classiquement la formule Φ ;*
- $n_m(\neg\Phi) = Max_{i=k_1 \ldots k_p} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = k_1 \ldots k_p$ les sous-bases sélectionnées par S qui infèrent classiquement la formule $\neg\Phi$;*
- $n_m(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi) = Max_{i=l_1 \ldots l_q} p(Y_i)$ *avec Y_i pour $i = l_1 \ldots l_q$ les sous-bases sélectionnées par S qui n'infèrent classiquement ni la formule Φ, ni la formule $\neg\Phi$.*

3.4 Définition de quelques relations d'inférence non-monotone graduelles

La définition générale est la suivante :

Définition 3.4.1 *Soit une fonction de notation n, on dira que $(E, <) \mid\!\sim \Phi$ ssi $n(\Phi) > n(\neg\Phi)$ et $n(\Phi) \geq n(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi)$.*

On peut maintenant instancier cette définition en fonction des diverses fonctions de notation, en utilisant les remarques suivantes :

- une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{po} sera notée n_{pa},
- une fonction de notation n_m définie à partir d'une fonction de poids p_{po} sera notée n_{pm},
- une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{pr} sera notée n_{bel},
- une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{eq} sera notée n_{eq},

- une fonction de notation n définie à partir du processus de sélection T sera notée n^T,
- une fonction de notation n définie à partir du processus de sélection INCL sera notée n^{In}.

Définition 3.4.2 *(relation* GRAD-POSADD-T*) Soit une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{po} et du processus de sélection* T*, donc notée n^T_{pa}, on dira que $(E,<) \mid\!\sim^{g,pa,T} \Phi$ ssi $n^T_{pa}(\Phi) > n^T_{pa}(\neg\Phi)$ et $n^T_{pa}(\Phi) \geq n^T_{pa}(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi)$.*

Définition 3.4.3 *(relation* GRAD-POSMAX-T*) Soit une fonction de notation n_m définie à partir d'une fonction de poids p_{po} et du processus de sélection* T*, donc notée n^T_{pm}, on dira que $(E,<) \mid\!\sim^{g,pm,T} \Phi$ ssi $n^T_{pm}(\Phi) > n^T_{pm}(\neg\Phi)$ et $n^T_{pm}(\Phi) \geq n^T_{pm}(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi)$.*

Définition 3.4.4 *(relation* GRAD-BEL-T*) Soit une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{pr} et du processus de sélection* T*, donc notée n^T_{bel}, on dira que $(E,<) \mid\!\sim^{g,bel,T} \Phi$ ssi $n^T_{bel}(\Phi) > n^T_{bel}(\neg\Phi)$ et $n^T_{bel}(\Phi) \geq n^T_{bel}(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi)$.*

Définition 3.4.5 *(relation* GRAD-EQU-INCL*) Soit une fonction de notation n_a définie à partir d'une fonction de poids p_{eq} et du processus de sélection* INCL*, donc notée n^{In}_{eq}, on dira que $(E,<) \mid\!\sim^{g,eq,In} \Phi$ ssi $n^{In}_{eq}(\Phi) > n^{In}_{eq}(\neg\Phi)$ et $n^{In}_{eq}(\Phi) \geq n^{In}_{eq}(ni\ \Phi, ni\ \neg\Phi)$.*

3.5 Quelques propriétés

3.5.1 Propriété sur les poids d'origine possibiliste

Soit une base $(E,<)$ inconsistante, on a la propriété suivante pour les poids d'origine possibiliste :

Propriété 3.5.1 *Toutes les sous-bases incl-préférées de E ont le même poids possibiliste p_{incl} et $\forall S$ une sous-base consistante de E qui n'est pas incl-préférée, on a $p(S) \leq p_{incl}$.*

Preuve : Notation : soit i un entier compris entre 1 et m (m nombre de strates de la base $(E,<)$), la strate numéro i d'une sous-base S de la base $(E,<)$ sera notée S_i.

Montrons d'abord que toutes les sous-bases incl-préférées de E ont le même poids p_{incl}. Soient Y et Z deux sous-bases incl-préférées de E. Donc $\forall i = 1 \ldots m$, $Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_i$ et $Z_1 \cup Z_2 \cup \ldots \cup Z_i$ sont des sous-bases maximales consistantes de $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_i$. Posons i_Y (respectivement i_Z) le plus petit indice i tel que $Y_i \subset E_i$ (respectivement $Z_i \subset E_i$) [1]. On a donc, par définition des poids possibilistes, $i_Y = p(Y)$ et $i_Z = p(Z)$.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $p(Y) \neq p(Z)$. Si $p(Y) < p(Z)$ alors $i_Y < i_Z$; donc, par définition de i_Z et i_Y, on a $Z_{i_Y} = E_{i_Y}$ alors que $Y_{i_Y} \subset E_{i_Y}$ et $\forall k < i_Y$, $Z_k = E_k$ et $Y_k = E_k$; ce qui revient à dire que Z est incl-préférée à Y ; donc contradiction avec l'hypothèse initiale. De la même façon, on montre qu'en partant de l'hypothèse $p(Z) < p(Y)$ on arrive à une contradiction. En conclusion, on a donc $p(Y) = p(Z)$.

Montrons maintenant que $\forall S$ sous-base consistante de E qui n'est pas incl-préférée, on a $p(S) \leq p_{incl}$ (avec p_{incl} le poids possibiliste des sous-bases incl-préférées de E). Soit S une sous-base consistante de E qui n'est pas incl-préférée, il existe toujours une sous-base Y qui est incl-préférée telle que Y est incl-préférée à S.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $p(S) > p_{incl}$. On sait d'après le premier point de la démonstration que $p_{incl} = p(Y) = i_Y$ et que $p(S) = i_S$. On a donc $S_{i_Y} = E_{i_Y}$ alors que $Y_{i_Y} \subset E_{i_Y}$ et $\forall k < i_Y$, $S_k = E_k$ et $Y_k = E_k$; ce qui revient à dire que S est incl-préférée à Y ; donc contradiction avec l'hypothèse initiale. En conclusion on a donc $p(S) \leq p_{incl}$. □

3.5.2 Propriété sur les poids d'origine probabiliste

Soit une base $(E,<)$ inconsistante, on a la propriété suivante pour les poids d'origine probabiliste :

Propriété 3.5.2 *Soient Y et S deux sous-bases consistantes de $(E,<)$ de poids d'origine probabiliste $p(Y)$ et $p(S)$. On a l'équivalence suivante : $p(Y) > p(S) \Leftrightarrow Y$ est car-préférée à S (c'est-à-dire $|Y| > |S|$).*

1. L'expression $Y_i \subset E_i$ signifie que Y_i est *strictement* contenu dans E_i.

Preuve : Prouvons d'abord que Y est car-préférée à $S \Rightarrow p(Y) > p(S)$:

Y est car-préférée à $S \Leftrightarrow |Y| > |S|$

D'autre part, on a deux cas à traiter :

- soit Y est une sous-base préférée pour la cardinalité (c'est-à-dire que $\forall Y'$ sous-base de $(E, <)$, $|Y| \geq |Y'|$), on a alors $p(Y) = 1/p + O(\epsilon)$, avec p = nombre de sous-bases préférées pour la cardinalité et ϵ très petit (donc $<$ à 1) ; et $p(S) = O(\epsilon^{|Y|-|S|})$; or ϵ étant très petit, on a $O(\epsilon^i) > O(\epsilon^{i+1})$ quel que soit i un entier naturel ; ainsi, on obtient $(1/p + O(\epsilon)) > O(\epsilon^{|Y|-|S|})$ puisque $|Y| > |S|$; donc $p(Y) > p(S)$;
- soit Y n'est pas une sous-base préférée pour la cardinalité, donc $p(Y) = O(\epsilon^{k-|Y|})$ et $p(S) = O(\epsilon^{k-|S|})$, avec k = la cardinalité des sous-bases préférées pour la cardinalité ; sachant que $|Y| > |S|$, on a donc $O(\epsilon^{k-|Y|}) > O(\epsilon^{k-|S|})$, donc $p(Y) > p(S)$.

Prouvons maintenant que $p(Y) > p(S) \Rightarrow Y$ est car-préférée à S :

Raisonnons par l'absurde en supposant que Y n'est pas car-préférée à S. On a donc deux cas à traiter :

- soit $|Y| = |S|$ et alors soit $p(Y) = p(S) = O(\epsilon^{k-|S|}) = O(\epsilon^{k-|Y|})$ si Y et S ne sont pas préférées pour la cardinalité, soit $p(Y) = p(S) = 1/p + O(\epsilon)$ si Y et S font partie des p sous-bases préférées pour la cardinalité ; dans les 2 cas, on arrive à une contradiction avec l'hypothèse $p(Y) > p(S)$;
- soit $|Y| < |S|$, donc S est car-préférée à Y et on en déduit que $p(Y) < p(S)$ (voir première partie de la démonstration), ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $p(Y) > p(S)$.

On arrive systématiquement à une contradiction. Donc Y est car-préférée à S. $\square$

Chapitre 4

Les exemples

Dans ce chapitre, sont donnés plusieurs exemples avec, à chaque fois, le résultat intuitif attendu, les résultats obtenus avec les 4 relations graduelles, ainsi que ceux fournis par d'autres relations d'inférence plus connues : Uni-T, Uni-Incl, Uni-Lex, Exi-Incl et Arg-Incl (voir le rappel de la définition de ces relations ainsi qu'une étude comparative dans [LS95]). À la fin de ce chapitre est donné un tableau récapitulatif des résultats (voir le tableau 4.1 page 18). Avant de traiter chacun des exemples, une section est destinée à l'interprétation d'un exemple donné afin de mettre en évidence diverses approches et nous situer par rapport à elles.

4.1 Interprétation d'un exemple

Il s'agit d'un exemple relativement simple représentant le problème des pingouins ailés :
soit la base suivante, avec trois strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", a pour "a des ailes") :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline o \to v \\ p \to \neg v \\ \hline o \to a \\ \hline a \to v \end{array}$$

Dans cette base, on trouve les 5 thèses suivantes (les thèses incl-préférées sont Y_1, Y_2 et la thèse lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	p	p	p	p	$p \to o$
	$p \to o$	$p \to o$	$p \to o$	$o \to v$	$o \to v$
	$o \to v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$
	$o \to a$	$o \to a$	$a \to v$	$o \to a$	$o \to a$
	$a \to v$			$a \to v$	$a \to v$
Formules inférées	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\nvdash v$ et $\nvdash \neg v$
	$\vdash a$	$\vdash a$	$\vdash \neg a$	$\vdash \neg a$	$\nvdash a$ et $\nvdash \neg a$

Nous avons donc 3 thèses qui infèrent $\neg v$, une qui infère v et une qui n'infère ni v, ni $\neg v$.
Remarquons d'autre part qu'il existe dans cette base un "argument" pour $\neg v$ ($\{p, p \to \neg v\}$), et deux "arguments" pour v ($\{p, p \to o, o \to v\}$ et $\{p, p \to o, o \to a, a \to v\}$). Ici, un "argument" pour une formule est une preuve logique de cette formule. Nous pouvons aussi remarquer que la longueur de chacun des arguments pour v est supérieure à celle de l'argument de $\neg v$ (donc il est plus long de prouver v que $\neg v$).
De plus, il est évident que chaque argument en faveur de v mène au moins à une sous-base en faveur de $\neg v$, alors que plusieurs arguments en faveur de v peuvent ne pas être contradictoires et donc se trouver rassemblés dans une seule sous-base et c'est exactement ce qui se passe dans l'exemple donné ici.
Nous nous trouvons ainsi devant deux approches totalement différentes :

- si nous raisonnons sur les thèses (en comptant celles pour et celles contre), c'est la formule $\neg v$ qui l'emporte ; par contre, raisonner à partir des thèses incl-préférées ne permet pas de choisir entre v ou $\neg v$;

- si nous raisonnons sur les arguments (en comptant ceux pour et ceux contre et en faisant abstraction de leur longueur), c'est la formule v qui l'emporte ; si on veut tenir compte de la longueur des arguments, la formule $\neg v$ paraît mieux placée mais cela suffit-il à contrebalancer le fait qu'il n'y ait qu'un argument en sa faveur contre deux en sa défaveur ? Et enfin, si on raisonnait en donnant des préférences aux arguments, on obtiendrait peut-être encore un autre type de résultat.

D'autre part, si nous regardons la base $(E, <)$, rien ne semble devoir privilégier $\neg v$ et v puisque les deux formules permettant de les inférer sont dans la même strate.
Le même type d'étude peut être menée pour la variable a :

- deux thèses pour a, deux pour $\neg a$ et une pour ni a, ni $\neg a$ et quand on tient compte de la stratification les deux thèses incl-préférées conduisent à a ;
- un argument pour a ($\{p, p \to o, o \to a\}$) et un pour $\neg a$ ($\{p, p \to \neg v, a \to v\}$) ;
- et au niveau de la base elle-même, il paraît sensé de déduire la formule a, car la stratification indique que l'on doit préférer $o \to a$ à $a \to v$.

Toutes les différences de résultats constatées proviennent peut-être du fait que l'approche par sous-bases est globale alors que l'approche par arguments est locale (cela constitue peut-être un axe de recherche à approfondir !). De toute façon, il semble essentiel de prendre en compte la stratification de la base. Nous considérerons donc que, dans chaque exemple, le *résultat intuitif attendu* nous sera dicté par la base elle-même en répondant à ces simples questions :

- dans la base, y a-t-il un conflit sur la formule que l'on cherche à inférer ?
- ce conflit peut-il être résolu par la stratification proposée ?

4.2 Exemple des pingouins

Sur le thème des pingouins, oiseaux ne volant pas, sont présentés cinq exemples. Les deux premiers correspondent à l'exemple de base avec un conflit portant sur la variable v mais avec deux stratifications différentes. Le troisième consiste à rajouter à la base initiale une connaissance portant sur une nouvelle variable sans aucun lien avec les variables en conflit. Dans un quatrième exemple, on rajoute une connaissance portant cette fois sur une variable liée aux variables en conflit. Et enfin, dans un dernier exemple, on introduit à la fois une nouvelle variable permettant de "retarder" le conflit, et une autre variable dépendant directement de la première.

4.2.1 Les pingouins - stratification numéro 1

Soit la base suivante, avec trois strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole"), représentant le problème initial des pingouins avec un conflit sur la variable v, résolu avec la stratification :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline p \to \neg v \\ \hline o \to v \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes (la thèse incl-préférée et lex-préférée est Y_2) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \to o$
	$p \to o$	$p \to o$	$o \to v$	$o \to v$
	$o \to v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$
Fonction p_{po}	2	3	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}		1		
Formules inferées	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\not\vdash v$ et $\not\vdash \neg v$

Le résultat intuitif attendu On devrait inférer $\neg v$.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
v	2	2	$1/4 + O(\epsilon)$	0
$\neg v$	4	3	$1/2 + 2O(\epsilon)$	1
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	0

Donc, dans cette base on Grad-PosAdd-T-inférera $\neg v$. Idem pour Grad-PosMax-T, Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec Uni-Incl, Uni-Lex, Arg-Incl et Exi-Incl, on conclut que les pingouins ne volent pas. Et avec Uni-T, on ne conclut rien.

4.2.2 Les pingouins - stratification numéro 2

Soit la base suivante, avec deux strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole"), représentant le problème initial des pingouins avec un conflit sur la variable v, non résolu par stratification :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline p \to \neg v \\ o \to v \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont Y_1 et Y_2) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \to o$
	$p \to o$	$p \to o$	$o \to v$	$o \to v$
	$o \to v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$
Fonction p_{po}	2	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1		
Formules inférées	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\nvdash v$ et $\nvdash \neg v$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure sur v.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
v	2	2	$1/4 + O(\epsilon)$	1
$\neg v$	3	2	$1/2 + 2O(\epsilon)$	1
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	0

Donc, dans cette base on a Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T qui permettent d'inférer $\neg v$ alors qu'avec Grad-PosMax-T et Grad-Equ-Incl, on ne peut rien conclure.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec Uni-T, Uni-Incl, Uni-Lex et Arg-Incl on ne peut rien conclure sur la capacité de vol des pingouins. Avec Exi-Incl, on conclut que les pingouins volent *et* qu'ils ne volent pas.

4.2.3 Les pingouins à bec

Soit la base suivante, avec trois strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", b pour "a un bec"), représentant le problème des pingouins auquel on a rajouté une connaissance b totalement indépendante des variables en conflit :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline p \to \neg v \\ o \to v \\ \hline o \to b \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont Y_1 et Y_2) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$p \rightarrow \neg v$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow b$	$o \rightarrow b$	$o \rightarrow b$	$o \rightarrow b$
Fonction p_{po}	2	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1		
Formules inférées	$\vdash \neg v$	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\not\vdash v$ et $\not\vdash \neg v$
	$\vdash b$	$\vdash b$	$\not\vdash b$ et $\not\vdash \neg b$	$\not\vdash b$ et $\not\vdash \neg b$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure sur v, par contre on doit conclure b.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
v	2	2	$1/4 + O(\epsilon)$	1
$\neg v$	3	2	$1/2 + 2O(\epsilon)$	1
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	0
b	4	2	$1/2 + 2O(\epsilon)$	2
$\neg b$	0	0	0	0
ni b, ni $\neg b$	2	1	$1/2 + 2O(\epsilon)$	0

Donc, dans cette base on a GRAD-POSADD-T et GRAD-BEL-T qui permettent d'inférer $\neg v$ et b alors qu'avec GRAD-POSMAX-T et GRAD-EQU-INCL, on ne peut conclure que b.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec UNI-T, UNI-INCL, UNI-LEX et ARG-INCL on ne peut rien conclure sur la capacité de vol des pingouins. Avec EXI-INCL, on conclut que les pingouins volent *et* qu'ils ne volent pas. Par contre, toutes ces relations sauf UNI-T permettent de déduire que les pingouins ont un bec.
Signalons aussi que toutes les relations graduelles présentées ici, tout comme UNI-INCL, UNI-LEX, EXI-INCL et ARG-INCL, échappent au problème de la noyade qui pénalise des relations d'inférence comme UNI-BO (voir la définition de cette relation dans [DLP91] et une étude comparative dans [LS95]).

4.2.4 Les pingouins ailés

Soit la base suivante, avec trois strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", a pour "a des ailes") représentant le problème des pingouins auquel on a rajouté une connaissance a dépendante des variables en conflit :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ \hline o \rightarrow v \\ p \rightarrow \neg v \\ \hline o \rightarrow a \\ a \rightarrow v \end{array}$$

On trouve les 5 thèses suivantes (les thèses incl-préférées sont Y_1, Y_2 et Y_3 et la thèse lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	p	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$	$a \rightarrow v$	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$
	$a \rightarrow v$			$a \rightarrow v$	$a \rightarrow v$
Fonction p_{po}	2	2	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/3 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1		
Formules inférées	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\not\vdash v$ et $\not\vdash \neg v$
	$\vdash a$	$\vdash a$	$\vdash \neg a$	$\vdash \neg a$	$\not\vdash a$ et $\not\vdash \neg a$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure sur v, ni sur a.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
v	2	2	$1/3 + O(\epsilon)$	1
$\neg v$	5	2	$1/3 + 3O(\epsilon)$	2
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/3 + O(\epsilon)$	0
a	4	2	$1/3 + 2O(\epsilon)$	2
$\neg a$	3	2	$1/3 + 2O(\epsilon)$	1
ni a, ni $\neg a$	1	1	$1/3 + O(\epsilon)$	0

Donc, dans cette base on a GRAD-POSADD-T, GRAD-BEL-T et GRAD-EQU-INCL qui permettent d'inférer $\neg v$. Avec GRAD-POSMAX-T, on ne peut rien conclure sur v. D'autre part, GRAD-POSADD-T et GRAD-EQU-INCL permettent de conclure a alors qu'avec GRAD-BEL-T et GRAD-POSMAX-T, on ne peut rien conclure sur a.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec UNI-T, UNI-INCL et ARG-INCL on ne peut rien conclure sur la capacité de vol des pingouins, ni sur la présence d'ailes. Avec UNI-LEX, on déduit que les pingouins ont des ailes mais aussi qu'ils volent. Avec EXI-INCL, on conclut que les pingouins volent *et* qu'ils ne volent pas, qu'ils ont des ailes *et* qu'ils n'en ont pas.

