Prise en compte des arguments controversés dans des systèmes d'argumentations bipolaires

C. Cayrol, C. Devred, M.C. Lagasquie-Schiex

30 janvier 2006

Rapport interne conjoint CRIL et IRIT

Rapport internet CRIL numéro : 2006003
Rapport interne IRIT numéro : IRIT/RR--2006-01--FR

Résumé

L'argumentation est basée sur l'échange et l'évaluation d'arguments interagissant. Le système d'argumentation proposé par [Dun95] donne un cadre de travail très puissant lorsque l'interaction entre arguments représente une attaque.

Le cadre de Dung présente cependant certains inconvénients :

- le premier inconvénient (d'ailleurs identifié par Dung lui-même) est l'existence d'arguments controversés ; des solutions à ce problème sont apportées par la prise en compte des conflits dits indirects (c'est-à-dire des chaînes d'attaque de longueur impaire), voir [CMDM05b, CMDM06b].
- le second inconvénient réside dans le fait qu'un seul type d'interaction peut apparaître entre deux arguments : l'attaque. Or, il existe de nombreux exemples montrant qu'on peut aussi avoir un argument qui en “aide” un autre. La prise en compte de cet aspect a débouché sur une extension du cadre de Dung : les systèmes d'argumentation bipolaires (voir [CLS05a, CLS05b]).

Donc, actuellement, nous avons d'un côté des systèmes d'argumentation ne tenant compte que des attaques et capables de traiter les arguments controversés et de l'autre des systèmes d'argumentation capables de traiter deux types d'interaction (attaques et appuis) mais pas les arguments controversés.

L'objet de ce rapport est donc de proposer des sémantiques pour des systèmes d'argumentation bipolaires résolvant aussi le problème des arguments controversés.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

[Dun95] a montré que le cadre de l'argumentation constitue un outil puissant permettant aussi bien l'étude de nombreux systèmes formels de raisonnement de sens commun que la définition d'une sémantique pour les programmes logiques. L'argumentation est basée sur l'échange et l'évaluation d'arguments supportant des opinions, des assertions. On trouve des applications notamment dans le domaine juridique, dans les systèmes d'aide à la prise de décision collective ou d'aide à la négociation.
La caractéristique fondamentale d'un système d'argumentation est la présence d'interactions et notamment de *relations de contrariété* entre les arguments avancés. Si l'argument prend par exemple la forme d'une preuve logique, on peut avancer des arguments pour une proposition et des arguments contre cette proposition, *i.e.* pour la proposition contraire.
Si on suppose que les arguments et les interactions sont donnés, le processus d'argumentation comporte alors une étape de *sélection des arguments les plus acceptables*[1].
Ce processus de sélection des arguments les plus acceptables peut prendre de nombreuses formes. Cela peut être une *acceptabilité individuelle* : par exemple, un argument est accepté car il n'a pas de contrariant. Mais, cela peut être aussi une *acceptabilité conjointe* : on détermine l'acceptabilité d'un ensemble d'arguments par l'utilisation d'une sémantique particulière (c'est-à-dire le respect par l'ensemble d'arguments de certaines règles, certaines contraintes) associée éventuellement à la prise en compte des résultats d'une évaluation spécifique. Ces différentes approches ont été étudiées par exemple dans [Dun95, Amg99, Dou02, CLS05c] et bien d'autres.

La principale critique de tous ces travaux, quelle que soit l'étape du processus d'argumentation abordée, est le fait qu'il n'existe souvent qu'un seul type d'interaction possible entre arguments. Or, il est évident que de nombreux exemples réels nécessitent de pouvoir représenter au moins deux types d'interaction : des arguments peuvent en attaquer d'autres et des arguments peuvent en aider d'autres. Cette notion d'«aide» se retrouve un peu dans la notion de «défense» proposée par Dung mais de manière insuffisante car, la défense n'est pas *indépendante* de l'attaque[2]. Or, on peut très bien envisager d'avoir un argument qui aide un autre argument sans pour autant attaquer un de ses attaquants. Cet aspect apparaît dans l'exemple suivant.

[1] Éventuellement précédée d'une étape d'*évaluation de la force relative des arguments* en présence (voir les travaux [KAEGF95, Par97, PS97, AC98]), ou d'une *évaluation basée sur les interactions entre arguments* (voir [Dun95, AC98, JV99, BH01, CLS01, CLS02, CLS05c]).

[2] Par définition, un argument a défend un argument b si et seulement si a attaque un attaquant de b.

Des journalistes discutent d'une information à publier :

Argument a **du journaliste** J_1 **:** I est une information importante, il faut la publier.

Argument b **du journaliste** J_2 **:** I concerne une personne privée X et nous ne pouvons pas la publier sans l'accord que X nous refuse.

Argument c **du journaliste** J_3 **:** I concerne un problème de santé publique, I est donc très importante.

Dans cet exemple, on constate facilement que c n'attaque absolument pas b, mais par contre qu'il renforce considérablement la position de J_1.
La prise en compte de cette notion d'appui entre arguments apparaît déjà dans certains travaux :

- Dans les travaux portant sur le système HERMES (voir [KP01]), l'interaction entre des positions (ou points de vue) permet de compléter l'information disponible en vue de prendre une décision. Une nouvelle position est avancée soit pour appuyer, soit pour apporter une objection sur une position précédemment avancée.
- De même, dans le système DEFLOG proposé par [Ver02, Ver03], un appui ou une attaque entre assertions peut s'exprimer dans le langage, au moyen d'une nouvelle assertion.

La prise en compte de ces deux types d'interaction évoque la notion de *bipolarité* dans la représentation et l'utilisation des interactions entre arguments. C'est-à-dire le fait qu'il faut prendre en compte deux éléments indépendants, de nature opposée et représentant des forces qui se repoussent. Cette idée est à la base de quelques travaux en argumentation portant aussi bien sur l'évaluation d'arguments que sur l'acceptabilité d'arguments dans le cadre de systèmes d'argumentation (voir [CLS04, CLS05a, CLS05b]).
Notons que ce n'est pas le seul aspect de la bipolarité en argumentation puisqu'on retrouve une notion de bipolarité lors de la construction des arguments et aussi lors de la phase de sélection (voir [ACLS04]) même si on n'utilise pas deux types d'interaction différents.

Il existe une autre critique concernant les sémantiques proposées par Dung : elles ne permettent pas toujours d'obtenir des résultats satisfaisants.
Dung dit que que a défend indirectement b si il existe un chemin de longueur paire partant de a et arrivant en b. De même, il dit que a attaque indirectement b si il existe un chemin de longueur impaire partant de a et arrivant en b. Un des problèmes (d'ailleurs identifié par Dung) des systèmes d'argumentation «à la Dung» est qu'il peut exister un argument a qui attaque indirectement et qui défend indirectement un même argument b. Un tel argument a est dit *controversé* par rapport à b. La présence de tels arguments peut mener parfois à des résultats peu prudents.
Étudions l'exemple proposé par Coste-Marquis, Devred et Marquis :

Exemple 1 Soit $AF_3 = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, e, n, i\}$ et $R = \{(b, a), (c, a), (n, c), (i, b), (e, c), (i, e)\}$. Le graphe d'attaque de AF_3 est représenté figure 1.1 page ci-contre.
Les actions du groupe Vivaldi-Uniastral ont chuté de 70%. Nous avons les arguments suivants :

a : Le PDG du groupe a vendu un gros paquet d'actions deux semaines avant la chute de la valeur du titre. Il prétend l'avoir fait pour acheter un manteau de vison à sa femme et que cela n'a rien à voir avec les fantaisies de la bourse.

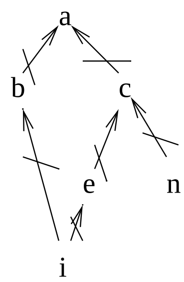

FIG. 1.1 – Représentation graphique de AF_3

b : Bernard, le directeur financier, dit qu'il avait prévenu le PDG des difficultés de trésorerie potentielles du groupe, et que c'est ce qui a motivé le PDG à vendre ses actions.

c : Carl, le directeur de développement, dit que cette situation catastrophique provient du retard de mise au point du baume de rajeunissement sur lequel travaille Vivaldi-Uniastral, et que c'est ce qui a créé les difficultés de trésorerie. Il dit qu'il avait mis le PDG au courant et que ce dernier lui avait demandé de cacher la vérité.

n : Nicolas, un des sous-fifres de Carl, indique que Carl est entièrement responsable des difficultés de mise au point du baume de rajeunissement et que le PDG avait menacé de le virer si la situation ne s'améliorait pas. Carl n'a donc pas dit au PDG que le projet était en retard.

e : Émile, un financier, indique que Carl n'a sûrement pas prévenu le PDG du retard du baume car il a été payé par une société concurrente pour faire couler Vivaldi-Uniastral.

i : Yves, le responsable juridique, indique que Émile et Bernard ont monté une société pour commercialiser des carottes du Béthunois et que les ennuis de trésorerie sont dûs au fait que Bernard a pris de l'argent de Vivaldi-Uniastral pour compenser les pertes de sa propre société.

Les arguments b et c attaquent l'argument a sur les raisons de la vente des actions. L'argument n attaque l'argument c, l'incompétence de Carl motivant son silence sur l'avancement du baume. L'argument e attaque l'argument c en motivant le silence de Carl pour de basses raisons financières. L'argument i attaque l'argument b : Bernard n'a pas prévenu le PDG de l'entreprise pour que le transfert d'argent vers sa trésorerie ne soit pas découvert. L'argument i attaque l'argument e. Émile accuse Carl afin de détourner les soupçons pesant sur son associé. Dans cet exemple, quelle que soit la sémantique choisie, a est considéré comme acceptable et cela alors que i, l'un de ses défenseurs obligatoires, est controversé par rapport à a. Dans ces conditions dériver a ne nous semble pas très prudent.

Plusieurs solutions ont été proposées pour résoudre ce problème (voir, par exemple, [CMDM05b, CMDM05a, CMDM06b][3]). L'une des idées proposées est de bannir des extensions acceptables les conflits indirects (appelés ci-conflits).

La prise en compte des arguments controversés dans un cadre bipolaire n'a pour l'instant pas été étudiée. Dans ce document, nous nous proposons donc d'exploiter le cadre formel introduit dans [CLS04, CLS05a, CLS05b, MCLS05] qui correspond à l'extension du cadre de [Dun95] par l'ajout d'un nouveau type d'interaction correspondant à un appui entre arguments.

[3]Et pour certains cas particuliers, voir [BG03, BG04].

Puis dans ce cadre, nous définirons de nouvelles sémantiques pour l'acceptabilité prenant en compte à la fois les deux interactions et le traitement des arguments controversés.
Le plan de ce document est le suivant :
- en chapitre 2 page suivante, nous rappellerons le cadre pour l'argumentation défini par [Dun95] ;
- en chapitre 3 page 13, nous montrerons comment les arguments controversés peuvent être pris en compte dans le cadre de Dung ;
- en chapitre 4 page 39, nous décrirons les systèmes d'argumentation bipolaires et leurs sémantiques ;
- en chapitre 5 page 45, nous proposerons de nouvelles sémantiques adaptées pour prendre en compte à la fois la bipolarité et la notion d'arguments controversés ;
- en chapitre 6 page 55, nous étudierons les propriétés de ces sémantiques ;
- en chapitre 7 page 87, nous conclurons.

Chapitre 2

L'argumentation selon Dung

Dans ce chapitre, nous allons présenter le cadre argumentatif proposé par Dung dans [Dun95].

2.1 Le système d'argumentation unipolaire de Dung

Pour Dung un **système d'argumentation** est une paire $\langle A, R \rangle$, où A représente l'ensemble des **arguments** et R la relation d'attaque entre les arguments. Dans [Dun95], il n'est fait aucune restriction sur A l'ensemble des arguments. Dans notre travail, nous ferons l'hypothèse que cet ensemble contient un nombre **fini**[1] d'arguments.

Définition 1 *[Dun95] Un* **système d'argumentation fini**[2] *est une paire $AF = \langle A, R \rangle$ où :*
- *A est un ensemble fini d'objets, les* **arguments**,
- *$R \subseteq A \times A$ est une relation binaire sur A, la* **relation d'attaque**.

Dans ce cadre, on ne s'occupe pas de la structure interne d'un argument.
Pour deux arguments b et c, b attaque c suivant la relation R s'écrit bRc ou encore $(b, c) \in R$.
On dit qu'un ensemble S d'arguments attaque un argument a suivant la relation R, s'il existe un élément de S qui attaque a suivant la relation R. Un argument a est dit attaqué, s'il existe un argument qui l'attaque suivant la relation R.
On peut noter que nous pouvons représenter le système d'argumentation $AF = \langle A, R \rangle$ sous la forme d'un graphe orienté. Les sommets représentent les arguments et les arcs figurent les attaques. (a, b) est un arc si et seulement si aRb. Le graphe orienté obtenu est appelé le **graphe d'attaque** de AF.

Exemple 2 Soit $AF_1 = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d\}$ et $R = \{(a, b), (c, a), (d, c)\}$ un système d'argumentation. La figure 2.1 représente le graphe d'attaque de AF_1. La flèche barrée qui représente l'attaque part de l'argument qui attaque et arrive sur l'argument qui est attaqué.

$$d \not\rightarrow c \not\rightarrow a \not\rightarrow b$$

FIG. 2.1 – Représentation graphique de AF_1.

[1]Ce qui sous-entend que notre système d'argumentation est toujours «fini» suivant la définition de *«finitary argumentation framework»*. de Dung.

[2]C'est une sous-catégorie des systèmes d'argumentation finis de Dung, dans lesquels juste R est finie

On peut définir deux sortes d'acceptabilité (voir entre autres : [Amg99, BG04, BDKT97, Dun95, EGFK93]) :

1. l'acceptabilité individuelle, qui ne s'occupe que de la présence d'attaquants directs,
2. l'acceptabilité collective, qui repose sur la notion de défense d'un argument par d'autres.

Dung s'intéresse à l'acceptabilité collective des arguments. Nous pouvons «dériver»[3] un argument lorsqu'il appartient à un ensemble particulier d'arguments (une extension sous une sémantique particulière).
Dung va d'abord exiger que dans un ensemble donné deux éléments de l'ensemble ne s'attaquent pas.

Définition 2 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, $S \subseteq A$ est un* **ensemble sans conflit** *ssi il n'existe pas $a \in S$ et $b \in S$ tels que aRb.*

Il va aussi introduire une notion de défense d'un argument par un ensemble et une notion d'ensemble se défendant tout seul.

Définition 3 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation,*

1. *$a \in A$ est* **acceptable par rapport à** *$S \subseteq A$ ssi $\forall b \in A$: si bRa alors il existe $c \in S$ tel que cRb,*
2. *$S \subseteq A$ est* **admissible** *ssi S est sans conflit et $\forall a \in S$ a est acceptable par rapport à S.*

Il propose alors une sémantique (crédule) pour un système d'argumentation : les **extensions préférées**[4].

Définition 4 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation et $S \subseteq A$ un ensemble admissible. S est* **une extension préférée** *de AF ssi $\nexists S' \subseteq A$ tel que $S \subset S'$ et S' est admissible.*

Suite de l'exemple 2 AF_1 possède une extension préférée : $\{a, d\}$.

Dung prouve le lemme suivant :

Lemme 1 (Lemme Fondamental) *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, $S \subseteq A$ un ensemble admissible d'arguments, et $a, b \in A$ deux arguments acceptables par rapport à S. On a :*

1. *$S' = S \cup \{a\}$ est admissible,*
2. *b est acceptable par rapport à S'.*

Théorème 1 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation.*

1. *L'ensemble de tous les ensembles admissibles de AF forme un sous-ensemble inductif de 2^A pour l'inclusion ensembliste,*
2. *Pour chaque $S \subseteq A$ admissible, il existe une extension préférée E de AF telle que $S \subseteq E$.*

Dung souligne que ce théorème et le fait que l'ensemble vide soit toujours admissible implique le corollaire suivant :

[3]ou encore inférer.
[4]*Preferred extension.*

Corollaire 1 *[Dun95] Chaque système d'argumentation possède une extension préférée.*

Doutre rappelle dans [Dou02] que seuls les systèmes d'argumentation dont le graphe d'attaque possède un cycle de longueur impaire peuvent avoir $\varnothing$ comme extension préférée.

Définition 5 *[DBC01] Un système d'argumentation $\langle A, R \rangle$ est dit* **trivial** *si sa seule extension préférée est l'ensemble vide.*

Corollaire 2 *[Dou02] Seuls les systèmes d'argumentation dont le graphe d'attaque a un cycle de longueur impaire peuvent être triviaux.*

Dung introduit aussi la notion d'**extension stable**[5].

Définition 6 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, un ensemble sans conflit $S \subseteq A$ est une* **extension stable** *ssi S attaque chaque argument qui n'appartient pas à S.*

Nous pouvons noter que comme R est une relation binaire, si $A \neq \varnothing$ les extensions stables ne sont pas vides. Mais, il n'existe pas toujours d'extension stable.

Exemple 3 Soit $AF_0 = \langle A, R, \rangle$ avec $A = \{a, b, c\}$ et $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$. Le graphe d'attaque de AF_0 est représenté figure 2.2. AF_0 ne possède pas d'extension stable.

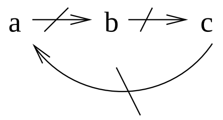

FIG. 2.2 – Représentation graphique de AF_0

Lemme 2 *[Dun95] Chaque extension stable est une extension préférée, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 3 Dans AF_0, $\varnothing$ est une extension préférée, mais ce n'est pas une extension stable.

Suite de l'exemple 2 Dans AF_1 (fig. 2.1 page 5) $\{a, d\}$ est une extension stable et une extension préférée.

Les **extensions complètes**[6] sont aussi introduites dans [Dun95].

Définition 7 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. $S \subseteq A$ un ensemble admissible est une* **extension complète** *de AF ssi chaque argument de A acceptable par rapport à S appartient à S.*

Dung montre que certaines sémantiques pour l'argumentation peuvent être caractérisées par une notion de point fixe. Pour ce faire il introduit la **fonction caractéristique** d'un système d'argumentation.

[5] *Stable extension.*
[6] *Complete extension.*

Définition 8 *[Dun95] La* **fonction caractéristique** *d'un système d'argumentation* $AF = \langle A, R \rangle$ *se définit comme suit :*

$$\mathcal{F}_{AF} : 2^A \longrightarrow 2^A$$
$$\mathcal{F}_{AF}(S) = \{a \mid a \text{ est acceptable par rapport à } S\}$$

Lemme 3 *[Dun95] Soit S un ensemble sans conflit. $S \subseteq A$ est admissible ssi $S \subseteq \mathcal{F}_{AF}(S)$.*

Lemme 4 *[Dun95] $\mathcal{F}_{AF}$ est monotone par rapport à l'inclusion ensembliste, i.e. si $S \subseteq S' \subseteq A$ alors $\mathcal{F}_{AF}(S) \subseteq \mathcal{F}_{AF}(S')$.*

Dung définit les **extensions de base**[7] à l'aide de la fonction caractéristique.

Définition 9 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation, l'***extension de base** *de AF est le plus petit point fixe de $\mathcal{F}_{AF}$. Ce plus petit point fixe coïncide avec l'intersection des extensions complètes.*

Ainsi, AF possède toujours une extension de base (même si elle peut être l'ensemble vide) et cette dernière est unique. Ceci est une conséquence de l'application des théorèmes de Tarski et Scott appliqués sur l'ensemble des ensembles d'arguments qui est un sous-ensemble inductif de $(2^A, \subseteq)$ et sur $\mathcal{F}_{AF}$ qui est monotone et continue.
On a aussi :

Lemme 5 *[Dun95] Soit S un ensemble sans conflit. S est une extension complète de AF ssi $S = \mathcal{F}_{AF}(S)$.*

Nous pouvons noter que tous les points fixes de $\mathcal{F}_{AF}$ ne sont pas des extensions complètes de AF, mais uniquement ceux qui sont sans conflit.

Théorème 2 *[Dun95]*

1. *Chaque extension préférée est une extension complète, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *L'extension de base de AF est la plus petite extension complète de AF pour l'inclusion ensembliste.*
3. *Les extensions complètes de AF forment un demi-treillis de $(2^A, \subseteq)$.*

Proposition 1 *[BDKT97, Dun95]*

1. *Toute extension préférée (respectivement stable, complète) de AF contient l'extension de base de AF.*
2. *L'extension de base d'un système d'argumentation est contenue dans l'intersection des extensions préférées du système.*

Une conséquence immédiate du second point de cette propriété est que l'extension de base de AF est une extension préférée de AF si et seulement si AF n'a qu'une seule extension préférée.

[7] *Grounded extension.*

Définition 10 *[Dun95] Un système d'argumentation $AF = \langle A, R\rangle$ est dit* **bien fondé**[8] *ssi il n'existe pas de suite infinie d'arguments $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}\ a_{i+1} R a_i$.*

Ce qui revient à dire dans notre cas où A est fini qu'un système d'argumentation est bien fondé si et seulement s'il ne contient pas de circuit (cycle orienté).

Théorème 3 *[Dun95] Chaque système d'argumentation bien fondé a exactement une extension complète. Cette dernière est à la fois une extension stable, une extension préférée et l'extension de base.*

Ce qui revient à dire qu'un système d'argumentation bien fondé possède une unique extension stable, une unique extension préférée et que ces deux dernières sont confondues avec son extension de base.
Mais ce ne sont pas les seuls systèmes d'argumentation à ne posséder qu'une seule extension préférée. Dunne et Bench-Capon [DBC01] ont montré que ceux ne possédant pas de cycle de longueur paire possèdent une unique extension préférée.

Proposition 2 *[DBC01] Un système d'argumentation possède une unique extension préférée si son graphe d'attaque ne contient pas de circuit de longueur paire, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Définition 11 *[Dun95]*

1. *Un système d'argumentation $AF = \langle A, R\rangle$ est dit* **cohérent** *si chaque extension préférée de AF est une extension stable.*
2. *Un système d'argumentation $AF = \langle A, R\rangle$ est dit* **relativement de base**[9] *si l'intersection de toutes les extensions préférées de AF coïncide avec l'extension de base.*

Il peut arriver qu'un argument *attaque indirectement* et *défende indirectement* un même argument, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne de longueur impaire et une chaîne de longueur paire conduisant du premier argument au second dans le graphe des attaques. Dung appelle de tels arguments : **arguments controversés**.

Définition 12 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation, $a \in A$ et $b \in A$. b est dit* **controversé par rapport à**[10] *a si b est un défenseur indirect et un attaquant indirect de a. Un argument est* **controversé** *s'il est controversé par rapport à un argument.*

Il peut exister des systèmes d'argumentation sans argument controversé.

Définition 13 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation,*

1. *AF est* **non controversé** *s'il n'existe pas $a \in A$ tel que a est controversé.*
2. *AF est* **controversé de manière limitée** *s'il n'existe pas de suite infinie d'arguments $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ telle que a_{i+1} est controversé par rapport à a_i.*

Un système non controversé est un système controversé de manière limitée particulier.

Théorème 4 *[Dun95]*

[8] *Well-founded.*
[9] *Relatively grounded.*
[10] *controversial w.r.t.*

1. *Chaque système d'argumentation controversé de manière limitée est cohérent.*
2. *Chaque système d'argumentation non controversé est cohérent et relativement de base.*

Doutre donne une condition nécessaire mais pas suffisante pour obtenir un système controversé de manière limitée : l'absence de circuit de longueur impaire.

Théorème 5 *[Dou02] Un système d'argumentation controversé de manière limitée ne possède pas de circuit de longueur impaire.*

Ceci est dû au lemme suivant et qui souligne bien l'idée qu'un argument appartenant à un circuit de longueur impaire n'est pas un argument sur lequel on peut compter.

Lemme 6 *[Dou02] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation. Si le graphe d'attaque de AF possède un cycle élémentaire de longueur impaire, alors tout argument de ce cycle est controversé vis-à-vis d'un autre argument de ce cycle.*

Lemme 7 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation controversée de manière limitée. Il existe au moins une extension complète de AF non vide.*

Lemme 8 *[Dun95] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation non controversé et $a \in A$ tel que a n'est pas attaqué par l'extension de base GE de AF et $a \notin GE$. On a :*

1. *il existe une extension complète S_1 telle que $a \in S_1$, et*
2. *il existe une extension complète S_2 telle que S_2 attaque a.*

Corollaire 3 *[Dun95] Chaque système d'argumentation controversé de manière limitée possède au moins une extension stable.*

De façon analogue à [Dou02], nous synthétisons les propriétés intéressantes dans le tableau 2.1. Le symbole $\circ$ indique que la propriété est toujours vérifiée et $\triangleleft$ qu'elle peut l'être.

Caractéristique	Cohérence	Existence ext. préférée non vide	Unicité ext. préférée	Existence ext. stable	Unicité ext. stable	Ext. de base non vide
sans circuit	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
sans circuit impair	$\circ$	$\circ$	$\triangleleft$	$\circ$	$\triangleleft$	$\triangleleft$
sans circuit pair	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\circ$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$
controversé de manière limitée	$\circ$	$\circ$	$\triangleleft$	$\circ$	$\triangleleft$	$\triangleleft$
quelconque	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$	$\triangleleft$

TAB. 2.1 – Propriétés intéressantes du cadre de Dung.

2.2 Complexité

Dunne et Bench-Capon récapitulent dans [DBC02] les resultats de complexité en temps dans le pire des cas[11] donnés dans le tableau 2.2 page suivante. Ces résultats ont été prouvés (directement ou indirectement dans : [DNT99, DT96, DBC01, DBC02]).
La colonne «Problème» identifie le problème de décision par un nom. Lorsque ce dernier est suivi de paramètres entre parenthèses ceux-ci indiquent les entrées du problème :

[11]Il est supposé que le lecteur possède les notions de base de la théorie de la complexité, spécialement les classes de complexité P, NP, coNP et Π_2^P et la hierarchie polynomiale (cf e.g. [Pap94]).

