Une approche méthodologique de la résolution de conflits
A methodological approach for conflict resolution

Claudette Cayrol MC Lagasquie-Schiex Jérôme Mengin

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse,
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France

{ccayrol, lagasq, mengin}@irit.fr

Résumé

Nous nous intéressons à la restauration de cohérence d'une base de croyances inconsistante, que nous abordons par la résolution de conflits guidée par des préférences entre les croyances.
L'approche méthodologique que nous suivons consiste à définir des principes, puis des solutions du problème de résolution de conflits respectant ces principes.
Nous proposons ensuite une étude algorithmique de l'une des solutions ainsi définies, puis, une comparaison avec les solutions obtenues lorsqu'on restaure la cohérence en sélectionnant directement des sous-ensembles cohérents.

Mots Clef

Formalisation des raisonnements, gestion des connaissances.

Abstract

We are interested in restoring the consistency of an inconsistent set of beliefs. In this paper, we study how this problem can be solved by resolving conflicts between the beliefs, guided by some preferences. Our methodological approach consists of two steps : we first specify some principles that are in accordance with the intuition behind the notions of conflict resolution and preference ; we then give formal definitions of solutions that obey these principles. We also study algorithmic aspects of our solutions and their relationship to solutions obtained by directly selecting consistent sets of beliefs.

Keywords

Formalization of reasonings, management of knowledge.

1 Introduction

Le problème de la restauration de la cohérence d'une base de croyances inconsistante guidée par des relations de préférence entre les croyances est au cœur de nombreuses problématiques en Intelligence Artificielle (raisonnement non monotone, révision, ...).
Dans ce cadre, il existe deux approches duales :

- Soit on sélectionne directement à partir de la base initiale des sous-ensembles consistants de cette base[1].
- Soit on identifie d'abord les conflits existant dans la base initiale puis on cherche à les résoudre en abandonnant des croyances, ce qui nous ramènera, là-encore, à des sous-ensembles consistants de la base initiale.

Dans le cas où il n'existe pas de préférence entre les croyances, ces deux méthodes conduisent aux mêmes résultats[2].
La prise en compte de préférences permet de distinguer les deux approches du point de vue sémantique :

- Dans le cas d'une restauration de cohérence par sélection directe de sous-ensembles consistants, on attribue aux préférences une sémantique que l'on peut qualifier de *globale* (comment se situe une formule donnée par rapport aux autres formules de la base ?).
- Alors que, dans le cas d'une résolution de conflits, on exploite les préférences sous l'angle d'une sémantique dite *locale* (comment se situent les formules d'un conflit donné les unes par rapport aux autres ?).

L'approche locale est essentielle dans le cas où l'on dispose de plusieurs relations de préférence qui peuvent

1. Ce que l'on peut faire sans calculer nécessairement tous les conflits.
2. Remarquons que, si on dispose de la base sous la forme d'un ensemble de formules, alors la première méthode sera plus rapide à utiliser que la seconde (en effet, on peut éviter le calcul des conflits). À l'inverse, si la base nous est donnée sous la forme d'un ensemble de conflits, il sera probablement plus judicieux d'appliquer la deuxième méthode.

être incompatibles (par exemple, la croyance a sera préférée à la croyance b dans un conflit c_1 alors que dans le conflit c_2 ce sera l'inverse !). Il s'agit donc d'une approche plus générale que l'approche globale. Notons d'autre part que des préférences locales permettent aussi d'exprimer plus facilement des préférences dépendant d'un contexte ou des préférences conditionnelles (voir [4, 16, 2, 9]).
Nous allons donc aborder le problème de résolution des conflits dans une base inconsistante équipée d'une relation de préférence, mais sous un angle un peu particulier. En effet, il existe de très nombreux travaux sur ce sujet, mais la plupart du temps, il s'agit de contributions très "expérimentales" et très liées aux applications. Or, nous souhaiterions définir ce problème et ses solutions de manière plus systématique en définissant des principes à respecter et des solutions respectant ces principes.
Ce qui nous amène, dans la section 2, à présenter une approche méthodologique de ce problème et de ses solutions. En section 3, nous évoquerons l'aspect algorithmique du calcul des solutions proposées. Puis, en section 4, nous préciserons les liens existant entre les solutions du problème de résolution de conflits que nous proposons en section 2 et certaines solutions du problème de restauration de cohérence (par sélection directe de sous-ensembles consistants). Et enfin, en section 5, nous conclurons.