4.2.5 Les pingouins ailés et ayant des plumes

Soit la base suivante, avec quatre strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", a pour "a des ailes", pl pour "a des plumes"), représentant le problème des pingouins avec un niveau supplémentaire dans la génération du conflit par l'introduction d'une variable intermédiaire a (v sera déduit de o mais en passant par a), auquel on rajoute une autre variable pl dépendant directement de la variable intermédiaire :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ \hline p \rightarrow \neg v \\ \hline o \rightarrow a \\ a \rightarrow v \\ \hline a \rightarrow pl \end{array}$$

On trouve les 5 thèses suivantes (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont Y_1 et Y_2) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	p	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$
	$o \rightarrow a$	$a \rightarrow v$	$a \rightarrow v$	$a \rightarrow v$	$a \rightarrow v$
	$a \rightarrow pl$	$a \rightarrow pl$	$a \rightarrow pl$	$a \rightarrow pl$	$a \rightarrow pl$
Fonction p_{po}	3	3	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/5 + O(\epsilon)$	$1/5 + O(\epsilon)$	$1/5 + O(\epsilon)$	$1/5 + O(\epsilon)$	$1/5 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1			
Formules inférées	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\nvdash v$ et $\nvdash \neg v$
	$\vdash pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$	$\vdash pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$

Le résultat intuitif attendu On souhaite conclure $\neg v$ et pl.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
v	2	2	$1/5 + O(\epsilon)$	0
$\neg v$	7	3	$3/5 + 3O(\epsilon)$	2
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/5 + O(\epsilon)$	0
pl	5	3	$2/5 + 2O(\epsilon)$	1
$\neg pl$	0	0	0	0
ni pl, ni $\neg pl$	5	3	$3/5 + 3O(\epsilon)$	1

Donc, dans cette base toutes les relations graduelles permettent d'inférer $\neg v$. D'autre part, toutes sauf GRAD-BEL-T, permettent d'inférer pl (GRAD-BEL-T ne permettant pas de conclure quoi que ce soit sur pl).

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec UNI-T, on ne peut rien conclure sur la capacité de vol des pingouins, ni sur la présence de plumes. Avec UNI-INCL et UNI-LEX on conclut que les pingouins ne volent pas mais pas s'ils ont des plumes ou pas. Avec EXI-INCL et ARG-INCL, on conclut que les pingouins ne volent pas et qu'ils ont des plumes.

4.3 Exemple du républicain quaker

Étant donné les définitions des relations graduelles, un des risques serait que ces relations soient particulièrement sensibles au nombre de thèses de la base $(E, <)$ (donc au nombre de conflits apparaissant dans la base). Or, nous allons montrer sur un exemple que ce n'est pas le cas. En effet, comme pour la plupart des relations d'inférence non-monotone, les points importants pour ces relations sont la présence de conflits et le fait que ces conflits soient gérés (en particulier au niveau de la stratification). Par contre, la multiplication des conflits ayant une même source n'affecte pas les processus d'inférence définis par les relations graduelles. L'exemple choisi est le "républicain quaker" dans lequel la source de conflits est clairement identifiée : nous avons un individu qui est à la fois q (quaker) et r (républicain). Nous partons de l'exemple de base dans lequel on a un seul conflit portant sur l'état "pacifiste" de l'individu (variable p). Dans un premier temps, nous vérifions l'impact de la stratification. Puis, nous rajoutons divers conflits ayant tous la même source $r \wedge q$.

4.3.1 Le républicain quaker (version 1)

Soit la base suivante, avec trois strates (r pour "républicain", q pour "quaker", p pour "est pacifiste"), présentant le problème du républicain quaker et privilégiant le fait "être quaker implique pacifiste" par rapport au fait "être républicain implique non pacifiste" :

$$\begin{array}{c} r \wedge q \\ \hline q \to p \\ \hline r \to \neg p \end{array}$$

On trouve les 3 thèses suivantes (la thèse incl-préférée et lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3
Contenu	$r \wedge q$ $q \to p$	$r \wedge q$ $r \to \neg p$	$q \to p$ $r \to \neg p$
Fonction p_{po}	3	2	1
Fonction p_{pr}	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1		
Formules inférées	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash \neg(r \wedge q)$

Le résultat intuitif attendu On souhaite conclure $(r \wedge q) \to p$.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
$((r \wedge q) \to p)$	4	3	$2/3 + 2O(\epsilon)$	1
$\neg((r \wedge q) \to p)$	2	2	$1/3 + O(\epsilon)$	0
ni $((r \wedge q) \to p)$, ni $\neg((r \wedge q) \to p)$	0	0	0	0

Donc, dans cette base toutes les relations graduelles permettent d'inférer $(r \wedge q) \to p$ (c'est-à-dire qu'un républicain quaker est pacifiste).

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec UNI-T, on ne peut rien conclure. Par contre, UNI-INCL, UNI-LEX, EXI-INCL et ARG-INCL permettent d'inférer $(r \wedge q) \to p$.

4.3.2 Le républicain quaker (version 2)

Soit la base suivante, avec deux strates (r pour "républicain", q pour "quaker", p pour "est pacifiste"), présentant le problème du républicain quaker et ne privilégiant ni le fait "être quaker implique pacifiste", ni le fait "être républicain implique pacifiste" :

$$\begin{array}{c} r \wedge q \\ \hline q \rightarrow p \\ r \rightarrow \neg p \end{array}$$

On retrouve les mêmes 3 thèses que précédemment mais avec des poids différents (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont Y_1 et Y_2) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3
Contenu	$r \wedge q$ $q \rightarrow p$	$r \wedge q$ $r \rightarrow \neg p$	$q \rightarrow p$ $r \rightarrow \neg p$
Fonction p_{po}	2	2	1
Fonction p_{pr}	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	
Formules inférées	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash \neg(r \wedge q)$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure en ce qui concerne $(r \wedge q) \rightarrow p$.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
$((r \wedge q) \rightarrow p)$	3	2	$2/3 + 2O(\epsilon)$	1
$\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	2	2	$1/3 + O(\epsilon)$	1
ni $((r \wedge q) \rightarrow p)$, ni $\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	0	0	0	0

Donc, dans cette base Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T permettent d'inférer $(r \wedge q) \rightarrow p$, alors que les autres relations graduelles ne permettent pas de conclure.
Ainsi, on constate l'impact de la stratification puisque le seul fait de mettre au même niveau d'importance (donc dans la même strate) toutes les connaissances sur q et sur r suffit à diminuer l'écart entre les notes de $((r \wedge q) \rightarrow p)$ et de $\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec Uni-T, Uni-Incl, Uni-Lex et Arg-Incl on ne peut rien conclure sur la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$. Avec Exi-Incl, on conclut à la fois la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$ et sa négation.

4.3.3 Le républicain quaker (version 3)

Soit la base suivante, avec deux strates (r pour "républicain", q pour "quaker", p pour "est pacifiste", a pour "aime les automobiles"), présentant le problème du républicain quaker avec le rajout d'un nouveau conflit ayant sa source dans $r \wedge q$ et portant sur la variable a :

$$\begin{array}{c} r \wedge q \\ \hline q \rightarrow p \\ q \rightarrow \neg a \\ r \rightarrow \neg p \\ r \rightarrow a \end{array}$$

On trouve 5 thèses (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont les thèses Y_1 à Y_4) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	$r \wedge q$ $q \rightarrow p$ $q \rightarrow \neg a$	$r \wedge q$ $q \rightarrow p$ $r \rightarrow a$	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow \neg p$	$r \wedge q$ $r \rightarrow \neg p$ $r \rightarrow a$	$q \rightarrow p$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow \neg p$ $r \rightarrow a$
Fonction p_{po}	2	2	2	2	1
Fonction p_{pr}	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1	
Formules inférées	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash \neg(r \wedge q)$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure en ce qui concerne $(r \wedge q) \rightarrow p$.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n_{pa}^{T}	n_{pm}^{T}	n_{bel}^{T}	n_{eq}^{In}
$((r \wedge q) \rightarrow p)$	5	2	$1+3O(\epsilon)$	2
$\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	4	2	$2O(\epsilon)$	2
ni $((r \wedge q) \rightarrow p)$, ni $\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	0	0	0	0

Donc, dans cette base Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T permettent d'inférer $(r \wedge q) \rightarrow p$, alors que les autres relations graduelles ne permettent pas de conclure.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec Uni-T, Uni-Incl, Uni-Lex et Arg-Incl on ne peut rien conclure sur la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$. Avec Exi-Incl, on conclut à la fois la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$ et sa négation.

4.3.4 Le républicain quaker (version 4)

Soit la base suivante, avec deux strates (r pour "républicain", q pour "quaker", p pour "est pacifiste", a pour "aime les automobiles", b pour "aime le base-ball"), présentant le problème du républicain quaker avec le rajout de deux nouveaux conflits ayant leur source dans $r \wedge q$:

$r \wedge q$
$q \rightarrow \neg b$
$q \rightarrow p$
$q \rightarrow \neg a$
$r \rightarrow b$
$r \rightarrow \neg p$
$r \rightarrow a$

On trouve 9 thèses (les thèses incl-préférées et lex-préférées sont les thèses Y_1 à Y_8) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg b$ $q \rightarrow p$ $q \rightarrow \neg a$	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg b$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow \neg p$	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg b$ $q \rightarrow p$ $r \rightarrow a$	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg b$ $r \rightarrow \neg p$ $r \rightarrow a$
Fonction p_{po}	2	2	2	2
Fonction p_{pr}	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$

Nom	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9
Contenu	$r \wedge q$ $q \rightarrow p$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow b$	$r \wedge q$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow b$ $r \rightarrow \neg p$	$r \wedge q$ $q \rightarrow p$ $r \rightarrow b$ $r \rightarrow a$	$r \wedge q$ $r \rightarrow b$ $r \rightarrow \neg p$ $r \rightarrow a$	$q \rightarrow \neg b$ $q \rightarrow p$ $q \rightarrow \neg a$ $r \rightarrow b$ $r \rightarrow \neg p$ $r \rightarrow a$
Fonction p_{po}	2	2	2	2	1
Fonction p_{pr}	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1+O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1	
Formules inférées	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash p$	$\vdash (r \wedge q)$ $\vdash \neg p$	$\vdash \neg(r \wedge q)$

Le résultat intuitif attendu On ne peut rien conclure en ce qui concerne $(r \wedge q) \rightarrow p$.

Les résultats obtenus avec les relations graduelles On a :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
$((r \wedge q) \rightarrow p)$	9	2	$1 + 5O(\epsilon)$	4
$\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	8	2	$4O(\epsilon)$	4
ni $((r \wedge q) \rightarrow p)$, ni $\neg((r \wedge q) \rightarrow p)$	0	0	0	0

Donc, dans cette base Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T permettent d'inférer $(r \wedge q) \rightarrow p$, alors que les autres relations graduelles ne permettent pas de conclure.
Le résultat est toujours le même malgré le rajout de deux nouveaux conflits.

Comparaison avec d'autres relations d'inférence non-monotone Avec Uni-T, Uni-Incl, Uni-Lex et Arg-Incl on ne peut rien conclure sur la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$. Avec Exi-Incl, on conclut à la fois la formule $(r \wedge q) \rightarrow p$ et sa négation.

4.4 Conclusion sur les exemples

Dans cette section, nous avons pu constater sur quelques exemples que les relations graduelles présentent un comportement généralement satisfaisant. En effet, les résultats obtenus sont plus nombreux qu'avec des relations utilisant les principes d'inférence Uni ou Arg, et beaucoup plus fiables que ceux obtenus avec des relations définies à l'aide du principe d'inférence Exi puisqu'on n'infère pas une formule et son contraire [1] (voir tableau récapitulatif 4.1 page suivante).
On remarquera que ces relations graduelles semblent être de 2 types :

- d'un côté les relations Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T qui sont beaucoup moins prudentes que les relations utilisant les principes d'inférence Uni ou Arg puisqu'elles mènent fréquemment à l'inférence de formules non intuitives ;
- et de l'autre côté les relations Grad-PosMax-T et Grad-Equ-Incl qui, bien étant un peu plus aventureuses que les relations utilisant les principes d'inférence Uni ou Arg, ne mènent que très rarement à l'inférence de formules non intuitives (un seul cas pour Grad-Equ-Incl).

De plus, seules les relations Grad-PosAdd-T et Grad-Equ-Incl permettent d'obtenir toutes les formules attendues intuitivement.

1. On dit alors que la relation d'inférence est sûre.

Base $(E,<)$	Résultats Intuitifs	Uni-T	Uni-Incl	Uni-Lex	Exi-Incl	Arg-Incl	Grad-PosAdd-T	Grad-PosMax-T	Grad-Bel-T	Grad-Equ-Incl
Base des pingouins avec p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", a pour "a des ailes", b pour "a un bec", pl pour "a des plumes"										
p $p \to o$ $p \to \neg v$ $o \to v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$
p $p \to o$ $o \to v$ $p \to \neg v$	rien	rien	rien	rien	v, $\neg v$	rien	$\neg v$	rien	$\neg v$	rien
p $p \to o$ $p \to \neg v$ $o \to v$ $o \to b$	b	rien	b	b	v, $\neg v$, b	b	$\neg v$, b	b	$\neg v$, b	b
p $p \to o$ $o \to v$ $p \to \neg v$ $o \to a$ $a \to v$	rien	rien	rien	v, a	v, $\neg v$, a, $\neg a$	rien	$\neg v$, a	rien	$\neg v$	$\neg v$, a
p $p \to o$ $p \to \neg v$ $o \to a$ $a \to v$ $a \to pl$	$\neg v$, pl	rien	$\neg v$	$\neg v$	$\neg v$, pl	$\neg v$, pl	$\neg v$, pl	$\neg v$, pl	$\neg v$	$\neg v$, pl
Base du républicain quaker avec r pour "républicain", q pour "quaker", p pour "est pacifiste", a pour "aime les automobiles", b pour "aime le base-ball"										
$r \wedge q$ $q \to p$ $r \to \neg p$	$(r \wedge q) \to p$	rien	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$	$(r \wedge q) \to p$
$r \wedge q$ $q \to p$ $r \to \neg p$	rien	rien	rien	rien	$(r \wedge q) \to p$ et $\neg((r \wedge q) \to p)$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien
$r \wedge q$ $q \to p$ $q \to \neg a$ $r \to \neg p$ $r \to a$	rien	rien	rien	rien	$(r \wedge q) \to p$ et $\neg((r \wedge q) \to p)$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien
$r \wedge q$ $q \to \neg b$ $q \to p$ $q \to \neg a$ $r \to b$ $r \to \neg p$ $r \to a$	rien	rien	rien	rien	$(r \wedge q) \to p$ et $\neg((r \wedge q) \to p)$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien	$(r \wedge q) \to p$	rien

Tab. 4.1 - *Récapitulatif des exemples*

Chapitre 5

Complexité et algorithmes

5.1 Complexité

La complexité temporelle dans le pire des cas de ces relations graduelles s'avère très forte, car il s'agit d'énumérer toutes les thèses de $(E, <)$ (incl-préférées ou pas, suivant le cas), avant de pouvoir prendre une décision (voir les algorithmes en section 5.2). A priori, on serait donc au-delà de la hiérarchie polynomiale.

5.2 Algorithmes

Il est possible d'exhiber des algorithmes permettant de dire si oui ou non une formule donnée est inférée graduellement à partir d'une base donnée. En voici quelques exemples triviaux – voir algorithmes 5.1, 5.2 page suivante et 5.3 page suivante.

Algorithme 5.1 : GRAD-POSADD-T $((E, <), \Phi)$ et GRAD-BEL-T $((E, <), \Phi)$

début

- $note(\Phi) = 0$
- $note(\neg\Phi) = 0$
- $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$
- Calculer chaque thèse et son poids
- **pour** chaque thèse Y_i de $(E, <)$ **faire**
  - **si** $Y_i \vdash \Phi$ **alors**
    - $note(\Phi) = note(\Phi) + poids(Y_i)$
  - **sinon**
    - **si** $Y_i \vdash \neg\Phi$ **alors**
      - $note(\neg\Phi) = note(\neg\Phi) + poids(Y_i)$
    - **sinon**
      - $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) + poids(Y_i)$
- **si** $note(\Phi) > note(\neg\Phi)$ et $note(\Phi) \geq note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ **alors**
  - la réponse est OUI
- **sinon**
  - la réponse est NON

fin

Algorithme 5.2 : GRAD-EQU-INCL $((E,<), \Phi)$

début

- $note(\Phi) = 0$
- $note(\neg\Phi) = 0$
- $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$
- Calculer chaque thèse préférée
- **pour** chaque thèse préférée Y_i de $(E,<)$ **faire**
  - **si** $Y_i \vdash \Phi$ **alors**
    - $note(\Phi) = note(\Phi) + 1$
  - **sinon**
    - **si** $Y_i \vdash \neg\Phi$ **alors**
      - $note(\neg\Phi) = note(\neg\Phi) + 1$
    - **sinon**
      - $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) + 1$
- **si** $note(\Phi) > note(\neg\Phi)$ et $note(\Phi) \geq note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ **alors**
  - la réponse est OUI
- **sinon**
  - la réponse est NON

fin

Algorithme 5.3 : GRAD-POSMAX-T $((E,<), \Phi)$

début

- $note(\Phi) = 0$
- $note(\neg\Phi) = 0$
- $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$
- Calculer chaque thèse et son poids
- **pour** chaque thèse Y_i de $(E,<)$ **faire**
  - **si** $Y_i \vdash \Phi$ **alors**
    - **si** $note(\Phi) < poids(Y_i)$ **alors** $note(\Phi) = poids(Y_i)$
  - **sinon**
    - **si** $Y_i \vdash \neg\Phi$ **alors**
      - **si** $note(\neg\Phi) < poids(Y_i)$ **alors** $note(\neg\Phi) = poids(Y_i)$
    - **sinon**
      - **si** $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) < poids(Y_i)$ **alors** $note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = poids(Y_i)$
- **si** $note(\Phi) > note(\neg\Phi)$ et $note(\Phi) \geq note(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ **alors**
  - la réponse est OUI
- **sinon**
  - la réponse est NON

fin

Chapitre 6

Prudence

La prudence d'une relation d'inférence non-monotone est sa capacité à inférer un maximum de conclusions tout en évitant d'inférer des conclusions abbérantes. Ainsi, les relations d'inférence définies à l'aide du principe d'inférence Exi sont très peu prudentes, alors que celles utilisant le principe d'inférence Uni sont très (trop ?) prudentes. Dans ce chapitre, nous allons donc chercher à situer nos 4 relations graduelles sur l'échelle de la prudence.

6.1 Lien avec Arg-T et Arg-Incl

Il n'y a pas en général de lien entre Arg-T ou Arg-Incl et Grad-...-T ou Grad-Equ-Incl. Il suffit d'examiner les contre-exemples suivants pour s'en convaincre.

Contre-exemple 1 Soit la base suivante sans strate (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole", a pour "ailes"), représentant une variante du problème des pingouins :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ p \rightarrow \neg v \\ o \rightarrow v \\ v \rightarrow a \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes qui sont toutes des thèses incl-préférées et lex-préférées :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$
Fonction p_{po}	1	1	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash a$	$\nvdash a$ et $\nvdash \neg a$	$\nvdash a$ et $\nvdash \neg a$	$\nvdash a$ et $\nvdash \neg a$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles :

	n_{pa}^T	n_{pm}^T	n_{bel}^T	n_{eq}^{In}
a	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	1
$\neg a$	0	0	0	0
ni a, ni $\neg a$	3	1	$3/4 + 3O(\epsilon)$	3

Donc, avec Grad-PosAdd-T, Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl on n'inférera rien sur a. Alors qu'avec Arg-T et Arg-Incl, on conclut a.