– AF représentant un système d'argumentation selon la définition 1 page 5 (i.e. $AF = \langle A, R \rangle$),
– $S \subseteq A$
– et $a \in A$.

La colonne «Question» explicite le problème en une courte phrase, alors que la colonne «Complexité» nous donne la complexité du problème.

Problème	Question	Complexité
$ADM(AF, S)$	S est-il admissible ?	P
$STAB - EXT(AF, S)$	S est-il une extension stable ?	P
$PREF - EXT(AF, S)$	S est-il une extension préférée ?	coNP-complet
$HAS - STAB(AF)$	AF a-t-il une extension stable ?	NP-complet
	AF est-il trivial ?	coNP-complet
$CA(AF, a)$	a appartient-il à une extension préférée ?	NP-complet
$IN - STAB(AF, a)$	a appartient-il à une extension stable ?	NP-complet
$ALL - STAB(AF, a)$	a appartient-il à toutes les extensions stables ?	coNP-complet
$SA(AF, a)$	a appartient-il à toutes les extensions préférées ? lorsque AF est cohérent lorsque AF possède une unique extension préférée	Π_2^P-complet coNP-complet NP-complet
$COHERENT(AF)$	AF est-il cohérent ?	Π_2^P-complet

TAB. 2.2 – Résultats de complexité dans le cadre de Dung.

Le calcul de l'extension de base s'effectue quant à lui en temps polynomial.

Chapitre 3

Raffinement du cadre de Dung : absence de ci-attaque

Dans ce chapitre nous présentons les nouvelles sémantiques que Coste-Marquis, Devred et Marquis ont proposées dans [CMDM05b, CMDM06b, CMDM06a] pour résoudre le problème posé par les arguments controversés. Cette méthode qui bannit des extensions les ci-conflits est par ailleurs particulièrement intéressante dès lors que l'inférence d'ensembles d'arguments est considérée. En effet il n'est pas forcément raisonnable d'inférer conjointement deux arguments lorsqu'il existe un conflit indirect entre eux. Tous les exemples cités sont ceux de Coste-Marquis, Devred et Marquis. De même les preuves des propriétés, propositions et théorèmes donnés dans cette section ne sont pas rappelées ici. On peut les trouver dans [CMDM06a].

3.1 Définition des ci-conflits

Exemple 4 Soit $AF_2 = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(b, a), (e, b), (c, b), (d, c)\}$. Le graphe d'attaque de AF_2 est représenté figure 3.1. $E = \{a, e, d\}$ est l'extension préférée (de base et stable) de AF_2.

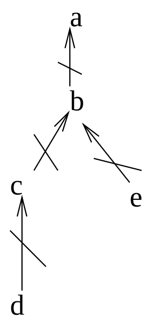

FIG. 3.1 – Représentation graphique de AF_2

Il existe un chemin de longueur impaire entre $d \in E$ et $a \in E$, donc d est un attaquant indirect de a au sens de [Dun95]. Dans toute la suite de ce document, ce type d'attaque sera appelé une *ci-attaque* :

Définition 14 *Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini.*
Soit $a, b \in A$. a **c(hemin)i(impair)-attaque** *b si et seulement si il existe un chemin de longueur impaire d'attaques partant de a et arrivant en b (on dit alors que a est un* **ci-attaquant** *de b).*
Soit $S \subseteq A$, $b \in A$. S **ci-attaque** *b si et seulement si il existe $a \in S$ tel que a ci-attaque b.*

Ce type d'attaque n'est pas forcément désirable au sein d'une extension. Regardons ce qui se passe lorsqu'on donne un sens aux arguments de AF_2.
Plaçons-nous dans le cas d'habitants d'une commune souhaitant savoir si le réacteur de la centrale nucléaire voisine fonctionne bien. Nous avons les cinq arguments suivants :
a : Le responsable de la centrale indique que le réacteur de centrale nucléaire fonctionne bien.
b : Le surveillant de la centrale voit un voyant rouge allumé sur son poste de contrôle et les voyants rouges indiquent un dysfonctionnement du réacteur de la centrale nucléaire.
c : L'alarme ne sonne pas et elle sonne obligatoirement si un voyant rouge s'allume.
d : Le système sonore de la centrale est en panne.
e : Le responsable dit que le surveillant est daltonien.
L'argument a est un argument en faveur du bon fonctionnement du réacteur de la centrale nucléaire. b est un argument indiquant le dysfonctionnement du réacteur. L'argument b attaque donc l'argument a. Le surveillant est daltonien, il voit donc du rouge lorsqu'il y a du vert. L'argument e attaque donc l'argument b (il n'y a pas de voyant rouge). L'alarme sonne lors de l'allumage d'un voyant rouge. Si celle-ci ne se déclenche pas, c'est qu'il n'y a pas de voyant rouge allumé. L'argument c attaque donc l'argument b. Si le système sonore de la centrale est en panne, alors l'alarme ne peut pas se déclencher. L'argument d attaque l'argument c.
Un humain aurait du mal à croire que le réacteur fonctionne correctement s'il sait que le système sonore de l'alarme ne fonctionne pas. Il est possible de croire en $\{a, d, e\}$, mais ce n'est pas très prudent.
ou alors autre exemple : Un vol a été commis au Furet du Nord de Lille mardi soir. Alice est soupçonnée d'avoir commis le vol. Nous avons les 5 arguments suivants :
a : Alice n'a pas commis le vol : elle était à la fac de Lens le mardi soir pour préparer sa thèse. Elle est restée connectée sur le réseau jusqu'à minuit.
b : Béatrice a vu Alice à Lille mardi soir. Alice a très bien pu se connecter, prendre le train, commettre le vol et se déconnecter ensuite.
c : Clémentine dit qu'elle a vu Béatrice au stade Bollaert (Lens) mardi soir.
d : Clémentine est une amie intime de Alice, elle est prête à mentir pour la soutenir.
e : Béatrice a juré devant tout le labo qu'elle casserait les reins d'Alice.
L'argument b attaque l'argument a en affirmant qu'Alice était à Lille et non à Lens. L'argument c attaque l'argument b : Béatrice n'a pas pu voir Alice à Lille puisqu'elle était au stade Bollaert de Lens. L'argument d attaque l'argument c en mettant en doute l'impartialité de Clémentine. L'argument e attaque l'argument b en mettant en doute la véracité du témoignage de Béatrice (elle pourrait avoir témoigné pour nuire à Alice).
Est-il prudent de croire en même temps en a et en d ? Est-il prudent de croire Alice innocente si l'on sait qu'un de ses défenseurs est partial ?
E est à la fois une extension stable, préférée, de base et complète, ces notions ne permettent donc pas d'exclure la présence de ci-attaque entre 2 de leurs éléments.

Suite de l'exemple 1 AF_3 (cf. fig. 1.1 page 3) est bien fondé, $E = \{i, n, a\}$ est l'extension de base, l'extension préférée et l'extension stable de AF_3. Comme $a \in E$, nous allons pouvoir inférer de manière sceptique (resp. crédule) a. Si on retire i de l'ensemble des arguments de AF_3, a n'est plus défendu contre b (donc n'est plus acceptable). La présence de i est donc primordiale. Or i est controversé par rapport à a. Est-il prudent d'inférer a si sa défense se fonde sur un argument qui défend et ci-attaque a ?

C'est pourquoi Coste-Marquis, Devred et Marquis raffinent la notion d'ensemble sans conflit en notion d'**ensemble sans ci-conflit**.

Définition 15 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. $S \subseteq A$ est un* **ensemble sans ci-conflit** *de AF ssi il n'existe pas $a \in S$ et $b \in S$ tels que b ci-attaque a.*

Coste-Marquis, Devred et Marquis en déduisent trivialement le lemme suivant :

Lemme 9 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et $S \subseteq A$ un ensemble sans ci-conflit de AF. Il n'existe pas $a \in S$ et $b \in S$ tels que a est controversé par rapport à b.*

Ce lemme est important, car il permet de garantir l'absence de deux arguments tels que l'un est controversé par rapport à l'autre dans les extensions que Coste-Marquis, Devred et Marquis définissent.
L'absence d'un couple d'arguments de S en controverse ne constitue qu'une condition nécessaire pour que S soit sans ci-conflit. L'exemple 4 page 13 montre qu'elle n'est pas suffisante (ici aucun argument n'est controversé et pourtant il existe un ci-conflit).
La définition d'ensemble sans ci-conflit interdit à tout élément appartenant à un circuit de longueur impaire d'appartenir à un ensemble sans ci-conflit. En effet, non seulement un tel argument est controversé (cf. lemme 6 page 10), mais encore un tel élément est un de ses propres ci-attaquants. En revanche, rien n'empêche un élément d'un cycle de longueur paire d'appartenir à un tel ensemble. En cela, Coste-Marquis, Devred et Marquis se démarquent de Baroni et Giacomin ([BG03]). En effet, ils ne considèrent pas qu'il faille traiter de façon analogue un argument a appartenant à un cycle de longueur paire et un argument b appartenant à un cycle de longueur impaire. a conduit à sa défense indirecte, alors que b apporte en lui même une forme d'incohérence.
Coste-Marquis, Devred et Marquis remarquent que, d'après les définitions 14 page 13 et 15, un ensemble sans ci-conflit est un ensemble sans conflit (cf. def. 2 page 6). En effet, un attaquant direct d'un argument est un ci-attaquant pour ce même argument.

Proposition 3 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si $S \subseteq A$ est un ensemble sans ci-conflit, alors S est un ensemble sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 4 Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $E = \{a, d, e\}$ est un ensemble sans conflit, mais n'est pas un ensemble sans ci-conflit, puisque d est un ci-attaquant de a.

3.2 Sémantiques pour l'acceptabilité traitant les ci-conflits

Ainsi, Coste-Marquis, Devred et Marquis introduisent la définition d'**ensemble p(rudent)-admissible**, i.e. un ensemble admissible sans ci-conflit.

Définition 16 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini, $S \subseteq A$ est un* **ensemble p-admissible** *de AF ssi S est sans ci-conflit et $\forall a \in S$ a est acceptable par rapport à S.*

Autant raffiner la notion de conflit en y incluant les ci-conflits nous semble souhaitable, autant raffiner la notion d'argument acceptable conduirait à trop restreindre l'ensemble des arguments acceptés :

Suite de l'exemple 4 Si l'on pose que pour être admissible un ensemble sans conflit ne doit contenir que des arguments défendus contre tous leurs ci-attaquants, AF_2 (fig. 3.1 page 13) ne posséderait qu'un seul ensemble admissible : $E' = \{d, e\}$. $a \notin E'$, or a est défendu contre b son unique attaquant, par e lui-même acceptable (et ce quelle que soit la définition vu qu'il n'est pas attaqué). Intuitivement pour qu'un argument soit acceptable, il suffit qu'il soit défendu pour chaque attaquant par un argument. Cela signifie que seuls les arguments attaqués directement ont besoin d'être défendus (par une attaque directe de leurs attaquants directs).

Nous avons trivialement la proposition suivante :

Proposition 4 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si $S \subseteq A$ est un ensemble p-admissible, alors S est un ensemble admissible. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 4 Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $E = \{a, d, e\}$ est admissible, mais n'est pas p-admissible (car E n'est pas sans ci-conflit).

Coste-Marquis, Devred et Marquis établissent le lemme suivant :

Lemme 10 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini, $S \subseteq A$ un ensemble p-admissible, et $a, b \in A$ tels qu'il existe $c, d \in A$ avec cRa et dRb, a est acceptable par rapport à S et sans ci-conflit avec S, et b est acceptable par rapport à S et sans ci-conflit avec S. On a :*

1. *$S' = S \cup \{a\}$ est p-admissible,*
2. *b est acceptable par rapport à S' et sans ci-conflit avec S'.*

Notons qu'il est essentiel de supposer que si b est attaqué alors a l'est aussi pour que le lemme tienne. Sans cette hypothèse, l'exemple 4 page 13 fournit un contre-exemple immédiat :

Suite de l'exemple 4 $S = \{e\}$ est un ensemble p-admissible, $S \cup \{a\}$ et $S \cup \{d\}$ aussi mais $S \cup \{a, d\}$ ne l'est pas.

Lemme 11 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini, $S \subseteq A$ un ensemble p-admissible, et $a, b \in A$ tels que a est non attaqué et sans ci-conflit avec S, et b est non attaqué et sans ci-conflit avec S. On a :*

1. *$S' = S \cup \{a\}$ est p-admissible,*
2. *b est acceptable par rapport à S' et sans ci-conflit avec S'.*

Définition 17 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini, $S \subseteq A$ un ensemble p-admissible. S est* **une p-extension préférée** *de AF ssi $\nexists S' \subseteq A$ tel que $S \subset S'$ et S' est p-admissible.*

Proposition 5 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini,*

1. *l'ensemble de tous les ensembles p-admissibles de AF muni de $\subseteq$ (l'inclusion ensembliste) forme un sous-ensemble inductif de $(2^A, \subseteq)$;*
2. *pour chaque ensemble p-admissible $S \subseteq A$, il existe au moins une p-extension préférée $E \subseteq A$ telle que $S \subseteq E$.*

Comme l'ensemble des arguments non-attaqués est trivialement p-admissible, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4 *Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini, et S l'ensemble des arguments de A non attaqués. Alors, il existe une p-extension préférée contenant S.*

Nous pouvons noter ici que si un ensemble p-admissible est un ensemble admissible et sans ci-conflit, une p-extension préférée n'est pas forcément une extension préférée. En effet, si une extension préférée est sans ci-conflit, elle constitue une p-extension préférée, mais parmi les p-extensions préférées, il peut exister des ensembles admissibles qui ne sont pas maximaux pour $\subseteq$.
Comme $\varnothing$ est toujours un ensemble p-admissible, Coste-Marquis, Devred et Marquis déduisent de la proposition 5 la proposition suivante :

Proposition 6 *[CMDM06a] Chaque système d'argumentation fini $AF = \langle A, R \rangle$ possède au moins une p-extension préférée.*

Ainsi, chaque système d'argumentation fini possède au moins une extension préférée et au moins une p-extension préférée. L'exemple 4 illustre les liens entre celles-ci.

Suite de l'exemple 4 $E = \{a, e, d\}$ est une extension préférée de AF_2 (fig. 3.1 page 13), mais pas une p-extension préférée de AF_2 (car d ci-attaque a). De même $E' = \{a, e\}$ est une p-extension préférée de AF_2, mais pas une extension préférée de AF_2 (car $E' \subset E$).

Proposition 7 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini, pour chaque p-extension préférée E_p de AF, il existe une extension préférée E de AF telle que $E_p \subseteq E$.*

Exemple 5 Soit $AF_4 = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, i, n\}$ et $R = \{(b, a), (a, i), (c, b), (d, c), (e, c), (d, e), (a, d), (a, e), (i, n), (n, i)\}$.
Le graphe d'attaque de AF_4 est représenté figure 3.2 page suivante.
$E_1 = \{a, c, n\}$, $E_2 = \{b, d, i\}$ et $E_3 = \{b, d, n\}$ sont les trois extensions préférées de AF_4.
e ne peut pas faire partie d'une p-extension préférée, car son unique défenseur contre d est son attaquant direct.
Ni a, ni b, ni c, ni e et ni d ne peuvent faire partie d'une p-extension préférée, car ils appartiennent tous au circuit (a, d, e, c, b, a) de longueur impaire. Le fait que des arguments participent à un circuit de longueur impair **suffit** à conclure qu'ils n'appartiennent à aucun ensemble p-admissible, donc à aucune p-extension préférée. En revanche, ils peuvent appartenir à des extensions préférées (voir E_1, E_2 et E_3).
i ne peut pas appartenir à une p-extension préférée car b son unique défenseur contre a ne peut pas appartenir à une p-extension préférée.
$E_p = \{n\}$ est l'unique p-extension préférée de AF_4. $E_p \subset E_1$, mais $E_p \not\subseteq E_2$.

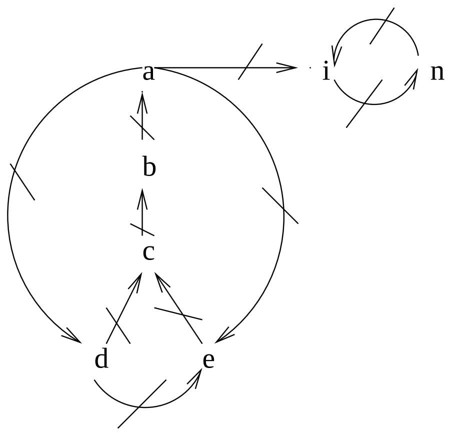

FIG. 3.2 – Représentation graphique de AF_4

Cet exemple montre que chaque extension préférée d'un système d'argumentation fini ne contient pas forcément une p-extension préférée.
La présence de cycle (orienté) de longueur paire n'empêche pas l'unicité de la p-extension préférée.

Nous avons pour la proposition 7, la conséquence suivante :

Conséquence 1 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF est possède une unique extension préférée E alors celle-ci contient chaque p-extension préférée E_p de AF.*

Cette propriété s'applique en particulier lorsque AF est trivial, bien fondé ou sans circuit de longueur paire.

Définition 18 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini. AF est* **p-trivial** *si son unique p-extension préférée est l'ensemble vide.*

Ce qui permet de donner le lemme suivant :

Lemme 12 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF est trivial, alors AF est p-trivial. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Exemple 6 Soit $AF_5 = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(b, a)$, (c, b), (d, c), (e, c), (d, e), (e, d), (a, d), $(a, e)\}$. Le graphe d'attaque de AF_5 est représenté figure 3.3 page suivante.
AF_5 n'est pas trivial. $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ et $\{b, e\}$ sont ses extensions préférées. En revanche, AF_5 est p-trivial : aucun de ses arguments ne peut faire partie d'une p-extension préférée, car ils appartiennent tous à un cycle de longueur impaire.

Une p-extension préférée représente un ensemble maximal (pour l'inclusion ensembliste) d'arguments que l'on peut croire en même temps. Elle exclut donc de croire en même temps en un argument a et en un argument b, si a et b sont en ci-conflit (et en particulier si a est controversé par rapport à b).

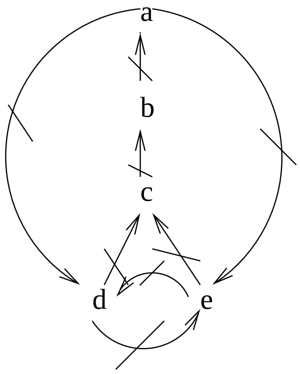

FIG. 3.3 – Représentation graphique de AF_5

Même dans les cas où la structure du graphe d'attaque d'un système d'argumentation fini garantissait l'unicité de l'extension préférée (voir théorème 3 page 9 et proposition 2 page 9), plusieurs p-extensions préférées peuvent exister.

Exemple 7 Soit $AF_6 = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, n, i\}$ et $R = \{(b, a), (c, a), (n, c), (d, b), (i, b), (e, c), (i, e)\}$. Le graphe d'attaque de AF_6 est représenté figure 3.4.

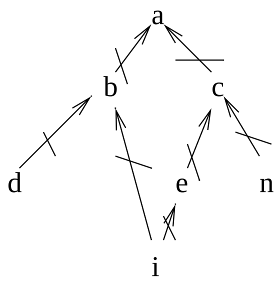

FIG. 3.4 – Représentation graphique de AF_6

Il y a une seule extension préférée $E = \{a, d, i, n\}$. En revanche, il y a deux p-extensions préférées $E_{p1} = \{a, d, n\}$ et $E_{p2} = \{d, i, n\}$.
Cet exemple montre qu'un système d'argumentation fini bien-fondé peut posséder plus d'une p-extension préférée. La proposition 2 page 9 et le théorème 3 page 9 ne sont pas conservé.
La présence d'un ci-attaquant d'un argument a n'interdit pas forcément que a appartienne à une p-extension préférée : i ci-attaque a, mais a appartient à E_{p1} p-extension préférée de AF_6.
En effet, si la présence d'un ci-attaquant interdisait à l'argument ci-attaqué d'appartenir à une p-extension préférée (plus généralement à un ensemble p-admissible) les sémantiques seraient trop prudentes. Cela imposerait que chaque défense contre un argument b d'un argument a réussisse et cela même si une autre défense contre b réussissait.

Coste-Marquis, Devred et Marquis introduisent un raffinement des extensions stables.

Définition 19 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Un ensemble sans ci-conflit $S \subseteq A$ est une* **p-extension stable** *ssi S attaque (directement) chaque argument qui n'appartient pas à S.*

Comme pour les extensions stables, la définition des p-extensions stables impose qu'une p-extension stable n'est jamais vide (lorsque $A \neq \varnothing$). Une p-extension stable est une extension stable et sans ci-conflit. En conséquence :

Lemme 13 *[CMDM06a] Chaque p-extension stable est une extension stable, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 4 $E = \{a, d, e\}$ est une extension stable de AF_2 (fig. 3.1 page 13), mais n'est pas une p-extension stable (car d ci-attaque a).

Le lemme 2 page 7 permet d'obtenir pour le lemme 13 les corollaires suivants.

Corollaire 5 *[CMDM06a] Chaque p-extension stable est une extension préférée. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Corollaire 6 *[CMDM06a] Chaque p-extension stable est une extension complète. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 4 Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $E = \{a, d, e\}$ est une extension préférée (resp. complète), mais n'est pas une p-extension stable (car d ci-attaque a).

On a aussi :

Lemme 14 *[CMDM06a] Chaque p-extension stable est une p-extension préférée, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 4 $E' = \{a, e\}$ est une p-extension préférée de AF_2 (fig. 3.1 page 13), mais n'est pas une p-extension stable (car c et d ne sont pas attaqués par E').

Le théorème 3 page 9 et le corollaire 3 page 10 garantissaient la présence d'une extension stable sous certaines hypothèses sur AF (AF bien fondé ou controversé de manière limitée). Ces résultats ne s'étendent pas aux p-extensions stables.

Suite de l'exemple 7 Le système d'argumentation fini AF_6 (fig. 3.4 page précédente) ne possède pas de p-extension stable. Cet exemple montre qu'un système d'argumentation fini bien fondé (respectivement controversé de manière limitée) peut ne pas posséder de p-extension stable.

Les extensions préférées et stables ont été définies par Dung comme représentant le raisonnement crédule. Pour le raisonnement sceptique, il a introduit la notion d'extension de base. Pour définir cette dernière il a eu besoin d'introduire la notion de fonction caractéristique. Par ailleurs, les points fixes de cette fonction permettent aussi de caractériser d'autres extensions (e.g. les extensions préférées). Coste-Marquis, Devred et Marquis ont introduit à leur tour une **fonction p-caractéristique d'un système d'argumentation fini** afin de caractériser les p-extensions et d'introduire une notion de p-extension de base.

Définition 20 *[CMDM06a] La* **fonction p-caractéristique** *d'un système d'argumentation fini $AF = \langle A, R \rangle$ se définit comme suit :*

$$\mathcal{F}^p_{AF} : 2^A \longrightarrow 2^A$$
$$\mathcal{F}^p_{AF}(S) = \{a \mid a \textit{ est acceptable par rapport à } S \textit{ et } S \cup \{a\} \textit{ est sans ci-conflit } \}$$

On peut remarquer que $\mathcal{F}^p_{AF}$ est une restriction de $\mathcal{F}_{AF}$ (définition 8 page 8) au sens où $\forall S \subseteq A, \mathcal{F}^p_{AF}(S) \subseteq \mathcal{F}_{AF}(S)$.
La définition même de la fonction p-caractéristique, permet d'énoncer à l'instar de Dung, le lemme suivant :

Lemme 15 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et $S \subseteq A$. S est p-admissible ssi $S \subseteq \mathcal{F}^p_{AF}(S)$.*

La fonction p-caractéristique ne possède pas les mêmes propriétés que la fonction caractéristique définie par Dung [Dun95]. Ainsi $\mathcal{F}^p_{AF}$ n'est pas monotone, même si on réduit son domaine de définition aux ensembles p-admissibles. C'est pourquoi les théorèmes de Tarski et de Scott ne peuvent pas être utilisés.

Suite de l'exemple 4 Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13) $\mathcal{F}^p_{AF}(\{e\}) = \{e, d, a\}$ et $\mathcal{F}^p_{AF}(\{e, d\}) = \{d, e\}$. Or $\{e, d, a\} \not\subseteq \{d, e\}$, donc $\mathcal{F}^p_{AF}$ n'est pas monotone.

Il ne peut donc pas être défini de pendant prudent de l'extension de base à l'aide d'une notion de plus petit point fixe de $\mathcal{F}^p_{AF}$.
Par contre, quoique $\mathcal{F}^p_{AF}$ ne soit pas monotone, la suite $(\mathcal{F}^{p,i}_{AF}(\varnothing))_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone (pour $\subseteq$) et formée d'ensembles p-admissibles.

Lemme 16 *[CMDM06a] La suite $(\mathcal{F}^{p,i}_{AF}(\varnothing))_{i\in\mathbb{N}}$ est monotone, et ses éléments sont des ensembles p-admissibles.*

Comme A est fini, la suite $(\mathcal{F}^{p,i}_{AF}(\varnothing))_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang j et $\mathcal{F}^{p,j}_{AF}(\varnothing)$ est la **p-extension de base** de AF.

Définition 21 *[CMDM06a] Soit j le rang à partir duquel la suite $(\mathcal{F}^p_{AF}(\varnothing))_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. $\mathcal{F}^{p,j}_{AF}(\varnothing)$ est la* **p-extension de base** *de AF.*

Coste-Marquis, Devred et Marquis soulignent que, comme l'extension de base de Dung, la p-extension de base contient tous les arguments non attaqués de AF. La p-extension de base est l'ensemble vide si et seulement si le système d'argumentation fini ne possède pas d'argument non attaqué. Ils en déduisent alors le lemme suivant :

Lemme 17 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini, si le graphe d'attaque de AF est acyclique, alors son extension de base est non vide.*

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $E_{p2} = \{d, i, n\}$ est la p-extension de base de AF_6.