2 L'approche méthodologique

2.1 Les définitions et principe de base

Soit L un langage logique quelconque. Soient E un ensemble de formules de L représentant des croyances, et K un ensemble consistant de formules de L représentant des connaissances incontestables. L'union $E \cup K$ pourra être inconsistante et E sera appelé une base de croyances.
Le problème de la restauration de cohérence peut être décrit comme étant le suivant :

> *Restaurer la K-consistance* consiste à trouver un sous-ensemble K-consistant[3] de E. En général, on privilégie les solutions maximales pour l'inclusion (voir [3, 7, 8, 1, 12]).

Quant au problème de la résolution de conflits, il peut être décrit de la manière suivante :

> E est supposée K-inconsistante et elle est donnée sous la forme d'un ensemble de *K-conflits* (c'est-à-dire les sous-ensembles de E minimaux pour l'inclusion parmi ceux qui sont K-inconsistants).
>
> On notera $\mathcal{C}(E) = \{c_i\}$ cet ensemble de K-conflits issus de E (chaque c_i étant un K-conflit), $\mathcal{N}(E) = \bigcup_i c_i$ le noyau de E et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des formules de E ne participant à aucun conflit (formules *libres* de E). On a alors $E = \mathcal{N}(E) \cup \mathcal{L}(E)$[4].
>
> *Résoudre les K-conflits* consiste à déterminer un sous-ensemble de E qui ne contienne aucun des K-conflits. Il faut trouver, pour chaque conflit, au moins une formule à supprimer et il suffit de travailler sur $\mathcal{N}$ puisque les formules de $\mathcal{L}$ ne sont pas impliquées dans la K-inconsistance.

Nous avons donc la définition suivante qui caractérise ce que l'on appelle une solution d'un problème de conflits.

Définition 1 *Soit $\mathcal{C} = \{c_i\}$ un problème de conflits. S est une* solution[5] *de $\mathcal{C}$ ssi S est un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ (union des c_i) tel que $c_i \cap S \neq \emptyset$, $\forall i$.*

Exemple 1 Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des conflits suivant : $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ (a, b, c étant 3 formules propositionnelles).
Si on applique la définition 1, on obtient les 5 solutions suivantes : $S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{a, b\}$, $S_3 = \{b, c\}$, $S_4 = \{a, c\}$, $S_5 = \{b\}$.
Remarquons que S_4 et S_5 semblent plus intéressantes que les 3 autres, puisqu'on ne supprime qu'une seule formule par conflit.
Par exemple, si on se place dans le cadre du diagnostic basé sur la consistance, chaque conflit est associé à un ensemble de composants ne pouvant avoir un fonctionnement correct en même temps étant données les observations effectuées ; donc supprimer une formule d'un conflit correspond à supposer un composant en panne. Et on préfère généralement supposer le moins de pannes possible.

Tout conflit doit certes être résolu mais l'élimination d'une formule peut résoudre plusieurs conflits à la fois. Le souci de n'éliminer qu'une seule formule par conflit correspond à ce que nous appelons le *principe de minimalité* (voir section 2.2), et nous amène à la définition suivante.

Définition 2 *Soit $\mathcal{C} = \{c_i\}$ un problème de conflits. S est une* solution minimale *de $\mathcal{C}$ ssi S est un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ vérifiant :*

- $c_i \cap S \neq \emptyset$, $\forall i$,

3. Un ensemble Y est K-consistant ssi $Y \cup K$ est consistant.

4. Pour simplifier, on utilisera la notation $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$ à la place de $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{N}(E)$ et $\mathcal{L}(E)$.