Contre-exemple 2 On reprend la base du contre-exemple 1 page 21 mais en introduisant une stratification :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ \hline p \rightarrow \neg v \\ \hline o \rightarrow v \\ \hline v \rightarrow a \end{array}$$

On retrouve les mêmes 4 thèses mais seule Y_2 est incl-préférée et lex-préférée :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$	$v \rightarrow a$
Fonction p_{po}	2	3	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}		1		
Formules inférées	$\vdash a$	$\not\vdash a$ et $\not\vdash \neg a$	$\not\vdash a$ et $\not\vdash \neg a$	$\not\vdash a$ et $\not\vdash \neg a$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
a	2	2	$1/4 + O(\epsilon)$	0
$\neg a$	0	0	0	0
ni a, ni $\neg a$	5	3	$3/4 + 3O(\epsilon)$	1

Donc, avec Grad-PosAdd-T, Grad-PosMax-T, Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl on n'inférera rien sur a. Alors qu'avec Arg-T, on conclut a.

Contre-exemple 3 Soit la base suivante, avec une strate (p pour “pingouin”, o pour “oiseau”, v pour “vole”), représentant une variante du problème des pingouins :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ p \rightarrow \neg v \\ o \rightarrow v \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes qui sont toutes incl-préférées et lex-préférées :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
Fonction p_{po}	1	1	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash \neg p$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
p	3	1	$3/4 + 3O(\epsilon)$	3
$\neg p$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	1
ni p, ni $\neg p$	0	0	0	0

Donc, avec Grad-PosAdd-T, Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl on inférera p. Alors qu'avec Arg-T et Arg-Incl, on ne conclut rien sur p.

Contre-exemple 4 On reprend la base du contre-exemple 3 page 22 en introduisant une stratification :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline p \to \neg v \\ o \to v \end{array}$$

On retrouve les mêmes 4 thèses mais cette fois seules Y_1 et Y_2 sont incl et lex préférées :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p	p	p	$p \to o$
	$p \to o$	$p \to o$	$o \to v$	$o \to v$
	$o \to v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$	$p \to \neg v$
Fonction p_{po}	2	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1		
Formules inférées	$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash \neg p$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles :

	n_{pa}^T	n_{pm}^T	n_{bel}^T	n_{eq}^{In}
p	5	2	$3/4 + 3O(\epsilon)$	2
$\neg p$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	0
ni p, ni $\neg p$	0	0	0	0

Donc, avec GRAD-POSADD-T, GRAD-POSMAX-T, GRAD-BEL-T et GRAD-EQU-INCL on inférera p. Alors qu'avec ARG-T, on ne conclut rien sur p.

Contre-exemple 5 Soit la base $(E, <)$ suivante :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\alpha \\ \beta \to \gamma \\ \beta \to \neg\gamma \\ \neg\beta \\ \hline \gamma \to \delta \\ \hline \beta \end{array}$$

On trouve les 6 thèses suivantes (Y_4 étant la thèse incl et lex-préférée) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Contenu	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	α	α	α
	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$
	$\beta \to \neg\gamma$	$\gamma \to \delta$	$\gamma \to \delta$	$\beta \to \neg\gamma$	$\gamma \to \delta$	$\gamma \to \delta$
	$\neg\beta$	β	β	$\neg\beta$	β	β
	$\gamma \to \delta$			$\gamma \to \delta$		
Fonction p_{po}	1	1	1	2	2	2
Formules inférées	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$
	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$
	$\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\vdash \delta$	$\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\vdash \delta$	$\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$

Ainsi, on constate que la relation GRAD-POSMAX-T permet d'inférer α, δ et ne permet pas de conclure sur β. Avec les relations UNI-INCL, EXI-INCL et ARG-INCL, on inférerait α, $\neg\beta$ et rien sur δ.

6.2 Lien avec UNI-T et EXI-T

On a la propriété suivante :

Propriété 6.2.1 $(E,<) \mid\!\sim^{\forall,T} \alpha \Rightarrow (E,<) \mid\!\sim^{g,x,T} \alpha \Rightarrow (E,<) \mid\!\sim^{\exists,T} \alpha$ *(avec $x = pa, pm, bel$).*

Preuve : Pour GRAD-POSADD-T et GRAD-BEL-T, on a :

- UNI-T plus prudent que GRAD-POSADD-T et GRAD-BEL-T :
  Φ est UNI-T-inférée $\Leftrightarrow \forall Y_i, i = 1 \ldots n$, thèse de $(E, <)$, $Y_i \vdash \Phi \Rightarrow$
  $n(\Phi) = \Sigma_{i=1 \ldots n} p(Y_i)$ avec Y_i thèse de $(E, <)$, $n(\neg\Phi) = 0$, et $n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$ (avec $n = n^T_{pa}$ ou n^T_{bel}) $\Rightarrow$
  $n(\Phi) > n(\neg\Phi)$ et $n(\Phi) \geq n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ (avec $n = n^T_{pa}$ ou n^T_{bel}) $\Rightarrow$
  Φ est inférée avec GRAD-POSADD-T et GRAD-BEL-T.
- GRAD-POSADD-T et GRAD-BEL-T sont plus prudentes que EXI-T :
  Φ est inférée avec GRAD-POSADD-T (resp. GRAD-POSMAX-T, GRAD-BEL-T) $\Leftrightarrow$
  $n(\Phi) > n(\neg\Phi)$ et $n(\Phi) \geq n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ (avec $n = n^T_{pa}$ ou n^T_{bel}) $\Rightarrow$
  $n(\Phi) > 0$ (avec $n = n^T_{pa}$ ou n^T_{bel}) $\Rightarrow$
  il existe au moins une thèse Y_i de $(E, <)$ qui infère $\Phi \Rightarrow$
  Φ est inférée avec EXI-T.

Pour GRAD-POSMAX-T, on a :

- UNI-T plus prudent que GRAD-POSMAX-T :
  Φ est UNI-T-inférée $\Leftrightarrow \forall Y_i, i = 1 \ldots n$, thèse de $(E, <)$, $Y_i \vdash \Phi \Rightarrow$
  $n(\Phi) = Max_{i=1 \ldots n} p(Y_i)$ avec Y_i thèse de $(E, <)$, $n(\neg\Phi) = 0$, et $n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$ (avec n^T_{pm}) $\Rightarrow$
  $n(\Phi) > n(\neg\Phi)$ et $n(\Phi) \geq n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ (avec $n = n^T_{pm}$) $\Rightarrow$
  Φ est inférée avec GRAD-POSMAX-T.
- GRAD-POSMAX-T est plus prudente que EXI-T :
  Φ est inférée avec GRAD-POSMAX-T $\Leftrightarrow$
  $n(\Phi) > n(\neg\Phi)$ et $n(\Phi) \geq n(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi)$ (avec $n = n^T_{pm}$) $\Rightarrow$
  $n(\Phi) > 0$ (avec $n = n^T_{pm}$) $\Rightarrow$
  il existe au moins une thèse Y_i de $(E, <)$ qui infère $\Phi \Rightarrow$
  Φ est inférée avec EXI-T.

□

D'autre part, on a aussi :

Propriété 6.2.2 $(E, <) \mid\!\sim^{\forall, T} \alpha \Rightarrow (E, <) \mid\!\sim^{g,eq,In} \alpha \Rightarrow (E, <) \mid\!\sim^{\exists, T} \alpha.$

Preuve : On sait que UNI-T est plus prudent que UNI-INCL (voir par exemple [PL92, LS95]). De plus, d'après la propriété 6.3.1, on sait UNI-INCL est plus prudent que GRAD-EQU-INCL. Donc UNI-T est plus prudent que GRAD-EQU-INCL.

De la même façon, on montre que GRAD-EQU-INCL est plus prudent que EXI-T : on sait que EXI-INCL est plus prudent que EXI-T (voir par exemple [PL92, LS95]). De plus, d'après la propriété 6.3.1, on sait GRAD-EQU-INCL est plus prudent que EXI-INCL. Donc GRAD-EQU-INCL est plus prudent que EXI-T. □

6.3 Lien avec UNI-INCL et EXI-INCL

On obtient le même type de résultats entre GRAD-EQU-INCL et UNI-INCL et EXI-INCL (voir [PL92]). On a donc la propriété suivante :

Propriété 6.3.1 $(E, <) \mid\!\sim^{\forall, In} \alpha \Rightarrow (E, <) \mid\!\sim^{g,eq,In} \alpha \Rightarrow (E, <) \mid\!\sim^{\exists, In} \alpha.$

Preuve : On a :

- UNI-INCL plus prudent que GRAD-EQU-INCL :
  Φ est UNI-INCL-inférée $\Leftrightarrow$
  $\forall Y_i, i = 1 \ldots n$, thèse préférée de $(E, <)$, $Y_i \vdash \Phi \Rightarrow$
  $n^{In}_{eq}(\Phi) =$ nb des Y_i avec Y_i thèse préférée de $(E, <)$, $n^{In}_{eq}(\neg\Phi) = 0$ et $n^{In}_{eq}(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) = 0$ $\Rightarrow$
  $n^{In}_{eq}(\Phi) > n^{In}_{eq}(\neg\Phi)$ et $n^{In}_{eq}(\Phi) \geq n^{In}_{eq}(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) \Rightarrow$
  Φ est inférée avec GRAD-EQU-INCL.

- GRAD-EQU-INCL est plus prudente que EXI-INCL :
  Φ est inférée avec GRAD-EQU-INCL $\Leftrightarrow$
  $n_{eq}^{In}(\Phi) > n_{eq}^{In}(\neg\Phi)$ et $n_{eq}^{In}(\Phi) \geq n_{eq}^{In}(\text{ni } \Phi, \text{ ni } \neg\Phi) \Rightarrow$
  $n_{eq}^{In}(\Phi) > 0 \Rightarrow$
  il existe au moins une thèse préférée Y_i de $(E, <)$ qui infère $\Phi \Rightarrow$
  Φ est inférée avec EXI-INCL.

□

D'autre part, le contre-exemple 5 page 23 permet de prouver qu'il n'existe pas de liens entre UNI-INCL ou EXI-INCL et GRAD-POSMAX-T.
Et enfin, grâce aux contre-exemples suivants, on prouve qu'il n'y a aucun lien entre UNI-INCL ou EXI-INCL et GRAD-POSADD-T ou GRAD-BEL-T :

Contre-exemple 6 Soit la base suivante, avec trois strates (p pour "pingouin", o pour "oiseau", v pour "vole"), représentant une variante du problème des pingouins :

$$\begin{array}{c} p \\ p \to o \\ \hline o \to v \\ \hline p \to \neg v \end{array}$$

On trouve les 4 thèses suivantes (la thèse incl-préférée et lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	p $p \to o$ $o \to v$	p $p \to o$ $p \to \neg v$	p $o \to v$ $p \to \neg v$	$p \to o$ $o \to v$ $p \to \neg v$
Fonction p_{po}	3	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1			
Formules inférées	$\vdash v$	$\vdash \neg v$	$\vdash \neg v$	$\nvdash v$ et $\nvdash \neg v$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles sont :

	n_{pa}^T	n_{pm}^T	n_{bel}^T	n_{eq}^{In}
v	3	3	$1/4 + O(\epsilon)$	1
$\neg v$	3	2	$1/2 + 2O(\epsilon)$	0
ni v, ni $\neg v$	1	1	$1/4 + O(\epsilon)$	0

Donc, avec GRAD-BEL-T on inférera $\neg v$, avec GRAD-POSADD-T on ne peut rien inférer, et avec GRAD-POSMAX-T et GRAD-EQU-INCL on inférera v. D'autre part, avec UNI-INCL et EXI-INCL, on conclut v.

Contre-exemple 7 Soit la base suivante avec deux strates :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\alpha \to \beta \\ \neg\alpha \to \neg\beta \\ \neg\alpha \to \gamma \\ \neg\alpha \to \neg\gamma \end{array}$$

On trouve les 5 thèses suivantes (la thèse incl-préférée et lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	α $\neg\alpha \to \beta$ $\neg\alpha \to \neg\beta$ $\neg\alpha \to \gamma$ $\neg\alpha \to \neg\gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \to \beta$ $\neg\alpha \to \gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \to \neg\beta$ $\neg\alpha \to \gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \to \beta$ $\neg\alpha \to \neg\gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \to \neg\beta$ $\neg\alpha \to \neg\gamma$
Fonction p_{po}	2	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash \alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$

Les résultats obtenus avec la relation GRAD-POSADD-T sont :

- $n_{pa}^T(\alpha) = 2$, $n_{pa}^T(\neg\alpha) = 4$, $n_{pa}^T(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha) = 0$.

Donc, avec GRAD-POSADD-T on inférera $\neg\alpha$. Alors qu'avec UNI-INCL et EXI-INCL, on conclut α.

6.4 Lien de prudence entre relations graduelles

En examinant les exemples déjà traités (voir section 4 page 9) et en utilisant les contre-exemples suivants, on constate :

- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl (voir les exemples en section 4.2.3 page 11 et 4.2.4 page 12),
- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-Bel-T et Grad-PosMax-T (voir les exemples en section 4.2.3 page 11 et 4.2.5 page 13),
- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-PosAdd-T et Grad-Equ-Incl (voir l'exemple en section 4.2.2 page 11 et le contre-exemple 6 en page 25),
- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-PosAdd-T et Grad-PosMax-T (voir l'exemple en section 4.2.2 page 11 et le contre-exemple 6 en page 25),
- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-PosAdd-T et Grad-Bel-T (voir l'exemple en section 4.2.5 page 13 et le contre-exemple 6 en page 25),
- il n'y a pas de lien de prudence entre Grad-PosMax-T et Grad-Equ-Incl (voir l'exemple en section 4.2.4 page 12 et le contre-exemple 8 en page 26).

Contre-exemple 8 Soit la base suivante, avec quatre strates (p pour “pingouin”, o pour “oiseau”, v pour “vole”, a pour “ailes”, pl pour “plumes”), représentant une variante du problème des pingouins :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow o \\ \hline o \rightarrow v \\ p \rightarrow \neg v \\ \hline o \rightarrow a \\ a \rightarrow v \\ \hline v \rightarrow pl \end{array}$$

On trouve les 5 thèses suivantes (les thèses incl-préférées Y_1 à Y_3) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	p	p	p	p	$p \rightarrow o$
	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
	$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$	$a \rightarrow v$	$o \rightarrow a$	$o \rightarrow a$
	$a \rightarrow v$	$v \rightarrow pl$	$v \rightarrow pl$	$a \rightarrow v$	$a \rightarrow v$
	$v \rightarrow pl$			$v \rightarrow pl$	$v \rightarrow pl$
Fonction p_{po}	2	2	2	1	1
Fonction p_{pr}	$1/3 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$	$1/3 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1		
Formules inférées	$\vdash pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$	$\nvdash pl$ et $\nvdash \neg pl$

Les résultats obtenus avec les relations graduelles sont :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
pl	2	2	$1/3 + O(\epsilon)$	1
$\neg pl$	0	0	0	0
ni pl, ni $\neg pl$	6	2	$2/3 + 4O(\epsilon)$	2

Donc, avec Grad-PosMax-T on inférera pl, alors qu'avec Grad-PosAdd-T, Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl on ne peut rien inférer sur pl.

6.5 Conclusion sur la prudence

L'ensemble des résultats présentés dans cette section est récapitulé dans la figure 6.1 page suivante et dans le tableau 6.1 page 28. On constate ainsi que toutes les relations graduelles sont comprises du point de vue de la prudence entre les relations définies à l'aide du principe Uni et celles définies à l'aide du principe Exi (ce qui n'est pas surprenant étant donnée nos définitions des dites relations).
D'autre part, ce qui était un peu moins prévisible, aucun lien de prudence n'existe entre les relations graduelles ou entre ces relations et celles définies à l'aide du principe Arg.

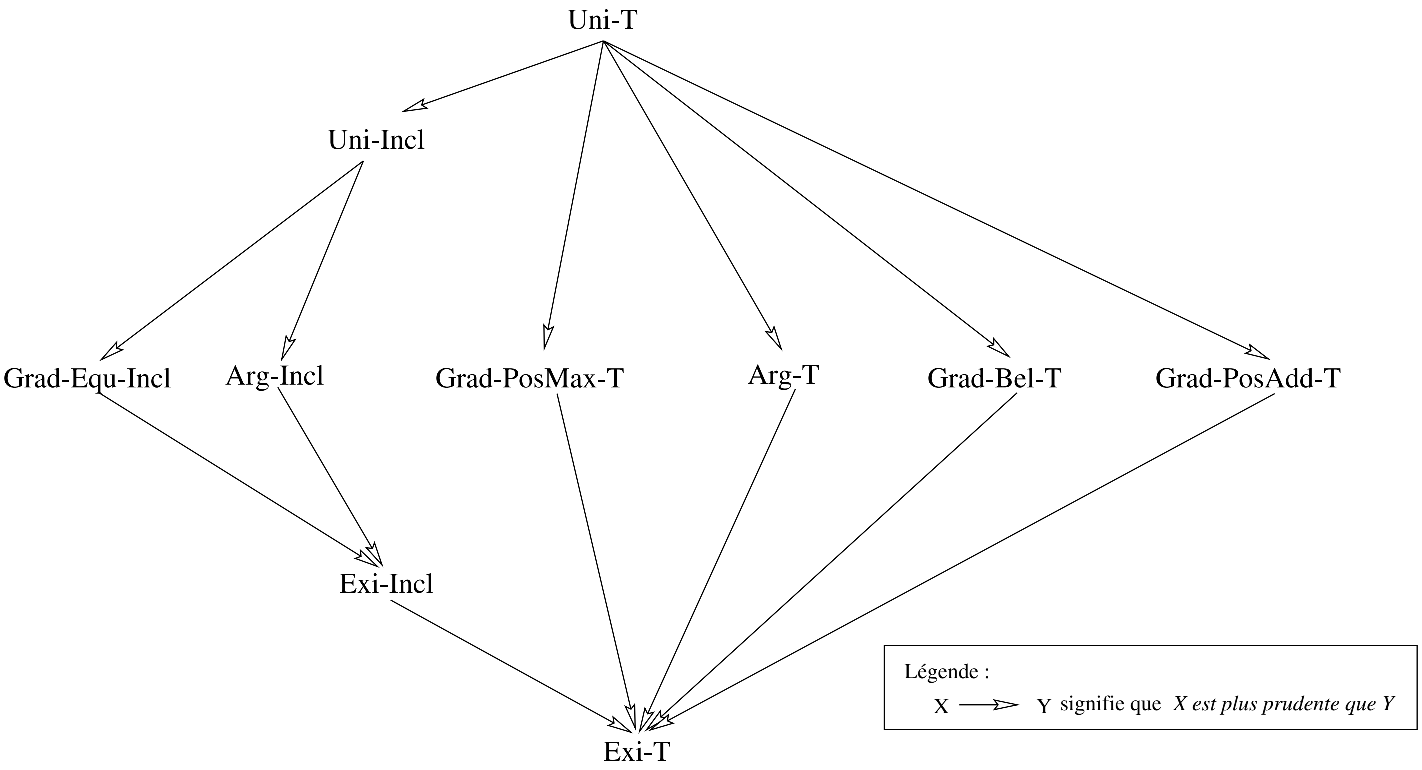

FIG. 6.1 - *Relation de prudence entre les relations graduelles et d'autres relations d'inférence non-monotone*

	Grad-PosAdd-T	Grad-PosMax-T	Grad-Bel-T	Grad-Equ-Incl
Arg-T	c.ex. 1, 2 \ c.ex. 3, 4	c.ex. 2 \ c.ex. 4	c.ex. 1, 2 \ c.ex. 3, 4	c.ex. 1, 2 \ c.ex. 3, 4
Arg-Incl	c.ex. 1 \ c.ex. 3	c.ex. 5 \ c.ex. 5	c.ex. 1 \ c.ex. 3	c.ex. 1 \ c.ex. 3
Uni-Incl	c.ex. 6, 7 \ c.ex. 7	c.ex. 5 \ c.ex. 5	c.ex. 6 \ c.ex. 6	
Exi-Incl	c.ex. 6, 7 \ c.ex. 7	c.ex. 5 \ c.ex. 5	c.ex. 6 \ c.ex. 6	
Grad-PosMax-T	c.ex. 6 \ ex. 4.2.2			
Grad-Bel-T	c.ex. 6 \ ex. 4.2.5	ex. 4.2.3 \ ex. 4.2.5		
Grad-Equ-Incl	c.ex. 6 \ ex. 4.2.2	ex. 4.2.4 \ c.ex. 8	ex. 4.2.4 \ ex. 4.2.3	

Légende : Soit la case (x, y) (x abscisse, y ordonnée) du tableau ayant pour valeur $r_1 \backslash r_2$:

- r_1 est l'ensemble des références des exemples et contre-exemples montrant que la relation x infère une formule alors que la relation y ne l'infère pas ;
- r_2 est l'ensemble des références des exemples et contre-exemples montrant que la relation y infère une formule alors que la relation x ne l'infère pas.