Coste-Marquis, Devred et Marquis en déduisent que :

Lemme 18 *[CMDM06a] La p-extension de base d'un système d'argumentation fini de AF est incluse dans l'extension de base de AF.*

Il peut être considéré comme intéressant qu'une extension, comme la p-extension de base, contienne tous les arguments non attaqués du système. Or contrairement aux extensions préférées de Dung, une p-extension préférée ne contient pas forcément tous les arguments non attaqués du système d'argumentation. C'est pourquoi les p-extensions préférées qui se distinguent suivant ce critère sont démarquées.

Définition 22 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ et $E \subseteq A$ une p-extension préférée. E est une* **p-extension préférée naturelle** *ssi E est une p-extension préférée contenant tous les arguments de A qui ne sont pas attaqués.*

L'existence d'une telle p-extension préférée est garantie par le corollaire 4 page 17.

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $E_{p2} = \{d, i, n\}$ est l'unique p-extension préférée naturelle de AF_6.

Coste-Marquis, Devred et Marquis introduisent une notion de **p-extension complète**.

Définition 23 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et S un ensemble p-admissible. S est une* **p-extension complète** *si et seulement si chaque argument acceptable par rapport à S et sans ci-conflit avec S appartient à S.*

La définition 23 donne directement le lemme suivant :

Lemme 19 *[CMDM06a] Un ensemble S est une p-extension complète si et seulement si $\mathcal{F}^p_{AF}(S) = S$.*

Il découle trivialement de la définition 21 page précédente le lemme suivant :

Lemme 20 *[CMDM06a] La p-extension de base d'un système d'argumentation fini de AF est une p-extension complète de AF.*

Lemme 21 *[CMDM06a] Chaque p-extension préférée est une p-extension complète. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Exemple 8 Nous reprenons le contre-exemple de [Dun95]. $AF_N = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b\}$ et $R = \{(a, b), (b, a)\}$. Le graphe d'attaque de AF_N est représenté figure 3.5. Dans AF_N, $\varnothing$ est une p-extension complète (c'est même la p-extension de base de AF_N), mais n'est pas une p-extension préférée.

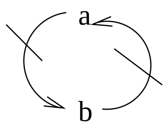

FIG. 3.5 – Représentation graphique de AF_N

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6, $E_{p1} = \{a, d, n\}$ et $E_{p2} = \{i, d, n\}$ sont les seules p-extensions complètes. E_{p1} est une p-extension complète, mais ce n'est pas une extension complète. $E = \{a, d, i, n\}$ est l'unique extension complète de AF_6, mais n'est pas une p-extension complète de AF_6. Ainsi, une p-extension complète n'est pas forcément une extension complète. Et, une extension complète n'est pas forcément une p-extension complète.

Cet exemple montre qu'il n'y a pas de propriété d'inclusion[1] entre l'ensemble des extensions complètes et celui des p-extensions complètes.

[1]ni dans un sens ni dans l'autre.

Dans le cadre de Dung, la propriété 1 page 8 garantit que chaque extension préférée (respectivement stable, complète) de AF contient l'extension de base de AF. C'est une propriété qui n'est pas conservée.

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19) $E_{p1} = \{a, d, n\}$ est une p-extension préférée et une p-extension complète de AF_6 et $E_{p2} = \{d, i, n\}$ est la p-extension de base de AF_6. Or $E_{p2} \nsubseteq E_{p1}$. Cet exemple montre que la p-extension de base d'un système d'argumentation fini n'est pas incluse dans toutes les p-extensions préférées (respectivement complètes) de AF.

Le théorème 1 page 6 garantit que l'extension de base est incluse dans l'intersection des extensions complètes de AF, donc dans l'intersection des extensions préférées de AF. C'est une propriété qui n'est pas conservée.

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19) $E_{p1} = \{a, d, n\}$ et $E_{p2} = \{d, i, n\}$ sont les p-extensions préférées (respectivement complètes) de AF_6. $E_{p2} = \{d, i, n\}$ est la p-extension de base de AF_6. Or $E_{p2} \nsubseteq E_{p1} \cap E_{p2}$. Cet exemple montre que la p-extension de base d'un système d'argumentation fini n'est pas toujours incluse dans l'intersection des p-extensions préférées, donc dans l'intersection des p-extensions complètes de AF.

Suite de l'exemple 8 Dans AF_N, $S = \varnothing$ est la p-extension de base, mais S n'est pas une p-extension préférée de AF_N.

Cet exemple nous montre que la p-extension de base de AF n'est pas forcément une p-extension préférée de AF. En revanche, elle est toujours incluse dans une p-extension préférée (car c'est un ensemble p-admissible).
Une propriété intéressante est que la p-extension de base et l'extension de base sont confondues lorsqu'il existe une p-extension stable.

Proposition 8 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF possède une p-extension stable, alors la p-extension de base de AF et l'extension de base de AF coïncident.*

Définition 24 *[CMDM06a] Un système d'argumentation fini AF est dit* **p-cohérent** *si chaque p-extension préférée de AF est une p-extension stable.*

Proposition 9 *[CMDM06a] Un système d'argumentation fini cohérent n'est pas forcément p-cohérent.*

Suite de l'exemple 4 AF_2 (fig. 3.1 page 13) est cohérent mais n'est pas p-cohérent (car AF_2 ne possède pas de p-extension stable).

Contrairement au cadre présenté dans [Dun95], ni l'absence d'argument controversé (ou leur présence en nombre limité) dans un système d'argumentation fini AF, ni le fait que AF soit bien-fondé n'entraînent que AF soit p-cohérent.

Suite de l'exemple 4 AF_2 (fig. 3.1 page 13) est non controversé et bien-fondé, mais pas p-cohérent (car il ne possède pas de p-extension stable).

Suite de l'exemple 7 AF_6 (fig. 3.4 page 19) est controversé de manière limitée, mais pas p-cohérent (car il ne possède pas de p-extension stable).

De façon analogue à [Dou02], les propriétés intéressantes sont synthétisées dans le tableau 3.1 page suivante. Le symbole $\circ$ indique que la propriété est toujours vérifiée, $\triangleleft$ qu'elle peut l'être.

Caractéristique	Cohérence	Unicité p-ext. préférée	Existence p-ext. stable	p-ext. de base non vide
sans cycle	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$	$\circ$
sans cycle impair	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$
sans cycle pair	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$
controversé de manière limitée	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$	$\lhd$

TAB. 3.1 – Quelques propriétés du cadre de Dung raffiné avec les ci-attaques.

Exemple 9 Soit $AF_8 = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, i, n\}$ et $R = \{(i, e), (i, n), (e, n), (n, a), (b, a), (c, a), (d, c), (b, d), (d, b)\}$. Le graphe d'attaque de AF_8 est représenté figure 3.6.

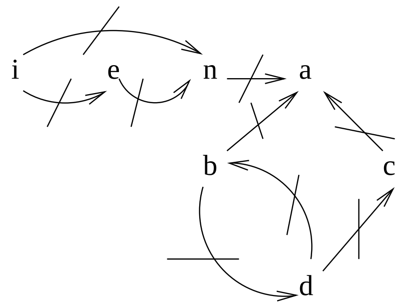

FIG. 3.6 – Représentation graphique de AF_8

Dans AF_8, $E_1 = \{i, a, d\}$ et $E_2 = \{i, b, c\}$ sont les deux seules extensions stables (respectivement préférées) de AF_8. $E'_p = \{i, d\}$ et $E_p = \{i, b, c\}$ sont les p-extensions préférées de AF_8. E_p est l'unique p-extension stable de AF_8. $\{b\}$ est inclus dans toutes les p-extensions stables de AF_8, mais pas dans toutes les extensions stables (respectivement préférées) de AF_8. $E_{pb} = \{i\}$ est la p-extension de base de AF_8. E_{pb} est l'extension de base de AF_8.

Proposition 10 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF possède une p-extension stable, alors l'intersection des extensions préférées de AF et la p-extension de base (resp. l'extension de base) de AF coïncident.*

Proposition 11 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF possède une p-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de AF est incluse dans l'extension de base de AF.*

Corollaire 7 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF possède une p-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de AF est incluse dans la p-extension de base de AF.*

Corollaire 8 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini. Si AF possède une p-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de AF est incluse dans l'intersection des extensions préférées (resp. des extensions stables) de AF.*

3.3 Les relations d'inférence basées sur les ci-conflits

Les relations d'inférence dans le cas classique sont d'abord définies :

Définition 25 *Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et $E \subseteq A$. On dit que AF infère crédulement (resp. sceptiquement) E suivant la sémantique s (avec s valant soit P pour la sémantique des extensions préférées, soit S pour la sémantique des extensions stables, soit G pour la sémantique de l'extension de base) noté $AF \mid\!\sim^{\exists,s} E$ (resp. $AF \mid\!\sim^{\forall,s} E$) si et seulement si E est inclus dans une (resp. toute) extension de la sémantique s.*

Comme pour la sémantique rattachée à l'extension de base les raisonnements sceptique et crédule sont confondus (car il existe une unique extension de base), on notera $AF \mid\!\sim^{\cdot,G} E$ pour dire que AF infère E suivant la sémantique de base.
Puis, la définition des relations d'inférence basées sur les ci-conflits est donnée :

Définition 26 *[CMDM06a] Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et $E \subseteq A$. On dit que AF infère crédulement (resp. sceptiquement) E suivant la sémantique s (avec s valant soit P pour la sémantique des p-extensions préférées, soit S pour la sémantique des p-extensions stables, soit G pour la sémantique de la p-extension de base) noté $AF \mid\!\sim_p^{\exists,s} E$ (resp. $AF \mid\!\sim_p^{\forall,s} E$) si et seulement si E est inclus dans une (resp. toute) extension de la sémantique s.*

Comme pour la sémantique rattachée à la p-extension de base les raisonnements sceptique et crédule sont confondus (car il existe une unique p-extension de base), on notera $AF \mid\!\sim_p^{\cdot,G} E$ pour dire que AF infère E suivant la sémantique de la p-extension de base.
Par exemple $AF \mid\!\sim^{\forall,P} S$ avec $S \subseteq A$, indique que l'on peut inférer sceptiquement S à partir de AF pour la sémantique préférée (i.e. S est inclus dans toutes les extensions préférées de AF).
Coste-Marquis, Devred et Marquis étudient plusieurs cas et dans chaque cas ils établissent plusieurs tableaux de comparaison.

3.3.1 Cas où il existe une p-extension stable

3.3.1.1 Comparaison entre p-inférences

Le tableau suivant se lit de gauche à droite. Ainsi, la deuxième case de la troixième ligne se lit : 10, $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Elle signifie que tout ce que l'on peut inférer avec $\mid\!\sim_p^{\forall,P}$ peut être inféré avec $\mid\!\sim_p^{\exists,S}$, le 10 indique l'item fournissant la raison de ce lien (voir ci-après).
Il est considéré dans le tableau 3.2 page suivante qu'il existe une p-extension stable (donc une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y sont liées se trivialisent.
Explication des liens entre les relations de p-inférence lorsqu'il y a une p-extension stable (donc une extension stable) :

1. Dans AF_8 (fig. 3.6 page précédente), $\{d\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais dans aucune p-extension stable.
2. Dans AF_8 (fig. 3.6 page ci-contre), $\{d\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais n'est pas contenu dans toutes les p-extensions préférées.
3. Dans AF_8 (fig. 3.6 page précédente), $\{d\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais dans aucune p-extension stable.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$	$3, \not\subseteq$	$4, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$5, \subseteq$	$=$	$6, \not\subseteq$	$7, \not\subseteq$	$8, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$9, \subseteq$	$10, \subseteq$	$=$	$11, \subseteq$	$12, \subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$13, \subseteq$	$14, \subseteq$	$15, \not\subseteq$	$=$	$16, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$	$17, \subseteq$	$18, \subseteq$	$19, \not\subseteq$	$20, \subseteq$	$=$

TAB. 3.2 – Lien entre les relations de p-inférence avec p-extension stable [CMDM06a].

4. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{b\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais n'est pas contenu dans la p-extension de base de AF_8.
5. Voir le lemme 14 page 20.
6. Voir l'exemple 10 page 28.
7. Voir l'exemple 10 page 28.
8. Voir l'exemple 10 page 28.
9. Trivial.
10. Voir le lemme 14 page 20.
11. Voir le lemme 14 page 20 (on est plus restrictif lorsqu'on prend en compte toutes les p-extensions préférées).
12. Voir corollaire 7 page 24.
13. Voir le lemme 14 page 20.
14. Trivial.
15. Dans AF_8, $\{c\}$ (fig. 3.6 page 24) est contenu dans toutes les p-extensions stables, mais pas dans l'intersection des p-extensions préférées.
16. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{i\}$ est la p-extension de base et il y a une unique p-extension stable $E_p = \{i, b, c\}$, $\{b\}$ est contenu dans toutes les p-extensions stables de AF_8 mais n'est pas contenu dans la p-extension de base.
17. Le lemme 16 page 21 et la définition 21 page 21 nous indiquent que la p-extension de base est un ensemble p-admissible. D'où d'après la proposition 5 page 17, la p-extension de base est contenue dans une p-extension préferée.
18. D'après le lemme 18 page 21, la p-extension de base est incluse dans l'extension de base. Or d'après la proposition 1 page 8, l'extension de base est comprise dans l'intersection des extensions complètes. D'où d'après le corollaire 6 page 20 dans l'intersection des p-extensions stables. D'où la p-extension de base est incluse dans une p-extension stable.
19. Dans AF_{16} (fig. 3.8 page 29), $\{d\}$ est contenu dans la p-extension de base, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.
20. D'après le lemme 18 page 21, la p-extension de base est incluse dans l'extension de base. Or d'après la proposition 1 page 8, l'extension de base est comprise dans l'intersection des extensions complètes. D'où d'après le corollaire 6 page 20 dans l'intersection des p-extensions stables.

3.3.1.2 Comparaison entre p-inférences et inférences classiques

On considère dans le tableau 3.3 qu'il existe une p-extension stable (donc une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y sont liées se trivialisent.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$\mid\!\sim_p^{.,G}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$	$3, \not\subseteq, \supseteq$	$4, \not\subseteq, \supseteq$	$5, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$	$7, \not\subseteq, \supseteq$	$8, \not\subseteq, \supseteq$	$9, \not\subseteq, \supseteq$	$10, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$11, \subseteq, \not\supseteq$	$12, \subseteq, \not\supseteq$	$13, \not\subseteq, \supseteq$	$14, \subseteq, \not\supseteq$	$15, =$
$\mid\!\sim^{\forall,S}$	$16, \subseteq, \not\supseteq$	$17, \subseteq, \not\supseteq$	$18, \not\subseteq, \supseteq$	$19, \subseteq, \not\supseteq$	$20, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{.,G}$	$21, \subseteq, \not\supseteq$	$22, \subseteq, \not\supseteq$	$23, \not\subseteq, \supseteq$	$24, \subseteq, \not\supseteq$	$25, =$

TAB. 3.3 – Lien entre les relations d'inférence avec p-extension stable [CMDM06a].

Explication des liens entre les relations d'inférence et les relations de p-inférence lorsqu'il existe une p-extension stable.

1. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
2. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension stable. Voir le corollaire 5 page 20.
3. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
4. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension stable. Voir le corollaire 5 page 20.
5. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais pas dans la p-extension de base. Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
6. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{21} (fig. 3.9 page 30), $\{a\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais dans aucune extension stable.
7. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension stable. Voir le lemme 13 page 20.
8. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension préférée. On a vu dans le tableau 3.2 page ci-contre, que $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. D'où d'après le lemme 13 page 20 $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$.
9. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension stable. On a vu dans le tableau 3.2 page précédente, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. D'où d'après le lemme 13 page 20 $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$.
10. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais pas dans la p-extension de base. Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
11. Le lemme 2 page 7 indique que $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. On a vu dans le tableau 3.2 page ci-contre, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{b\}$ est contenu dans une p-extension préférée de AF_8, mais n'est pas inclus dans toutes les extensions préférées de AF_8.

12. Le lemme 2 page 7 indique que $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. On a vu dans le tableau 3.2 page 26, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Voir exemple 10.
13. Dans AF_{16} (fig. 3.8 page ci-contre), $\{d\}$ est contenu dans toutes les extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions préférées. Voir corollaire 8 page 24.
14. Le lemme 2 page 7 indique que $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. Voir exemple 9 page 24.
15. Voir la proposition 10 page 24.
16. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. On a vu dans le tableau 3.2 page 26, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais n'est pas inclus dans toutes les extensions stables de AF_8.
17. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. On a vu dans le tableau 3.2 page 26, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Voir exemple 10.
18. Dans AF_{16} (fig. 3.8 page ci-contre), $\{d\}$ est contenu dans toutes les extensions stables, mais pas dans toutes les p-extensions préférées. Voir corollaire 8 page 24.
19. Le lemme 13 page 20 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. Voir exemple 9 page 24.
20. Dans AF_{21} (fig. 3.9 page 30), $\{b\}$ est contenu dans toutes les extensions stables, mais pas dans la p-extension de base. Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
21. D'après la proposition 1 page 8, l'extension de base est comprise dans l'intersection des extensions complètes. D'où d'après le corollaire 6 page 20 dans l'intersection des p-extensions stables. On a vu dans le tableau 3.2 page 26, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{b\}$ est contenu dans une p-extension préférée de AF_8, mais n'est pas inclus dans l'extension de base AF_8.
22. D'après la proposition 1 page 8, l'extension de base est comprise dans l'intersection des extensions complètes. D'où d'après le corollaire 6 page 20 dans l'intersection des p-extensions stables. On a vu dans le tableau 3.2 page 26, que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Comme $\subseteq$ est transitive, on a $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. Dans AF_8 (fig. 9 page 24), $\{i,b,c\}$ est contenu dans une p-extension stable, mais n'est pas contenu dans $\{i\}$ l'extension de base de AF_8.
23. Dans AF_{16} (fig. 3.8 page suivante), $\{d\}$ est contenu dans l'extension de base, mais pas dans toutes les p-extensions préférées. Voir proposition 11 page 24.
24. D'après la proposition 1 page 8, l'extension de base est comprise dans l'intersection des extensions complètes. D'où d'après le corollaire 6 page 20 dans l'intersection des p-extensions stables. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{i,b,c\}$ est contenu dans toutes les p-extensions stables, mais n'est pas contenu dans $\{i\}$ l'extension de base de AF_8.
25. Voir la proposition 8 page 23.

Exemple 10 Soit $AF_9 = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a,b,c,d\}$ et $R = \{(b,a),(c,b),(d,c),(c,d)\}$. Le graphe d'attaque de AF_9 est représenté figure 3.7 page suivante.
$\varnothing$ est l'extension de base et la p-extension de base de AF_9. $E = \{c,a\}$ et $E_p = \{d,b\}$ sont les p-extensions préférées (resp. p-extensions stables, extensions préférées, extension stables) de AF_9.

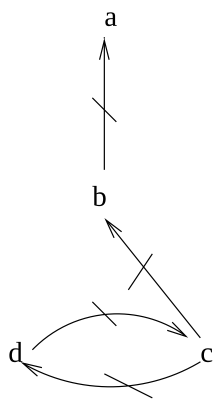

FIG. 3.7 – Représentation graphique de AF_9

E_p est contenue dans une p-extension préférée (resp. p-extension stable), mais n'est pas contenue dans toutes les extensions préférées (resp. stables).
E_p est contenue dans une p-extension préférée (resp. p-extension stable), mais n'est pas contenue dans toutes les p-extensions préférées (resp. p-extension stables).
E_p est contenue dans une p-extension préférée (resp. p-extension stable), mais n'est pas contenue dans la p-extension de base de AF_9.
E_p est contenue dans une p-extension préférée (resp. p-extension stable), mais n'est pas contenue dans l'extension de base de AF_9.

Exemple 11 Soit $AF_{16} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(b, a), (a, b), (c, b), (d, c), (b, e)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{16} est représenté figure 3.8.

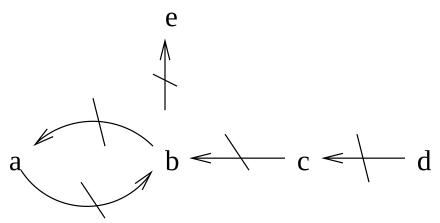

FIG. 3.8 – Représentation graphique de AF_{16}

$E_1 = \{b, d\}$ et $E_2 = \{a, e, d\}$ sont les extensions stables de AF_{16}. E_1 et $E_p = \{a, e\}$ sont les p-extensions préférées de AF_{16}, seule E_1 est une p-extension stable. $E_b = \{d\}$ est l'extension de base (resp. la p-extension de base) de AF_{16}.

Exemple 12 Soit $AF_{21} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(b, a), (a, b), (c, b), (b, e), (e, e), (d, c)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{21} est représenté figure 3.9 page suivante.
$E_1 = \{b, d\}$ est l'extension stable et la p-extension stable de AF_{21}. $E_2 = \{a, d\}$ est une extension préférée de AF_{21}. $E_p = \{a\}$ est une p-extension préférée de AF_{21}. $E_b = \{d\}$ est l'extension de base (resp. la p-extension de base) de AF_{21}.

Les tableaux 3.2 page 26 et 3.3 page 27 sont synthétisés figure 3.10 page suivante.

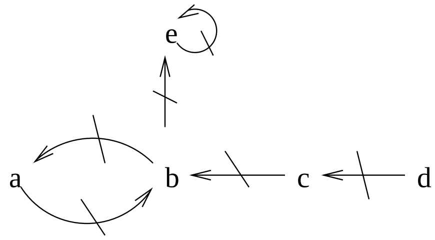

FIG. 3.9 – Représentation graphique de AF_{21}

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim_p^{.,G} = \mid\!\sim^{.,G} = \mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,S} \arrow[r] \arrow[d] & \mid\!\sim^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\
\mid\!\sim_p^{\forall,P} \arrow[u] & \mid\!\sim_p^{\forall,S} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\exists,S} \arrow[r] \arrow[u] & \mid\!\sim_p^{\exists,P} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.10 – Lien entre les relations d'inférence lorsqu'il existe une p-extension stable [CMDM06a]

3.3.2 Cas où il n'existe pas de p-extension stable, mais où il y a une extension stable

3.3.2.1 Comparaison entre p-inférences

Il est considéré dans le tableau 3.4 qu'il existe pas de p-extension stable, mais qu'il y a une extension stable.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{.,G}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$3, \subseteq$	$=$	$4, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{.,G}$	$5, \subseteq$	$6, \not\subseteq$	$=$

TAB. 3.4 – Lien entre les relations de p-inférence sans p-extension stable et avec extension stable [CMDM06a].

Explication des liens entre les relations de p-inférence lorsqu'il n'y a pas de p-extension stable, mais qu'il y a une extension stable :

1. Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $\{a\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans toutes.
2. Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $\{a\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans la p-extension de base ($\{d, i, n\}$).
3. Trivial.
4. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base ($\varnothing$).

5. Le lemme 16 page 21 et la définition 21 page 21 nous indiquent que la p-extension de base est un ensemble p-admissible. D'où d'après la proposition 5 page 17, la p-extension de base est contenue dans une p-extension préférée.
6. Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais pas dans toutes les p-extensions préférées

3.3.2.2 Comparaison entre p-inférences et inférences classiques

Il est considéré dans le tableau 3.5 qu'il existe une extension stable, mais pas de p-extension stable.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{.,G}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$	$3, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$7, \not\subseteq, \not\supseteq$	$8, \not\subseteq, \not\supseteq$	$9, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,S}$	$10, \not\subseteq, \not\supseteq$	$11, \not\subseteq, \not\supseteq$	$12, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{.,G}$	$13, \not\subseteq, \not\supseteq$	$14, \not\subseteq, \not\supseteq$	$15, \not\subseteq, \supseteq$

TAB. 3.5 – Lien entre les relations d'inférence sans p-extension stable et avec extension stable [CMDM06a].

Explication des liens entre les relations d'inférence et les relations de p-inférence lorsqu'il existe une extension stable, mais pas de p-extension stable.

1. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
2. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
3. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension préférée, mais pas dans la p-extension de base ($\{d, e\}$). Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
4. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{22} (fig. 3.11 page suivante), $\{n\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais dans aucune extension stable.
5. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{22} (fig. 3.11 page suivante), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais dans aucune extension stable.
6. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans une extension stable, mais pas dans la p-extension de base ($\{d, e\}$). Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
7. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions préférées, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans toutes les extensions préférées.
8. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions préférées, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions préférées.

9. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base($\{d, e\}$). Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
10. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions stables, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans toutes les extensions stables.
11. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions stables, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions stables.
12. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans toutes les extensions stables, mais pas dans la p-extension de base ($\{d, e\}$). Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
13. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans l'extension de base, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans l'extension de base.
14. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans l'extension de base, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.
15. Dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est contenu dans l'extension de base, mais pas dans la p-extension de base ($\{d, e\}$). Voir le lemme 18 page 21.

Exemple 13 Soit $AF_{22} = \langle A, R \rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, i, n, u\}$ et $R = \{(b, a), (a, i), (c, b), (d, c), (e, c), (d, e), (a, d), (a, e), (i, n), (n, i), (i, u), (u, u)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{22} est représenté figure 3.11.