5. Cela correspond à la notion d'*ensemble candidat* ou "*hitting-set*" (voir [17]).

- $\forall x \in S$, $\exists i$ *tel que* $c_i \cap S = \{x\}$.

Cette définition caractérise donc les sous-ensembles de $\mathcal{N}$ *minimaux pour l'inclusion rencontrant tous les conflits*[6].

Exemple 1 (suite) Quand on applique la définition 2 sur l'exemple 1, on n'obtient alors comme solutions minimales que les sous-ensembles S_4 et S_5.

Cette définition 2 permet donc d'obtenir un ensemble de solutions beaucoup plus intéressant que celui obtenu par la définition 1. Toutefois, elle ne tient pas compte du fait que, dans un conflit, on préférera supprimer une formule plutôt qu'une autre.

2.2 Utilisation des préférences

On introduit donc la prise en compte des préférences dans le problème de résolution de conflits. On considère que chaque K-conflit de E (noté c_i) est muni d'un pré-ordre total et que $\forall i$, $f(c_i)$ dénote l'ensemble des éléments minimaux de c_i par rapport à ce pré-ordre. On notera $\mathcal{N}_{min} = \bigcup_i f(c_i)$.
À partir de là, on peut expliciter un certain nombre de principes à respecter pour obtenir de "bonnes" solutions et c'est là toute l'originalité de notre approche :

Le principe de minimalité :
ne garder que les solutions qui n'en contiennent pas d'autres (minimalité au sens de l'inclusion) ; c'est le principe de base déjà exploité dans la définition 2 ;

Le principe de parcimonie :
éliminer le plus petit nombre possible de croyances (minimalité au sens de la cardinalité) ;

Le principe du respect des préférences :
les croyances à éliminer sont choisies autant que possible dans les $f(c_i)$ (l'idée étant de s'assurer que toute formule éliminée l'a été pour une "bonne" raison) ;

Le principe d'efficacité :
sélectionner le plus petit nombre possible de solutions (afin de faciliter l'utilisation future de ces solutions – s'il y en a trop, il sera très difficile de les exploiter).

Remarquons que ces principes ne sont pas toujours compatibles.

Exemple 1 (suite) Reprenons l'exemple 1 en soulignant les éléments minimaux de chaque conflit : $\mathcal{C} = \{\{\underline{a}, b\}, \{b, \underline{c}\}\}$. Sur cet exemple, parmi les solutions obtenues par la définition 1, S_4 et S_5 respectent le principe de minimalité, S_4 respecte les préférences et S_5 respecte le principe de parcimonie. Et il n'existe pas de solution respectant tous les principes à la fois.

Le principe de minimalité allié au respect des préférences nous mène à la définition suivante.

Définition 3 *Soit* $\mathcal{C} = \{c_i\}$ *un problème de conflits équipé d'un pré-ordre total sur chaque* c_i. *S est une* solution minimale préférée *ssi S est un sous-ensemble de* $\mathcal{N}$ *vérifiant :*
- $c_i \cap S \neq \emptyset$, $\forall i$,
- $\forall x \in S$, $\exists i$ *tel que* $c_i \cap S = \{x\}$,
- $\forall x \in S$, $\exists j$ *tel que* $x \in f(c_j)$.

Ce qui est équivalent à dire que S est un sous-ensemble de $\mathcal{N}_{min}$ *minimal pour l'inclusion qui rencontre chaque conflit.*

Exemple 1 (suite) Sur cet exemple, la seule solution minimale préférée est S_4.

Exemple 2 Soit le problème de conflits suivant :
$\mathcal{C} = \{\{a_6, \underline{a_1, a_2}\}, \{a_7, \underline{a_2, a_3}\}, \{a_3, \underline{a_4, a_8}\}, \{a_4, \underline{a_5}\}\}$.
Sur cet exemple, la définition 3 nous fournit les 5 solutions minimales préférées suivantes :
$S_1 = \{a_2, a_4\}$, $S_2 = \{a_2, a_8, a_5\}$, $S_3 = \{a_1, a_3, a_5\}$, $S_4 = \{a_2, a_3, a_5\}$, $S_5 = \{a_1, a_3, a_4\}$.