Tab. 6.1 - *Récapitulatif des exemples et contre-exemples utilisés dans les preuves sur la prudence*

Chapitre 7

Propriétés de déduction

Dans ce chapitre, nous allons chercher à établir un lien entre nos relations graduelles et les propriétés de déduction définies par [KLM90, GM94] :

- supra-classicité : $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \mid\!\sim \beta}$
- réflexivité : $\alpha \mid\!\sim \alpha$
- préservation de la consistance : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \bot}{\alpha \vdash \bot}$
- conditionnalisation faible : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta}{\mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}$
- OU : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma \; ; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$
- monotonie rationnelle : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma \; ; \alpha \not\mid\!\sim \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$
- équivalence logique gauche : $\dfrac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \; ; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$
- affaiblissement droit : $\dfrac{\models \alpha \rightarrow \beta \; ; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$
- coupure : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \; ; \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$
- monotonie prudente : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \; ; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$
- cumulativité : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \; ; \beta \vdash \alpha}{\alpha \mid\!\sim \gamma \Leftrightarrow \beta \mid\!\sim \gamma}$
- ET : $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \; ; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma}$
- monotonie rationnelle faible : $\dfrac{\mid\!\sim (\alpha \rightarrow \beta) \; ; \not\mid\!\sim \neg\alpha}{\alpha \mid\!\sim \beta}$

On peut constater que toutes ces propriétés utilisent une forme légèrement différente de la relation d'inférence. Il s'agit ici de définir et d'étudier les relations $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y}_{E,<} \beta$ (avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$), appelées G-Grad-X-Y (avec $X =$ PosAdd ou PosMax ou Bel ou Equ et $Y =$ T ou Incl).
Dans un premier temps, on va donc définir ces relations. Puis dans une seconde partie, on cherchera à caractériser ces relations par rapport aux relations de base Grad-X-Y dont les définitions sont données en section 3.4 page 6. Et enfin, on étudiera pour chaque propriété citée ci-dessus le comportement des différentes relations graduelles.

7.1 Quelques définitions

Définition 7.1.1 *Soient $(E,<)$ une base de formules propositionnelles ordonnée, et α, β deux formules propositionnelles, on a :* $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y}_{E,<} \beta \Leftrightarrow E \oplus \alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \beta$ *(pour $x = pa, pm, bel, eq$ et et $y = T, In$), avec :*

- $E \oplus \alpha = (E \cup \{\alpha\}, <')$,
- *l'ordre $<'$ correspondant à l'extension de l'ordre $<$ par le rajout de la formule α comme étant la formule la plus prioritaire de $<$.*

Remarques sur le cas des relations graduelles Grad-X-T D'après les définitions 3.4.2 page 7, 3.4.3 page 7 et 3.4.4 page 7, les sous-bases utilisées pour le calcul de ces relations sont les thèses de E. En conséquence, pour vérifier si $\alpha \mid\!\sim^{g,x,T}_{E,<} \beta$, nous nous servirons des thèses de $E \oplus \alpha$.
Nous nous trouvons donc devant un cas un peu particulier qui consiste à faire jouer à la formule α un rôle important certes (puisqu'on la place en première strate et que les thèses la contenant auront ainsi un poids plus important, si la fonction de poids prend en compte la stratification) mais minimisé par rapport à celui qu'elle jouerait dans le cadre de la révision des connaissances. En effet, α n'appartiendra pas forcément à toutes les thèses de $E \oplus \alpha$.
Ce choix se défend par le fait que, bien que α soit la dernière connaissance obtenue, il peut s'avérer utile de nuancer son utilisation (voir l'exemple suivant).

Exemple Soit la base $(E,<)$ suivante :

$$\begin{array}{c} \neg\alpha \\ \beta \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \neg\gamma \\ \neg\beta \\ \hline \delta \\ \hline \beta \end{array}$$

On trouve les 3 thèses suivantes (la thèse incl-préférée et lex-préférée est Y_1) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3
Contenu	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \gamma$ $\beta \rightarrow \neg\gamma$ $\neg\beta$ δ	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \gamma$ δ β	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \neg\gamma$ δ β
Fonction p_{po}	3	1	1
Fonction p_{pr}	$1 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1		
Formules inferées	$\vdash \neg\beta$ $\vdash \neg\alpha$	$\vdash \beta$ $\vdash \neg\alpha$	$\vdash \beta$ $\vdash \neg\alpha$

Le résultat intuitif attendu est : $\neg\alpha$ et $\neg\beta$.
Les résultats obtenus avec les relations graduelles sont :

	n^T_{pa}	n^T_{pm}	n^T_{bel}	n^{In}_{eq}
α	0	0	0	0
$\neg\alpha$	5	3	$1 + 3O(\epsilon)$	1
ni α, ni $\neg\alpha$	0	0	0	0
β	2	1	$2O(\epsilon)$	0
$\neg\beta$	3	3	$1 + O(\epsilon)$	1
ni β, ni $\neg\beta$	0	0	0	0

Donc, avec toutes les relations graduelles on inférera $\neg\alpha$ et $\neg\beta$.

Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 6 thèses suivantes (Y_4 étant la thèse incl et lex-préférée) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Contenu	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	α	α	α
	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$
	$\beta \to \neg\gamma$	δ	δ	$\beta \to \neg\gamma$	δ	δ
	$\neg\beta$	β	β	$\neg\beta$	β	β
	δ			δ		
Fonction p_{po}	1	1	1	2	2	2
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}				1		
Formules inférées	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$
	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$

Le résultat intuitif attendu est : α et $\neg\beta$.
Les résultats obtenus avec les relations graduelles sont :

	n_{pa}^T	n_{pm}^T	n_{bel}^T	n_{eq}^{In}
α	6	2	$1/2 + 3O(\epsilon)$	1
$\neg\alpha$	3	1	$1/2 + 3O(\epsilon)$	0
ni α, ni $\neg\alpha$	0	0	0	0
β	6	2	$4O(\epsilon)$	0
$\neg\beta$	3	2	$1 + 2O(\epsilon)$	1
ni β, ni $\neg\beta$	0	0	0	0

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on constate que les relations Grad-PosAdd-T, Grad-PosMax-T et Grad-Equ-Incl permettent désormais d'inférer α (ce qui n'est pas le cas de Grad-Bel-T avec laquelle on n'infère rien sur α).
D'autre part, les relations Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl permettent toujours d'inférer $\neg\beta$, ce qui n'est plus le cas avec les deux autres relations, la relation Grad-PosAdd-T allant même jusqu'à inférer désormais β.
Ce dernier résultat met en évidence le fait que certaines de nos relations graduelles (Grad-PosAdd-T et Grad-PosMax-T) sont particulièrement sensibles à la modification de la base. En effet, a priori, le fait de rajouter la formule α, sachant que cette formule n'intervient pas dans la preuve de β ou $\neg\beta$, ne devrait pas modifier les conclusions tirées sur β. Or, on constate malheureusement que cela se produit parce que le rajout de α modifie le rapport qui existait entre les poids des thèses (celle qui inférait $\neg\beta$ "rétrograde" au même niveau que celles qui inféraient β, puisque $\neg\alpha$ et $\neg\beta$ sont dans la même strate).

7.2 Caractérisations

7.2.1 Caractérisation des thèses de $E \oplus \alpha$

Le principal théorème est le suivant. Il donne la caractérisation des thèses de $E \oplus \alpha$ par rapport aux thèses de E.

Théorème 7.2.1 *Soit Y_i thèse de E.*

- *Si Y_i est α-consistante alors $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$ est une thèse α-consistante de $E \oplus \alpha$;*
- *sinon*
  - *Y_i est une thèse α-inconsistante de $E \oplus \alpha$,*
  - *et $\forall S \subset Y_i$ sous-base maximale α-consistante[1], $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ est une thèse α-consistante de $E \oplus \alpha$.*

Preuve : Trivial d'après la définition de $E \oplus \alpha$ donnée en 7.1.1 page 29. □

Ce théorème implique le suivant.

Théorème 7.2.2 *Soit Y_i thèse de E.*

- *Si $Y_i \vdash \beta$ alors*
  - *Si Y_i est α-consistante alors $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;*

1. Il peut y en avoir plusieurs, et il en existe au moins une ! D'autre part, par ce processus, plusieurs Y_i peuvent mener à une même Y_i'.

- *sinon*
    - $Y_i' = Y_i$, *thèse* α*-inconsistante de* $E \oplus \alpha$, *infère* β,
    - *et* $\forall S \subset Y_i$ *sous-base maximale* α*-consistante, on ne peut rien dire sur l'inférence de* β *par* $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$.
- *et sinon*
  - *Si* Y_i *est* α*-consistante alors on ne peut rien dire sur l'inférence de* β *par* $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$;
  - *sinon*
    - $Y_i' = Y_i$, *thèse* α*-inconsistante de* $E \oplus \alpha$, *n'infère pas* β,
    - *et* $\forall S \subset Y_i$ *sous-base maximale* α*-consistante, on ne peut rien conclure concernant l'inférence de* β *par* $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$.

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.1 page précédente. □

Propriété 7.2.1 *Soient* n_α *nombre de thèses* α*-consistantes de* E, $n_{\neg\alpha}$ *nombre de thèses* α*-inconsistantes de* E, n'_α *nombre de thèses* α*-consistantes de* $E \oplus \alpha$, $n'_{\neg\alpha}$ *nombre de thèses* α*-inconsistantes de* $E \oplus \alpha$. *On a alors* $n_\alpha \leq n'_\alpha$ *et* $n_{\neg\alpha} = n'_{\neg\alpha}$.

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.1 page précédente. □

On obtient d'autre part la caractérisation suivante des thèses de E par rapport aux thèses de $E \oplus \alpha$.

Théorème 7.2.3 *Soit* Y_i' *thèse de* $E \oplus \alpha$.

- *Si* Y_i' *est* α*-consistante alors* $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ *avec* S *sous-base maximale* α*-consistante de* E, *alors* $\forall Y_i$ *thèse de* E *telle que* $S \subseteq Y_i$, *on a deux cas possibles ;*
  - *soit* $S = Y_i$ *est une thèse* α*-consistante de* E,
  - *soit* $S \subset Y_i$ *avec* Y_i *thèse* α*-inconsistante de* E.
- *sinon* $Y_i = Y_i'$ *est une thèse* α*-inconsistante de* E.

Preuve : Trivial d'après la définition 7.1.1 page 29 et le théorème 7.2.1 page précédente. □

Ce théorème implique le suivant.

Théorème 7.2.4 *Soit* Y_i' *thèse de* $E \oplus \alpha$.

- *Si* $Y_i' \vdash \beta$ *alors*
  - *Si* $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ *avec* S *sous-base maximale* α*-consistante de* E, *alors* $\forall Y_i$ *thèse de* E *telle que* $S \subseteq Y_i$, *on a deux cas possibles ;*
    - *soit* $S = Y_i$, *et alors on ne sait rien excepté que* $Y_i \nvdash \neg\beta$,
    - *soit* $S \subset Y_i$, *et on ne peut alors rien dire de l'inférence de* β *par* Y_i.
  - *sinon* $Y_i = Y_i'$ *et* $Y_i \vdash \beta$.
- *sinon*
  - *Si* $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ *avec* S *sous-base maximale* α*-consistante de* E, *alors* $\forall Y_i$ *thèse de* E *telle que* $S \subseteq Y_i$, *on a deux cas possibles ;*
    - *soit* $S = Y_i$, *et alors* $Y_i \nvdash \beta$,
    - *soit* $S \subset Y_i$, *et on ne peut alors rien dire de l'inférence de* β *par* Y_i.
  - *sinon* $Y_i = Y_i'$ *et* $Y_i \nvdash \beta$.

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.3. □

7.2.2 Caractérisation des thèses incl-préférées de $E \oplus \alpha$

Le principal théorème est le suivant. Il donne la caractérisation des thèses incl-préférées de $E \oplus \alpha$ par rapport aux thèses incl-préférées de E. Cette caractérisation a déjà été étudiée dans [LS95].

Théorème 7.2.5 *Soit Y_i thèse incl-préférée de E.*

- *Si Y_i est α-consistante alors $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$ est une thèse incl-préférée α-consistante de $E \oplus \alpha$;*
- *sinon $\forall S \subset Y_i$ sous-base α-consistante et incl-préférée parmi les sous-bases α-consistantes issues de Y_i [2], $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ est une thèse incl-préférée α-consistante de $E \oplus \alpha$.*

Preuve : Trivial d'après la définition de $E \oplus \alpha$ donnée en 7.1.1 page 29. □

Ce théorème implique le suivant.

Théorème 7.2.6 *Soit Y_i thèse incl-préférée de E.*

- *Si $Y_i \vdash \beta$ alors*
  - *Si Y_i est α-consistante alors $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\} \vdash \beta$;*
  - *sinon $\forall S \subset Y_i$ sous-base α-consistante et incl-préférée parmi les sous-bases α-consistantes issues de Y_i, on ne peut rien dire sur l'inférence de β par $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$.*
- *et sinon*
  - *Si Y_i est α-consistante alors on ne peut rien dire sur l'inférence de β par $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$;*
  - *sinon $\forall S \subset Y_i$ sous-base α-consistante et incl-préférée parmi les sous-bases α-consistantes issues de Y_i, on ne peut rien conclure concernant l'inférence de β par $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$.*

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.5. □

Propriété 7.2.2 *Soient n_α nombre de Y_i thèses incl-préférées α-consistantes de E, $n_{\neg\alpha}$ nombre de Y_i thèses incl-préférées α-inconsistantes de E, n'_α nombre de Y_i' thèses incl-préférées α-consistantes de $E \oplus \alpha$. On a alors $n_\alpha \leq n'_\alpha$.*

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.5. □

On obtient d'autre part la caractérisation suivante des thèses incl-préférées de E par rapport aux thèses incl-préférées de $E \oplus \alpha$.

Théorème 7.2.7 *Soit Y_i' thèse incl-préférée de $E \oplus \alpha$, par définition, Y_i' est α-consistante, donc $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ avec S sous-base α-consistante et incl-préférée parmi les sous-bases α-consistantes.*
$\forall Y_i$ thèse incl-préférée de E telle que $S \subseteq Y_i$, on a deux cas possibles ;

- *soit $S = Y_i$ est une thèse incl-préférée α-consistante de E,*
- *soit $S \subset Y_i$ avec Y_i thèse incl-préférée α-inconsistante de E.*

Preuve : Trivial d'après la définition 7.1.1 page 29 et le théorème 7.2.5. □

Ce théorème implique le suivant.

Théorème 7.2.8 *Soit Y_i' thèse incl-préférée de $E \oplus \alpha$, par définition, Y_i' est α-consistante, donc $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ avec S sous-base α-consistante et incl-préférée parmi les sous-bases α-consistantes.*

- *Si $Y_i' \vdash \beta$ alors $\forall Y_i$ thèse incl-préférée de E telle que $S \subseteq Y_i$, on a deux cas possibles ;*
  - *soit $S = Y_i$, et alors on ne sait rien excepté que $Y_i \nvdash \neg\beta$,*
  - *soit $S \subset Y_i$, et on ne peut alors rien dire de l'inférence de β par Y_i.*
- *sinon $\forall Y_i$ thèse incl-préférée de E telle que $S \subseteq Y_i$, on a deux cas possibles ;*
  - *soit $S = Y_i$, et alors $Y_i \nvdash \beta$,*
  - *soit $S \subset Y_i$, et on ne peut alors rien dire de l'inférence de β par Y_i.*

Preuve : Trivial d'après le théorème 7.2.7. □

2. Ici aussi, comme pour les thèses, il peut y avoir plusieurs S issues de Y_i, et il en existe au moins une ! De même, par ce processus, plusieurs Y_i peuvent mener à une même Y_i'.

7.2.3 Caractérisation du poids possibiliste des thèses de $E \oplus \alpha$

Remarquons d'abord que, $\forall Y_i'$ thèse de $E \oplus \alpha$, si Y_i' est α-inconsistante alors p_i' le poids possibiliste de Y_i' est égal à 1 (la formule la plus prioritaire manquante est α qui est dans la première strate).
Le principal théorème est le suivant. Il donne la caractérisation du poids possibiliste des thèses de $E \oplus \alpha$ par rapport au poids des thèses de E.

Théorème 7.2.9 *Soit Y_i thèse de E, et p_i son poids possibiliste.*

- *Si Y_i est α-consistante alors $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$, thèse α-consistante de $E \oplus \alpha$, aura pour poids possibiliste $p_i' = p_i + 1$;*
- *sinon*
  - *$Y_i' = Y_i$, thèse α-inconsistante de $E \oplus \alpha$, a pour poids possibiliste $p_i' = 1$,*
  - *et $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$, $\forall S$ sous-base maximale α-consistante issue de Y_i, a pour poids possibiliste p_i' sans lien particulier avec p_i, excepté que $p_i' \leq p_i + 1$.*

Preuve : Trivial d'après la définition 3.2.1 page 5 et le théorème 7.2.1 page 31. Remarquons d'autre part que l'inégalité $p_i' \leq p_i + 1$ (quand $Y_i' = S \cup \{\alpha\}, \forall S$ sous-base maximale α-consistante issue de Y_i thèse α-inconsistante de E) provient du fait que la thèse Y_i est incl-préférée aux sous-bases S ainsi identifiées donc que $p(S) \leq p(Y_i)$ (voir propriété 3.5.1 page 7). □

On obtient d'autre part la caractérisation suivante du poids possibiliste des thèses de E par rapport au poids des thèses de $E \oplus \alpha$.

Théorème 7.2.10 *Soit Y_i' thèse de E, et p_i' son poids possibiliste.*

- *Si Y_i' est α-consistante alors, soit Y_i la thèse α-consistante de E obtenue avec S sous-base maximale α-consistante de E telle que $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$, on a deux cas possibles ;*
  - *soit $S = Y_i$ et alors le poids possibiliste de Y_i est $p_i = p_i' - 1$,*
  - *soit $S \subset Y_i$, et alors le poids possibiliste de Y_i est a priori sans lien avec p_i', excepté que $p_i \geq p_i' - 1$.*
- *sinon $Y_i = Y_i'$, thèse α-inconsistante de E, a pour poids possibiliste p_i sans lien a priori avec p_i' (qui est égal à 1).*

Preuve : Trivial d'après la définition 3.2.1 page 5 et le théorème 7.2.9. □

Propriété 7.2.3 *Soient Y_1 et Y_2 deux thèses de E de poids possibilistes respectifs p_1 et p_2 telles que $p_1 > p_2$. On a alors :*

- *si Y_1 est α-consistante alors, soient Y_1' et Y_2' les thèses de $E \oplus \alpha$ issues de Y_1 et Y_2 de poids possibilistes respectifs p_1' et p_2', on a $p_1' = p_1 + 1 > p_2 + 1 \geq p_2'$;*
- *si Y_1 et Y_2 sont α-inconsistantes on a deux cas possibles :*
  - *soient $Y_1' = Y_1$ et $Y_2' = Y_2$ les thèses α-inconsistantes de $E \oplus \alpha$ de poids possibilistes respectifs p_1' et p_2', on a $p_1' = p_2' = 1$;*
  - *soient $Y_1' = S_1 \cup \{\alpha\}$ et $Y_2' = S_2 \cup \{\alpha\}$ les thèses de $E \oplus \alpha$ issues de Y_1 et Y_2 de poids possibilistes respectifs p_1' et p_2', on a $p_1' \leq p_1 + 1$ et $p_2' \leq p_2 + 1$ sans lien entre p_1' et p_2' ;*

Preuve : Trivial d'après théorème 7.2.1 page 31 et définition 3.2.1 page 5. □

7.2.4 Caractérisation du poids probabiliste des thèses de $E \oplus \alpha$

Il n'est pas possible de donner une caractérisation du poids probabiliste des thèses de $E \oplus \alpha$ à partir de celui des thèses de E. Par contre, on obtient les deux propriétés suivantes.