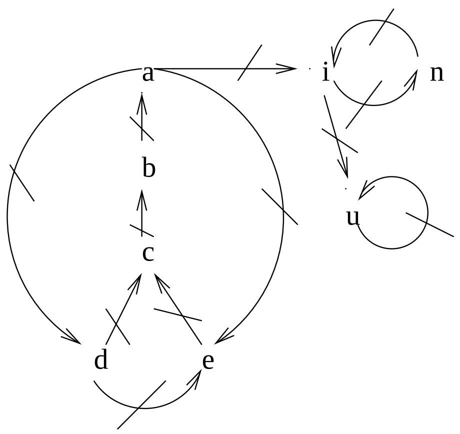

FIG. 3.11 – Représentation graphique de AF_{22}

$E_1 = \{a, c, n\}$ et $E_2 = \{b, d, n\}$ sont les extensions préférées et non stables de AF_{22} (elles n'attaquent pas u). $E_3 = \{b, d, i\}$ est l'extension stable de AF_{22}. $E = \{n\}$ est l'unique p-extension préférée de AF_{22}.

Les tableaux 3.4 page 30 et 3.5 page précédente sont synthétisés figure 3.12 page suivante.

$$\begin{tikzcd}
\mathrel{|\!\sim}^{.,G} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}^{\forall,P} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}^{\forall,S} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}^{\exists,S} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}^{\exists,P} \\
 & \mathrel{|\!\sim}_p^{.,G} \arrow[ul] \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}_p^{\exists,P} \arrow[urr] & \mathrel{|\!\sim}_p^{\forall,P} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.12 – Lien entre les relations d'inférence sans p-extension stable et avec extension stable [CMDM06a].

3.3.3 Cas où il n'existe ni p-extension stable, ni extension stable

3.3.3.1 Comparaison entre p-inférences

Il est considéré dans le tableau 3.6 qu'il n'existe ni p-extension stable, ni extension stable.

	$\mathrel{|\!\sim}_p^{\exists,P}$	$\mathrel{|\!\sim}_p^{\forall,P}$	$\mathrel{|\!\sim}_p^{.,G}$
$\mathrel{|\!\sim}_p^{\exists,P}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$
$\mathrel{|\!\sim}_p^{\forall,P}$	$3, \subseteq$	$=$	$4, \not\subseteq$
$\mathrel{|\!\sim}_p^{.,G}$	$5, \subseteq$	$6, \not\subseteq$	$=$

TAB. 3.6 – Lien entre les relations de p-inférence sans p-extension stable ni extension stable [CMDM06a].

Explication des liens entre les relations de p-inférence lorsqu'il n'y a pas de p-extension stable, ni d'extension stable :

1. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page suivante), $\{e\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans toutes.
2. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page suivante), $\{e\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans la p-extension de base ($\{k, h\}$).
3. Trivial.
4. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page suivante), $\{w\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base ($\{k, h\}$).
5. Le lemme 16 page 21 et la définition 21 page 21 nous indiquent que la p-extension de base est un ensemble p-admissible. D'où d'après la proposition 5 page 17, la p-extension de base est contenue dans une p-extension préférée.
6. Dans AF_{23} (fig. 3.15 page suivante), $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.

Exemple 14 Nous adaptons l'exemple de [CDM03]. Soit $AF_{18} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{k,\ h,\ b,\ a,\ j,\ c,\ n,\ e,\ i,\ v,\ w,\ o,\ m,\ r,\ u,\ s\}$ et $R = \{(k,b),\ (h,b),\ (b,a),\ (a,j),\ (j,b),\ (c,a),\ (n,c),\ (n,n),\ (e,i),\ (i,e),\ (s,u),\ (r,s),\ (u,r),\ (r,m),\ (m,o),\ (o,w),\ (w,o),\ (h,v),\ (v,w),\ (e,c)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{18} est représenté figure 3.13 page suivante.
$E_1 = \{k, h, a, e, w\}$ et $E_2 = \{k, h, i, w\}$ sont les deux extensions préférées (et non stables) de AF_{18}.
$E'_1 = \{k, h, e, w\}$ et $E'_2 = \{k, h, i, w\}$ sont les deux p-extensions préférées de AF_{18}.

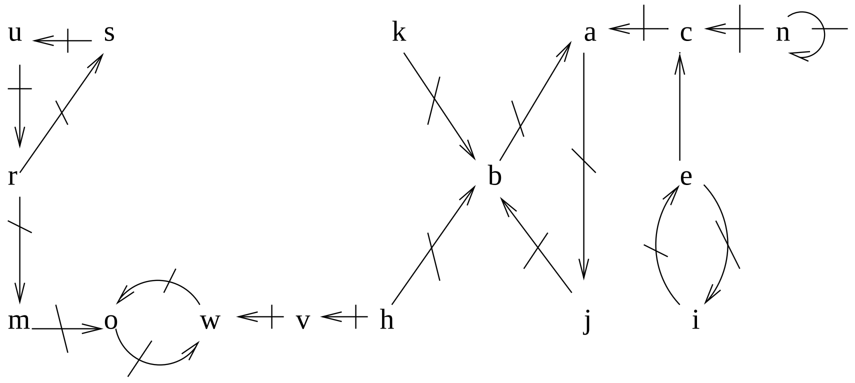

FIG. 3.13 – Représentation graphique de AF_{18}

$E = \{k, h\}$ est l'extension de base de AF_{18}.
AF_{18} n'a ni p-extension stable, ni extension stable.

Exemple 15 Soit $AF_{19} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, e, i, n, o\}$ et $R = \{(i, b), (b, a), (a, o), (o, b), (c, a), (n, c), (n, n), (e, c)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{19} est représenté figure 3.14.

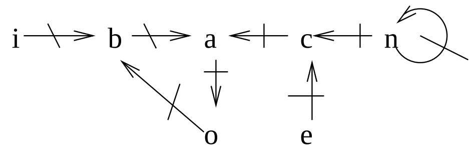

FIG. 3.14 – Représentation graphique de AF_{19}

$E_1 = \{i, e, a\}$ est l'extension préférée et de base (et non stable) de AF_{19}.
$E_2 = \{e, i\}$ est la p-extension préférée et la p-extension de base de AF_{19}.
AF_{19} n'a ni p-extension stable, ni extension stable.

Exemple 16 Soit $AF_{23} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, n, i, v\}$ et $R = \{(b, a), (c, a), (n, c), (d, b), (i, b), (e, c), (i, e), (v, c), (v, v)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{23} est représenté figure 3.15.

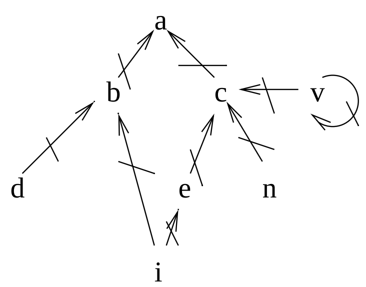

FIG. 3.15 – Représentation graphique de AF_{23}

$E = \{a, d, i, n\}$ est l'unique extension préférée (et non stable) de AF_{23}. $E_1 = \{d, i, n\}$ et $E_2 = \{a, d, n\}$ sont les deux p-extensions préférées de AF_{23} (et non p-extensions stables).

E_1 est la p-extension de base de AF_{23}.
AF_{23} n'a ni p-extension stable, ni extension stable.

3.3.3.2 Comparaison entre p-inférences et inférences classiques

Il est considéré dans le tableau 3.7 qu'il n'existe ni p-extension stable, ni extension stable.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$	$3, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\cdot,G}$	$7, \not\subseteq, \not\supseteq$	$8, \not\subseteq, \not\supseteq$	$9, \not\subseteq, \supseteq$

TAB. 3.7 – Lien entre les relations d'inférence et de p-inférence sans p-extension stable ni extension stable [CMDM06a].

Explication des liens entre les relations d'inférence et les relations de p-inférence lorsqu'il existe ni extension stable, ni p-extension stable.

1. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
2. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans une extension préférée, mais dans aucune p-extension préférée. Voir proposition 7 page 17.
3. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans une extension préférée, mais pas dans la p-extension de base.Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
4. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page précédente), $\{a\}$ est inclus dans toutes les extensions préférées, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page ci-contre), $\{e\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans toutes les extensions préférées.
5. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page précédente), $\{a\}$ est inclus dans toutes les extensions préférées, mais dans aucune p-extension préférée.
   Dans AF_{20} (fig. 3.16 page suivante), $\{n\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées et pas dans toutes les extensions préférées.
6. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page précédente), $\{a\}$ est inclus dans toutes les extensions préférées, mais dans pas dans la p-extension de base. Voir le lemme 18 page 21 et la proposition 1 page 8.
7. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page précédente), $\{e\}$ est inclus dans une p-extension préférée, mais pas dans l'extension de base.
8. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune p-extension préférée. Dans AF_{18} (fig. 3.13 page précédente), $\{w\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.
9. Dans AF_{19} (fig. 3.14 page ci-contre), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans pas dans la p-extension de base. Voir le lemme 18 page 21.

Exemple 17 Soit $AF_{20} = \langle A, R\rangle$ avec $A = \{a, b, c, d, e, i, n, v\}$ et $R = \{(b, a), (a, i), (c, b), (d, c), (e, c), (d, e), (a, d), (a, e), (i, n), (n, i), (v, e), (v, v)\}$. Le graphe d'attaque de AF_{20} est représenté figure 3.16 page suivante.

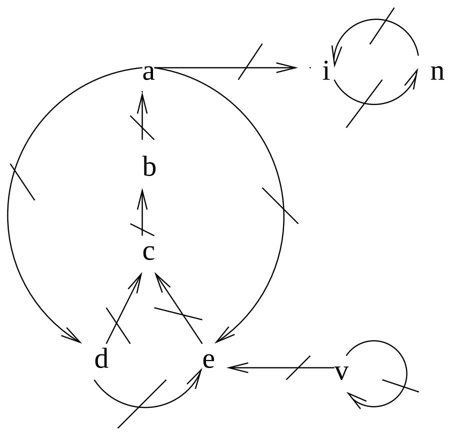

FIG. 3.16 – Représentation graphique de AF_{20}

$E_1 = \{a, c, n\}$, $E_2 = \{b, d, i\}$ et $E_3 = \{b, d, n\}$ sont les trois extensions préférées (et non stables) de AF_{20}. $E = \{n\}$ est l'unique p-extension préférée de AF_{20}.

Les tableaux 3.6 page 33 et 3.7 page précédente sont synthétisés figure 3.17.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim^{\cdot,G} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\
\mid\!\sim_p^{\cdot,G} \arrow[u] \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\exists,P} \arrow[ur] & \mid\!\sim_p^{\forall,P} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

FIG. 3.17 – Lien entre les relations d'inférence sans p-extension stable, ni extension stable

3.3.4 Complexité

Coste-Marquis, Devred et Marquis ont montré que la prise en compte des ci-conflits ne fait pas augmenter la complexité en temps dans le pire des cas.

Proposition 12 *[CMDM06b] Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini et $S \subseteq A$. Les résultats de complexité du tableau 3.8 page ci-contre sont vérifiés.*

Démonstration : Coste-Marquis, Devred et Marquis ont montré dans [CMDM05c] que considérer un ensemble d'arguments à la place d'un unique argument comme entrée des questions pour les problèmes de décision ne faisait pas augmenter la complexité des problèmes.
Premièrement il est facile de voir que :
- DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST SANS CI-CONFLIT,
- DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST P-ADMISSIBLE,
- et DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST UNE P-EXTENSION STABLE

sont dans P.

Question	Complexité
S est-il sans ci-conflit ?	dans P
S est-il p-admissible ?	dans P
S est-il une p-extension stable ?	dans P
S est-il une p-extension préférée ?	dans coNP
AF a-t-il une p-extension stable ?	dans NP
AF est-il p-trivial ?	dans coNP
S est-il inclus dans une p-extension préférée ?	dans NP
S est-il inclus dans une p-extension stable ?	dans NP
S est-il inclus dans toutes les p-extensions stables ?	dans coNP
S est-il inclus dans toutes les p-extensions préférées ?	dans Π_2^P
AF est-il p-cohérent ?	dans Π_2^P

TAB. 3.8 – Résultats de complexité lors de la prise en compte des ci-conflits.

Une des conséquences est que DÉCIDER SI UN SYSTÈME D'ARGUMENTATION POSSÈDE UNE P-EXTENSION STABLE est dans NP (il suffit de deviner un ensemble $S' \subseteq A$ et de vérifier en temps polynomial que S' est une p-extension stable).
Une autre conséquence est que DÉCIDER SI S APPARTIENT À UNE P-EXTENSION STABLE est dans NP (il suffit de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' est une p-extension stable et de vérifier que S est inclus dans S').
Une troisième conséquence est que DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS S APPARTIENT À TOUTES LES P-EXTENSIONS STABLES est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complementaire, donc de deviner un ensemble $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' est une p-extension stable et de vérifier en temps polynomial que $S \not\subseteq S'$).
Une quatrième conséquence est que DÉCIDER SI S EST UNE P-EXTENSION PRÉFÉRÉE est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire et donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' et S sont des ensembles p-admissibles et de vérifier que $S \subset S'$).
La proposition 5 page 17 nous permet tirer deux autres conséquences des résultats précédents.
- D'abord, DÉCIDER SI UN AF EST P-TRIVIAL est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire, donc de deviner un ensemble $S' \subseteq A$ et de vérifier en temps polynomial qu'il est p-admissible).
- Ensuite, DÉCIDER SI S EST INCLUS DANS UNE P-EXTENSION PRÉFÉRÉE est dans NP (il suffit de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial si S' est un ensemble p-admissible et de vérifier que $S \subseteq S'$).

Les résultats précédents permettent de dire que :
- DÉCIDER SI S EST INCLUS DANS TOUTES LES P-EXTENSIONS PRÉFÉRÉES est dans Π_2^p (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier à l'aide d'un oracle NP que S' est une p-extension préférée et de vérifier que $S \not\subseteq S'$) ;
- DÉCIDER SI UN AF EST P-COHÉRENT est dans Π_2^p (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier à l'aide d'un oracle NP que S' est une p-extension préférée et de vérifier en temps polynomial que S' n'est pas une p-extension stable).

$\blacksquare$

Chapitre 4

Bipolarité : l'existant

Rappelons qu'il s'agit ici de prendre en compte dans un système d'argumentation abstrait deux types d'interaction (voir l'exemple donné en introduction au chapitre 1 page 1) :
- le premier type d'interaction est déjà très connu en argumentation classique ; il s'agit des *attaques*, c'est-à-dire de la possibilité pour un argument de contredire un autre argument (la contradiction pouvant porter sur la conclusion ou sur la manière dont la conclusion est obtenue) ;
- le second type d'interaction est beaucoup moins utilisé en argumentation classique malgré son intérêt évident ; il s'agit des *appuis*, c'est-à-dire de la possibilité pour un argument d'en aider un autre (par exemple, en apportant une nouvelle information qui soutient soit la conclusion, soit la manière dont cette conclusion a été obtenue).

Ces deux types d'interaction sont considérés indépendants l'un de l'autre.

L'approche choisie ici consiste à étendre le système de Dung (qui traite déjà les attaques) en rajoutant la prise en compte des appuis[1]. Cela permet d'introduire la notion de système d'argumentation bipolaire et de nombreuses sémantiques pour l'acceptabilité des arguments (voir [CLS04, CLS05a, CLS05b, MCLS05]).

4.1 Définition de base

Définition 27 (SABP : système d'argumentation bipolaire) *Un* **système d'argumentation bipolaire (noté SABP)** *est un triplet $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ avec*
- *A un ensemble fini d'objets, les* **arguments**,
- *$R_{att} \subseteq A \times A$, une relation binaire sur A, la* **relation d'attaque**,
- *$R_{app} \subseteq A \times A$, une relation binaire sur A, la* **relation d'appui**.

C'est la définition au sens de [CLS05b].

4.2 La relation d'appui

Définition 28 (Appui direct/complexe) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire.*

[1] Il existe d'autres approches : voir [KP01, Ver02, Ver03].

Soit $a, b \in A$. a **appuie de manière complexe** *b si et seulement si il existe une suite $a_1 R_{app} a_2 R_{app} \dots R_{app} a_n$ avec $a_1 = a$ et $a_n = b$ et $n > 1$. Si $n = 2$, on dit que a* **appuie directement** *b.*
Soit $S \subseteq A$, $b \in A$. S **appuie de manière complexe** *b si et seulement si il existe un argument $a \in S$ tel que a appuie de manière complexe b. On dit que S* **appuie directement** *b si a appuie directement b.*

C'est la définition au sens de [CLS05b].

$$a_0 \longrightarrow a_1 \quad \text{ou} \quad a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow a_n$$

FIG. 4.1 – Représentation graphique d'un appui (direct, complexe)

4.3 Les différentes sortes de relation de contrariété

Définition 29 (Attaque directe) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire.*
Soit $a, b \in A$. a **attaque directement** *b si et seulement si $(a, b) \in R_{att}$.*
Soit $S \subseteq A$, $b \in A$. S **attaque directement** *b si et seulement si il existe $a \in S$ tel que a attaque directement b.*

L'attaque directe est la relation d'attaque au sens de [Dun95].

$$a_0 \not\longrightarrow a_1$$

FIG. 4.2 – Représentation graphique d'une attaque directe

Définition 30 (Attaque complexe) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire.*
Soit $a, b \in A$. a **attaque de manière complexe** *b si et seulement si :*
- *soit a attaque directement b,*
- *soit[2] il existe une suite $a_1 R_1 a_2 R_2 \dots R_{n-1} a_n$ telle que $a_1 = a$, $a_n = b$, $\forall i, 1 \leq i \leq n-2, R_i = R_{app}$ et $R_{n-1} = R_{att}$*

Soit $S \subseteq A$, $b \in A$. S **attaque de manière complexe** *b si et seulement si il existe $a \in S$ tel que a attaque de manière complexe b.*

$$a_0 \not\longrightarrow a_1 \quad \text{ou} \quad a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow a_{n-1} \not\longrightarrow a_n$$

FIG. 4.3 – Représentation graphique d'une attaque complexe

Notons que, dans [MCLS05], est aussi proposé un autre type d'attaque, l'attaque détournée, qui n'est pas repris ici[3].

[2] Cela correspond à l'attaque appuyée de [CLS05b, MCLS05].
[3] Cette attaque consiste en une attaque suivie de plusieurs appuis : a_1 attaque de manière détournée a_n ssi on a la chaîne suivante dans le graphe bipolaire $a_1 \not\rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$.

L'attaque au sens de Dung est un cas particulier de l'attaque complexe.

4.4 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit

Il existe au moins 2 classes de conflits pouvant apparaître dans un ensemble :
- soit le conflit est interne à l'ensemble parce qu'il existe au moins deux éléments de l'ensemble qui sont en conflit entre eux ;
- soit le conflit est externe à l'ensemble parce qu'il existe au moins deux éléments de l'ensemble qui sont en conflit au sujet d'un autre argument qui n'appartient pas à l'ensemble (l'un l'appuie et l'autre l'attaque).

On va donc donner la définition de différents types de conflits pour chacune de ces classes permettant de prendre en compte les divers appuis et attaques définis en sections 4.2 page 39 et 4.3 page ci-contre.

4.4.1 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit interne

Définition 31 (Ensemble sans conflit) *Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire,* $S \subseteq A$*.* S *est* **sans conflit** *si et seulement si quels que soient* $a, b \in S$ $(a, b) \notin R_{att}$*.*

C'est la définition au sens de [Dun95] et cela correspond à l'absence d'attaque directe interne à l'ensemble.

Définition 32 (Ensemble sans conflit complexe) *Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire,* $S \subseteq A$*.* S *est* **sans conflit complexe** *si et seulement si quels que soient* $a, b \in S$ a *n'attaque pas de manière complexe* b*.*

C'est la définition au sens de [CLS05b, MCLS05] qui correspond à l'absence d'attaque complexe interne à l'ensemble.

Proposition 13 *[CLS05b, MCLS05] Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire,* $S \subseteq A$*. Si* S *est sans conflit complexe, alors* S *est sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*

4.4.2 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit externe

Définition 33 (Ensemble sûr) *Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire et* $S \subseteq A$*.* S *est un ensemble* **sûr** *si et seulement si il n'existe pas d'argument* $b \in A$ *tel que* S *attaque directement* b*, et soit* S *appuie directement* b*, soit* $b \in S$*.*

C'est la définition au sens de [CLS05b, MCLS05]

Proposition 14 *[CLS05b, MCLS05] Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire et* $S \subseteq A$*.*

1. *Si* S *est un ensemble sûr, alors* S *est sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Si* S *est sans conflit complexe, alors* S *n'est pas sûr.*

Définition 34 (Ensemble complexe sûr) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$. S est un ensemble* **complexe sûr** *si et seulement si il n'existe pas d'argument $b \in A$ tel que S attaque de manière complexe b, et soit S appuie de manière complexe b, soit $b \in S$.*

Proposition 15 *[CLS05b, MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$.*

1. *Si S est un ensemble complexe sûr, alors S est un ensemble sûr. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Si S est un ensemble complexe sûr, alors S est un ensemble sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
3. *Si S est un ensemble complexe sûr, alors S est un ensemble sans conflit complexe. La réciproque n'est pas vérifiée.*
4. *Si $R_{app} = \varnothing$ alors S est sans conflit complexe ssi S est sans conflit.*

Les liens d'inclusion entre tous ces ensembles sont synthétisés sur la figure 4.4.

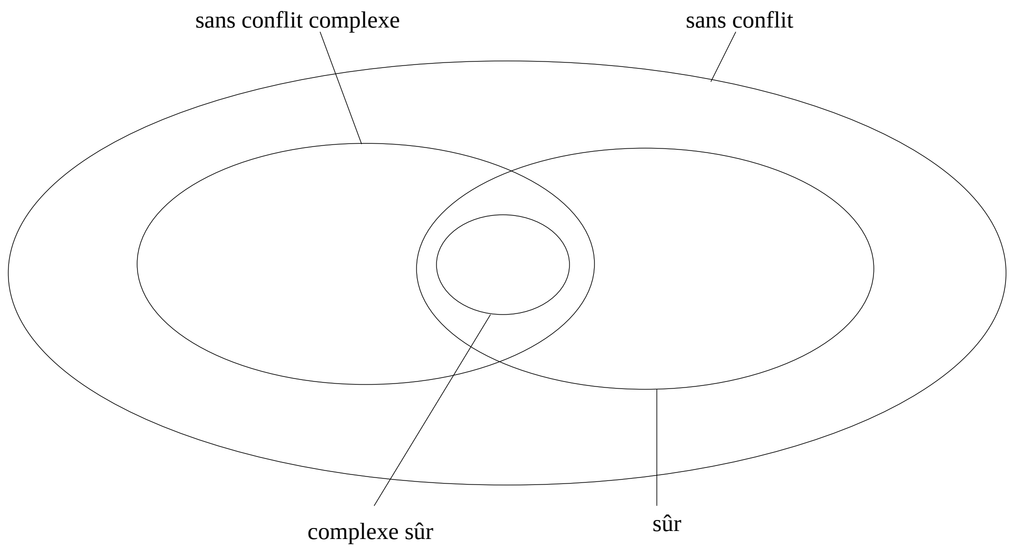

FIG. 4.4 – Liens entre ensembles sans conflit interne et sans conflit externe [CLS05b, MCLS05]

4.5 Les différentes sémantiques

4.5.1 Notion d'admissibilité

Définition 35 (Ensemble faiblement (resp. moyennement) d-admissible) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est* **faiblement (resp. moyennement) d-admissible**[4] *si et seulement si S est sans conflit (resp. sans conflit complexe), et défend tous ses éléments.*

[4] «d» signifie «au sens de Dung».

Définition 36 (Ensemble faiblement (resp. moyennement) s-admissible) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est* **faiblement (resp. moyennement) s-admissible**[5] *si et seulement si S est sûr (resp. complexe sûr), et défend tous ses éléments.*

Proposition 16 *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$.*

1. *Si S est moyennement d(resp. s)-admissible alors S est faiblement d(resp. s)-admissible.*
2. *Si S est faiblement s-admissible (resp. moyennement s-admissible) alors S est faiblement d-admissible (resp. moyennement d-admissible).*

4.5.2 Extensions Préférées

Définition 37 (Extensions faiblement préférées) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est une extension faiblement d-préférée (resp. faiblement s-préférée) si et seulement si S est maximal pour l'inclusion ensembliste parmi les ensembles faiblement d-admissibles (resp. s-admissibles).*

Définition 38 (Extensions moyennement préférées) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est une extension moyennement d-préférée (resp. moyennement s-préférée) si et seulement si S est maximal pour l'inclusion ensembliste parmi les ensembles moyennement d-admissibles (resp. s-admissibles).*

Proposition 17 *[MCLS05] Quelle que soit la classe de sémantique donnée (faible ou moyenne) et quel que soit $x \in \{d, s\}$:*

1. *tout ensemble x-admissible est inclus dans une extension x-préférée ;*
2. *il existe toujours au moins une extension x-préférée dans cette classe.*

Conséquence 2 *[MCLS05] Pour une classe de sémantique donnée (faible ou moyenne), on a : si $S \subseteq A$ est s-préférée pour la classe donnée, alors $\exists S' \subseteq A$ d-préférée pour la classe donnée et telle que $S \subseteq S'$.*

4.5.3 Extensions Stables

Définition 39 (Extension faiblement (resp. moyennement) d-stable) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est un ensemble faiblement (resp. moyennement) d-stable si et seulement si S est sans conflit direct (resp. sans-conflit-complexe) et $\forall a \notin S$, S attaque directement (resp. de manière complexe) a.*

Définition 40 (Extension faiblement (resp. moyennement) s-stable) *[MCLS05] Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est un ensemble faiblement (resp. moyennement) s-stable si et seulement si S est directement sûr (resp. complexe-sûr) et $\forall a \notin S$, S attaque directement (resp. de manière complexe) a.*

Proposition 18 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$.*

[5] «s» signifie «sûr».