D'autre part, le principe de parcimonie nous conduit à la définition 4.

Définition 4 *Soit* $\mathcal{C} = \{c_i\}$ *un problème de conflits. S est une* solution parcimonieuse *de* $\mathcal{C}$ *ssi S est un sous-ensemble de* $\mathcal{N}$ *minimal pour la cardinalité qui rencontre chaque conflit.*

Exemple 1 (suite) Quand on applique la définition 4 sur l'exemple 1, on n'obtient alors comme solution parcimonieuse que le sous-ensemble S_5.

Les solutions parcimonieuses étant toutes minimales[7], on peut donc voir la définition 4 comme un moyen de respecter au mieux le principe d'efficacité.
Par contre, étant donné leur incompatibilité, il est impossible d'associer principe de parcimonie et respect des préférences. La seule chose que l'on puisse faire est d'essayer de respecter le principe d'efficacité en utilisant la cardinalité comme un moyen pour réduire l'ensemble des solutions. Ce qui nous mène à la définition 5.

Définition 5 *Soit* $\mathcal{C} = \{c_i\}$ *un problème de conflits équipé d'un pré-ordre total sur chaque* c_i. *S est une* solution card-min préférée *ssi : S est un sous-ensemble de* $\mathcal{N}_{min}$ *minimal pour la cardinalité rencontrant chaque conflit.*

6. Un ensemble e_1 "rencontre" un autre ensemble e_2 ssi $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$.

7. En effet, la définition 4 raffine la définition 2.

Exemple 1 (fin) Sur cet exemple, la solution card-min préférée est aussi la solution minimale préférée S_4. Notons qu'il ne s'agit pas d'une solution parcimonieuse.

Exemple 2 (suite) Si on reprend l'exemple 2, la seule solution card-min préférée est S_1.

Il existe aussi d'autres moyens de réduire l'ensemble des solutions afin de mieux respecter le principe d'efficacité. Nous pouvons par exemple utiliser des notions moins connues comme la préférence dite élitiste issue de [7] (voir les définitions 6 et 7).

Définition 6 *Soient S_1 et S_2 deux solutions minimales préférées d'un problème de conflit $\mathcal{C}$. On dira que $S_1 \leq S_2$ ssi pour tout $x \in S_2 \setminus S_1$, il existe $y \in S_1 \setminus S_2$ et un conflit $c_i \in \mathcal{C}$ tels que : $y \in c_i \setminus f(c_i)$ et $x \in f(c_i)$. De manière informelle, cela signifie que c_i est mieux résolu par x que par y.*

Définition 7 *Soit $\mathcal{C} = \{c_i\}$ un problème de conflits équipé d'un pré-ordre total sur chaque c_i. S est une* solution éli-préférée *ssi : S est un sous-ensemble de $\mathcal{N}_{min}$ qui rencontre chaque conflit et qui est maximal pour la relation $\leq$ donnée par la définition 6.*
Donc, on ne conserve que les solutions permettant de résoudre au mieux les conflits (au sens de la définition 6).

Exemple 2 (suite) Dans l'exemple 2, seules S_1, S_2 et S_3 sont éli-préférées.

Toutes les définitions données ici sont reprises dans le tableau 1 avec les principes respectés.

3 Calcul des solutions minimales

Une propriété intéressante des solutions minimales préférées telles qu'elles ont été définies dans la section précédente est que leur calcul se ramène à un problème bien connu en Intelligence Artificielle : le calcul d'ensembles intersectants d'un ensemble d'ensembles.