Propriété 7.2.4 *Soit p le nombre de thèses maximales pour la cardinalité de E. S'il existe un nombre $x \neq 0$ de thèses α-consistantes parmi les p thèses maximales pour la cardinalité alors :*

- *il y aura seulement x thèses maximales pour la cardinalité de $E \oplus \alpha$ et leur poids probabiliste sera égal à $1/x + O(\epsilon)$;*

- *les $p-x$ thèses maximales pour la cardinalité de E et α-inconsistantes, qui sont aussi des thèses de $E \oplus \alpha$, auront pour poids probabiliste $O(\epsilon)$ (puisqu'elles ne sont plus maximales pour la cardinalité dans $E \oplus \alpha$);*
- *le poids probabiliste de toutes les autres thèses de $E \oplus \alpha$ sera $\leq O(\epsilon)$.*

Preuve : Trivial d'après la définition 3.2.2 page 6 des poids probabilistes. Remarquons que le troisième item de l'énumération concerne les thèses de $E \oplus \alpha$ issues de thèses de E non maximales pour la cardinalité, mais aussi celles de la forme $S \cup \{\alpha\}$, $\forall S$ sous-base maximale α-consistante issue d'une thèse Y_i α-inconsistante de E maximale pour la cardinalité. □

Propriété 7.2.5 *Soit p le nombre de thèses maximales pour la cardinalité de E. S'il n'existe pas de thèses α-consistantes parmi les p thèses maximales pour la cardinalité alors les p thèses α-inconsistantes de E qui sont aussi des thèses de $E \oplus \alpha$ seront maximales pour la cardinalité dans $E \oplus \alpha$ mais leur poids probabiliste ne peut être calculé.*

Preuve : Trivial d'après la définition 3.2.2 page 6 des poids probabilistes. Remarquons que l'on ne peut pas calculer le poids probabiliste des Y_i' thèses de $E \oplus \alpha$ maximales pour la cardinalité puisqu'on ne sait pas combien il y en a. En effet, soit k la cardinalité des thèses de E maximales pour la cardinalité, elles peuvent être de la forme :

- soit $Y_i' = Y_i$ avec Y_i thèse α-inconsistante de E et maximale pour la cardinalité ;
- soit $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$ avec Y_i thèse α-consistante de E et $|Y_i| = k-1$;
- soit $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ avec S sous-base maximale α-consistante issue de Y_i thèse α-inconsistante de E et $|S| = k-1$.

□

7.2.5 Caractérisation de l'équi-poids des sous-bases sélectionnées de $E \oplus \alpha$

La caractérisation de l'équi-poids des sous-bases sélectionnées de $E \oplus \alpha$ est triviale puisque par définition chaque sous-base sélectionnée a pour équi-poids 1, et ceci quelles que soit les sous-bases sélectionnées de E et leur équi-poids.

7.2.6 Caractérisation des notes de type n_{pa}^T obtenues sur $E \oplus \alpha$

Il n'est pas possible de donner une caractérisation des notes de type n_{pa}^T obtenues sur $E \oplus \alpha$ par rapport aux notes obtenues sur E. Tout au plus, on peut donner quelques exemples montrant que la relation d'ordre entre les notes de type n_{pa}^T ne se conservent pas en passant de E à $E \oplus \alpha$.

Exemple 1 Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c}
\neg\alpha \\
\beta \rightarrow \gamma \\
\beta \rightarrow \neg\gamma \\
\neg\beta \\
\hline
\delta \\
\hline
\beta
\end{array}$$

On trouve les 3 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3
$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$
$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
$\beta \rightarrow \neg\gamma$	δ	δ
$\neg\beta$	β	β
δ		
poids = 3	poids = 1	poids = 1
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Dans cette base, on a $n^T_{pa}(\beta) = 2$ et $n^T_{pa}(\neg\beta) = 3$. On GRAD-POSADD-T-inférera $\neg\beta$.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 6 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	α	α	α
$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$\beta \to \neg\gamma$
$\beta \to \neg\gamma$	δ	δ	$\beta \to \neg\gamma$	δ	δ
$\neg\beta$	β	β	$\neg\beta$	β	β
δ			δ		
poids = 1	poids = 1	poids = 1	poids = 2	poids = 2	poids = 2
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n^T_{pa}(\beta) = 6$ et $n^T_{pa}(\neg\beta) = 3$. On GRAD-POSADD-T-inférera β. La relation d'ordre ne s'est donc pas conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$.

Exemple 2 Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \beta \\ \hline \gamma \\ \neg\gamma \end{array}$$

On trouve les 2 thèses suivantes :

Y_1	Y_2
β	β
γ	$\neg\gamma$
poids = 2	poids = 2
$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Dans cette base, on a $n^T_{pa}(\beta) = 4$ et $n^T_{pa}(\neg\beta) = 0$. On GRAD-POSADD-T-inférera β.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 2 thèses suivantes :

Y_1	Y_2
α	α
β	β
γ	$\neg\gamma$
poids = 3	poids = 3
$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n^T_{pa}(\beta) = 6$ et $n^T_{pa}(\neg\beta) = 0$. On GRAD-POSADD-T-inférera β. La relation d'ordre s'est donc conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$.
En conclusion, on ne peut donc pas poser une règle générale en ce qui concerne la conservation de la relation d'ordre sur les notes de type n^T_{pa} lors du passage de la base E à la base $E \oplus \alpha$. Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 7.2.1 $(E, <) \mid\!\sim^{g,pa,T} \beta \not\Rightarrow \alpha \mid\!\sim^{g,pa,T}_{E,<} \beta$

7.2.7 Caractérisation des notes de type n^T_{pm} obtenues sur $E \oplus \alpha$

Ici aussi, il n'est pas possible de donner une caractérisation des notes de type n^T_{pm} obtenues sur $E \oplus \alpha$ par rapport aux notes obtenues sur E. Voyons sur quelques exemples.

Exemple 1 Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \beta \\ \hline \neg\beta \\ \beta \to \neg\alpha \end{array}$$

On trouve les 2 thèses suivantes :

Y_1	Y_2
β	$\neg\beta$
$\beta \to \neg\alpha$	$\beta \to \neg\alpha$
poids = 2	poids = 1
$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$

Dans cette base, on a $n^T_{pm}(\beta) = 2$ et $n^T_{pm}(\neg\beta) = 1$. On GRAD-POSMAX-T-inférera β.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 3 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3
α	α	β
β	$\neg\beta$	$\beta \to \neg\alpha$
	$\beta \to \neg\alpha$	
poids = 3	poids = 2	poids = 1
$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n^T_{pm}(\beta) = 3$ et $n^T_{pm}(\neg\beta) = 2$. On GRAD-POSMAX-T-inférera β. La relation d'ordre s'est donc conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$.

Exemple 2 Soit la base E suivante :

$\alpha \to \neg\beta$
β

On trouve la thèse suivante :

Y_1
$\alpha \to \neg\beta$
β
poids = 3
$\vdash \beta$

Dans cette base, on a $n^T_{pm}(\beta) = 3$ et $n^T_{pm}(\neg\beta) = 0$. On GRAD-POSMAX-T-inférera β.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 2 thèses suivantes :

Y_1	Y_2
α	α
$\alpha \to \neg\beta$	β
poids = 3	poids = 2
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n^T_{pm}(\beta) = 2$ et $n^T_{pm}(\neg\beta) = 3$. On GRAD-POSMAX-T-inférera $\neg\beta$. La relation d'ordre ne s'est pas conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$.
En conclusion, on ne peut donc pas poser une règle générale en ce qui concerne la conservation de la relation d'ordre sur les notes de type n^T_{pm} lors du passage de la base E à la base $E \oplus \alpha$. Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 7.2.2 $(E,<) \mid\!\sim^{g,pm,T} \beta \not\Rightarrow \alpha \mid\!\sim^{g,pm,T}_{E,<} \beta$

Notons qu'il existe quand même un cas particulier :

Propriété 7.2.6 *Si $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\gamma)$ dans la base E et s'il existe au moins une thèse Y_i α-consistante de E telle que $p_{po}(Y_i) = n^T_{pm}(\beta)$ et $Y_i \vdash \beta$, on a alors $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\gamma)$ dans la base $E \oplus \alpha$.*

> **Preuve :** Cette propriété est due à la propriété 7.2.3 page 34 et à la construction des thèses de $E \oplus \alpha$. En effet, par définition, la thèse Y_i induit une thèse $Y'_i = Y_i \cup \{\alpha\}$ de $E \oplus \alpha$ qui inférera β et qui sera de poids possibiliste $p'_i = p_i + 1$, ce poids étant le max des poids possibilistes pour des thèses Y'_k de $E \oplus \alpha$ qui infèrent β. Or, par hypothèse, $p_i > p_j$ avec p_j le poids possibiliste des thèses de E qui infèrent γ (qu'elles soient α-consistantes ou α-inconsistantes). Donc $p'_i = max(p_{po}(Y'_k), Y'_k \vdash \beta) > p'_j$, quel que soit p'_j le poids des Y'_j, thèses de $E \oplus \alpha$, qui infèrent γ. Donc $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\gamma)$ dans la base $E \oplus \alpha$. □

7.2.8 Caractérisation des notes de type n^T_{bel} obtenues sur $E \oplus \alpha$

Il n'est pas possible de donner une caractérisation des notes de type n^T_{bel} obtenues sur $E \oplus \alpha$ par rapport aux notes obtenues sur E. Voyons quelques exemples.

Exemple 1 Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \neg\alpha \\ \beta \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \neg\gamma \\ \neg\beta \\ \hline \beta \end{array}$$

On trouve les 3 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3
$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$
$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β
$\neg\beta$		
poids $= 1 + O(\epsilon)$	poids $= O(\epsilon)$	poids $= O(\epsilon)$
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Dans cette base, on a $n^T_{bel}(\beta) = 2O(\epsilon)$ et $n^T_{bel}(\neg\beta) = 1 + O(\epsilon)$. On GRAD-BEL-T-inférera $\neg\beta$.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 6 thèses suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Contenu	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	α	α	α
	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β
	$\neg\beta$			$\neg\beta$		
p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n^T_{bel}(\beta) = 4O(\epsilon)$ et $n^T_{bel}(\neg\beta) = 1 + 2O(\epsilon)$. On GRAD-BEL-T-inférera $\neg\beta$. La relation d'ordre s'est donc conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$.

Exemple 2 Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} p \rightarrow o \\ p \rightarrow \neg v \\ o \rightarrow v \end{array}$$

On trouve la thèse suivante :

Y_1
$p \rightarrow o$
$p \rightarrow \neg v$
$o \rightarrow v$
poids $= 1 + O(\epsilon)$
$\vdash \neg p$

Dans cette base, on a $n^T_{bel}(p) = 0$ et $n^T_{bel}(\neg p) = 1 + O(\epsilon)$. On GRAD-BEL-T-inférera $\neg p$.
Puis, dans la base $E \oplus p$, on trouve les 4 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
p	p	p	$p \rightarrow o$
$p \rightarrow o$	$p \rightarrow o$	$o \rightarrow v$	$o \rightarrow v$
$o \rightarrow v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$	$p \rightarrow \neg v$
$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$	$1/4 + O(\epsilon)$
$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash p$	$\vdash \neg p$

Ainsi, dans la base $E \oplus p$, on a $n_{bel}^{T}(p) = 3/4 + 3O(\epsilon)$ et $n_{bel}^{T}(\neg p) = 1/4 + O(\epsilon)$. On GRAD-BEL-T-inférera p. La relation d'ordre ne s'est pas conservée en passant de E à $E \oplus p$.
En conclusion, on ne peut donc pas poser une règle générale en ce qui concerne la conservation de la relation d'ordre sur les notes de type n_{bel}^{T} lors du passage de la base E à la base $E \oplus \alpha$. Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 7.2.3 $(E, <) \mid\!\sim^{g,bel,T} \beta \not\Rightarrow \alpha \mid\!\sim_{E,<}^{g,bel,T} \beta$

7.2.9 Caractérisation des notes de type n_{eq}^{In} obtenues sur $E \oplus \alpha$

Il n'est pas possible de donner une caractérisation des notes de type n_{eq}^{In} obtenues sur $E \oplus \alpha$ par rapport aux notes obtenues sur E. Voyons sur un exemple.

Exemple Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \neg\alpha \\ \beta \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \neg\gamma \\ \neg\beta \\ \hline \beta \end{array}$$

On trouve les 3 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3
$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$
$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β
$\neg\beta$		
poids = 1		
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$
$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$

Dans cette base, on a $n_{eq}^{In}(\beta) = 0$ et $n_{eq}^{In}(\neg\beta) = 1$. D'autre part, on a aussi $n_{eq}^{In}(\alpha) = 0$ et $n_{eq}^{In}(\neg\alpha) = 1$. On GRAD-EQU-INCL-inférera $\neg\beta$ et $\neg\alpha$.
Puis, dans la base $E \oplus \alpha$, on trouve les 6 thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$	α	α	α
$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	β	β
$\neg\beta$			$\neg\beta$		
			poids = 1		
$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$
$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$

Ainsi, dans la base $E \oplus \alpha$, on a $n_{eq}^{In}(\beta) = 0$ et $n_{eq}^{In}(\neg\beta) = 1$. D'autre part, on a aussi $n_{eq}^{In}(\alpha) = 1$ et $n_{eq}^{In}(\neg\alpha) = 0$. On GRAD-EQU-INCL-inférera $\neg\beta$ et α. La relation d'ordre s'est donc conservée en passant de E à $E \oplus \alpha$ pour la variable β mais pas pour la variable α.
En conclusion, on ne peut donc pas poser une règle générale en ce qui concerne la conservation de la relation d'ordre sur les notes de type n_{eq}^{In} lors du passage de la base E à la base $E \oplus \alpha$. Ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 7.2.4 $(E, <) \mid\!\sim^{g,eq,In} \beta \not\Rightarrow \alpha \mid\!\sim_{E,<}^{g,eq,In} \beta$

7.2.10 Conclusion sur la caractérisation

Un récapitulatif des caractérisations est donné dans les tableaux suivants :

Caractérisation thèses

$$\begin{array}{ccc} Y_i\ \alpha\text{-consistante} & & Y_i\ \alpha\text{-inconsistante} \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(2)} & \downarrow^{(3)} \\ Y_i'\ \alpha\text{-consistante} & & Y_i'\ \alpha\text{-inconsistante} \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i correspond une $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$,
- (2) : à chaque Y_i correspond au moins une Y_i' (attention, plusieurs Y_i peuvent donner la même Y_i'),
- (1) : à chaque Y_i correspond une $Y_i' = Y_i$.

Caractérisation thèses incl-préférées

$$\begin{array}{ccc} Y_i\ \alpha\text{-consistante} & & Y_i\ \alpha\text{-inconsistante} \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(2)} & \\ Y_i'\ \alpha\text{-consistante} & & \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i correspond une $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$,
- (2) : à chaque Y_i correspond au moins une Y_i' (attention, plusieurs Y_i peuvent donner la même Y_i').

Caractérisation thèses qui $\vdash \beta$

$$\begin{array}{ccc} Y_i\ \alpha\text{-consistante} \vdash \beta & & Y_i\ \alpha\text{-inconsistante} \vdash \beta \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(2)} & \downarrow^{(1)} \\ Y_i'\ \alpha\text{-consistante} \vdash \beta & & Y_i'\ \alpha\text{-inconsistante} \vdash \beta \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i correspond une Y_i',
- (2) : pas de règle générale (certaines Y_i α-inconsistantes inférant β donneront une Y_i' α-consistante inférant β, et d'autres pas !).

Caractérisation thèses incl-préférées qui $\vdash \beta$

$$\begin{array}{ccc} Y_i\ \alpha\text{-consistante} \vdash \beta & & Y_i\ \alpha\text{-inconsistante} \vdash \beta \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(2)} & \\ Y_i'\ \alpha\text{-consistante} \vdash \beta & & \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i correspond une Y_i',
- (2) : pas de règle générale (certaines Y_i α-inconsistantes inférant β donneront une Y_i' α-consistante inférant β, et d'autres pas !).

Caractérisation thèses qui $\nvdash \beta$

$$\begin{array}{ccc} Y_i\ \alpha\text{-consistante} \nvdash \beta & & Y_i\ \alpha\text{-inconsistante} \nvdash \beta \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(1)} & \downarrow^{(2)} \\ Y_i'\ \alpha\text{-consistante} \nvdash \beta & & Y_i'\ \alpha\text{-inconsistante} \nvdash \beta \end{array}$$

Légende :

- (1) : pas de règle générale !
- (2) : à chaque Y_i correspond une Y_i'.

Caractérisation thèses incl-préférées qui $\not\vdash \beta$

$$\begin{array}{ccc} Y_i \ \alpha\text{-consistante} \not\vdash \beta & & Y_i \ \alpha\text{-inconsistante} \not\vdash \beta \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(1)} & \\ Y_i' \ \alpha\text{-consistante} \not\vdash \beta & & \end{array}$$

Légende :

- (1) : pas de règle générale !

Caractérisation poids possibiliste des thèses

$$\begin{array}{ccc} p_i = p_{po}(Y_i \ \alpha\text{-consistante}) & & p_i = p_{po}(Y_i \ \alpha\text{-inconsistante}) \\ \downarrow^{(1)} & \swarrow^{(2)} & \downarrow^{(3)} \\ p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-consistante}) & & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-inconsistante}) \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i de poids p_i correspond une Y_i' de poids $p_i + 1$,
- (2) : $p_i' \leq p_i + 1$,
- (3) : à chaque Y_i de poids p_i correspond une Y_i' de poids 1.

Caractérisation poids probabiliste des thèses
Premier cas : il existe des thèses α-consistantes max-card

$$\begin{array}{cccccc} p_i = p_{po}(Y_i \ \alpha\text{-cons. max-card}) & p_i = p_{po}(Y_i \ \alpha\text{-inc. max-card}) & & & & p_i = p_{po}(\text{des autres } Y_i) \\ \downarrow^{(1)} & \downarrow^{(2)} & \searrow^{(3)} & & \swarrow^{(3)} & \downarrow^{(3)} \\ p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-cons. max-card}) & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-inc.}) & & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-cons.}) & & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-inc.}) \end{array}$$

Légende :

- (1) : à chaque Y_i de poids p_i correspond une Y_i' de poids $1/x + O(\epsilon)$ avec x nombre de Y_i α-consistante max-card,
- (2) : à chaque Y_i de poids p_i correspond une Y_i' de poids $O(\epsilon)$,
- (3) : $p_i' \leq O(\epsilon)$.

Caractérisation poids probabiliste des thèses
Second cas : il n'existe pas de thèses α-consistantes max-card

$$\begin{array}{ccccc} p_i = p_{po}(Y_i \ \alpha\text{-inc. max-card}) & & & & p_i = p_{po}(\text{des autres } Y_i) \\ \downarrow^{(2)} & \searrow^{(3)} & & \swarrow^{(3)} & \downarrow^{(3)} \\ p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-inc.}) & & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-cons.}) & & p_i' = p_{po}(Y_i' \ \alpha\text{-inc.}) \end{array}$$

Légende :

- (2) : à chaque Y_i de poids p_i correspond une Y_i' de poids inconnu mais de la forme $1/? + O(\epsilon)$,
- (3) : p_i' inconnu.