1. *Pour les liens internes à la classe faible :*
   (a) *Si S est une extension faiblement s-stable alors S est faiblement d-stable.*
   (b) *Si S est une extension faiblement d-stable alrs S est faiblement d-admissible.*
2. *Pour les liens internes à la classe moyenne*
   (a) *Si S est une extension moyennement s-stable alors S est moyennement d-stable.*
   (b) *Si S est une extension moyennement d-stable, alors S n'est pas toujours moyennement d-admisssible.*

Chapitre 5

Bipolarité et ci-conflit

Ici on va utiliser les définitions d'un SABP et de l'appui direct ou complexe données au chapitre 4 page 39. De même au niveau de l'attaque, on va conserver l'attaque directe et l'attaque complexe rappelées au chapitre 4 page 39.
Par contre, on va rajouter dans le cadre bipolaire la prise en compte des conflits dits "indirects" introduits dans [Dun95] et développés dans [CMDM05b, CMDM06b, CMDM06a], que l'on appelle ici les ci-attaques (voir chapitre 3 page 13).

5.1 Les différentes sortes de ci-attaques

La première relation que l'on rajoute correspond à la définition d'attaque indirecte de [Dun95].

Définition 41 (ci-attaque) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire.*
Soit $a, b \in A$. a **c(hemin)i(impair)-attaque** *b si et seulement si il existe un chemin de longueur impaire d'attaques partant de a et arrivant en b.*
Soit $S \subseteq A$, $b \in A$. S **ci-attaque** *b si et seulement si il existe $a \in S$ tel que a ci-attaque b.*

Cela correspond à la définition d'attaque indirecte de [Dun95] et à la définition 14 page 13 donnée au chapitre 3, où R_{att} remplace R.

$$a_0 \nrightarrow a_1 \nrightarrow \cdots\cdots \nrightarrow a_{2n+1} \quad n \geq 0$$

Fig. 5.1 – Représentation graphique d'une ci-attaque

L'attaque directe définie au chapitre 4 page 39 est un cas particulier de la ci-attaque.

Définition 42 (ci-attaque complexe) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $a, b \in A$. a* **ci-attaque de manière complexe** *b si et seulement si :*
- *soit a ci-attaque b,*
- *soit il existe une suite $a_{1,1}R_{1,1}a_{1,2}R_{1,2}\ldots R_{1,n-1}a_{1,n}R_{2,1}a_{2,1}\ldots R_{2,m}a_{2,m}$ telle que $a_{1,1} = a$, $a_{2,m} = b$, $\forall i, 1 \leq i \leq n-1, R_{1,i} = R_{app}$ et $\forall i, 1 \leq i \leq m, R_{2,i} = R_{att}$, $2 \leq n$, $1 \leq m$ et m est un nombre impair.*

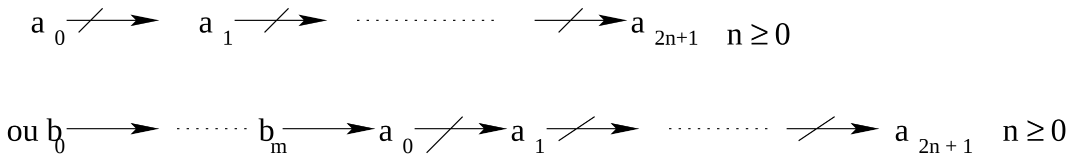

FIG. 5.2 – Représentation graphique d'une ci-attaque complexe

L'attaque directe, l'attaque complexe (définies au chapitre 4 page 39) et la ci-attaque sont des cas particuliers de la ci-attaque complexe.

5.2 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit

On va retrouver ici les deux classes de conflit (interne et externe) explicitées en section 4.4 page 41.

5.2.1 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit interne

On garde les ensembles sans conflit et sans conflit complexe définis en section 4.4 page 41 et on rajoute les ensembles sans conflit suivants :

Définition 43 (Ensemble sans ci-conflit) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est* **sans ci-conflit** *si et seulement si quels que soient $a, b \in S$ a ne ci-attaque pas b.*

C'est la définition au sens de [CMDM06a].
Les relations entre les sémantiques de Dung [Dun95] et celles basées sur la notion d'ensemble sans ci-conflit ont été présentées dans [CMDM05b] et rappelées au chapitre 3 page 13.
On a aussi les liens suivants entre la notion de sans ci-conflit et les autres notions de sans conflit :

Proposition 19 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$.*

1. *Si S est sans ci-conflit, alors S est sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Un ensemble sans conflit complexe n'est pas forcément sans ci-conflit.*
3. *Un ensemble sans ci-conflit n'est pas forcément sans conflit complexe.*

Démonstration :

1. Évident par la définition 41 page précédente.
   Pour la réciproque voir le contre-exemple figure 5.3.

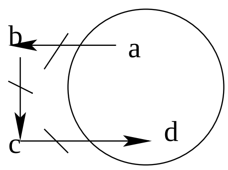

FIG. 5.3 – Avec ci-conflit

2. Voir le contre-exemple figure 5.3 page précédente.
3. Voir le contre-exemple figure 5.4.

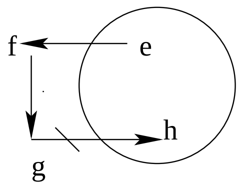

FIG. 5.4 – Pas sans conflit complexe

■

Définition 44 (Ensemble sans ci-conflit complexe)
Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$. S est **sans ci-conflit complexe** *si et seulement si quels que soient $a, b \in S$ a ne ci-attaque pas de manière complexe b.*

Proposition 20 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$.*
1. *Si S est sans ci-conflit complexe, alors S est sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Si S est sans ci-conflit complexe, alors S est sans ci-conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
3. *Si S est sans ci-conflit complexe, alors S est sans conflit complexe. La réciproque n'est pas vérifiée.*
4. *Si $R_{app} = \varnothing$, alors S est sans ci-conflit complexe ssi S est sans ci-conflit.*

Démonstration :
1. Évident par les définitions 42 page 45 et 41 page 45. Voir le contre-exemple figure 5.5.

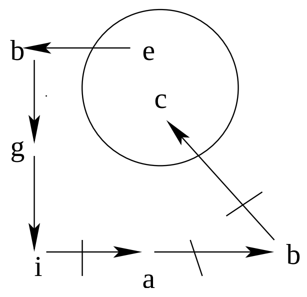

FIG. 5.5 – Pas sans ci-conflit complexe

2. Évident par la définition 42 page 45. Voir le contre-exemple figure 5.5.
3. Évident par la définition 42 page 45. Voir le contre-exemple figure 5.5.
4. Évident par les définitions 42 page 45 et 41 page 45.

■

En résumé : Voir figure 5.6 page suivante

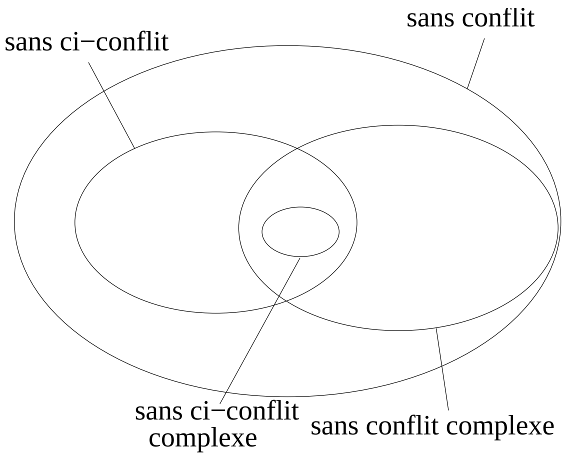

FIG. 5.6 – Lien entre les différentes sortes d'absence de conflit (interne)

5.2.2 Les différentes sortes d'ensemble sans conflit externe

On conserve les notions d'ensemble sûr et complexe sûr définies en section 4.4 page 41 avec les liens suivants entre les différents types d'ensemble :

Proposition 21 *Soit* $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ *un système d'argumentation bipolaire et* $S \subseteq A$.

1. *Un ensemble sûr n'est pas forcément sans ci-conflit.*
2. *Un ensemble sans ci-conflit n'est pas forcément sûr.*
3. *Un ensemble sans ci-conflit complexe n'est pas forcément sûr.*
4. *Un ensemble sûr n'est pas forcément sans ci-conflit complexe.*
5. *Un ensemble complexe sûr n'est pas forcément sans ci-conflit.*
6. *Un ensemble sans ci-conflit n'est pas forcément complexe sûr.*
7. *Un ensemble sans ci-conflit complexe n'est pas forcément un ensemble complexe sûr.*
8. *Un ensemble complexe sûr n'est pas forcément un ensemble sans ci-conflit complexe.*

Démonstration :

1. Voir le contre-exemple figure 5.3 page 46.
2. Voir le contre-exemple figure 5.7.

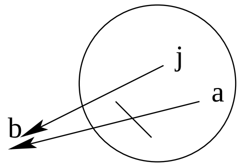

FIG. 5.7 – Pas sûr

3. Voir le contre-exemple figure 5.7.
4. Voir le contre-exemple figure 5.5 page précédente.

5. Voir le contre-exemple figure 5.3 page 46.
6. Voir le contre-exemple figure 5.8.

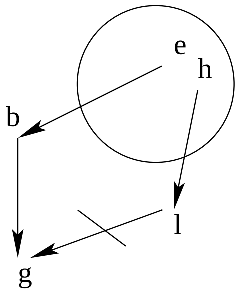

FIG. 5.8 – Pas complexe sûr

7. Voir le contre-exemple figure 5.8.
8. Voir le contre-exemple figure 5.5 page 47.

■

Définition 45 (Ensemble ci-sûr) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$. S est un ensemble* **ci-sûr** *si et seulement si il n'existe pas d'argument $b \in A$ tel que S ci-attaque b, et soit S appuie de manière complexe b, soit $b \in S$.*

Proposition 22 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$.*

1. *Un ensemble ci-sûr est sûr. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Un ensemble ci-sûr n'est pas forcément un ensemble complexe sûr.*
3. *Un ensemble complexe sûr n'est pas forcément un ensemble ci-sûr.*
4. *Un ensemble ci-sûr est sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
5. *Un ensemble ci-sûr est sans ci-conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
6. *Un ensemble ci-sûr n'est pas forcément sans conflit complexe.*
7. *Un ensemble sans conflit complexe n'est pas forcément ci-sûr.*
8. *Un ensemble ci-sûr n'est pas forcément sans ci-conflit complexe.*
9. *Un ensemble sans ci-conflit complexe n'est pas forcément ci-sûr.*

Démonstration :

1. Évident par les définitions 45, et 33 page 41. Voir le contre-exemple figure 5.9 page suivante.
2. Voir le contre-exemple figure 5.8.
3. Voir le contre-exemple figure 5.9 page suivante.
4. Évident par les définitions 45, et 31 page 41. Voir le contre-exemple figure 5.9 page suivante.
5. Évident par les définitions 45, et 43 page 46. Voir le contre-exemple figure 5.9 page suivante.

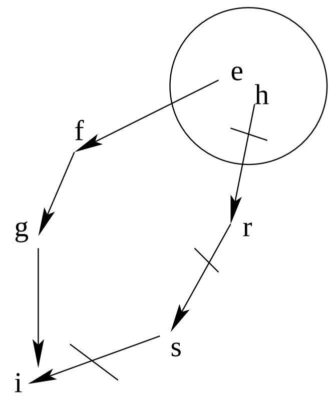

FIG. 5.9 – Pas ci-sûr

6. Voir le contre-exemple figure 5.4 page 47.
7. Voir le contre-exemple figure 5.9.
8. Voir le contre-exemple figure 5.5 page 47.
9. Voir le contre-exemple figure 5.9.

■

Définition 46 (Ensemble complexe ci-sûr) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$. S est un ensemble* **complexe ci-sûr** *si et seulement si il n'existe pas d'argument $b \in A$ tel que S ci-attaque de manière complexe b, et soit S appuie de manière complexe b, soit $b \in S$.*

Proposition 23 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire et $S \subseteq A$.*

1. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble sûr. La réciproque n'est pas vérifiée.*
2. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble complexe sûr. La réciproque n'est pas vérifiée.*
3. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble ci-sûr. La réciproque n'est pas vérifiée.*
4. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble sans conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
5. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble sans ci-conflit. La réciproque n'est pas vérifiée.*
6. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble sans conflit complexe. La réciproque n'est pas vérifiée.*
7. *Un ensemble complexe ci-sûr est un ensemble sans ci-conflit complexe. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration :

1. Évident par les définitions 46 et 33 page 41. Voir le contre-exemple figure 5.10 page suivante.
2. Évident par les définitions 46 et 34 page 42. Voir le contre-exemple figure 5.10 page ci-contre.

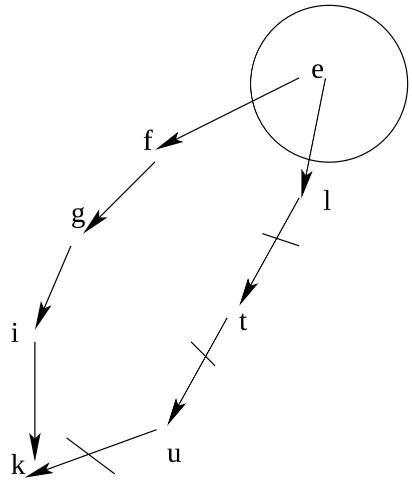

FIG. 5.10 – Pas complexe ci-sûr

3. Évident par les définitions 46 page précédente et 45 page 49. Voir le contre-exemple figure 5.10.
4. Évident par les définitions 46 page ci-contre et 31 page 41. Voir le contre-exemple figure 5.10.
5. Évident par les définitions 46 page précédente et 43 page 46. Voir le contre-exemple figure 5.10.
6. Évident par les définitions 46 page ci-contre et 32 page 41. Voir le contre-exemple figure 5.10.
7. Évident par les définitions 46 page précédente et 44 page 47. Voir le contre-exemple figure 5.10.

■

En résumé pour les ensembles sûrs : Voir figure 5.11

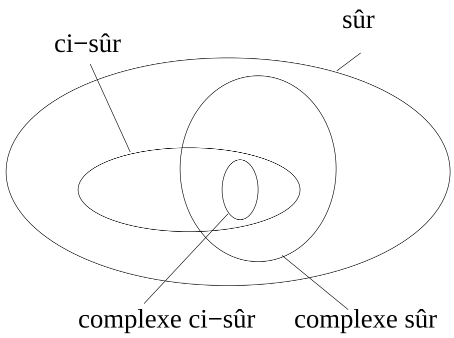

FIG. 5.11 – Lien entre les différentes sortes d'ensemble sûr

Et sur les figures 5.12 page suivante, 5.13 page 53, 5.14 page 54, les liens entre toutes ces notions sont explicitées. On y voit d'abord comment les ensembles sûrs se situent par rapport aux ensembles sans conflit de tous types (figure 5.12). Puis, sur la figure 5.13 page suivante, on rajoute les ensembles complexes sûrs et les ensembles ci-sûrs. Et enfin sur la figure 5.14 page 54, on trouve tous les ensembles représentés.

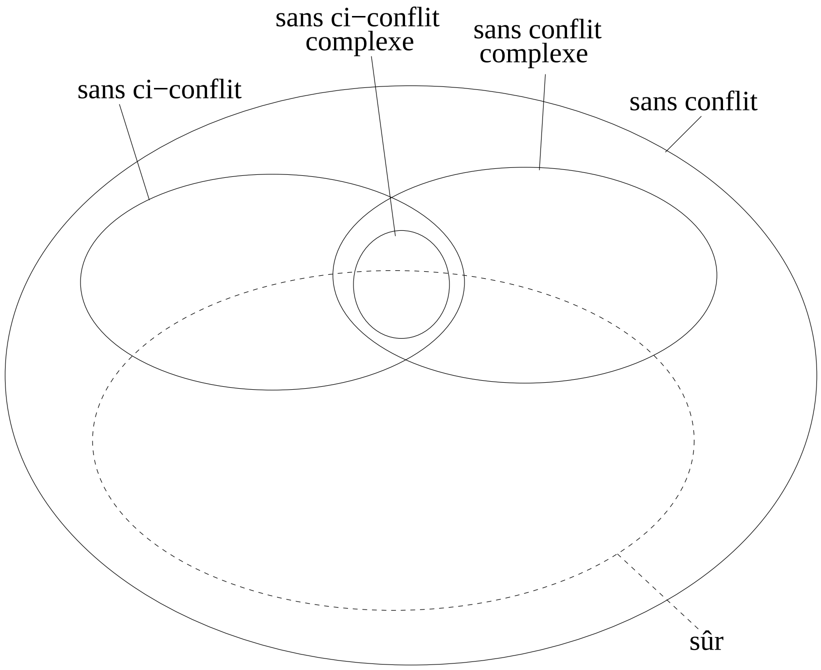

FIG. 5.12 – Lien entre les différentes sortes d'absence de conflit et les ensembles sûrs

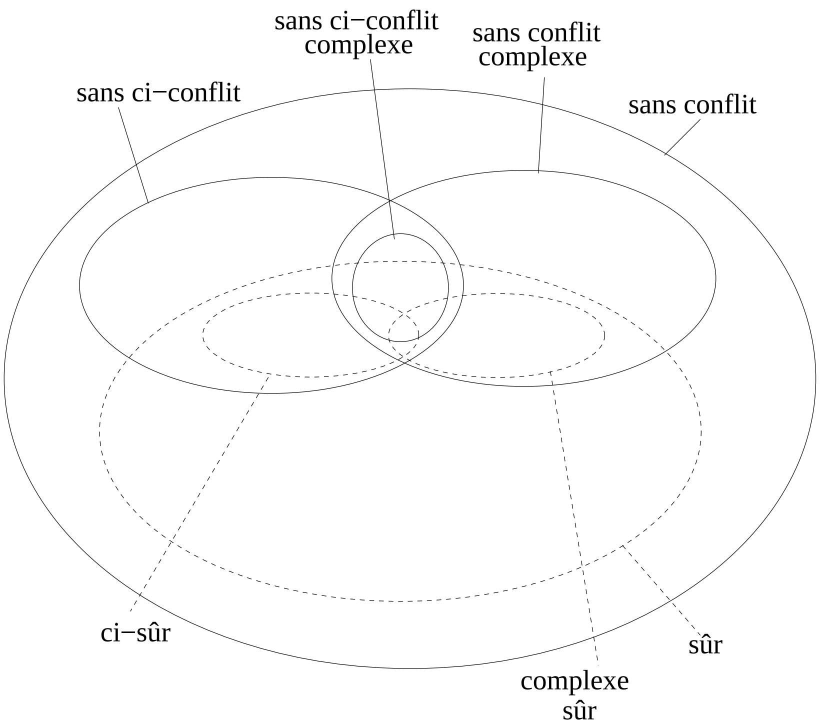

FIG. 5.13 – Lien entre les différentes sortes d'absence de conflit et les ensembles sûrs, complexes sûrs et ci-sûrs

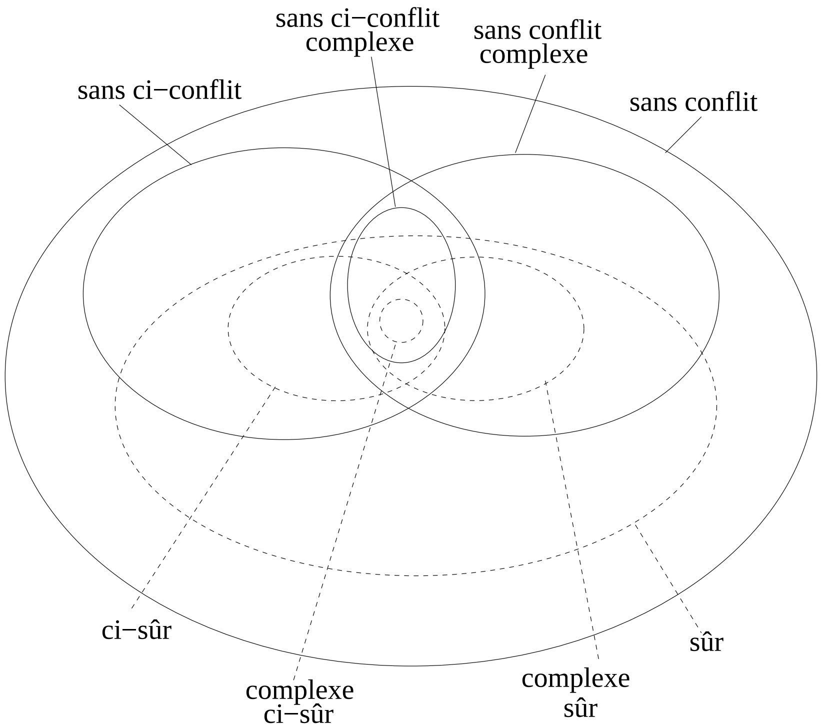

Fig. 5.14 – Lien entre les différentes sortes d'absence de conflit et les différents types d'ensembles sûrs

Chapitre 6

Les sémantiques basées sur les ensembles sans ci-conflit complexe

6.1 Définitions de base

Nous avons décidé de nous intéresser au cas de la plus forte cohérence interne (i.e. les ensembles sans ci-conflit complexe). Nous allons donc proposer une nouvelle sémantique, dont le nom a été choisi pour rester proche à la fois de la terminologie proposée dans [MCLS05] et de celle utilisée dans [CMDM05b, CMDM06b, CMDM06a] : la m(oyenne)p(rudente)-admissibilité. Par contre, pour le moment nous avons mis de côté les notions de sûreté externe, ainsi les sémantiques définies ici n'utiliseront pas la notion de «sûreté».

Définition 47 (Ensemble mp-admissible) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini, $S \subseteq A$. S est* **mp-admissible** *si et seulement si S est sans ci-conflit complexe et quel que soit $a \in S$ a est acceptable par rapport à S.*

Notons que $\varnothing$ est un ensemble mp-admissible.
D'autre part, comme pour les sémantiques basées sur la prise en compte des ci-conflits, le fait que nos ensembles soient sans ci-conflit complexe impose qu'aucun argument appartenant à un cycle (d'attaque) de longueur impaire n'appartienne à un ensemble mp-admissible. De même si un argument a est controversé par rapport à un argument b, $\{a, b\}$ ne peut pas être inclus dans un ensemble mp-admissible. Cela n'impose pas que a et b ne fassent jamais partie d'une extension, juste qu'ils ne fassent pas partie de la même.

Proposition 24 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire. Si $S \subseteq A$ est un ensemble mp-admissible, alors S est un ensemble admissible. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Direct par les définitions 3 page 6 et 47 et la proposition 20 page 47. ■

Lemme 22 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire tel que $R_{app} = \varnothing$. $S \subseteq A$ est un ensemble mp-admissible si et seulement si S est un ensemble p-admissible.*

Démonstration : Direct de la proposition 20 page 47 et des définitions 47 et 16 page 16. ■

Proposition 25 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire. Si $S \subseteq A$ est un ensemble mp-admissible, alors S est un ensemble p-admissible. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Direct par la définition 16 page 16 et la proposition 20 page 47. ■

Étudions le pendant du lemme 10 page 16.

Lemme 23 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$ un ensemble mp-admissible d'arguments, et $a, b \in A$ tels que :*

1. *a est acceptable par rapport à S et $S \cup \{a\}$ est sans ci-conflit complexe.*
2. *b est acceptable par rapport à S et $S \cup \{b\}$ est sans ci-conflit complexe.*

On a :

1. *$S' = S \cup \{a\}$ est mp-admissible,*
2. *b est acceptable par rapport à S'*

En revanche, il se peut que b (resp. a) ci-attaque de manière complexe a (resp. b).

Étudions le pendant du lemme 11 page 16.

Lemme 24 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire, $S \subseteq A$ un ensemble mp-admissible d'arguments, et $a, b \in A$ tels que :*

1. *a n'est pas attaqué, a est acceptable par rapport à S et $S \cup \{a\}$ est sans ci-conflit complexe.*
2. *b n'est pas attaqué, b est acceptable par rapport à S et $S \cup \{b\}$ est sans ci-conflit complexe.*

On a :

1. *$S' = S \cup \{a\}$ est mp-admissible,*
2. *b est acceptable par rapport à S' et $S' \cup \{b\}$ est sans ci-conflit complexe.*

Démonstration : Le premier point découle directement de la définition 47 page précédente. Le second vient du fait que si ni a, ni b ne sont attaqués, par la définition 42 page 45 $\{a, b\}$ est sans ci-conflit complexe. ■

De façon analogue à la définition des extensions préférées de [Dun95], nous introduisons la notion de mp-extension préférée.

Définition 48 (mp-extension préférée) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini et $S \subseteq A$ un ensemble mp-admissible.*
S est **une mp-extension préférée** *de BAF ssi $\nexists S' \subseteq A$ tel que $S \subset S'$ et S' est mp-admissible.*

Lemme 25 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire tel que $R_{app} = \varnothing$. $S \subseteq A$ est une mp-extension préférée si et seulement si S est une p-extension préférée.*

Démonstration : Direct des définitions 48 et 17 page 16 et du lemme 22 page précédente. ■

Proposition 26 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini,*

1. *l'ensemble de tous les ensembles mp-admissibles de BAF muni de $\subseteq$ (l'inclusion ensembliste) forme un sous-ensemble inductif de $(2^A, \subseteq)$;*
2. *pour chaque ensemble mp-admissible $S \subseteq A$, il existe au moins une mp-extension préférée $E \subseteq A$ telle que $S \subseteq E$.*

Démonstration : $\subseteq$ est un ordre partiel. L'ensemble de tous les ensembles mp-admissibles de BAF muni de $\subseteq$ contient un plus petit élément, l'ensemble vide ($\varnothing$ est toujours un ensemble mp-admissible). De plus comme A est un ensemble fini, toute chaîne d'ensembles mp-admissibles possède trivialement une borne supérieure. D'où l'ensemble de tous les ensembles mp-admissibles de BAF muni de $\subseteq$ forme un sous-ensemble inductif de $(2^A, \subseteq)$.
Comme nous avons fait l'hypothèse que l'ensemble A d'arguments est un ensemble fini, nous pouvons déduire trivialement de la définition 48 page ci-contre le deuxième point de la proposition. ■

De même comme l'ensemble de tous les arguments non attaqué est trivialement un ensemble mp-admissible, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 9 *Soit $AF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini, et S l'ensemble des arguments de A non attaqués. Alors, il existe une mp-extension préférée contenant S.*

Nous pouvons noter ici que si un ensemble mp-admissible est un ensemble admissible et sans ci-conflit complexe, une mp-extension préférée n'est pas forcément une extension préférée. En effet, si une extension préférée est sans ci-conflit complexe, elle constitue une mp-extension préférée, mais parmi les mp-extensions préférées, il peut exister des ensembles admissibles qui ne sont pas maximaux pour $\subseteq$.