Définition 8 *Un* ensemble intersectant *d'un ensemble d'ensembles $\mathcal{C}$ est une partie de l'union des éléments de $\mathcal{C}$ dont l'intersection avec chaque élément de $\mathcal{C}$ est non vide.*

Proposition 1 *Soit $\mathcal{C} = \{c_i\}$ un ensemble d'ensembles, et soit f une fonction qui associe à tout élément c_i de $\mathcal{C}$ une partie non vide de c_i. Soit $\mathcal{N}_{\min}$ l'union des $f(c_i)$, alors S est une solution minimale préférée (au sens de la définition 3) du problème de conflits défini par $\mathcal{C}$ et f si et seulement si S est un ensemble intersectant minimal (pour l'inclusion) de $\mathcal{C}' = \{c_i \cap \mathcal{N}_{\min}\}$.*

Solutions proposées	Principes respectés		
	Minimalité	Parcimonie	Respect préférences
Sol. (de base) (déf. 1)			
Sol. minimale (déf. 2)	X		
Sol. minimale préférée (déf. 3)	X		X
Sol. parcimonieuse (déf. 4)	X	X	
Sol. card-min préférée (déf. 5)	X		X
Sol. éli-préférée (déf. 7)	X		X

TAB. 1 – *Tableau récapitulatif des principes et des solutions (le X signifie que la solution proposée respecte le principe donné)*

Dans la suite, nous nous intéressons au calcul des ensembles intersectants minimaux d'un ensemble d'ensembles $\mathcal{C} = \{c_i\}$, et nous noterons $\mathcal{N}$ l'union des c_i. Plusieurs algorithmes de calcul d'ensembles intersectants ont été proposés en Intelligence Artificielle, dans le cadre du diagnostic [17], de la déduction en logique propositionnelle [5, 6], ou encore de l'étude de logiques non monotones [11, 13, 14, 15] entre autres. Nous présentons brièvement dans la suite les principales caractéristiques de ces algorithmes.

L'algorithme de [17], corrigé par [10] et généralisé par [13], examine l'un après l'autre les éléments de $\mathcal{C}$: pour chaque nouvel ensemble c_i de $\mathcal{C}$ examiné, on sélectionne un élément de c_i, à moins qu'on ait déjà sélectionné un élément de c_i lors de l'examen d'un ensemble précédent. Comme il y a plusieurs choix possibles lors de la sélection d'un élément de c_i, l'algorithme explore un arbre dont les nœuds sont étiquetés par des ensembles de $\mathcal{C}$, et les arcs par leurs éléments. L'étiquette d'un nœud n est un ensemble c_i dont aucun élément n'apparaît comme étiquette des arcs au-dessus de n ; si aucun c_i ne vérifie cette propriété, alors n est une feuille et l'ensemble intersectant correspondant est l'ensemble des étiquettes des arcs au-dessus de n. À chaque élément x de l'étiquette c_i d'un nœud n correspond un sous-arbre dont la racine est un fils de n, et dans lequel tous les ensembles intersectants calculés contiennent x ; ce sous-arbre correspond au choix de x pour "intersecter" l'ensemble c_i. Un exemple simple de calcul d'ensembles intersectants avec cet algorithme est représenté sur la figure 1.

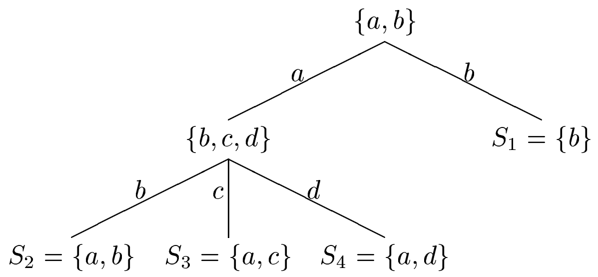


FIG. 1 – *Calcul d'ensembles intersectants de $\mathcal{C} = \{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$ selon [17]*

L'un des facteurs ayant une influence importante sur l'efficacité d'un calcul d'ensembles intersectants minimaux est le nombre de parties de l'union $\mathcal{N}$ des c_i rencontrées plusieurs fois. [17, 10] proposent, afin d'éviter certaines redondances dans l'algorithme ci-dessus, plusieurs propriétés de coupure, basées notamment sur la minimalité des ensembles intersectants recherchés. Une approche similaire est suivie dans [13]. Notons que ces propriétés ne peuvent être exploitées avec efficacité que si l'arbre est exploré en largeur d'abord. Sur l'exemple de la figure 1, cette optimisation permet d'éviter le calcul de l'ensemble intersectant S_2, qui n'est pas minimal. Un attrait de cette approche est l'incrémentalité, au sens où l'ajout de nouveaux ensembles à $\mathcal{C}$ ne nécessite pas de recalculer tout l'arbre : il suffit de continuer le calcul à partir des feuilles déjà calculées.