Caractérisation nombre de thèses

$$\begin{array}{ccc} n_\alpha = \text{nombre des } Y_i \ \alpha\text{-consistantes} & & n_{\neg\alpha} = \text{nombre des } Y_i \ \alpha\text{-inconsistantes} \\ \downarrow & \swarrow^{(1)} & \downarrow \\ n_\alpha' = \text{nombre des } Y_i' \ \alpha\text{-consistantes } (2) & & n_{\neg\alpha}' = \text{nombre des } Y_i' \ \alpha\text{-inconsistantes } (3) \end{array}$$

Légende :

- (1) : x = nombre de Y_i' α-consistantes issues d'une Y_i α-inconsistante (en général sans lien avec $n_{\neg\alpha}$),
- (2) : $n_\alpha' = n_\alpha + x$ (voir définition de x ci-dessus – x pouvant être nul),
- (3) : $n_{\neg\alpha}' = n_{\neg\alpha}$.

Caractérisation nombre de thèses incl-préférées

$$\begin{array}{ccc} n_\alpha = \text{nombre des } Y_i \ \alpha\text{-consistantes} & & n_{\neg\alpha} = \text{nombre des } Y_i \ \alpha\text{-inconsistantes} \\ \downarrow & \swarrow^{(1)} & \\ n_\alpha' = \text{nombre des } Y_i' \ \alpha\text{-consistantes } (2) & & \end{array}$$

Légende :

- (1) : x = nombre de Y_i' α-consistantes issues d'une Y_i α-inconsistante (en général sans lien avec $n_{\neg\alpha}$),
- (2) : $n_\alpha' = n_\alpha + x$ (voir définition de x ci-dessus – x pouvant être nul).

7.3 Étude des propriétés

7.3.1 La supra-classicité

Rappelons que la propriété de supra-classicité se définit par $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\alpha \mid\!\sim \beta}$

Théorème 7.3.1 *Les relations d'inférence non-monotone* G-GRAD-POSADD-T *et* G-GRAD-BEL-T*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de supra-classicité.*

Preuve : Il suffit de prendre un contre-exemple. Soit la base $E \oplus \alpha$ suivante :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\beta \\ \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ \neg\alpha \rightarrow \neg\gamma \end{array}$$

Avec l'hypothèse $\alpha \vdash \beta$, on obtient alors les thèses suivantes :

Y_1	Y_2	Y_3
α	$\neg\alpha$	$\neg\alpha$
$\neg\alpha \rightarrow \gamma$	$\neg\beta$	$\neg\beta$
$\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$	$\neg\alpha \rightarrow \gamma$	$\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$
$p_{po} = 2$	$p_{po} = 1$	$p_{po} = 1$
$p_{pr} = 1/3 + O(\epsilon)$	$p_{pr} = 1/3 + O(\epsilon)$	$p_{pr} = 1/3 + O(\epsilon)$
$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \neg\beta$

$Y_1 \vdash \beta$ à cause de l'hypothèse $\alpha \vdash \beta$. Et malgré cette hypothèse, les notes n^T_{pa} et n^T_{bel} obtenues pour β égales celles obtenues pour $\neg\beta$, donc $\alpha \not\mid\!\sim \beta$ avec G-GRAD-POSADD-T et G-GRAD-BEL-T. □

Théorème 7.3.2 *Les relations d'inférence non-monotone* G-GRAD-POSMAX-T *et* G-GRAD-EQU-INCL*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifient la propriété de supra-classicité.*

Preuve : Traitons d'abord le cas de G-GRAD-EQU-INCL. On sait que la relation UNI-INCL vérifie la propriété de supra-classicité (voir par exemple [LS95]), donc $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \alpha \mid\!\sim^{\forall,In} \beta$. D'autre part, on sait que $\alpha \mid\!\sim^{\forall,In} \beta \Rightarrow \alpha \mid\!\sim^{g,eq,In} \beta$ (voir les résultats sur la prudence en section 6.3 page 24). Donc $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \alpha \mid\!\sim^{g,eq,In} \beta$. Ainsi, G-GRAD-EQU-INCL vérifie la propriété de supra-classicité.

Voyons maintenant la preuve pour G-GRAD-POSMAX-T. Si $\alpha \vdash \beta$ alors $\forall Y_i$ thèse de E on a :

- soit Y_i est α-consistante et alors $Y'_i = Y_i \cup \{\alpha\}$ est une thèse de $E \oplus \alpha$ qui infère β et qui a pour poids possibiliste $p'_i > 1$;
- soit Y_i est α-inconsistante et alors on a deux cas possibles :
  - soit $Y'_i = Y_i$ est une thèse de $E \oplus \alpha$ dont on ne sait pas si elle infère ou pas β et qui a pour poids possibiliste $p'_i = 1$;
  - soit $Y'_i = S \cup \{\alpha\}$ (avec S sous-base maximale α-consistante issue de Y_i) est une thèse de $E \oplus \alpha$ qui infère β et qui a pour poids possibiliste $p'_i > 1$.

En conséquence, toutes les thèses de $E \oplus \alpha$ qui pourraient ne pas inférer β ont un poids de 1 $<$ au poids des thèses de $E \oplus \alpha$ dont on sait qu'elles infèrent β. Donc $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\neg\beta)$ et $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta)$. Ainsi, G-GRAD-POSMAX-T vérifie la propriété de supra-classicité.
□

7.3.2 La réflexivité

Rappelons que la propriété de réflexivité se définit par $\alpha \mid\!\sim \alpha$

Théorème 7.3.3 *Les relations d'inférence non-monotone* G-GRAD-POSADD-T *et* G-GRAD-BEL-T*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de réflexivité.*

Preuve : Pour G-GRAD-POSADD-T, il suffit d'utiliser le même type de contre-exemple que pour la supra-classicité. Soit la base suivante :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ \neg\alpha \rightarrow \neg\gamma \end{array}$$

On obtient alors les thèses suivantes :

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline \alpha \\ \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ \neg\alpha \rightarrow \neg\gamma \\ \hline p_{po} = 2 \\ \vdash \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} Y_2 \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\alpha \rightarrow \gamma \\ \\ \hline p_{po} = 1 \\ \vdash \neg\alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} Y_3 \\ \hline \neg\alpha \\ \neg\alpha \rightarrow \neg\gamma \\ \\ \hline p_{po} = 1 \\ \vdash \neg\alpha \end{array}$$

La note n^T_{pa} obtenue pour α égale celle obtenue pour $\neg\alpha$, donc $\alpha \mid\!\not\sim \alpha$ avec G-GRAD-POSADD-T.

Pour G-GRAD-BEL-T, utilisons la base suivante :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\alpha \end{array}$$

On obtient alors les thèses suivantes :

$$\begin{array}{c} Y_1 \\ \hline \alpha \\ \hline p_{pr} = 1/2 + O(\epsilon) \\ \vdash \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} Y_2 \\ \hline \neg\alpha \\ \hline p_{pr} = 1/2 + O(\epsilon) \\ \vdash \neg\alpha \end{array}$$

La note n^T_{bel} obtenue pour α égale celle obtenue pour $\neg\alpha$, donc $\alpha \mid\!\not\sim \alpha$ avec G-GRAD-BEL-T. □

Théorème 7.3.4 *Les relations d'inférence non-monotone* G-GRAD-POSMAX-T *et* G-GRAD-EQU-INCL*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifient la propriété de réflexivité.*

Preuve : On sait que la supra-classicité implique la réflexité. Or, d'après le théorème 7.3.2 page précédente, ces deux relations vérifient la supra-classicité, donc elles vérifient aussi la réflexivité. □

7.3.3 La préservation de la consistance

Rappelons que la propriété de préservation de la consistance se définit par $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \bot}{\alpha \vdash \bot}$ (avec $\bot$ représentant la contradiction).

Théorème 7.3.5 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y*, avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifient la propriété de préservation de la consistance.*

Preuve : $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \bot \Leftrightarrow n^y_x(\bot) > n^y_x(\neg\bot)$ et $n^y_x(\bot) > n^y_x(\text{ni } \bot, \text{ni } \neg\bot)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$

$\Rightarrow \exists Y'_i$ thèse (ou thèse incl-préférée si $y = In$) de $E \oplus \alpha$ telle que $Y'_i \vdash \bot$.

Par définition, Y'_i est soit de la forme $S \cup \{\alpha\}$ avec S sous-base α-consistante de E, soit de la forme Y_i avec Y_i thèse (ou thèse incl-préférée si $y = In$) de E ; or, par définition S et Y_i sont consistantes donc c'est α qui est inconsistante. □

7.3.4 La conditionnalisation faible

Rappelons que la propriété de conditionnalisation faible se définit par $\dfrac{\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta}{\mathrel{|\!\sim} \alpha \rightarrow \beta}$

Théorème 7.3.6 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-Grad-PosAdd-T, G-Grad-Bel-T *et* G-Grad-Equ-Incl, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de la conditionnalisation faible.*

Preuve : Utilisons les contre-exemples suivants.

Pour G-Grad-PosAdd-T Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \neg\beta \\ \beta \rightarrow \gamma \\ \beta \rightarrow \neg\gamma \\ \beta \rightarrow \delta \\ \beta \rightarrow \neg\delta \\ \hline \epsilon \\ \hline \epsilon' \\ \hline \epsilon'' \\ \hline \beta \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	α	α	α	α	α
	$\neg\beta$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \delta$	$\beta \rightarrow \neg\delta$	$\beta \rightarrow \delta$	$\beta \rightarrow \neg\delta$
	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	$\beta \rightarrow \delta$	ϵ'	ϵ'	ϵ'	ϵ'
	$\beta \rightarrow \neg\delta$	ϵ''	ϵ''	ϵ''	ϵ''
	ϵ	β	β	β	β
	ϵ'				
	ϵ''				
Fonction p_{po}	6	2	2	2	2
Formules inférées	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$

On a donc $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,pa,T} \beta$, puisque la note de β (8) est supérieure à celle de $\neg\beta$ (6) et à celle de "ni β, ni $\neg\beta$" (0).

D'autre part, les thèses de E sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	$\neg\beta$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	$\beta \rightarrow \neg\gamma$
	$\beta \rightarrow \gamma$	$\beta \rightarrow \delta$	$\beta \rightarrow \neg\delta$	$\beta \rightarrow \delta$	$\beta \rightarrow \neg\delta$
	$\beta \rightarrow \neg\gamma$	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	$\beta \rightarrow \delta$	ϵ'	ϵ'	ϵ'	ϵ'
	$\beta \rightarrow \neg\delta$	ϵ''	ϵ''	ϵ''	ϵ''
	ϵ	β	β	β	β
	ϵ'				
	ϵ''				
Fonction p_{po}	5	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash \neg\beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$	$\vdash \beta$
	$\nvdash (\alpha \rightarrow \beta)$ et	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$
	$\nvdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$				

Ici, la note pour $(\alpha \rightarrow \beta)$ égale 4, alors que celle de $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ est égale à 0 et celle de "ni $(\alpha \rightarrow \beta)$, ni $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$" est de 5. On a donc $\not\mathrel{|\!\sim}^{g,pa,T} (\alpha \rightarrow \beta)$.

Pour G-Grad-Bel-T **et** G-Grad-Equ-Incl Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \beta \\ \beta \to \mu \\ \beta \to \neg\mu \\ \epsilon \\ \epsilon \to \beta \\ \epsilon \to \neg\beta \\ \neg\epsilon, \neg\beta \to \mu \\ \neg\beta, \epsilon \to \delta \\ \neg\beta, \epsilon \to \neg\delta \\ \neg\beta \wedge \epsilon \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	α	α	α	α
	β	β	$\beta \to \mu$	$\beta \to \mu$
	$\beta \to \mu$	$\beta \to \neg\mu$	$\beta \to \neg\mu$	$\beta \to \neg\mu$
	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \neg\beta$	$\epsilon \to \neg\beta$
	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$
	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$
	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta \wedge \epsilon$	$\neg\beta \wedge \epsilon$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash \mu$	$\vdash \neg\mu$	$\nvdash \mu$ et $\nvdash \neg\mu$	$\nvdash \mu$ et $\nvdash \neg\mu$

Nom	Y_5	Y_6	Y_7
Contenu	α	α	α
	β	β	$\beta \to \mu$
	$\beta \to \mu$	$\beta \to \neg\mu$	$\beta \to \neg\mu$
	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \beta$
	$\epsilon \to \neg\beta$	$\epsilon \to \neg\beta$	$\epsilon \to \neg\beta$
	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$
	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$
	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1
Formules inférées	$\vdash \mu$	$\vdash \neg\mu$	$\vdash \mu$

On a donc $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,bel,T} \mu$, puisque la note de μ $(3/7 + 3O(\epsilon))$ est supérieure à celle de $\neg\mu$ $(2/7 + 2O(\epsilon))$ et à celle de "ni μ, ni $\neg\mu$" $(2/7 + 2O(\epsilon))$.

De même, $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,eq,In} \mu$, puisque la note de μ (3) est supérieure à celle de $\neg\mu$ (2) et à celle de "ni μ, ni $\neg\mu$" (2)

D'autre part, les thèses de E sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	β	β	$\beta \to \mu$	$\beta \to \mu$
	$\beta \to \mu$	$\beta \to \neg\mu$	$\beta \to \neg\mu$	$\beta \to \neg\mu$
	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \beta$	$\epsilon \to \neg\beta$	$\epsilon \to \neg\beta$
	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \to \mu$
	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$
	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \to \neg\delta$	$\neg\beta \wedge \epsilon$	$\neg\beta \wedge \epsilon$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash (\alpha \to \mu)$	$\nvdash (\alpha \to \mu)$ et $\nvdash \neg(\alpha \to \mu)$	$\nvdash (\alpha \to \mu)$ et $\nvdash \neg(\alpha \to \mu)$	$\nvdash (\alpha \to \mu)$ et $\nvdash \neg(\alpha \to \mu)$

Nom	Y_5	Y_6	Y_7
Contenu	β	β	$\beta \rightarrow \mu$
	$\beta \rightarrow \mu$	$\beta \rightarrow \neg\mu$	$\beta \rightarrow \neg\mu$
	$\epsilon \rightarrow \beta$	$\epsilon \rightarrow \beta$	$\epsilon \rightarrow \beta$
	$\epsilon \rightarrow \neg\beta$	$\epsilon \rightarrow \neg\beta$	$\epsilon \rightarrow \neg\beta$
	$\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow \mu$	$\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow \mu$
	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$
	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	$\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1	1
Formules inférées	$\vdash (\alpha \rightarrow \mu)$	$\not\vdash (\alpha \rightarrow \mu)$ et $\not\vdash \neg(\alpha \rightarrow \mu)$	$\vdash (\alpha \rightarrow \mu)$

Ici, dans le cas de G-GRAD-BEL-T, la note pour $(\alpha \rightarrow \mu)$ égale $3/7 + 3O(\epsilon)$, alors que celle de $\neg(\alpha \rightarrow \mu)$ est égale à 0 et celle de "ni $(\alpha \rightarrow \mu)$, ni $\neg(\alpha \rightarrow \mu)$" est de $4/7 + 4O(\epsilon)$. On a donc $\not\mid\!\sim^{g,bel,T} (\alpha \rightarrow \mu)$.

De même pour G-GRAD-EQU-INCL, la note de $(\alpha \rightarrow \mu)$ égale 3, alors que celle de $\neg(\alpha \rightarrow \mu)$ est égale à 0 et celle de "ni $(\alpha \rightarrow \mu)$, ni $\neg(\alpha \rightarrow \mu)$" est de 4. On a donc $\not\mid\!\sim^{g,eq,In} (\alpha \rightarrow \mu)$. □

Théorème 7.3.7 *La relation d'inférence non-monotone graduelle* G-GRAD-POSMAX-T*, définie à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifie la propriété de la conditionnalisation faible.*

Preuve : Posons l'hypothèse $\alpha \mid\!\sim^{g,pm,T} \beta$. Parmi les thèses Y_i' de $E \oplus \alpha$, les différents cas pouvant se présenter sont les suivants :

- soit $Y_i' = Y_i \cup \{\alpha\}$, avec Y_i une thèse α-consistante de E ($p_{po}(Y_i) = p_{po}(Y_i') - 1$) et on a alors trois sous-cas :
  - soit $Y_i' \vdash \beta$ et alors, par le théorème de la déduction naturelle, on a $Y_i \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$;
  - soit $Y_i' \not\vdash \beta$ et $Y_i' \not\vdash \neg\beta$ et alors $Y_i \not\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ et $Y_i \not\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ (puisque $Y_i' \not\vdash \beta$ et $Y_i' \not\vdash \neg\beta \Rightarrow Y_i \not\vdash \beta$ et $Y_i \not\vdash \neg\beta$ et que $Y_i \not\vdash \neg\alpha$) ;
  - soit $Y_i' \vdash \neg\beta$ donc $Y_i \vdash (\alpha \rightarrow \neg\beta) = (\neg\alpha \vee \neg\beta)$; on a alors 2 cas possibles[3] :
    - soit $Y_i \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$,
    - soit $Y_i \not\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ et $Y_i \not\vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$.
- soit $Y_i' = Y_i$ avec Y_i α-inconsistante donc $Y_i \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ ($p_{po}(Y_i) \geq p_{po}(Y_i') = 1$) ;
- soit $Y_i' = S \cup \{\alpha\}$ avec S sous-base α-consistante issue d'une thèse Y_i α-inconsistante de E, donc $Y_i \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ ($p_{po}(Y_i) \geq p_{po}(Y_i') - 1$).

Posons alors les notations suivantes, définies sur $E \oplus \alpha$:

- n_1' = max des poids des Y_i' qui infèrent β et qui sont de la forme $Y_i \cup \{\alpha\}$, avec Y_i thèse de E α-consistante ;
- n_2' = max des poids des Y_i' qui n'infèrent ni β, ni $\neg\beta$ et qui sont de la forme $Y_i \cup \{\alpha\}$, avec Y_i thèse de E α-consistante ;
- n_3' = max des poids des Y_i' qui infèrent $\neg\beta$ et qui sont de la forme $Y_i \cup \{\alpha\}$, avec Y_i thèse de E α-consistante ;
- $n_4' = 1$ = max des poids des Y_i' qui infèrent β et qui sont de la forme Y_i, avec Y_i thèse de E α-inconsistante ;
- $n_5' = 1$ = max des poids des Y_i' qui n'infèrent ni β, ni $\neg\beta$ et qui sont de la forme Y_i, avec Y_i thèse de E α-inconsistante ;
- $n_6' = 1$ = max des poids des Y_i' qui infèrent $\neg\beta$ et qui sont de la forme Y_i, avec Y_i thèse de E α-inconsistante ;
- n_7' = max des poids des Y_i' qui infèrent β et qui sont de la forme $S \cup \{\alpha\}$, avec S sous-base α-consistante maximale pour l'inclusion issue de Y_i thèse de E α-inconsistante ;
- n_8' = max des poids des Y_i' qui n'infèrent ni β, ni $\neg\beta$ et qui sont de la forme $S \cup \{\alpha\}$, avec S sous-base α-consistante maximale pour l'inclusion issue de Y_i thèse de E α-inconsistante ;

3. Remarquons que le cas où $Y_i \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ est proscrit car $(\alpha \rightarrow \beta)$ et $(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ impliquent $\neg\alpha$, ce qui est en contradiction avec le fait que Y_i est α-consistante.

- n'_9 = max des poids des Y'_i qui infèrent $\neg\beta$ et qui sont de la forme $S\cup\{\alpha\}$, avec S sous-base α-consistante maximale pour l'inclusion issue de Y_i thèse de E α-inconsistante.

Remarquons que l'on a alors les propriétés suivantes :

- ${n'}^T_{pm}(\beta) = max(n'_1, n'_4, n'_7) = max(n'_1, n'_7)$,
- ${n'}^T_{pm}(\neg\beta) = max(n'_3, n'_6, n'_9) = max(n'_3, n'_9)$,
- ${n'}^T_{pm}(\text{ni } \beta, \text{ ni } \neg\beta) = max(n'_2, n'_5, n'_8) = max(n'_2, n'_8)$.