Exemple 18 Soit $BAF_2 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}$ et $R_{app} = \{(a, d)\}$. BAF_2 est représenté figure 6.1. Dans BAF_2, $\{a, c\}$ est une mp-

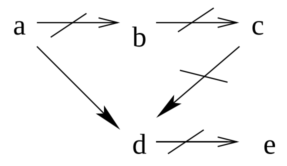

Fig. 6.1 – Représentation graphique de BAF_2.

extension préférée, mais n'est pas une extension préférée (car est incluse dans $\{a, c, e\}$).

Nous pouvons noter ici que si un ensemble mp-admissible est un ensemble p-admissible et sans ci-conflit complexe, une mp-extension préférée n'est pas forcément une p-extension préférée. En effet, si une p-extension préférée est sans ci-conflit complexe, elle constitue une mp-extension préférée, mais parmi les mp-extensions préférées, il peut exister des ensembles p-admissibles qui ne sont pas maximaux pour $\subseteq$.

Suite de l'exemple 18 Dans BAF_2 (fig. 6.1), $\{a, c\}$ est une mp-extension préférée, mais n'est pas une p-extension préférée (car est incluse dans $\{a, c, e\}$).

Comme $\varnothing$ est toujours un ensemble mp-admissible, nous avons trivialement la proposition suivante :

Proposition 27 *Chaque système d'argumentation bipolaire fini possède une mp-extension préférée.*

Démonstration : Direct d'après le point 2. de la proposition 26. ■

Proposition 28 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini, pour chaque mp-extension préférée $E_{mp} \subseteq A$, il existe une extension préférée E de BAF telle que $E_{mp} \subseteq E$.*

Démonstration : Par définition chaque mp-extension préférée de BAF est un ensemble mp-admissible. D'où, d'après la proposition 24 page 55, chaque mp-extension préférée de BAF est un ensemble admissible. D'où d'après le théorème 1 page 6, chaque mp-extension préférée de BAF est comprise dans (ou égale à) une extension préférée de BAF. ■

Proposition 29 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini, pour chaque mp-extension préférée $E_{mp} \subseteq A$, il existe une p-extension préférée E_p de BAF telle que $E_{mp} \subseteq E_p$.*

Démonstration : Par définition chaque mp-extension préférée de BAF est un ensemble mp-admissible. D'où, d'après la proposition 25 page 56, chaque mp-extension préférée de BAF est un ensemble p-admissible. D'où d'après le point 2 de la proposition 5 page 17, chaque mp-extension préférée de BAF est comprise dans (ou égale à) une p-extension préférée de BAF. ■

Exemple 19 Soit $BAF_5 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, u\}$, $R = \{(b, a), (c, a), (c, d), (d, b), (b, u), (u, c)\}$ et $R_{app} = \{(c, d), (b, u)\}$. BAF_5 est représenté figure 6.2. Dans BAF_5,

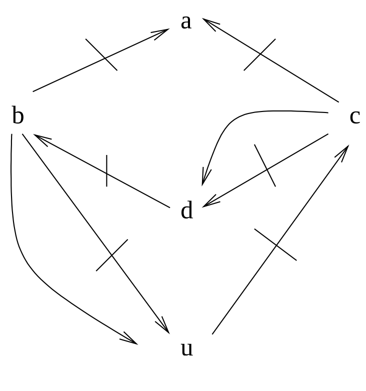

FIG. 6.2 – Représentation graphique de BAF_5.

$E_1 = \{b, c\}$ et $E_2 = \{a, d, u\}$ sont les extensions préférées (resp. les p-extensions préférées).
b est défendu contre d par c. Mais c ci-attaque de manière complexe b. Donc E_1 n'est pas un ensemble mp-admissible.

c est défendu contre u par b. Mais b ci-attaque de manière complexe c. Donc c ne peut pas faire partie d'une mp-extension préférée.
E_2 est l'unique mp-extension préférée de BAF_5. Mais $E_2 \not\subseteq E_1$. Cet exemple montre que chaque extension préférée (resp. chaque p-extension préférée) ne contient pas forcément une mp-extension préférée.

Proposition 30 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une unique extension préférée E alors celle-ci contient chaque mp-extension préférée E_{mp} de BAF.*

Démonstration : Immédiate d'après les propositions 27 page précédente et 28 page ci-contre. ■

Cette propriété s'applique en particulier lorsque BAF est trivial, bien fondé ou sans circuit de longueur paire.

Proposition 31 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une unique p-extension préférée E_p alors celle-ci contient chaque mp-extension préférée E_{mp} de BAF.*

Démonstration : Immédiate d'après les propositions 27 page précédente et 29 page ci-contre. ■

Cette propriété s'applique en particulier lorsque BAF est p-trivial.

Définition 49 (mp-trivialité) *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. BAF est* **mp-trivial** *si son unique mp-extension préférée est l'ensemble vide.*

Ce qui donne les lemmes suivants :

Lemme 26 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF est trivial, alors BAF est mp-trivial. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Si BAF est trivial, son unique extension préférée est $\varnothing$. L'unique ensemble pouvant être inclus ou égal à $\varnothing$ est $\varnothing$. D'où, d'après la proposition 28 page précédente la seule mp-extension préférée de BAF est $\varnothing$. La réciproque est donnée par l'exemple 20. ■

Lemme 27 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF est p-trivial, alors BAF est mp-trivial. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Si BAF est p-trivial, son unique p-extension préférée est $\varnothing$. L'unique ensemble pouvant être inclus ou égal à $\varnothing$ est $\varnothing$. D'où, d'après la proposition 29 page précédente la seule mp-extension préférée de BAF est $\varnothing$. La réciproque est donnée par l'exemple 20. ■

Exemple 20 Soit $BAF_4 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b\}$, $R_{att} = \{(a, b), (b, a)\}$ et $R_{app} = \{(a, b), (b, a)\}$. BAF_4 est représenté figure 6.3. Dans BAF_4, $E_1 = \{a\}$ et $E_2 = \{b\}$ sont les extensions préférées (resp. les p-extensions préférées). Donc BAF_4 n'est ni trivial, ni p-trivial. Par contre BAF_4 est mp-trivial ($\varnothing$ est la mp-extension préférée de BAF_4).

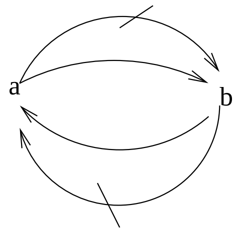

FIG. 6.3 – Représentation graphique de BAF_4.

Même dans les cas où la structure du graphe d'attaque d'un système d'argumentation fini nous garantit l'unicité de l'extension préférée (voir théorème 3 page 9 et proposition 2 page 9), plusieurs mp-extensions préférées peuvent exister. Le lemme 25 page 56 nous permet de garder l'exemple 7 page 19 où l'on considérera que $R_{att} = R$ et $R_{app} = \varnothing$ pour illustrer ce propos.
Dans le chapitre 3 page 13, les nouvelles sémantiques sont construites à partir des sémantiques de Dung dans lesquelles on renforce la notion de cohérence interne (en imposant aux ensembles d'être sans ci-conflit). Pour définir les **mp-extensions stables** nous conservons cette méthode, ainsi les appuis n'interviennent que pour renforcer la notion de cohérence contrairement à l'idée exploitée dans le chapitre 4 page 39 pour définir les extensions (faiblement ou moyennement) (s ou d)-stables.

Définition 50 (mp-extension stable) *Soit $BAF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation fini. Un ensemble sans ci-conflit complexe $S \subseteq A$ est une* **mp-extension stable** *ssi S attaque* **directement** *chaque argument qui n'appartient pas à S.*

Comme pour les extensions stables et les extensions p-stables, la définition des mp-extensions stables impose qu'une mp-extension stable n'est jamais vide (lorsque $A \neq \varnothing$).
Nous avons trivialement la proposition suivante :

Proposition 32 *Chaque mp-extension stable est une mp-extension préférée. La réciproque est fausse.*

Démonstration : Par définition, si S est une mp-extension stable, alors pour chaque $a \in A \setminus S$, $S \cup \{a\}$ n'est pas sans conflit, donc $S \cup \{a\}$ n'est pas sans ci-conflit complexe. En conséquence, S est un ensemble mp-admissible maximal de BAF pour $\subseteq$, i.e. une mp-extension préférée de BAF. La réciproque est donnée par l'exemple 21. ■

Exemple 21 Soit $BAF_7 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e, i\}$, $R_{att} = \{(e, a), (a, b), (c, a), (i, c)\}$ et $R_{app} = \{(d, i)\}$. BAF_7 est représenté figure 6.4.
$E = \{e, b\}$ est une mp-extension préférée de BAF_7, mais n'est pas une mp-extension stable.

Lemme 28 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire tel que $R_{app} = \varnothing$. $S \subseteq A$ est une mp-extension stable si et seulement si S est une p-extension stable.*

Démonstration : Direct des définitions 50 et 19 page 19 et de la proposition 20 page 47. ■

Une mp-extension stable est une extension stable qui est sans ci-conflit complexe. En conséquence :

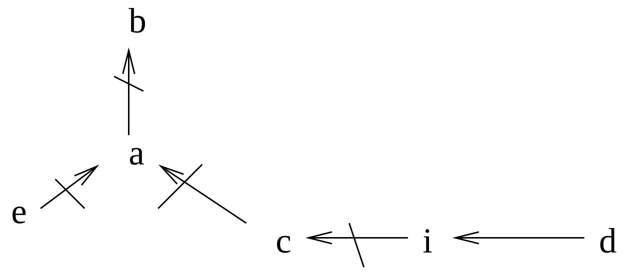

FIG. 6.4 – Représentation graphique de BAF_7

Lemme 29 *Chaque mp-extension stable est une extension stable, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Soit S une mp-extension stable. S est sans ci-conflit, donc d'après la proposition 20 page 47, S est sans conflit. De plus pour chaque $a \in A \setminus S$, $S \cup \{a\}$ n'est pas sans conflit. Donc S est une extension stable. La réciproque est donnée dans l'exemple 21 qui suit. ■

Suite de l'exemple 21 Dans BAF_7, $E_1 = \{d, i, e, b\}$ est une extension stable, mais n'est pas une mp-extension stable.

Corollaire 10 *Chaque mp-extension stable est une extension préférée, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Une mp-extension stable est une p-extension stable qui est sans ci-conflit complexe. En conséquence :

Lemme 30 *Chaque mp-extension stable est une p-extension stable, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration : Soit S une mp-extension stable. S est sans ci-conflit complexe, donc d'après la proposition 20 page 47, S est sans ci-conflit. De plus pour chaque $a \in A \setminus S$, $S \cup \{a\}$ n'est pas sans conflit. Donc S est une p-extension stable. La réciproque est donnée dans l'exemple 19 qui suit. ■

Suite de l'exemple 19 Dans BAF_5, $E_1 = \{b, c\}$ est une p-extension stable, mais n'est pas une mp-extension stable.

Corollaire 11 *Chaque mp-extension stable est une p-extension préférée, mais la réciproque n'est pas vérifiée.*

Suite de l'exemple 19 Dans BAF_5 (fig. 6.2 page 58), E_1 est une extension stable (resp. une p-extension stable, une extension préférée, une p-extension préférée), mais n'est pas une mp-extension stable.

Remarque 1 *Une mp-extension stable n'est pas forcément un ensemble ci-sûr, et vice versa.*

Remarque 2 *Un ensemble à la fois ci-sûr et admissible n'est pas forcément une mp-extension stable.*

Exemple 22 Soit $BAF_6 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c\}$, $R_{att} = \{(b, c)\}$ et $R_{app} = \{(a, c)\}$. BAF_6 est représenté figure 6.5. $E_1 = \{a, b\}$ est la mp-extension stable de BAF_6, mais

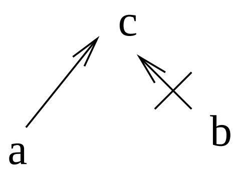

FIG. 6.5 – Représentation graphique de BAF_6

E_1 n'est pas ci-sûr.
$S = \{a\}$ est admissible et ci-sûr mais n'est pas une mp-extension stable.

Le théorème 3 page 9 et le corollaire 3 page 10 nous garantissaient la présence d'une extension stable sous certaines hypothèses sur BAF (BAF bien fondé ou controversé de manière limitée). Ces résultats ne s'étendent pas aux mp-extensions stables.

Suite de l'exemple 7 Le système d'argumentation fini AF_6 (fig. 3.4 page 19) peut être étendu en un BAF dont $R_{att} = R$ et $R_{app} = \varnothing$. Ce BAF ne possède pas de mp-extension stable. Cet exemple montre qu'un système d'argumentation bipolaire fini bien fondé (respectivement controversé de manière limitée) peut ne pas posséder de mp-extension stable.

Proposition 33 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une mp-extension stable, alors l'intersection des extensions préférées de BAF et la p-extension de base (resp. l'extension de base) de BAF coïncident.*

Démonstration : D'après le lemme 30 page précédente, chaque mp-extension stable est une extension p-stable, on peut donc appliquer la proposition 10 page 24. ■

Proposition 34 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une mp-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de BAF est incluse dans l'extension de base de BAF.*

Démonstration : D'après le lemme 30 page précédente, chaque mp-extension stable est une extension p-stable, on peut donc appliquer la proposition 11 page 24. ■

Corollaire 12 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une mp-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de BAF est incluse dans la p-extension de base de BAF.*

Démonstration : D'après le lemme 30 page précédente, chaque mp-extension stable est une extension p-stable, on peut donc appliquer le corollaire 7 page 24. ■

Corollaire 13 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini. Si BAF possède une mp-extension stable, alors l'intersection des p-extensions préférées de BAF est incluse dans l'intersection des extensions préférées (resp. des extensions stables) de BAF.*

Démonstration : D'après le lemme 30 page 61, chaque mp-extension stable est une extension p-stable, on peut donc appliquer le corollaire 8 page 24. ■

Tout comme les sémantiques de Dung et les p-sémantiques nous allons chercher à caractériser nos mp-extensions à l'aide de point fixe d'une **fonction mp-caractéristique d'un système d'argumentation fini**.

Définition 51 (fonction mp-caractéristique) *La* **fonction mp-caractéristique** *d'un système d'argumentation bipolaire fini $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ se définit comme suit :*

$\mathcal{F}^{mp}_{AF} : 2^A \longrightarrow 2^A$

$\mathcal{F}^{mp}_{AF}(S) = \{a \mid a \textit{ est acceptable par rapport à } S \textit{ et } S \cup \{a\} \textit{ est sans ci-conflit complexe}\}$

Cette fonction est une restriction de $\mathcal{F}^{p}_{AF}$ (donc de $\mathcal{F}_{AF}$) car pour tout $S \subseteq A$, $\mathcal{F}^{mp}_{AF}(S) \subseteq \mathcal{F}^{p}_{AF}(S) \subseteq \mathcal{F}_{AF}(S)$
La définition même de la fonction mp-caractéristique nous permet d'énoncer, à l'instar de Dung, le lemme suivant :

Lemme 31 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini et $S \subseteq A$. S est mp-admissible ssi $S \subseteq \mathcal{F}^{mp}_{AF}(S)$.*

Démonstration :
⋆ Soit S un ensemble mp-admissible. D'après la définition 47 page 55, $\forall a \in S$, a est acceptable par rapport à S et $S \cup \{a\} = S$ est sans ci-conflit complexe. D'où $\forall a \in S$, $a \in \mathcal{F}^{mp}_{AF}(S)$.
⋆ Soit $S \subseteq A$ que $S \subseteq \mathcal{F}^{mp}_{AF}(S)$. $\forall a \in S$ a est acceptable par rapport à S et $S \cup \{a\} = S$ est sans ci-conflit complexe. Donc S est mp-admissible. ■

Notre fonction mp-caractéristique ne possède pas les mêmes propriétés que la fonction caractéristique définie par Dung [Dun95]. Ainsi $\mathcal{F}^{mp}_{AF}$ n'est pas monotone, et cela même si on réduit son domaine de définition aux ensembles mp-admissibles ou sans ci-conflit complexe.

Suite de l'exemple 21 $E_1 = \{e\}$ et $E_2 = \{e, d\}$ sont des ensembles sans ci-conflit complexe (resp. mp-admissibles) de BAF_7 (fig. 6.4 page 61). $\mathcal{F}^{mp}_{AF}(E_1) = \{e, d, i, b\}$ et $\mathcal{F}^{mp}_{AF}(E_2) = \{e, d, i\}$. $E_1 \subseteq E_2$, pourtant $\mathcal{F}^{mp}_{AF}(E_1) \not\subseteq \mathcal{F}^{mp}_{AF}(E_2)$.

La non-monotonie de $\mathcal{F}^{mp}_{AF}$ nous empêche d'utiliser les théorèmes de Tarski et de Scott.
Nous ne pouvons donc pas définir de pendant “moyennement prudent” de l'extension de base à l'aide d'une notion de plus petit point fixe de $\mathcal{F}^{mp}_{AF}$.
Regardons ce qui se passe lorsqu'on essaye de définir la mp-extension de base à partir de la suite $(\mathcal{F}^{mp}_{AF}(\varnothing))_{i \in \mathbb{N}}$ comme Coste-Marquis, Devred et Marquis l'ont fait pour la p-extension de base.

Exemple 23 Soit $BAF_8 = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e, i\}$, $R_{att} = \{(e, a), (a, b), (d, c), (c, i)\}$ et $R_{app} = \{(b, c)\}$. BAF_8 est représenté figure 6.6. $\mathcal{F}^{mp}_{AF}(\varnothing) = \{e, d\}$. $\mathcal{F}^{mp,2}_{AF}(\varnothing) = \mathcal{F}^{mp}_{AF}(\{e, d\}) = \{e, d, b, i\}$ (qui n'est pas un ensemble mp-admissible).
$\mathcal{F}^{mp,3}_{AF}(\varnothing) = \mathcal{F}^{mp}_{AF}(\{e, d, b, i\}) = \varnothing$. Et on boucle car b attaque i de manière complexe.

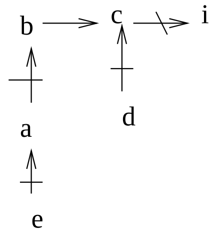

FIG. 6.6 – Représentation graphique de BAF_8

Nous ne pouvons donc pas définir de mp-extension de base.
Définissons maintenant une notion de **mp-extension complète**.

Définition 52 (mp-extension complète) *Soit $BAF = \langle A, R \rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini et S un ensemble mp-admissible. S est une* **mp-extension complète** *si et seulement si chaque argument a acceptable par rapport à S et tel que $S \cup \{a\}$ est sans ci-conflit complexe appartient à S.*

La définition 52 nous donne directement le lemme suivant :

Lemme 32 *Un ensemble d'arguments S est une mp-extension complète si et seulement si $\mathcal{F}_{AF}^{mp}(S) = S$.*

Lemme 33 *Chaque mp-extension préférée est une mp-extension complète. La réciproque n'est pas vérifiée.*

Démonstration :
$\star$ Soit S une mp-extension préférée, alors d'après le lemme 31 page précédente $S \subseteq \mathcal{F}_{AF}^{mp}(S)$.
$\star$ Soit $a \in \mathcal{F}_{AF}^{mp}(S)$ et $a \notin S$. Alors, a est acceptable par rapport à S et $S \cup \{a\}$ est sans ci-conflit complexe. Comme S est une mp-extension préférée, S est un ensemble mp-admissible. Donc $S \cup \{a\}$ l'est aussi, ce qui contredit la maximalité de S. ■

Suite de l'exemple 8 Le système d'argumentation fini AF_N (fig. 3.5 page 22) peut être étendu en un BAF dont $R_{att} = R$ et $R_{app} = \varnothing$. Dans AF_N, $\varnothing$ est une mp-extension complète, mais n'est pas une mp-extension préférée.

Suite de l'exemple 7 Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $E_{p1} = \{a, d, n\}$ est une mp-extension complète, mais ce n'est pas une extension complète. $E = \{a, d, i, n\}$ est l'unique extension complète de AF_6, mais n'est pas une mp-extension complète de AF_6. Ainsi, une mp-extension complète n'est pas forcément une extension complète. Et, une extension complète n'est pas forcément une mp-extension complète.

Cet exemple nous montre qu'il n'y a pas de propriété d'inclusion[1] entre l'ensemble des extensions complètes et celui des mp-extensions complètes.

[1] ni dans un sens ni dans l'autre.

Suite de l'exemple 21 Dans BAF_7 (fig. 6.4 page 61), $E = \{e, d, b\}$ est une p-extension complète, mais n'est pas une mp-extension complète. $E' = \{e, b\}$ est une mp-extension complète, mais n'est pas une p-extension complète.

Cet exemple nous montre qu'il n'y a pas de propriété d'inclusion[2] entre l'ensemble des p-extensions complètes et celui des mp-extensions complètes.

Définition 53 (mp-cohérence) *Un système d'argumentation bipolaire fini BAF est dit* **mp-cohérent** *si chaque mp-extension préférée de BAF est une mp-extension stable.*

Remarque 3 *Un système d'argumentation bipolaire fini cohérent n'est pas forcément mp-cohérent et vice versa.*

Remarque 4 *Un système d'argumentation bipolaire fini p-cohérent n'est pas forcément mp-cohérent et vice versa.*

Exemple 24 Soit $BAF_9 = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c\}$, $R_{att} = \{(a, b), (b, a)\}$ et $R_{app} = \{(c, b)\}$. BAF_9 est représenté figure 6.7. $E_1 = \{a, c\}$ et $E_2 = \{b, c\}$ sont les extensions

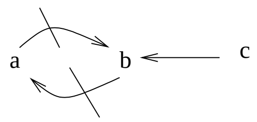

FIG. 6.7 – Représentation graphique de BAF_9

stables (resp. p-stables) de BAF_9. $E_3 = \{a\}$ est une mp-extension préférée de BAF_9, mais ce n'est pas une mp-extension stable. BAF_9 est cohérent (resp. p-cohérent), mais n'est pas mp-cohérent.

Exemple 25 Soit $BAF_{10} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, u\}$, $R = \{(d, a), (c, d), (d, b), (b, u), (u, c), (a, a)\}$ et $R_{app} = \{(c, d), (b, u)\}$. BAF_{10} est représenté figure 6.8. $E_1 =$

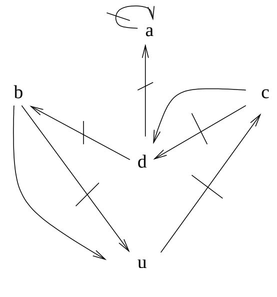

FIG. 6.8 – Représentation graphique de BAF_{10}.

$\{d, u\}$ est l'unique mp-extension préférée de BAF_{10} et c'est une mp-extension stable. $E_2 = \{b, c\}$ est une extension préférée (resp. p-extension préférée) de BAF_{10}, mais ce n'est pas une extension stable (resp. p-extension stable). BAF_{10} est mp-cohérent, mais n'est ni cohérent, ni p-cohérent.

[2] ni dans un sens ni dans l'autre.

Contrairement au cadre présenté dans [Dun95], ni l'absence d'argument controversé (ou leur présence en nombre limité) dans un système d'argumentation bipolaire fini BAF, ni le fait que BAF soit bien-fondé n'entraînent que BAF soit mp-cohérent (cf. exemple 7 page 19). Nous donnons la définition des relations d'inférence basées sur les ci-conflits complexes :

Définition 54 (Relations de mp-inférence) *Soit $AF = \langle A, R\rangle$ un système d'argumentation fini et $E \subseteq A$. On dit que AF infère crédulement (resp. sceptiquement) E suivant la sémantique s (avec s valant soit P pour la sémantique des mp-extensions préférées, soit S pour la sémantique des mp-extensions stables) noté $AF \mid\!\sim^{\exists,s}_{mp} E$ (resp. $AF \mid\!\sim^{\forall,s}_{mp} E$) si et seulement si E est inclus dans une (resp. toute) extension de la sémantique s.*

Dans la suite de cette section, nous allons comparer les relations de mp-inférence avec les relations d'inférence classique (voir section 6.2), puis avec les relations de p-inférence (voir section 6.3 page 75). Un schéma de synthèse (fig. 6.25 page 85) récapitulera la totalité des liens d'inclusion identifiés dans ces 2 sections.

6.2 Comparaison des relations de mp-inférence avec les relations d'inférence de Dung

Nous allons comparer les relations de mp-inférence avec les relations d'inférence classique dans différents cas :

1. cas où il existe une mp-extension stable ;
2. cas où il n'existe pas de mp-extension stable, mais où il existe une p-extension stable ;
3. cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais où il existe une extension stable ;
4. cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

6.2.1 Cas où il existe une mp-extension stable

6.2.1.1 Comparaison entre mp-inférences

D'après la proposition 32 page 60, on a l'équation I suivante :

$$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp} \qquad \text{(I)}$$

Nous considérons dans le tableau 6.1 qu'il existe une mp-extension stable (donc une p-extension stable et une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y sont liées se trivialisent.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$	$3, \not\subseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$	$4, \subseteq$	$=$	$5, \not\subseteq$	$6, \not\subseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$	$7, \subseteq$	$8, \subseteq$	$=$	$9, \subseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$	$10, \subseteq$	$11, \subseteq$	$12, \not\subseteq$	$=$

TAB. 6.1 – Lien entre les relations de mp-inférence avec mp-extension stable.