D'autre part, posons les notations suivantes définies cette fois sur E :

- n_1 = max des poids des Y_i qui infèrent $(\alpha \rightarrow \beta)$ et telles que $Y_i = Y'_i \setminus \{\alpha\}$ avec Y'_i thèse de $E \oplus \alpha$ qui infère β ;
- n_2 = max des poids des Y_i qui n'infèrent ni $(\alpha \rightarrow \beta)$, ni $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ et telles que $Y_i = Y'_i \setminus \{\alpha\}$ avec Y'_i thèse de $E \oplus \alpha$ qui n'infère ni β, ni $\neg\beta$;
- n_3 = max des poids des Y_i qui infèrent $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ et telles que $Y_i = Y'_i \setminus \{\alpha\}$ avec Y'_i thèse de $E \oplus \alpha$ qui infère $\neg\beta$;
- n_4 = max des poids des Y_i qui n'infèrent ni $(\alpha \rightarrow \beta)$, ni $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ et telles que $Y_i = Y'_i \setminus \{\alpha\}$ avec Y'_i thèse de $E \oplus \alpha$ qui infère $\neg\beta$;
- n_5 = max des poids des Y_i qui infèrent $(\alpha \rightarrow \beta)$ et telles que $Y_i = Y'_i$ avec Y'_i thèse α-inconsistante de $E \oplus \alpha$;
- n_6 = max des poids des Y_i qui infèrent $(\alpha \rightarrow \beta)$, qui sont α-inconsistantes et telles que, soit S une sous-base α-consistante maximale pour l'inclusion issue de Y_i, on a $S\cup\{\alpha\} = Y'_i$ est une thèse de $E \oplus \alpha$.

On a alors les propriétés suivantes :

- $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) = max(n_1, n_5, n_6)$,
- $n^T_{pm}(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = n_3$,
- $n^T_{pm}(\text{ni } (\alpha \rightarrow \beta), \text{ ni } \neg(\alpha \rightarrow \beta)) = max(n_2, n_4)$.

Ainsi que :

- $n_1 = n'_1 - 1$,
- $n_2 = n'_2 - 1$,
- $max(n_3, n_4) = n'_3 - 1$,
- $n_5 \geq n'_4 = n'_5 = n'_6 = 1$,
- $n_6 \geq max(n'_7, n'_8, n'_9) - 1$.

Maintenant, prouvons que $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) > n^T_{pm}(\neg(\alpha \rightarrow \beta))$ et que $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) \geq n^T_{pm}(\text{ni } (\alpha \rightarrow \beta), \text{ ni } \neg(\alpha \rightarrow \beta))$. Pour cela, on montre d'abord que $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) \geq {n'}^T_{pm}(\beta) - 1$:

$$\begin{aligned}
n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) &= max(n_1, n_5, n_6) \\
&\geq max(n'_1 - 1, 1, max(n'_7, n'_8, n'_9) - 1) \\
&\geq max(n'_1 - 1, n'_7 - 1, n'_8 - 1, n'_9 - 1) \\
&\geq max(max(n'_1, n'_7), max(n'_8, n'_9)) - 1
\end{aligned}$$

Or on sait que $max(n'_1, n'_7) = {n'}^T_{pm}(\beta)$, que ${n'}^T_{pm}(\beta) > max(n'_3, n'_9) > n'_9$, et que ${n'}^T_{pm}(\beta) \geq max(n'_2, n'_8) \geq n'_8$. Donc :

$$\begin{aligned}
n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) &\geq max(n'_1, n'_7) - 1 \\
&\geq {n'}^T_{pm}(\beta) - 1
\end{aligned}$$

Puis, pour prouver $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) > n^T_{pm}(\neg(\alpha \rightarrow \beta))$, on sait que $n_3 \leq n'_3 - 1$. Or, ${n'}^T_{pm}(\beta) > max(n'_3, n'_9) \geq n'_3$, on a donc :

$$n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) \geq {n'}^T_{pm}(\beta) - 1$$

$$
\begin{aligned}
&> n'_3 - 1 \\
&> n_3 \\
&> n^T_{pm}(\neg(\alpha \rightarrow \beta))
\end{aligned}
$$

Et enfin, pour prouver $n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta) \geq n^T_{pm}(\text{ni } (\alpha \rightarrow \beta),\ \text{ni } \neg(\alpha \rightarrow \beta))$, on a :

$$
\begin{aligned}
max(n_2, n_4) &= max(n'_2 - 1, n_4) \\
&\leq max(n'_2 - 1, n'_3 - 1) \text{ (puisque } n_4 \leq n'_3 - 1) \\
&\leq max(n'_2, n'_3) - 1 \\
&\leq max(max(n'_2, n'_8), max(n'_3, n'_9)) - 1 \\
&\leq max(n'^T_{pm}(\text{ni } \beta,\ \text{ni } \neg\beta), n'^T_{pm}(\neg\beta)) - 1 \\
&\leq n'^T_{pm}(\beta) - 1 \\
&\leq n^T_{pm}(\alpha \rightarrow \beta)
\end{aligned}
$$

□

7.3.5 Le OU

Rappelons que la propriété du OU se définit par $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma \ ; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$

Théorème 7.3.8 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y, *avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété du OU.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$
\begin{array}{c}
x, \alpha \rightarrow \gamma \\
\beta \rightarrow \gamma, x \\
\hline
\rightarrow x \\
x \rightarrow
\end{array}
$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \rightarrow \gamma$	$x, \alpha \rightarrow \gamma$
	$\beta \rightarrow \gamma, x$	$\beta \rightarrow \gamma, x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \gamma$	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$

Les thèses de $E \oplus \beta$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	β	β
	$x, \alpha \rightarrow \gamma$	$x, \alpha \rightarrow \gamma$
	$\beta \rightarrow \gamma, x$	$\beta \rightarrow \gamma, x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$	$\vdash \gamma$

Les thèses de $E \oplus (\alpha \vee \beta)$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \vee \beta$
	$x, \alpha \rightarrow \gamma$	$x, \alpha \rightarrow \gamma$
	$\beta \rightarrow \gamma, x$	$\beta \rightarrow \gamma, x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \beta$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\beta \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus (\alpha \vee \beta)$, $n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma) = n_x^y(\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $(\alpha \vee \beta) \not\mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété du OU. □

7.3.6 La monotonie rationnelle

Rappelons que la propriété de monotonie rationnelle se définit par $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma \;;\; \alpha \not\mid\!\sim \neg\beta}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$

Théorème 7.3.9 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y, *avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de la monotonie rationnelle.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \rightarrow \gamma \\ \beta, \gamma \rightarrow x \\ \hline \rightarrow x \\ x \rightarrow \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \rightarrow \gamma$	$x, \alpha \rightarrow \gamma$
	$\beta, \gamma \rightarrow x$	$\beta, \gamma \rightarrow x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \gamma$	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$
	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$

Les thèses de $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	$\alpha \wedge \beta$ $x, \alpha \to \gamma$ $\beta, \gamma \to x$ $\to x$	$\alpha \wedge \beta$ $x, \alpha \to \gamma$ $\beta, \gamma \to x$ $x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \gamma$	$\vdash \neg\gamma$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta) > n_x^y(\neg\beta) = n_x^y(\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \not\mid\!\sim^{g,x,y} \neg\beta$;
- dans $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$, $n_x^y(\neg\gamma) = n_x^y(\gamma) > n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $(\alpha \wedge \beta) \not\mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété de la monotonie rationnelle. $\square$

7.3.7 L'équivalence logique gauche

Rappelons que la propriété d'équivalence logique gauche se définit par $\dfrac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \; ; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$

Théorème 7.3.10 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y, *avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifient la propriété de l'équivalence logique gauche.*

Preuve : Notons n_α (resp. n_β) la fonction de notation obtenue sur $E \oplus \alpha$ (resp. $E \oplus \beta$). On a alors $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma \Leftrightarrow n_{\alpha}{}_x^y(\gamma) > n_{\alpha}{}_x^y(\neg\gamma)$ et $n_{\alpha}{}_x^y(\gamma) \geq n_{\alpha}{}_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ ni } \neg\gamma)$ (avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$). Or, par hypothèse, α est logiquement équivalent β. Donc, il existe une application qui, à chaque sous-base sélectionnée de $E \oplus \alpha$, fait correspondre une sous-base sélectionnée de $E \oplus \beta$ (il suffit en effet de remplacer α par β). De plus, les poids des sous-bases (qu'ils soient possibilistes, probabilistes, équi-poids) demeurent inchangés par cette transformation.

En conséquence, à chaque sous-base sélectionnée qui inférait γ dans $E \oplus \alpha$ correspond une sous-base sélectionnée dans $E \oplus \beta$ qui infère γ et qui a le même poids. De même, pour la formule $\neg\gamma$ et pour l'absence de formule "ni γ, ni $\neg\gamma$". Donc avec l'hypothèse $\models \alpha \leftrightarrow \beta$, on a $n_{\alpha}{}_x^y(\gamma) > n_{\alpha}{}_x^y(\neg\gamma)$ et $n_{\alpha}{}_x^y(\gamma) \geq n_{\alpha}{}_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ ni } \neg\gamma) \Leftrightarrow n_{\beta}{}_x^y(\gamma) > n_{\beta}{}_x^y(\neg\gamma)$ et $n_{\beta}{}_x^y(\gamma) \geq n_{\beta}{}_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ ni } \neg\gamma)$. Ce qui implique que $\beta \mid\!\sim \gamma$. $\square$

7.3.8 L'affaiblissement droit

Rappelons que la propriété d'affaiblissement droit se définit par $\dfrac{\models \alpha \to \beta \; ; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$

Théorème 7.3.11 *La relation d'inférence non-monotone graduelle* G-GRAD-POSMAX-T *définie à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, vérifie la propriété de l'affaiblissement droit.*

Preuve : Avec l'hypothèse $\models (\alpha \to \beta)$, on a :

- toutes les sous-bases sélectionnées de $E \oplus \gamma$ qui infèrent α infèrent aussi β ;
- on ne peut pas savoir si les sous-bases sélectionnées de $E \oplus \gamma$ qui infèrent $\neg\alpha$ infèrent aussi β ou pas (tous les cas peuvent se produire : $\vdash \beta$, $\vdash \neg\beta$, $\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$) ;

- quant aux sous-bases sélectionnées de $E \oplus \gamma$ qui n'infèrent ni α, ni $\neg\alpha$, on sait juste qu'elles n'infèrent pas $\neg\beta$ (sinon elles inféreraient $\neg\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse).

Posons alors les notations suivantes (avec Y_i les thèses de $E \oplus \gamma$) :

- n_1 = max des Y_i qui infèrent α, donc qui infèrent aussi β ; $n_1 = n^T_{pm}(\alpha)$;
- n_2 = max des Y_i qui infèrent $\neg\alpha$; $n_2 = n^T_{pm}(\neg\alpha)$; on a aussi :
  - n_4 = max des Y_i qui infèrent $\neg\alpha$ et β,
  - n_5 = max des Y_i qui infèrent $\neg\alpha$ et $\neg\beta$,
  - n_6 = max des Y_i qui infèrent $\neg\alpha$ et qui n'infèrent ni β, ni $\neg\beta$,

  avec $max(n_4, n_5, n_6) = n_2$;
- n_3 = max des Y_i qui n'infèrent ni α, ni $\neg\alpha$; $n_3 = n^T_{pm}(\text{ni } \alpha, \text{ ni } \neg\alpha)$; on a aussi :
  - n_7 = max des Y_i qui n'infèrent ni α, ni $\neg\alpha$, et qui infèrent β,
  - n_8 = max des Y_i qui n'infèrent ni α, ni $\neg\alpha$, ni β, ni $\neg\beta$,

  avec $max(n_7, n_8) = n_3$.

Avec ces notations nous avons les propriétés suivantes :

- $n^T_{pm}(\beta) = max(n_1, n_4, n_7) \geq n_1 = n^T_{pm}(\alpha)$,
- $n^T_{pm}(\neg\beta) = n_5 \leq n^T_{pm}(\neg\alpha) < n^T_{pm}(\alpha) \leq n^T_{pm}(\beta)$,
- $n^T_{pm}(\text{ni } \beta, \text{ ni } \neg\beta) = max(n_6, n_8) \leq max(n^T_{pm}(\neg\alpha), n^T_{pm}(\text{ni } \alpha, \text{ ni } \neg\alpha)) \leq n^T_{pm}(\alpha) \leq n^T_{pm}(\beta)$.

On a donc bien $n^T_{pm}(\beta) > n^T_{pm}(\neg\beta)$ et $n^T_{pm}(\beta) \geq n^T_{pm}(\text{ni } \beta, \text{ ni } \neg\beta)$. Donc $\gamma \mid\!\sim^{g,pm,T} \beta$. □

Théorème 7.3.12 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-Grad-X-Y, *avec* X = PosAdd, Bel, Equ *et* Y = T, Incl, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de l'affaiblissement droit.*

Preuve : Utilisons les contre exemples suivants.

Contre exemple pour G-Grad-PosAdd-T Posons $\alpha = \beta \wedge \delta$. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c}
\alpha \\ \hline
\epsilon \rightarrow \delta \\
\epsilon \rightarrow \neg\delta \\ \hline
\epsilon' \\ \hline
\neg\delta \\
\epsilon
\end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \gamma$ sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	γ	γ	γ	γ
	α	$\epsilon \rightarrow \delta$	$\epsilon \rightarrow \delta$	$\epsilon \rightarrow \neg\delta$
	$\epsilon \rightarrow \delta$	$\epsilon \rightarrow \neg\delta$	ϵ'	ϵ'
	$\epsilon \rightarrow \neg\delta$	ϵ'	ϵ	ϵ
	ϵ'	$\neg\delta$		$\neg\delta$
Fonction p_{po}	5	2	2	2
Formules inférées	α	$\neg\alpha$	$\not\vdash \alpha$ et $\not\vdash \neg\alpha$	$\neg\alpha$
	β	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$

On a alors $\models (\alpha \rightarrow \beta)$ et $\gamma \mid\!\sim \alpha$ mais aussi $\gamma \not\mid\!\sim \beta$. Donc G-Grad-PosAdd-T ne vérifie pas l'affaiblissement droit.

Contre exemple pour G-Grad-Bel-T Posons $\alpha = \mu \wedge \phi$. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \gamma \\ \beta \\ \beta \rightarrow (\mu \wedge \phi) \\ \beta \rightarrow \neg\mu \\ \epsilon \\ \epsilon \rightarrow \beta \\ \epsilon \rightarrow \neg\beta \\ \neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi) \\ \neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta \\ \neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta \\ \neg\beta \wedge \epsilon \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \gamma$ sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	γ β $\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ ϵ $\epsilon \rightarrow \beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	γ β $\beta \rightarrow \neg\mu$ ϵ $\epsilon \rightarrow \beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	γ $\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\beta \rightarrow \neg\mu$ ϵ $\epsilon \rightarrow \neg\beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta \wedge \epsilon$	γ $\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\beta \rightarrow \neg\mu$ ϵ $\epsilon \rightarrow \neg\beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$ $\neg\beta \wedge \epsilon$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Formules inférées	$\vdash (\mu \wedge \phi)$ $\vdash \phi$	$\vdash \neg(\mu \wedge \phi)$ $\nvdash \phi$ et $\nvdash \neg\phi$	$\nvdash (\mu \wedge \phi)$ et $\nvdash \neg(\mu \wedge \phi)$ $\nvdash \phi$ et $\nvdash \neg\phi$	$\nvdash (\mu \wedge \phi)$ et $\nvdash \neg(\mu \wedge \phi)$ $\nvdash \phi$ et $\nvdash \neg\phi$

Nom	Y_5	Y_6	Y_7
Contenu	γ β $\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\epsilon \rightarrow \beta$ $\epsilon \rightarrow \neg\beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	γ β $\beta \rightarrow \neg\mu$ $\epsilon \rightarrow \beta$ $\epsilon \rightarrow \neg\beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$	γ $\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\beta \rightarrow \neg\mu$ $\epsilon \rightarrow \beta$ $\epsilon \rightarrow \neg\beta$ $\neg\epsilon, \neg\beta \rightarrow (\mu \wedge \phi)$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \delta$ $\neg\beta, \epsilon \rightarrow \neg\delta$
Fonction p_{pr}	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$	$1/7 + O(\epsilon)$
Formules inférées	$\vdash (\mu \wedge \phi)$ $\vdash \phi$	$\nvdash (\mu \wedge \phi)$ et $\nvdash \neg(\mu \wedge \phi)$ $\nvdash \phi$ et $\nvdash \neg\phi$	$\vdash (\mu \wedge \phi)$ $\vdash \phi$

On a donc $\gamma \mid\!\sim^{g,bel,T} (\mu \wedge \phi)$, puisque la note de $(\mu \wedge \phi)$ $(3/7 + 3O(\epsilon))$ est supérieure à celle de $\neg(\mu \wedge \phi)$ $(2/7 + 2O(\epsilon))$ et à celle de "ni $(\mu \wedge \phi)$, ni $\neg(\mu \wedge \phi)$" $(2/7 + 2O(\epsilon))$.

Par contre, on a $\gamma \not\mid\!\sim^{g,bel,T} \phi$, puisque la note de ϕ $(3/7 + 3O(\epsilon))$ est inférieure à celle de "ni $(\mu \wedge \phi)$, ni $\neg(\mu \wedge \phi)$" $(4/7 + 4O(\epsilon))$.

Contre exemple pour G-Grad-Equ-Incl Posons $\alpha = \beta \wedge \delta$. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \epsilon \rightarrow \delta \\ \epsilon \rightarrow \neg\delta \\ \epsilon \\ \neg\delta \\ \delta \rightarrow \mu \\ \delta \rightarrow \neg\mu \\ \mu \rightarrow \phi \\ \mu \rightarrow \neg\phi \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \gamma$ sont les suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Contenu	γ	γ	γ	γ
	α	α	α	$\epsilon \to \delta$
	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \neg\delta$
	$\epsilon \to \neg\delta$	$\epsilon \to \neg\delta$	$\epsilon \to \neg\delta$	$\delta \to \mu$
	$\delta \to \mu$	$\delta \to \mu$	$\delta \to \neg\mu$	$\delta \to \neg\mu$
	$\mu \to \phi$	$\mu \to \neg\phi$	$\mu \to \phi$	$\neg\delta$
			$\mu \to \neg\phi$	$\mu \to \phi$
				$\mu \to \neg\phi$
Fonction p_{eq}	1	1	1	1
Formules inférées	α	α	α	$\neg\alpha$
	β	β	β	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$

Nom	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
Contenu	γ	γ	γ	γ
	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \delta$	$\epsilon \to \neg\delta$
	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ
	$\delta \to \mu$	$\delta \to \mu$	$\delta \to \neg\mu$	$\neg\delta$
	$\mu \to \phi$	$\mu \to \neg\phi$	$\mu \to \phi$	$\delta \to \mu$
			$\mu \to \neg\phi$	$\delta \to \neg\mu$
				$\mu \to \phi$
				$\mu \to \neg\phi$
Fonction p_{po}	1	1	1	1
Formules inférées	$\nvdash \alpha$ et $\nvdash \neg\alpha$	$\nvdash \alpha$ et $\nvdash \neg\alpha$	$\nvdash \alpha$ et $\nvdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$
	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$

On a alors $\models (\alpha \to \beta)$ et $\gamma \mathrel{|\!\sim} \alpha$ mais aussi $\gamma \mathrel{|\!\not\sim} \beta$. Donc G-Grad-Equ-Incl ne vérifie pas l'affaiblissement droit. □

7.3.9 La coupure

Rappelons que la propriété de la coupure se définit par $\dfrac{\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \;;\; \alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma}{\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma}$

Théorème 7.3.13 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-Grad-X-Y, *avec* X = PosAdd, PosMax, Bel, Equ *et* Y = T, Incl, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de la coupure.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \to \beta \\ \alpha, \beta \to \gamma, x \\ \hline \to x \\ x \to \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \to \beta$	$x, \alpha \to \beta$
	$\alpha, \beta \to \gamma, x$	$\alpha, \beta \to \gamma, x$
	$\to x$	$x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\nvdash \gamma$ et $\nvdash \neg\gamma$	$\nvdash \gamma$ et $\nvdash \neg\gamma$
	$\vdash \beta$	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$

Les thèses de $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta$
	$x, \alpha \to \beta$	$x, \alpha \to \beta$
	$\alpha, \beta \to \gamma, x$	$\alpha, \beta \to \gamma, x$
	$\to x$	$x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\nvdash \gamma$ et $\nvdash \neg\gamma$	$\vdash \gamma$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\beta) = n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta) > n_x^y(\neg\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \beta$;
- dans $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $(\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma) = n_x^y(\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\not\sim^{g,x,y} \gamma$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété de la coupure.
□

7.3.10 La monotonie prudente

Rappelons que la propriété de la monotonie prudente se définit par $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \,;\, \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$

Théorème 7.3.14 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y*, avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de la monotonie prudente.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \to \beta \\ x, \alpha \to \gamma \\ \beta, \gamma \to x \\ \hline \to x \\ x \to \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \to \beta$	$x, \alpha \to \beta$
	$x, \alpha \to \gamma$	$x, \alpha \to \gamma$
	$\beta, \gamma \to x$	$\beta, \gamma \to x$
	$\to x$	$x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \gamma$	$\nvdash \gamma$ et $\nvdash \neg\gamma$
	$\vdash \beta$	$\nvdash \beta$ et $\nvdash \neg\beta$

Les thèses de $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta$
	$x, \alpha \rightarrow \beta$	$x, \alpha \rightarrow \beta$
	$x, \alpha \rightarrow \gamma$	$x, \alpha \rightarrow \gamma$
	$\beta, \gamma \rightarrow x$	$\beta, \gamma \rightarrow x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \gamma$	$\vdash \neg\gamma$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\beta) = n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta) > n_x^y(\neg\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mid\!\sim^{g,x,y} \beta$;
- dans $E \oplus (\alpha \wedge \beta)$, $n_x^y(\neg\gamma) = n_x^y(\gamma) > n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $(\alpha \wedge \beta) \not\mid\!\sim^{g,x,y} \gamma$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété de la monotonie prudente. $\square$

7.3.11 La cumulativité

Rappelons que la propriété de cumulativité se définit par $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \ ; \beta \vdash \alpha}{\alpha \mid\!\sim \gamma \Leftrightarrow \beta \mid\!\sim \gamma}$

Théorème 7.3.15 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y, *avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de cumulativité.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \rightarrow \delta \\ \delta, \alpha \rightarrow \gamma, x \\ \hline \rightarrow x \\ x \rightarrow \end{array}$$

Et on pose $\beta = \alpha \wedge \delta$.

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \rightarrow \delta$	$x, \alpha \rightarrow \delta$
	$\delta, \alpha \rightarrow \gamma, x$	$\delta, \alpha \rightarrow \gamma, x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$
	$\vdash \beta$	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$

Les thèses de $E \oplus \beta$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	β	β
	$x, \alpha \to \delta$	$x, \alpha \to \delta$
	$\delta, \alpha \to \gamma, x$	$\delta, \alpha \to \gamma, x$
	$\to x$	$x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$	$\vdash \gamma$
	$\vdash \alpha$	$\vdash \alpha$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\beta) = n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta) > n_x^y(\neg\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \beta$;
- dans $E \oplus \beta$, $n_x^y(\alpha) > n_x^y(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha) = n_x^y(\neg\alpha)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\beta \mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \alpha$;
- dans $E \oplus \beta$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\beta \mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma) = n_x^y(\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mathrel{|\!\not\sim}^{g,x,y} \gamma$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété de la cumulativité. □

7.3.12 Le ET

Rappelons que la propriété du ET se définit par $\dfrac{\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \ ; \alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma}{\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \wedge \gamma}$

Théorème 7.3.16 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y*, avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL*, définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété du ET.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \to \beta \\ \alpha \to \gamma, x \\ \hline \to x \\ x \to \end{array}$$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \to \beta$	$x, \alpha \to \beta$
	$\alpha \to \gamma, x$	$\alpha \to \gamma, x$
	$\to x$	$x \to$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \beta$	$\not\vdash \beta$ et $\not\vdash \neg\beta$
	$\not\vdash \gamma$ et $\not\vdash \neg\gamma$	$\vdash \gamma$
	$\not\vdash (\gamma \wedge \beta)$ et $\not\vdash \neg(\gamma \wedge \beta)$	$\not\vdash (\gamma \wedge \beta)$ et $\not\vdash \neg(\gamma \wedge \beta)$

On a donc :

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\gamma) = n_x^y(\text{ni } \gamma, \text{ni } \neg\gamma) > n_x^y(\neg\gamma)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \gamma$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\beta) = n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta) > n_x^y(\neg\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \beta$;
- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\text{ni } (\gamma \wedge \beta), \text{ni } \neg(\gamma \wedge \beta)) > n_x^y(\neg(\gamma \wedge \beta)) = n_x^y(\gamma \wedge \beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \not\mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} (\gamma \wedge \beta)$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété du ET. □

7.3.13 La monotonie rationnelle faible

Rappelons que la propriété de monotonie rationnelle faible se définit par $\dfrac{\mathrel{|\!\sim} (\alpha \rightarrow \beta) \ ; \ \not\mathrel{|\!\sim} \neg\alpha}{\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta}$

Théorème 7.3.17 *Les relations d'inférence non-monotone graduelles* G-GRAD-X-Y, *avec* X = POSADD, POSMAX, BEL, EQU *et* Y = T, INCL, *définies à l'aide de la définition 7.1.1 page 29, ne vérifient pas la propriété de la monotonie rationnelle faible.*

Preuve : Utilisons le contre-exemple suivant. Soit la base E suivante :

$$\begin{array}{c} x, \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow x \\ \hline \rightarrow x \\ x \rightarrow \end{array}$$

Les thèses de E sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	$x, \alpha \rightarrow \beta$	$x, \alpha \rightarrow \beta$
	$\beta \rightarrow x$	$\beta \rightarrow x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	2	2
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta)$	$\nvdash (\alpha \rightarrow \beta)$ et $\nvdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
	$\nvdash \alpha$ et $\nvdash \neg\alpha$	$\nvdash \alpha$ et $\nvdash \neg\alpha$

Les thèses de $E \oplus \alpha$ sont les suivantes (elles sont toutes incl-préférées) :

Nom	Y_1	Y_2
Contenu	α	α
	$x, \alpha \rightarrow \beta$	$x, \alpha \rightarrow \beta$
	$\beta \rightarrow x$	$\beta \rightarrow x$
	$\rightarrow x$	$x \rightarrow$
Fonction p_{po}	3	3
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$
Fonction p_{eq}	1	1
Formules inférées	$\vdash \beta$	$\vdash \neg\beta$

On a donc :

- dans E, $n_x^y(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha) > n_x^y(\neg\alpha) = n_x^y(\alpha)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\not\mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} \neg\alpha$;
- dans E, $n_x^y(\alpha \rightarrow \beta) = n_x^y(\text{ni } (\alpha \rightarrow \beta), \text{ni } \neg(\alpha \rightarrow \beta)) > n_x^y(\neg(\alpha \rightarrow \beta))$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\mathrel{|\!\sim}^{g,x,y} (\alpha \rightarrow \beta)$;

- dans $E \oplus \alpha$, $n_x^y(\beta) = n_x^y(\neg\beta) = n_x^y(\text{ni } \beta, \text{ni } \neg\beta)$, avec $x = pa, pm, bel, eq$ et $y = T, In$; donc $\alpha \not\mid\!\sim^{g,x,y} \beta$.

En conclusion, aucune des relations graduelles présentées ici ne vérifie la propriété de la monotonie rationnelle faible. □

7.4 Conclusion sur les propriétés

Tous les résultats démontrés dans les sections précédentes (section 7.3.1 page 42 à section 7.3.13 page précédente) sont récapitulés dans les tableaux 7.1 et 7.2 page suivante. On constate ainsi que les relations graduelles étudiées vérifient très peu de propriétés parmi celles définies par [KLM90, GM94]. Ce résultat n'est pas surprenant puisque ces propriétés avaient été définies initialement dans le cadre de relations d'inférence non-monotone utilisant le principe d'inférence UNI. Remarquons cependant que les résultats obtenus ici montrent que les relations graduelles vérifient encore moins de propriétés que les relations d'inférence non-monotone utilisant les principes d'inférence EXI et ARG (voir [LS95]).

PROPRIÉTÉS	Système P: réflexivité	Système P: équivalence logique gauche	Système P: affaiblissement droit	Système P: coupure	Système P: monotonie prudente	Système P: OU	monotonie rationnelle
G-GRAD-POSADD-T	♢	♣	♢	♢	♢	♢	♢
G-GRAD-POSMAX-T	♣	♣	♣	♢	♢	♢	♢
G-GRAD-BEL-T	♢	♣	♢	♢	♢	♢	♢
G-GRAD-EQU-INCL	♣	♣	♢	♢	♢	♢	♢

TAB. 7.1 - *Récapitulatif des résultats du point de vue de Kraus, Lehmann et Magidor*
[(♣ = propriété vérifiée, ♢ = propriété non vérifiée)]

PROPRIÉTÉS	Postulats étendus de AGM									
	Postulats de base									
	supra-classicité	équivalence logique gauche	affaiblissement droit	ET	monotonie rationnelle faible	conditionnalisation faible	préservation de la consistance	cumulativité	monotonie rationnelle	OU
G-GRAD-POSADD-T	◇	♣	◇	◇	◇	◇	♣	◇	◇	◇
G-GRAD-POSMAX-T	♣	♣	♣	◇	◇	♣	♣	◇	◇	◇
G-GRAD-BEL-T	◇	♣	◇	◇	◇	◇	♣	◇	◇	◇
G-GRAD-EQU-INCL	♣	♣	◇	◇	◇	◇	♣	◇	◇	◇

TAB. 7.2 - *Récapitulatif des résultats du point de vue de Gärdenfors et Makinson*
[(♣ = propriété vérifiée, ◇ = propriété non vérifiée)]

Chapitre 8

Conclusion sur les relations graduelles

Dans ce document, nous avons présenté quelques relations d'inférence non-monotone dites *graduelles*. Ces relations sont définies à partir d'un mécanisme de sélection et d'un principe d'inférence comme toutes les relations d'inférence non-monotone basées sur la *restauration de la cohérence* (voir de nombreux exemples de ce type de relations dans [LS95]).
Ici, la nouveauté réside dans le principe d'inférence choisi, qui utilise deux fonctions supplémentaires : une fonction de pondération et une fonction de notation (cette idée avait déjà été évoquée dans [PL92, Sme93, Lan94]). Ainsi, pour savoir si une base de croyances E infère une formule α, on sélectionne dans E des *avis* (parmi les sous-bases maximales consistantes pour l'inclusion, aussi appelées thèses), que l'on pondère, puis on utilise ces *avis pondérés* pour calculer la note de α, celle de $\neg\alpha$, et celle de "ni α, ni $\neg\alpha$" ; l'inférence est ensuite fonction d'une comparaison de ces trois notes.
Sur cette idée, nous avons présenté et étudié les 4 relations graduelles suivantes :

GRAD-POSADD-T sélectionnant les *thèses*, utilisant une fonction de poids issue des *degrés possibilistes*, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-POSMAX-T sélectionnant les *thèses*, utilisant une fonction de poids issue des *degrés possibilistes*, calculant les notes en faisant le *max des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-BEL-T sélectionnant les *thèses*, utilisant une fonction de poids issue des *probabilités*, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* (les notes sont alors des "belief functions" – voir [Lan94]) et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$;

GRAD-EQU-INCL sélectionnant les *thèses incl-préférées*, utilisant une fonction de poids donnant le *même poids* à chaque sous-base sélectionnée, calculant les notes en faisant l'*addition des poids* et définissant $E \mid\!\sim \alpha$ ssi $n(\alpha) > n(\neg\alpha)$ et $n(\alpha) \geq n(\text{ni } \alpha, \text{ni } \neg\alpha)$.

Nous avons alors constaté que les relations ainsi définies donnent dans la majorité des exemples des résultats tout à fait prometteurs, puisque ce sont des relations sûres (impossibilité d'inférer α et $\neg\alpha$ comme dans les relations issues du principe EXI), et qu'elles fournissent plus de conclusions que les relations issues des principes UNI ou ARG (voir les exemples donnés dans le chapitre 4 page 9). Du point de vue de la prudence elles sont donc situées, tout comme les "ARG-relations", entre les deux extrêmes "UNI-relations" et "EXI-relations".
D'autre part, l'étude des propriétés de déduction au sens de [KLM90, GM94] montre que ces relations graduelles ne vérifient que très peu de propriétés de déduction, mais cela n'est guère surprenant puisque ces propriétés ont été définies initialement pour des relations issues du principe UNI. Il nous reste donc encore à définir les propriétés permettant d'analyser les performances de ce type de relation.
Cette étude nous a toutefois permis d'identifier quelques exemples mettant en évidence des comportements surprenants. Le premier exemple concerne la relation GRAD-POSADD-T et illustre un inconvénient important lié au choix de l'addition comme opérateur pour la fonction de notation (par là-même, il concerne aussi les autres relations utilisant l'addition : GRAD-BEL-T et GRAD-EQU-INCL) :

Soit la base suivante avec deux strates :

$$
\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
\neg\alpha \\
\neg\alpha \rightarrow \beta \\
\neg\alpha \rightarrow \neg\beta \\
\neg\alpha \rightarrow \gamma \\
\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma
\end{array}
$$

On trouve les 5 thèses suivantes :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Contenu	α $\neg\alpha \rightarrow \beta$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ $\neg\alpha \rightarrow \gamma$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \rightarrow \beta$ $\neg\alpha \rightarrow \gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ $\neg\alpha \rightarrow \gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \rightarrow \beta$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$	$\neg\alpha$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ $\neg\alpha \rightarrow \neg\gamma$
Fonction p_{po}	2	1	1	1	1
Formules inférées	$\vdash \alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$	$\vdash \neg\alpha$

Ainsi, avec Grad-PosAdd-T on inférera $\neg\alpha$. Alors qu'intuitivement en tenant compte de la stratification, on conclurait α. L'origine de cette "mauvaise" inférence vient du fait que l'effet des thèses Y_2 à Y_5 est renforcé par l'addition des poids.
Remarquons que le même type d'exemple pourrait être exhibé pour les relations Grad-Bel-T et Grad-Equ-Incl qui utilisent toutes les deux l'addition pour définir la fonction de notation.
Le second exemple illustre une insuffisance des fonctions de pondération choisies.
Soit la base $(E, <)$ suivante :

$$
\begin{array}{c}
\alpha \\
\hline
\neg\alpha \\
\beta \rightarrow \gamma \\
\beta \rightarrow \neg\gamma \\
\neg\beta \\
\hline
\gamma \rightarrow \delta \\
\hline
\beta
\end{array}
$$

On trouve les 6 thèses suivantes (Y_4 étant la seule thèse incl-préférée et donc lex-préférée) :

Nom	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
Contenu	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \gamma$ $\beta \rightarrow \neg\gamma$ $\neg\beta$ $\gamma \rightarrow \delta$	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \gamma$ $\gamma \rightarrow \delta$ β	$\neg\alpha$ $\beta \rightarrow \neg\gamma$ $\gamma \rightarrow \delta$ β	α $\beta \rightarrow \gamma$ $\beta \rightarrow \neg\gamma$ $\neg\beta$ $\gamma \rightarrow \delta$	α $\beta \rightarrow \gamma$ $\gamma \rightarrow \delta$ β	α $\beta \rightarrow \neg\gamma$ $\gamma \rightarrow \delta$ β
Fonction p_{po}	1	1	1	2	2	2
Fonction p_{pr}	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$1/2 + O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon)$
Formules inférées	$\vdash \neg\beta$ $\vdash \neg\alpha$ $\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\vdash \beta$ $\vdash \neg\alpha$ $\vdash \delta$	$\vdash \beta$ $\vdash \neg\alpha$ $\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\vdash \neg\beta$ $\vdash \alpha$ $\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$	$\vdash \beta$ $\vdash \alpha$ $\vdash \delta$	$\vdash \beta$ $\vdash \alpha$ $\nvdash \delta$ et $\nvdash \neg\delta$

Sur cet exemple, on constate que :

- la relation Grad-PosMax-T permet d'inférer α, δ et ne permet pas de conclure sur β ;
- la relation Grad-Bel-T permet d'inférer $\neg\beta$ et rien sur α, ni sur δ ;
- intuitivement on voudrait d'inférer α, $\neg\beta$ et rien sur δ.

Ici, l'origine du problème est la fonction de pondération choisie qui ne permet pas d'isoler les sous-bases préférées au sens de la stratification :

- pour la fonction de pondération p_{po} les thèses Y_4 à Y_6 sont de même poids alors que Y_4 est incl-préférée aux autres ;
- pour la fonction de pondération p_{pr} les thèses Y_1 et Y_4 sont de même poids alors que Y_4 est incl-préférée à Y_1.

Il semblerait donc que les fonctions de pondération et de notation choisies nous amènent quelquefois à des interprétations de la base difficilement utilisables.
Les futures orientations de ces travaux devront donc privilégier 3 axes principaux :

- exhiber des fonctions de pondération permettant une meilleure prise en compte de la stratification ;
- exhiber des fonctions de notation évitant l'écueil du renforcement ;
- définir des propriétés plus adaptées à l'étude de telles relations.

Bibliographie

[BCD+93] Benferhat (Salem), Cayrol (Claudette), Dubois (Didier), Lang (Jérôme) et Prade (Henri). – Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. *In : Proc. of the 13th IJCAI*, éd. par Bajcsy (Ruzena). pp. 640–645. – Chambéry, France, 1993.

[Bre89] Brewka (Gerhard). – Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning. *In : Proc. of the 11th IJCAI*, éd. par Sridharan (N.S.). pp. 1043–1048. – Detroit, MI, 1989.

[CRS92] Cayrol (Claudette), Royer (Véronique) et Saurel (Claire). – Management of preferences in assumption-based reasoning. *In : Advanced methods in AI. Lecture notes in computer science 682*, éd. par Yager (R.) et Bouchon (B.), pp. 13–22. – Springer Verlag, 1992. Extended version in Technical Report IRIT-CERT, 92-13R (University Paul Sabatier Toulouse).

[DLP91] Dubois (Didier), Lang (Jérôme) et Prade (Henri). – Inconsistency in possibilistic knowledge bases - to live or not to live with it. *In : Fuzzy logic for the Management of Uncertainty*, éd. par Zadeh (L.A.) et Kacprzyk (J.), pp. 335–351. – Wiley and sons, 1991.

[GM94] Gärdenfors (Peter) et Makinson (David). – Nonmonotonic inference based on expectations. *Artificial Intelligence*, vol. 65, 1994, pp. 197–245.

[KLM90] Kraus (Sarit), Lehmann (Daniel) et Magidor (Menachem). – Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, vol. 44, 1990, pp. 167–207.

[Lan94] Lang (Jérôme). – Syntax-based default reasoning as probabilistic model-based diagnosis. *In : Proc. of the 10th UAI*, pp. 391–398. – Seattle, Washington, 1994.

[LS95] Lagasquie-Schiex (Marie-Christine). – *Contribution à l'étude des relations d'inférence non-monotone combinant inférence classique et préférences.* – Thèse, Université Paul Sabatier, IRIT, 1995.

[Neb91] Nebel (Bernhard). – Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches. *In : Proc. of the 2nd KR*, éd. par Allen (J.A.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 417–428. – Cambridge, MA, 1991.

[PL92] Pinkas (Gadi) et Loui (Ronald P.). – Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict. *In : Proc. of the 3rd KR*, éd. par Allen (J.A.), Fikes (R.) et Sandewall (E.). pp. 709–719. – Cambridge, MA, 1992.

[Sme93] Smets (Philippe). – *Probability of deductibility and belief functions.* – Rapport de recherche n° 93-5.2, Bruxelles, IRIDIA Université libre de Bruxelles, 1993.