Explication des liens entre les relations de mp-inférences lorsqu'il y a une mp-extension stable (donc une extension stable) :

1. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une mp-extension préférée, mais dans aucune mp-extension stable.
2. Vient du point 12 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
3. Vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
4. Vient de I.
5. Vient du point 12 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$.
6. Dans l'exemple 10 page 28, $\{d\}$ est inclus dans une mp-extension stable, mais pas dans toutes les mp-extensions stables.
7. Trivial.
8. Vient de I.
9. Vient de I.
10. Vient de I.
11. Vient de I.
12. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{b\}$ est contenu dans toutes les mp-extensions stables, mais pas dans toutes les mp-extensions préférées.

6.2.1.2 Comparaison entre mp-inférences et inférences classiques

Nous considérons dans le tableau 6.2 qu'il existe une mp-extension stable (donc une p-extension stable et une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y sont liées se trivialisent.

	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$	$3, \not\subseteq, \supseteq$	$4, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \supseteq$	$7, \not\subseteq, \supseteq$	$8, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$9, \subseteq, \not\supseteq$	$10, \subseteq, \not\supseteq$	$11, \not\subseteq, \not\supseteq$	$12, \subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,S}$	$13, \subseteq, \not\supseteq$	$14, \subseteq, \not\supseteq$	$15, \not\subseteq, \not\supseteq$	$16, \subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{.,G}$	$17, \subseteq, \not\supseteq$	$18, \subseteq, \not\supseteq$	$19, \not\subseteq, \not\supseteq$	$20, \subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.2 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence avec mp-extension stable.

D'après [Dun95], on a l'équation II suivante :

$$\mid\!\sim^{.,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P} \qquad \text{(II)}$$

Explication des liens entre les relations d'inférence classique et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 5 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 6 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 6 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}$.

3. La non-inclusion vient du point 19 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 7 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$.
4. La non-inclusion vient du point 8 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 8 et de II montrant $\mid\!\sim^{\exists,S}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$.
5. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{a,d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune mp-extension préférée. Dans AF_{21} (fig. 3.9 page 30), $\{a\}$ est inclus dans une mp-extension préférée, mais dans aucune extension stable.
6. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune mp-extension stable. Voir le lemme 29 page 61.
7. La non-inclusion vient du point 19 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}$. L'inclusion vient du point 8 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$.
8. Dans AF_8 (fig. 3.6 page 24), $\{d\}$ est contenu dans une extension stable, mais dans aucune mp-extension stable. L'inclusion vient de II montrant $\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$ et du lemme 29 page 61.
9. L'inclusion vient du point 13 et de II montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
10. L'inclusion vient du point 14 et de II montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$.
11. La première non-inclusion vient du point 19 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,P}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11} (fig. 6.9 page suivante), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions préférées.
12. L'inclusion vient du point 16 et de II montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. Pour la non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$
13. L'inclusion vient du point 16 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
14. L'inclusion vient du point 16 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$.
15. La première non-inclusion vient du point 19 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11} (fig. 6.9 page ci-contre), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions stables, mais pas dans toutes les extensions stables.
16. Le lemme 29 page 61 indique que $\mid\!\sim^{\forall,S}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$.
17. L'inclusion vient du point 13 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
18. L'inclusion vient du point 14 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,S}_{mp}$.
19. Dans AF_{16} (fig. 3.8 page 29), $\{d\}$ est contenu dans l'extension de base, mais pas dans toutes les mp-extensions préférées. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11}, $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.
20. L'inclusion vient du point 16 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\forall,S}_{mp}$.

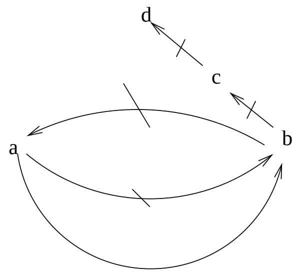

FIG. 6.9 – Représentation graphique de BAF_{11}.

Exemple 26 Soit $BAF_{11} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$ et $R_{app} = \{(a, b)\}$. BAF_{11} est représenté figure 6.9. $E_1 = \{a, c\}$ et $E_2 = \{b, d\}$ sont les extensions stables (resp. p-extensions stable) de BAF_{11}. Seule E_2 est une mp-extension stable. $\varnothing$ est l'extension de base et la p-extension de base.

Les tableaux 6.1 page 66 et 6.2 page 67 sont synthétisés figure 6.10.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim^{.,G} = \mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,S} \arrow[r] \arrow[d] & \mid\!\sim^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\
\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,S}_{mp} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,S}_{mp} \arrow[r] \arrow[u] & \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.10 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence lorsqu'il existe une mp-extension stable

6.2.2 Cas où il n'existe pas de mp-extension stable, mais où il y a une p-extension stable

6.2.2.1 Comparaison entre mp-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.3 qu'il n'existe pas de mp-extension stable, mais qu'il y a une p-extension stable.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$=$	$1, \not\subseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$	$2, \subseteq$	$=$

TAB. 6.3 – Lien entre les relations de mp-inférence sans mp-extension stable et avec p-extension stable.

Explication des liens entre les relations de mp-inférence lorsqu'il n'y a pas de mp-extension stable, mais qu'il y a une p-extension stable :

1. Dans BAF_{12} (fig. 6.11 page suivante), $\{a\}$ est inclus dans une mp-extension préférée, mais pas dans toutes.

2. Trivial.

Exemple 27 Soit $BAF_{12} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(a, b), (b, a), (c, b), (d, c), (b, e)\}$ et $R_{app} = \{(b, a)\}$. BAF_{12} est représenté figure 6.11. $E_1 = \{a, d, e\}$ et $E_2 = \{b, d\}$

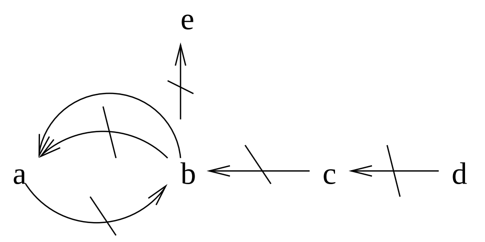

FIG. 6.11 – Représentation graphique de BAF_{12}.

sont les extensions stables de BAF_{12}. Seule E_2 est une p-extension stable. $E_3 = \{a, e\}$ est une p-extension préférée, c'est aussi une mp-extension préférée. $E_4 = \{d\}$ est une mp-extension préférée, c'est aussi l'extension de base et la p-extension de base.

6.2.2.2 Comparaison entre mp-inférences et inférences classiques

Nous considérons dans le tableau 6.4 qu'il existe une p-extension stable, mais pas de mp-extension stable.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,S}$	$7, \not\subseteq, \not\supseteq$	$8, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{.,G}$	$9, \not\subseteq, \not\supseteq$	$10, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.4 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable et avec p-extension stable.

Explication des liens entre les relations d'inférence classique et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une p-extension stable, mais pas de mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
3. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
4. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12 page suivante), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais dans aucune extension stable.

5. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,P}$. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
6. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,P}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions préférées.
7. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 8 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
8. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions stables.
9. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{14} (fig. 6.13 page suivante), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
10. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{14} (fig. 6.13 page suivante), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.

Exemple 28 Soit $BAF_{13} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e, u\}$, $R_{att} = \{(b, a), (c, a), (c, d), (d, b), (b, u), (u, c), (c, e), (e, e)\}$ et $R_{app} = \{(c, d), (b, u)\}$. BAF_{13} est représenté figure 6.12. Dans BAF_{13}, $E_1 = \{b, c\}$ est la seule extension stable (resp. p-extension stable). $E_2 =$

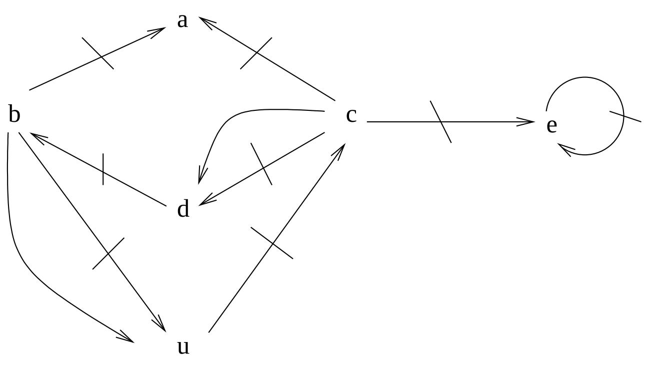

FIG. 6.12 – Représentation graphique de BAF_{13}.

$\{a, d, u\}$ est une extension préférée (resp. p-extension préférée), et la seule mp-extension préférée. $\varnothing$ est l'extension de base (resp. la p-extension de base).

Exemple 29 Soit $BAF_{14} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c\}$, $R_{att} = \{(b, a), (c, b)\}$ et $R_{app} = \{(a, b)\}$. BAF_{14} est représenté figure 6.13. Dans BAF_{14}, $E_1 = \{a, c\}$ est une extension stable (resp. p-extension stable, extension de base, p-extension de base). $E_2 = \{c\}$ est la seule mp-extension préférée.

Les tableaux 6.3 page 69 et 6.4 page ci-contre sont synthétisés figure 6.14 page suivante.

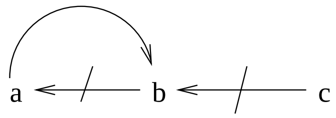

FIG. 6.13 – Représentation graphique de BAF_{14}.

$$\begin{tikzcd} \mid\!\sim^{.,G}=\mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\ & \mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

FIG. 6.14 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable et avec p-extension stable

6.2.3 Cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais où il y a une extension stable

6.2.3.1 Comparaison entre mp-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.5 qu'il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais qu'il y a une extension stable.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$=$	$1, \not\subseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$	$2, \subseteq$	$=$

TAB. 6.5 – Lien entre les relations de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et avec extension stable.

Explication des liens entre les relations de mp-inférence lorsqu'il n'y a ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais qu'il y a une extension stable :

1. Dans AF_6 (fig. 3.4 page 19), $\{a\}$ est inclus dans une mp-extension préférée, mais pas dans toutes.
2. Trivial.

6.2.3.2 Comparaison entre mp-inférences et inférences classiques

Nous considérons dans le tableau 6.6 page ci-contre qu'il existe une extension stable, mais ni p-extension stable, ni mp-extension stable.
Explication des liens entre les relations d'inférence classique et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une extension stable, mais ni mp-extension stable, ni p-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{.,G}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}\subseteq\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\exists,S}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,S}$	$7, \not\subseteq, \not\supseteq$	$8, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{\cdot,G}$	$9, \not\subseteq, \not\supseteq$	$10, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.6 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et avec extension stable.

3. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
4. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans AF_{22} (fig. 3.11 page 32), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais dans aucune extension stable.
5. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,P}$. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
6. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,P}$. Pour la seconde non-inclusion, dans AF_4 (fig. 3.2 page 18), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions préférées.
7. La première non-inclusion vient du point 9 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 8 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
8. La première non-inclusion vient du point 10 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans AF_{22} (fig. 3.11 page 32), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions stables.
9. Pour la première non-inclusion, dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 10 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
10. Pour la première non-inclusion, dans AF_2 (fig. 3.1 page 13), $\{a, d\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{22} (fig. 3.11 page 32), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.

Les tableaux 6.5 page précédente et 6.6 sont synthétisés figure 6.15.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim^{\cdot,G} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\
 & & \mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.15 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et avec extension stable

6.2.4 Cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable

6.2.4.1 Comparaison entre mp-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.7 qu'il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

	$\vdash\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\vdash\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\vdash\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$=$	$1, \not\subseteq$
$\vdash\!\sim^{\forall,P}_{mp}$	$2, \subseteq$	$=$

TAB. 6.7 – Lien entre les relations de mp-inférence sans mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

Explication des liens entre les relations de mp-inférence lorsqu'il n'y a ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable :

1. Dans AF_{23} (fig. 3.15 page 34), $\{a\}$ est inclus dans une mp-extension préférée, mais pas dans toutes.
2. Trivial.

6.2.4.2 Comparaison entre mp-inférences et inférences classiques

Nous considérons dans le tableau 6.8 qu'il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

	$\vdash\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\vdash\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\vdash\!\sim^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\vdash\!\sim^{\forall,P}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\vdash\!\sim^{\cdot,G}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.8 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

Explication des liens entre les relations d'inférence classique et les relations de mp-inférence lorsqu'il n'existe ni extension stable, ni p-extension stable, ni mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 5 et de II montrant $\vdash\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \vdash\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 6 et de II montrant $\vdash\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \vdash\!\sim^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 28 page 58 et de I montrant $\vdash\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \vdash\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
3. La première non-inclusion vient du point 5 et de II montrant $\vdash\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \vdash\!\sim^{\forall,P}$. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\vdash\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \vdash\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
4. La première non-inclusion vient du point 6 et de II montrant $\vdash\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \vdash\!\sim^{\forall,P}$. Pour la seconde non-inclusion, dans AF_{20} (fig. 3.16 page 36), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions préférées.

5. Pour la première non-inclusion, dans AF_{19} (fig. 3.14 page 34), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
6. Pour la première non-inclusion, dans AF_{19} (fig. 3.14 page 34), $\{a\}$ est inclus dans l'extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans AF_{20} (fig. 3.16 page 36), $\{n\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans l'extension de base.

Les tableaux 6.7 page précédente et 6.8 page ci-contre sont synthétisés figure 6.16.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim^{\cdot,G} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P} \\
& \mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \arrow[r] & \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.16 – Lien entre les relations d'inférence classique et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et sans p-extension stable

6.3 Comparaison des relations de mp-inférence avec les relations de p-inférence

Nous allons comparer les relations de mp-inférence avec les relations de p-inférence dans les mêmes 4 cas que ceux de la section 6.2 page 66 :

1. cas où il existe une mp-extension stable ;
2. cas où il n'existe pas de mp-extension stable, mais où il existe une p-extension stable ;
3. cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais où il existe une extension stable ;
4. cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

6.3.1 Cas où il existe une mp-extension stable

6.3.1.1 Comparaison entre p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.9 page suivante qu'il existe une mp-extension stable (donc une extension stable et une p-extension stable), sinon les relations d'inférence qui y ont liées se trivialisent. Dans ce cas, les liens entre les relations de p-inférence restent les mêmes que ceux du tableau 3.2 page 26 parce que, d'après le lemme 30 page 61, les mp-extensions stables sont des p-extensions stables et que la présence de mp-extension stable n'influence pas les p-extensions. Nous pouvons donc garder les mêmes preuves pour les inclusions si ce n'est que le point 12 vient du corollaire 12 page 62. Pour les non-inclusions, le lemme 28 page 60 nous permet de conserver les mêmes contre-exemples.

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$	$3, \not\subseteq$	$4, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$5, \subseteq$	$=$	$6, \not\subseteq$	$7, \not\subseteq$	$8, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$9, \subseteq$	$10, \subseteq$	$=$	$11, \subseteq$	$12, \subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$13, \subseteq$	$14, \subseteq$	$15, \not\subseteq$	$=$	$16, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$	$17, \subseteq$	$18, \subseteq$	$19, \not\subseteq$	$20, \subseteq$	$=$

TAB. 6.9 – Lien entre les relations de p-inférence avec mp-extension stable.

6.3.1.2 Comparaison entre mp-inférences et p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.10 qu'il existe une mp-extension stable (donc une p-extension stable et une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y sont liées se trivialisent.

	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$	$3, \not\subseteq, \supseteq$	$4, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \supseteq$	$7, \not\subseteq, \supseteq$	$8, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$9, \subseteq, \not\supseteq$	$10, \subseteq, \not\supseteq$	$11, \not\subseteq, \not\supseteq$	$12, \subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$13, \subseteq, \not\supseteq$	$14, \subseteq, \not\supseteq$	$15, \not\subseteq, \not\supseteq$	$16, \subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_p^{\cdot,G}$	$17, \subseteq, \not\supseteq$	$18, \subseteq, \not\supseteq$	$19, \not\subseteq, \not\supseteq$	$20, \subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.10 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence avec mp-extension stable.

D'après le lemme 14 page 20, on a l'équation III suivante :

$$\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P} \qquad \text{(III)}$$

Explication des liens entre les relations de p-inférence et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 5 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 6 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 6 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
3. La non-inclusion vient du point 11 et du tableau 6.9 montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 7 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
4. La non-inclusion vient du point 8 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient du point 8 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
5. Dans BAF_5 (fig. 6.2 page 58), $\{b\}$ est contenu dans une p-extension stable, mais dans aucune mp-extension préférée. Dans AF_{21} (fig. 3.9 page 30), $\{a\}$ est inclus dans une mp-extension préférée, mais dans aucune p-extension stable.
6. Dans BAF_5 (fig. 6.2 page 58), $\{b\}$ est contenu dans une p-extension stable, mais dans aucune mp-extension stable. Voir le lemme 30 page 61.

7. La non-inclusion vient du point 11 et du tableau 6.9 page ci-contre montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$. L'inclusion vient du point 8 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$.
8. Dans BAF_5 (fig. 6.2 page 58), $\{b\}$ est inclus dans une p-extension stable, mais dans aucune mp-extension stable. L'inclusion vient de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$ et du lemme 29 page 61.
9. L'inclusion vient du point 13 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
10. L'inclusion vient du point 14 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$.
11. Pour la première non-inclusion, dans BAF_9 (fig. 6.7 page 65), $\{c\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais pas dans toutes les mp-extensions préférées. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11} (fig. 6.9 page 69), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.
12. L'inclusion vient du point 16 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. Pour la non-inclusion vient du point 11 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$.
13. L'inclusion vient du point 16 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
14. L'inclusion vient du point 16 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
15. La non-inclusion vient du point 11 et du tableau 6.9 page précédente montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11} (fig. 6.9 page 69), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les extensions stables.
16. Le lemme 30 page 61 indique que $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 15 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$.
17. L'inclusion vient du point 13. et du tableau 6.9 page ci-contre montrant $\mid\!\sim_p^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
18. L'inclusion vient du point 14 et du tableau 6.9 page précédente montrant $\mid\!\sim_p^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,S}$.
19. La première non-inclusion vient du point 11 et du tableau 6.9 page ci-contre montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\cdot,G}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{11}, $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base.
20. L'inclusion vient du point 16 et de II montrant $\mid\!\sim^{\cdot,G} \subseteq \mid\!\sim^{\forall,S}$. La non-inclusion vient du point 19 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S}$.

Les tableaux 6.9 page précédente et 6.10 page ci-contre sont synthétisés figure 6.17 page suivante

6.3.2 Cas où il n'existe pas de mp-extension stable, mais où il y a une p-extension stable

6.3.2.1 Comparaison entre p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.11 page suivante qu'il existe une p-extension stable (donc une extension stable), sinon les relations d'inférence qui y ont liées se trivialisent. Dans ce cas,

$$
\begin{tikzcd}
\mid\!\sim_p^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{;,G} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\forall,S} \arrow[r] \arrow[d] & \mid\!\sim_p^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\exists,P} \\
 & \mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim_{mp}^{\forall,S} \arrow[r] & \mid\!\sim_{mp}^{\exists,S} \arrow[r] \arrow[u] & \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

FIG. 6.17 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence lorsqu'il existe une mp-extension stable

les liens entre les relations de p-inférence restent les mêmes que ceux du tableau 3.2 page 26 parce que l'absence de mp-extension stable n'influence pas les p-extensions dès lors qu'on sait qu'il existe au moins une p-extension stable. Nous pouvons donc garder les mêmes types de preuve que nous adaptons[3] (ne seront données que les explications pour les preuves adaptées).

	$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$\mid\!\sim_p^{;,G}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$=$	$1, \not\subseteq$	$2, \not\subseteq$	$3, \not\subseteq$	$4, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\exists,S}$	$5, \subseteq$	$=$	$6, \not\subseteq$	$7, \not\subseteq$	$8, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$9, \subseteq$	$10, \subseteq$	$=$	$11, \subseteq$	$12, \subseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,S}$	$13, \subseteq$	$14, \subseteq$	$15, \not\subseteq$	$=$	$16, \not\subseteq$
$\mid\!\sim_p^{;,G}$	$17, \subseteq$	$18, \subseteq$	$19, \not\subseteq$	$20, \subseteq$	$=$

TAB. 6.11 – Lien entre les relations de p-inférence sans mp-extension stable, avec p-extension stable.

Explication des liens entre les relations de p-inférence lorsqu'il y a une p-extension stable (donc une extension stable), mais pas de mp-extension stable :

1. Dans BAF_{13} (fig. 6.12 page 71), $\{d\}$ est contenu dans une p-extension préférée, mais dans aucune p-extension stable.
2. Vient du point 19 et du tableau 3.2 page 26 montrant $\mid\!\sim_p^{;,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
3. Vient du point 7 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\exists,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
4. Vient du point 16 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$.
6. Vient du point 19 et du tableau 3.2 page 26 montrant $\mid\!\sim_p^{;,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$.
7. Dans BAF_{15} (fig. 6.18 page ci-contre), $\{c\}$ est inclus dans une p-extension stable, mais pas dans toutes.
8. Vient du point 16 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,S} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,S}$.
15. Vient du point 19 et du tableau 3.2 page 26 montrant $\mid\!\sim_p^{;,G} \subseteq \mid\!\sim_p^{\forall,S}$.
16. Dans BAF_{16} (fig. 6.19 page ci-contre), $\{c\}$ est inclus dans toutes les p-extensions stables, mais n'est pas inclus dans la p-extension de base.

[3]Dans les preuves du tableau 3.2 page 26, certains exemples choisis possédaient une p-extension stable, mais aussi une mp-extension stable.

19. Dans BAF_{12} (fig. 6.11 page 70), $\{d\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.

Exemple 30 Soit $BAF_{15} = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d\}$, $R_{att} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d)\}$ et $R_{app} = \{(a, b), (b, a)\}$. BAF_{15} est représenté figure 6.18. $E_1 = \{a, c\}$ et $E_2 = \{b, d\}$

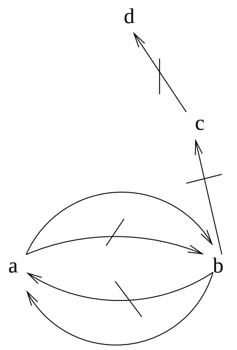

FIG. 6.18 – Représentation graphique de BAF_{15}.

sont les extensions stables (resp. p-extensions stables) de BAF_{11}. Il n'y a pas de mp-extension stable.

Exemple 31 Soit $BAF_{16} = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d\}$, $R_{att} = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, d), (d, d)\}$ et $R_{app} = \{(a, b)\}$. BAF_{16} est représenté figure 6.19. $E_1 = \{a, c\}$ est une extension

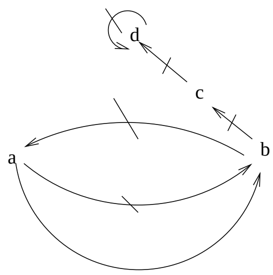

FIG. 6.19 – Représentation graphique de BAF_{16}.

stable (resp. p-extension stable) de BAF_{16}. $E_2 = \{b\}$ est une extension préférée (resp. p-extension préférée, mp-extension préférée) de BAF_{11}.

6.3.2.2 Comparaison entre mp-inférences et p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.12 page suivante qu'il existe une p-extension stable, mais pas de mp-extension stable.
Explication des liens entre les relations de p-inférence et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une p-extension stable, mais pas de mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 5 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58.

	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P}$
$\mid\!\sim_{p}^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim_{p}^{\exists,S}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_{p}^{\forall,P}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_{p}^{\forall,S}$	$7, \not\subseteq, \not\supseteq$	$8, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_{p}^{;,G}$	$9, \not\subseteq, \not\supseteq$	$10, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.12 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence sans mp-extension stable et avec p-extension stable.

2. La non-inclusion vient du point 6 et de III montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
3. La première non-inclusion vient du point 5 et de III montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{\exists,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
4. La première non-inclusion vient du point 6 et de III montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{\exists,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12 page 71), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais dans aucune p-extension stable.
5. Pour la première non inclusion, dans BAF_{14} (fig. 6.13 page 72), $\{a\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
6. Pour la première non inclusion, dans BAF_{14} (fig. 6.13 page 72), $\{a\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{16} (fig. 6.19 page précédente), $\{b\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.
7. La première non-inclusion vient du point 5 et de III montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{\forall,S}$. La seconde non-inclusion vient du point 8 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
8. La première non-inclusion vient du point 6 et de III montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{\forall,S}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12 page 71), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions stables.
9. La première non-inclusion vient du point 5 et du tableau 6.11 page 78 montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{;,G}$. La seconde non-inclusion vient du point 10 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
10. La première non-inclusion vient du point 6 et du tableau 6.11 page 78 montrant $\mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{p}^{;,G}$. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{13} (fig. 6.12 page 71), $\{a\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base.

Les tableaux 6.11 page 78 et 6.12 sont synthétisés figure 6.20 page suivante.

6.3.3 Cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, mais où il y a une extension stable

6.3.3.1 Comparaison entre p-inférences

Quand il n'y a pas de p-extension stable, il ne peut pas y avoir de mp-extension stable (cf. lemme 30 page 61). On peut donc réutiliser le tableau 3.4 page 30 et toutes les preuves correspondantes.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim_p^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{;,G} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\forall,S} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\exists,S} \arrow[r] & \mid\!\sim_p^{\exists,P} \\
 & & \mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.20 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence lorsqu'il n'existe pas de mp-extension stable, mais une p-extension stable

6.3.3.2 Comparaison entre mp-inférences et p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.13 qu'il existe une extension stable, mais ni p-extension stable, ni mp-extension stable.

	$\mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$	$\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P}$
$\mid\!\sim_p^{\exists,P}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim_p^{\forall,P}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim_p^{;,G}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.13 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et avec une extension stable.

Explication des liens entre les relations de p-inférence et les relations de mp-inférence lorsqu'il existe une extension stable, mais ni mp-extension stable, ni p-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 3 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58.
2. La non-inclusion vient du point 4 et de III montrant $\mid\!\sim_p^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_p^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
3. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante) $\{i\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
4. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante) $\{i\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.
5. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante) $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \subseteq \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P}$.
6. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante) $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.21 page suivante), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas la p-extension de base.

Exemple 32 Soit $BAF_{17} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e, v, u, i, n\}$, $R_{att} = \{(v, u),$ $(u, i),$ $(i, n), (n, n), (n, a), (a, e), (e, e), (b, a), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\}$ et $R_{app} = \{(i, u), (b, d)\}$.

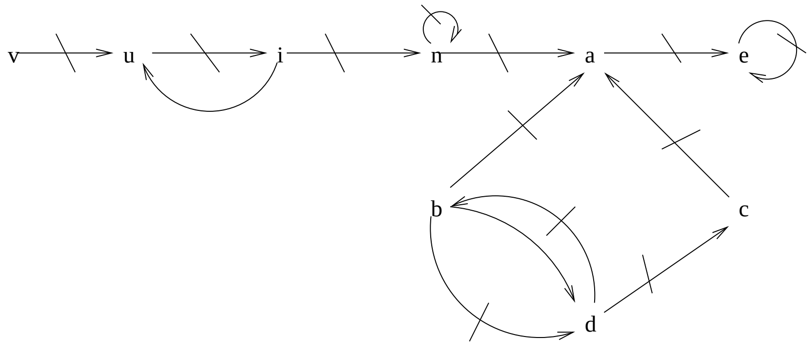

FIG. 6.21 – Représentation graphique de BAF_{17}

BAF_{17} est représenté figure 6.21. $E_1 = \{i, v, a, d\}$ est la seule extension stable. $E_2 = \{i, v, b, c\}$ est une extension préférée et une p-extension préférée. $E_3 = \{v, i, d\}$ est une p-extension préférée. $E_4 = \{v, d\}$ est une mp-extension préférée. $E_5 = \{v, i\}$ est l'extension de base et la p-extension de base.

Les tableaux 3.4 page 30 et 6.13 page précédente sont synthétisés figure 6.22.

$$\begin{tikzcd}
\mathrel{|\!\sim}_{p}^{\cdot,G} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}_{p}^{\exists,P} & \mathrel{|\!\sim}_{p}^{\forall,P} \arrow[l] \\
\mathrel{|\!\sim}_{mp}^{\forall,P} \arrow[r] & \mathrel{|\!\sim}_{mp}^{\exists,P} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.22 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et avec extension stable

6.3.4 Cas où il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable

6.3.4.1 Comparaison entre p-inférences

Quand il n'y a pas d'extension stable, il ne peut y avoir de p-extension stable, ni de mp-extension stable (cf. lemmes 13 page 20 et 30 page 61). On peut donc réutiliser le tableau 3.6 page 33 et toutes les preuves correspondantes.

6.3.4.2 Comparaison entre mp-inférences et p-inférences

Nous considérons dans le tableau 6.14 page suivante qu'il n'existe ni mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.
Explication des liens entre les relations de p-inférence et les relations de mp-inférence lorsqu'il n'existe ni extension stable, ni p-extension stable, ni mp-extension stable.

1. La non-inclusion vient du point 3 et de III montrant $\mathrel{|\!\sim}_{p}^{\forall,P} \subseteq \mathrel{|\!\sim}_{p}^{\exists,P}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58.

	$\mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$	$\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp}$
$\mid\!\sim^{\exists,P}_{p}$	$1, \not\subseteq, \supseteq$	$2, \not\subseteq, \supseteq$
$\mid\!\sim^{\forall,P}_{p}$	$3, \not\subseteq, \not\supseteq$	$4, \not\subseteq, \not\supseteq$
$\mid\!\sim^{.,G}_{p}$	$5, \not\subseteq, \not\supseteq$	$6, \not\subseteq, \not\supseteq$

TAB. 6.14 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence sans mp-extension stable, ni p-extension stable, ni extension stable.

2. La non-inclusion vient du point 4 et de III montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{p} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{p}$. L'inclusion vient de la proposition 29 page 58 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
3. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23) $\{i\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 4 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
4. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23) $\{i\}$ est inclus dans toutes les p-extensions préférées, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans toutes les p-extensions préférées.
5. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23) $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. La seconde non-inclusion vient du point 6 et de I montrant $\mid\!\sim^{\forall,P}_{mp} \subseteq \mid\!\sim^{\exists,P}_{mp}$.
6. Pour la première non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23) $\{i\}$ est inclus dans la p-extension de base, mais dans aucune mp-extension préférée. Pour la seconde non-inclusion, dans BAF_{17} (fig. 6.23), $\{d\}$ est inclus dans toutes les mp-extensions préférées, mais pas dans la p-extension de base.

Exemple 33 Soit $BAF_{18} = \langle A, R_{att}, R_{app} \rangle$ tel que $A = \{a, b, c, d, e, v, u, i, n\}$, $R_{att} = \{(v, u), (u, i), (i, n), (n, n), (n, a), (e, e), (b, a), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\}$ et $R_{app} = \{(i, u), (b, d)\}$. BAF_{18} est représenté figure 6.23. $E_1 = \{i, v, a, d\}$ est une extension préférée. $E_2 = \{i, v, b, c\}$ est une

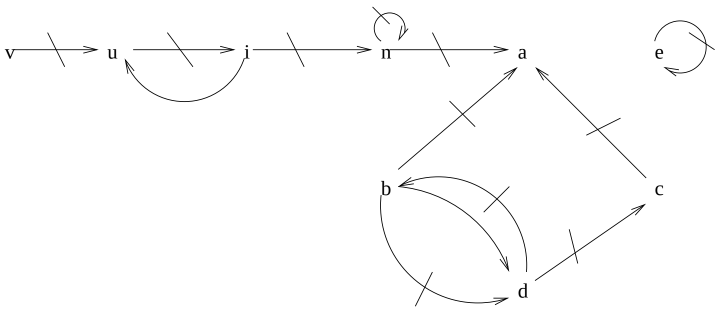

FIG. 6.23 – Représentation graphique de BAF_{18}

extension préférée et une p-extension préférée. $E_3 = \{v, i, d\}$ est une p-extension préférée. $E_4 = \{v, d\}$ est une mp-extension préférée. $E_5 = \{v, i\}$ est l'extension de base et la p-extension de base.

Les tableaux 3.6 page 33 et 6.14 sont synthétisés figure 6.24 page suivante.

$$\begin{tikzcd}
\mid\!\sim_{p}^{\cdot,G} \arrow[r] & \mid\!\sim_{p}^{\exists,P} & \mid\!\sim_{p}^{\forall,P} \arrow[l] \\
\mid\!\sim_{mp}^{\forall,P} \arrow[r] & \mid\!\sim_{mp}^{\exists,P} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

FIG. 6.24 – Lien entre les relations de p-inférence et de mp-inférence sans mp-extension stable, sans p-extension stable et sans extension stable

6.4 Récapitulatif des liens entre les différentes relations d'inférence

La figure 6.25 page suivante synthétise les liens d'inclusion entre les différentes relations d'inférence (inférence classique, p-inférence, mp-inférence).
Nous remarquons que les liens entre les différentes relations de mp-inférence sont de même nature que les liens entre les différentes relations de p-inférence ou ceux entre les différentes relations d'inférence classique. Ceci s'explique par le fait que toutes les extensions (resp. p-extensions, mp-extensions) sont des ensembles sans conflit (resp. sans ci-conflit, sans ci-conflit complexe) qui sont liés par la manière dont ils interagissent avec l'extérieur et que nous n'avons pas modifié ces interactions vers l'extérieur (nous n'avons modifié que les notions de cohérence interne).
Nous pouvons noter que les liens entre les relations de mp-inférence et les relations d'inférence classique sont de même nature que les liens entre les relations de mp-inférence et les relations de p-inférence. Ces liens sont par ailleurs similaires à ceux qui unissent les relations de p-inférence aux relations d'inférence classique.

6.5 Complexité

Nous proposons des résultats de classe d'appartenance (complexité en temps dans le pire des cas) pour les différents problèmes liés aux mp-extensions.

Proposition 35 *Soit $BAF = \langle A, R_{att}, R_{app}\rangle$ un système d'argumentation bipolaire fini et $S \subseteq A$. Les résultats de complexité du tableau 6.15 page ci-contre sont vérifiés.*

Démonstration : Premièrement il est facile de voir que :
- DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST SANS CI-CONFLIT COMPLEXE,
- DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST MP-ADMISSIBLE,
- et DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS EST UNE MP-EXTENSION STABLE

sont dans P.
Une des conséquences est que DÉCIDER SI UN SYSTÈME D'ARGUMENTATION POSSÈDE UNE MP-EXTENSION STABLE est dans NP (il suffit de deviner un ensemble $S' \subseteq A$ et de vérifier en temps polynomial que S' est une mp-extension stable).
Une autre conséquence est que DÉCIDER SI S APPARTIENT À UNE MP-EXTENSION STABLE est dans NP (il suffit de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' est une mp-extension stable et de vérifier que S est inclus dans S').

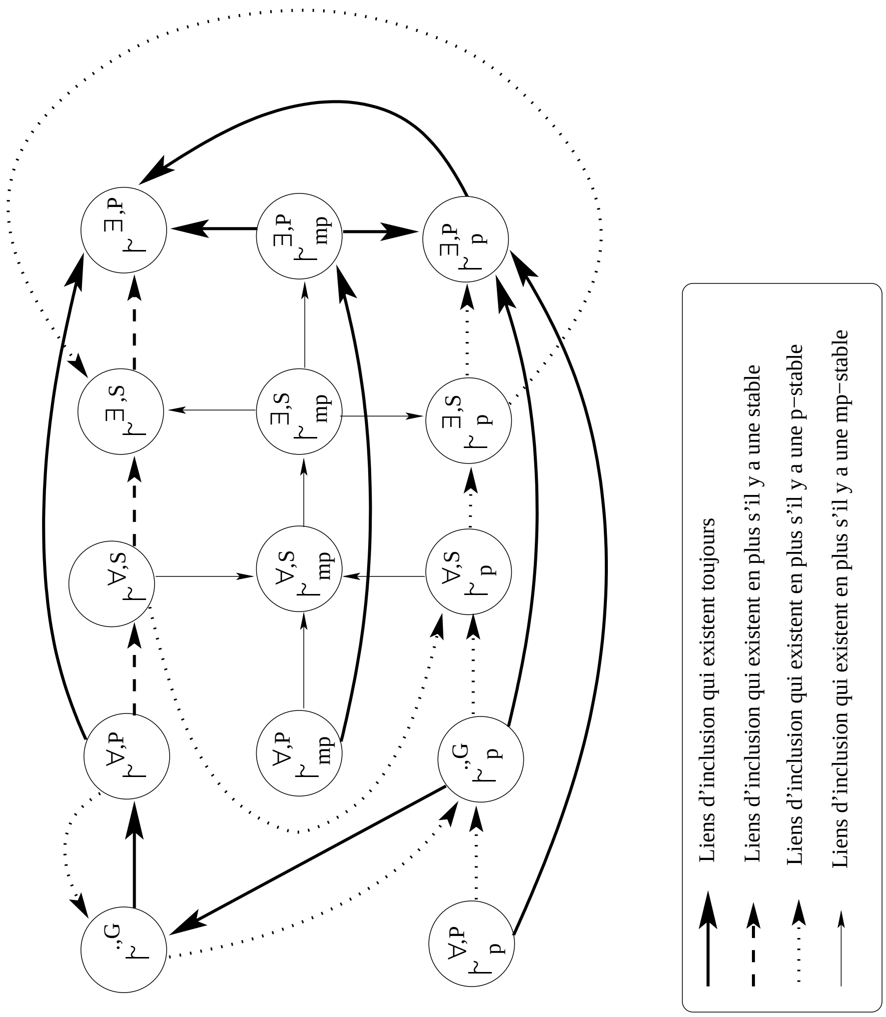

FIG. 6.25 – Liens entre les différentes relations d'inférence.

Question	Complexité
S est-il sans ci-conflit complexe ?	dans P
S est-il mp-admissible ?	dans P
S est-il une mp-extension stable ?	dans P
S est-il une mp-extension préférée ?	dans coNP
AF a-t-il une mp-extension stable ?	dans NP
AF est-il mp-trivial ?	dans coNP
S est-il inclus dans une mp-extension préférée ?	dans NP
S est-il inclus dans une mp-extension stable ?	dans NP
S est-il inclus dans toutes les mp-extensions stables ?	dans coNP
S est-il inclus dans toutes les mp-extensions préférées ?	dans Π_2^P
AF est-il mp-cohérent ?	dans Π_2^P

TAB. 6.15 – Résultats de complexité lors de la prise en compte des ci-conflits complexes.

Une troisième conséquence est que DÉCIDER SI UN ENSEMBLE D'ARGUMENTS S APPARTIENT À TOUTES LES MP-EXTENSIONS STABLES est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire, donc de deviner un ensemble $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' est une mp-extension stable et de vérifier en temps polynomial que $S \not\subseteq S'$).
Une quatrième conséquence est que DÉCIDER SI S EST UNE MP-EXTENSION PRÉFÉRÉE est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire et donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial que S' et S sont des ensembles mp-admissibles et de vérifier que $S \subset S'$).
La proposition 26 page 57, nous permet tirer deux autres conséquences des résultats précédents.

- D'abord, DÉCIDER SI UN AF EST MP-TRIVIAL est dans coNP (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire, donc de deviner un ensemble $S' \subseteq A$ et de vérifier en temps polynomial qu'il est mp-admissible).
- Ensuite, DÉCIDER SI S EST INCLUS DANS UNE MP-EXTENSION PRÉFÉRÉE est dans NP (il suffit de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier en temps polynomial si S' est un ensemble mp-admissible et de vérifier que $S \subseteq S'$).

Les résultats précédents permettent de dire que :

- DÉCIDER SI S EST INCLUS DANS TOUTES LES MP-EXTENSIONS PRÉFÉRÉES est dans Π_2^p (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier à l'aide d'un oracle NP que S' est une mp-extension préferée et de vérifier que $S \not\subseteq S'$) ;
- DÉCIDER SI UN AF EST MP-COHÉRENT est dans Π_2^p (il suffit de s'intéresser au problème complémentaire donc de deviner $S' \subseteq A$, de vérifier à l'aide d'un oracle NP que S' est une mp-extension préférée et de vérifier en temps polynomial que S' n'est pas une mp-extension stable).

■

Nous pouvons noter que gérer les ci-conflits complexes ne fait pas augmenter la complexité par rapport aux problèmes de décision liés à l'inférence classique ou à la p-inférence.

Chapitre 7

Conclusion

Dans ce rapport, nous sommes parties des faits suivants :
- les arguments controversés constituent un problème dans un système d'argumentation ; pour résoudre ce problème, des solutions existent, l'une d'entre elles correspondant à l'utilisation des p-sémantiques définies par [CMDM05b, CMDM06b] pour des systèmes d'argumentation construits sur le modèle de Dung, c'est-à-dire utilisant un seul type d'interaction : l'attaque ;
- l'utilisation d'un second type d'interaction entre arguments correspondant à un appui entre arguments est un moyen d'enrichir la représentation d'un système d'argumentation et permet la définition de nouvelles sémantiques (voir [CLS04, CLS05a, CLS05b, MCLS05]) ; par contre, de tels systèmes dits bipolaires ne traitent pas le problème des arguments controversés.

Partant de là, le but de ce rapport est de proposer de nouvelles sémantiques, appelées les mp-sémantiques, pour un système d'argumentation bipolaire traitant le cas des arguments controversés. Puis nous avons étudié les propriétés de ces mp-sémantiques et les relations d'inférence que l'on peut construire en les utilisant.

Ces mp-sémantiques présentent les propriétés suivantes :
- on retrouve les variantes "mp" des sémantiques préférées et stables, mais pas celle de la sémantique de base (c'est une des grandes différences avec les sémantiques de Dung, ou les p-sémantiques) ;
- la plupart des propriétés concernant ces mp-sémantiques sont des "clones" des propriétés trouvées pour les sémantiques de Dung ou pour les p-sémantiques ;
- le principal lien entre les mp-sémantiques et les p-sémantiques ou les sémantiques de Dung est le suivant : les extensions mp-stables sont des extensions p-stables, stables, complètes et contiennent l'extension de base ;
- de plus, une mp-extension préférée est nécessairement incluse dans une extension préférée et dans une p-extension préférée.

En ce qui concerne les relations d'inférence que l'on peut construire à partir des mp-sémantiques, nous constatons que :
- Tout d'abord les liens entre les relations de mp-inférence sont similaires aux liens entre les relations d'inférence classique.
- La présence de mp-extension stable a la même influence sur les liens entre relations d'inférence classique et relations de mp-inférence que la présence de p-extension stable en avait

sur les liens entre relations d'inférence classique et relations de p-inférence. Ces liens se retrouvent aussi entre relations de p-inférence et relations de mp-inférence en cas de présence de mp-extension stable. De même, la présence de mp-extension stable ne change pas les liens entre les relations d'inférence classique et les relations de p-inférence
- Les liens entre les relations de mp-inférence et les relations d'inférence classique sont de même nature que les liens entre les relations de mp-inférence et les relations de p-inférence. Ces liens sont par ailleurs similaires à ceux qui unissent les relations d'inférence classique aux relations de p-inférence.
- Dans le cadre général, l'inférence sceptique pour la sémantique mp-préférée n'est comparable ni avec l'inférence pour la sémantique de base, ni avec l'inférence pour la sémantique basée sur la p-extension de base, ni avec l'inférence sceptique pour la sémantique préférée, ni avec l'inférence sceptique pour la sémantique p-préférée.
- En ce qui concerne l'inférence crédule des mp-extensions, elle est plus prudente que celle qui concerne l'inférence crédule classique et la p-inférence crédule.

En dehors des aspects purement pratiques (calcul de complexité et développement d'algorithmes efficaces), les perspectives de ce travail restent nombreuses :
- Il serait intéressant de comparer les mp-sémantiques avec les sémantiques définies initialement pour le cadre bipolaire (il y en a beaucoup et toutes n'utilisent pas la même notion de sans-conflit que les mp-sémantiques).
- L'utilisation des mp-sémantiques dans un cadre stratégique serait sans doute un plus : dans le cas d'un dialogue entre plusieurs agents, comment aider l'utilisateur à trouver l'argument le plus "efficace" à présenter, celui qui lui permettra d'atteindre son objectif le plus rapidement possible, sans risquer d'être contredit, ni d'aboutir à une impasse ; cet aspect rejoint les nombreux travaux sur la notion de preuve en argumentation dans le cas des systèmes d'argumentation n'utilisant que les attaques (voir par exemple [Dou02, DBC03]).
- Et enfin, comment exploiter ces notions afin de créer des coalitions d'agents représentant les séquences d'appui ? Cela nous amènerait à définir une sorte de méta-système d'argumentation dans lequel ne resteraient plus que des attaques.

Bibliographie

[AC98] Amgound (L.) et Cayrol (C.). – On the acceptability of arguments in preference-based argumentation. *In : UAI '98 : Proceedings of the Fourteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 1–7.

[ACLS04] Amgoud (L.), Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (MC.). – On the bipolarity in argumentation frameworks. *In : 10th NMR workshop (Non-Monotonic Reasoning), Uncertainty Frameworks subworkshop, Whistler, BC, Canada*, pp. 1–10.

[Amg99] Amgoud (L.). – *Contribution à l'intégration des préférences dans le raisonnement argumentatif.* – Thèse de PhD, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1999.

[BDKT97] Bondarenko (A.), Dung (P.M.), Kowalski (R.A.) et Toni (F.). – An abstract, argumentation-theoretic approach to default reasoning. *Artificial Intelligence*, vol. 93, 1997, pp. 63–101.

[BG03] Baroni (P.) et Giacomin (M.). – Solving semantic problems with odd-length cycles in argumentation. *In : Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty,7th European Conference, ECSQARU 2003*, pp. 440–451. – Aalborg, Denmark, July 2-5 2003.

[BG04] Baroni (P.) et Giacomin (M.). – A recursive approach to argumentation : motivation and perspectives. *In : Tenth International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR 2004).* – a paraitre.

[BH01] Besnard (P.) et Hunter (A.). – A logic-based theory of deductive arguments. *Artificial Intelligence*, vol. 128, 2001, pp. 203–235.

[CDM03] Cayrol (C.), Doutre (S.) et Mengin (J.). – On decision problems related to the preferred semantics for argumentation frameworks. *Journal of Logic Computation*, vol. 13, n3, June 2003, pp. 377–403.

[CLS01] Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C). – *Evaluation graduelle d'arguments.* – Rapport de recherche n 2001-18-R, Université Paul Sabatier, Toulouse, IRIT, novembre 2001. (révision numéro 1 de mars 2002).

[CLS02] Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C.). – Gradual handling of contradiction in argumentation frameworks. *In : Proc. of the Ninth International Conference, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems(IPMU 2002) , Annecy-France.* pp. 83–90. – ESIA-Université de Savoie. BB.

[CLS04] Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C.). – *Bipolarité en argumentation.* – Rapport de recherche n2004-07-R, Université Paul Sabatier, Toulouse, IRIT, février 2004.

[CLS05a] Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C.). – Gradual valuation for bipolar argumentation framework. *In : Eighth European Conference on Symbolic and Quantitative Approache to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2005)*, pp. 366–377. – Barcelona - Spain, 6–8 july 2005.

[CLS05b] Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C.). – On the acceptability of arguments in bipolar argumentation framework. *In : Eighth European Conference on Symbolic and Quantitative Approache to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2005)*, pp. 378–389. – Barcelona - Spain, 6–8 july 2005.

[CLS05c] Cayrol (Claudette) et Lagasquie-Schiex (Marie-Christine). – Graduality in argumentation. *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 23, 2005, pp. 245–297.

[CMDM05a] Coste-Marquis (S.), Devred (C.) et Marquis (P.). – Inference from contreversial arguments. *In : The 12th International Conference on Logic for Programming Artificial Intelligence and Reasoning (LPAR 2005).*

[CMDM05b] Coste-Marquis (S.), Devred (C.) et Marquis (P.). – Prudent semantics for argumentation frameworks. *In : The 17th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI 2005).*

[CMDM05c] Coste-Marquis (S.), Devred (C.) et Marquis (P.). – Symmetric argumentation frameworks. *In : Eighth European Conference on Symbolic and Quantitative Approache to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2005)*, pp. 317–328. – Barcelona - Spain, 6–8 july 2005.

[CMDM06a] Coste-Marquis (S.), Devred (C.) et Marquis (P.). – *Handling controversial arguuments.* – Rapport technique, CRIL-CNRS FREE 2499, 2006. Rapport interne 2006004.

[CMDM06b] Coste-Marquis (S.), Devred (C.) et Marquis (P.). – Sémantiques prudentes pour les systèmes d'argumentation. *In : 15e congrès francophone AFRIF-AFIA Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA 2006).*

[DBC01] Dunne (P.) et Bench-Capon (T.). – Complexity and combinatorial properties of argument systems, 2001.

[DBC02] Dunne (P.E.) et Bench-Capon (T.J.M.). – Coherence in finite argument systems. *Artificial Intelligence*, vol. 141, 2002, pp. 187–203.

[DBC03] Dunne (P.E.) et Bench-Capon (T.J.M.). – Two party immediate response disputes : Properties and efficiency. *Artificial Intelligence*, vol. 149(2), 2003, pp. 221–250.

[DNT99] Dimopoulos (Y.), Nebel (B.) et Toni (F.). – Preferred arguments are harder to compute than stable extension. *In : IJCAI 1999*, pp. 36–43.

[Dou02] Doutre (S.). – *Autour de la sémantique préférée des système d'argumentation.* – Thèse de PhD, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2002.

[DT96] Dimopoulos (Y.) et Torres (A.). – Graph theoretical structures in logic programs and default theories. *Theoretical Computer Science*, vol. 170, 1996, pp. 209–244.

[Dun95] Dung (P.M.). – On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, vol. 77, n2, 1995, pp. 321–358.

[EGFK93] Elvang-Gøransson (M.), Fox (J.) et Krause (P.). – Dialectic reasoning with inconsistent information. *In : the 9th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 114–121.

[JV99] Jakobovits (H.) et Vermeir (D.). – Robust semantics for argumentation frameworks. *Journal of Logic and Computation*, vol. 9, n2, 1999, pp. 215–261.

[KAEGF95] Krause (P.), Ambler (S.), Elvang-Gøransson (M.) et Fox (J.). – A logic of argumentation for reasoning under uncertainty, 1995.

[KP01] Karacapilidis (Nikos) et Papadias (Dimitris). – Computer supported argumentation and collaborative decision making : the HERMES system. *Information systems*, vol. 26, n4, 2001, pp. 259–277.

[MCLS05] Mardi (M.), Cayrol (C.) et Lagasquie-Schiex (M-C.). – *Bipolarité en argumentation : acceptabilité et algorithmes.* – Rapport interne IRIT n2005-20-R, IRIT-UPS, octobre 2005.

[Pap94] Papadimitriou (C.H.). – *Computational complexity.* – Addison Wesley, 1994.

[Par97] Parsons (S.). – Normative argumentation and qualitative probability. *In : Qualitative and Quantitative Practical Reasoning, First International Joint Conference on Qualitative and Quantitative Practical Reasoning ECSQARU-FAPR'97*, pp. 466–480.

[PS97] Prakken (Henry) et Sartor (Giovanni). – Argument-based extended logic programming with defeasible priorities. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, vol. 7, 1997, pp. 25–75.

[Ver02] Verheij (B.). – On the existence and the multiplicity of extensions in dialectical argumentation. *In : Proceedings of the 9th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'2002)*, pp. 416–425. – Toulouse, 2002.

[Ver03] Verheij (Bart). – Deflog : on the logical interpretation of prima facie justified assumptions. *Journal of Logic in Computation*, vol. 13, 2003, pp. 319–346.