Une autre méthode évitant la redondance consiste à partir d'une technique générale permettant d'énumérer sans redondance toutes les parties de $\mathcal{N}$, puis à exploiter des propriétés restreignant au maximum la recherche tout en restant complet vis-à-vis des parties de $\mathcal{N}$ recherchées. C'est ainsi qu'on peut construire un arbre binaire dont chaque nœud n est étiqueté par une paire $(I(n), O(n))$ d'ensembles : $I(n)$ contient une partie de la partie de $\mathcal{N}$ en cours de construction, alors que $O(n)$ contient une partie de son complémentaire. Chaque nœud n tel que $I(n) \cup O(n) \neq \mathcal{N}$ a deux enfants, l'un étiqueté par $(I(n) \cup \{d\}, O(n))$, l'autre par $(I(n), O(n) \cup \{d\})$ pour un certain $d \in \mathcal{N} - (I(n) \cup O(n))$. Les ensembles I correspondant aux feuilles de l'arbre ainsi construit forment une énumération non redondante des parties de $\mathcal{N}$.

Deux propriétés permettent de réduire la recherche d'ensembles intersectants minimaux. En effet, si n est un nœud sur le chemin entre la racine et une feuille l, et si $I(l)$ est un ensemble intersectant minimal de $\mathcal{C}$, alors on a :

- si $d \notin I(l)$ et $c_i \in \mathcal{C}$, alors $(c_i - \{d\}) \cap I(l) \neq \emptyset$, et comme $O(n) \cap I(l) = \emptyset$, $c_i - \{d\} \not\subseteq O(n)$;
- si $d \in I(l)$, alors il existe $c_i \in \mathcal{C}$ tel que $c_i \cap I(l) = \{d\}$, donc $(c_i - \{d\}) \subseteq O(l)$, et comme $I(n) \cap O(l) = \emptyset$, $(c_i - \{d\}) \cap I(n) = \emptyset$.

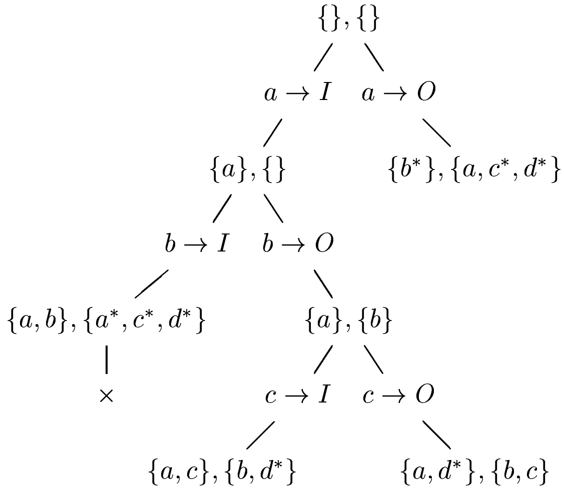


FIG. 2 – *Arbre binaire de calcul des ensembles intersectants minimaux de $\mathcal{C} = \{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$: les nœuds sont représentés par les paires I, O correspondantes ; les éléments passés dans I et O à cause des propriétés de coupures sont indiqués par des astérisques. La croix indique une branche fermée car $I(n) \cap O(n) \neq \emptyset$.*

Cela montre qu'on peut réduire la recherche tout en restant complet par rapport au calcul d'ensembles intersectants minimaux en exploitant les deux types de coupures suivants :

1. si $d \in \mathcal{N} - (I(n) \cup O(n))$ est tel qu'il existe $c_i \in \mathcal{C}$ avec $c_i - \{d\} \subseteq O(n)$, alors d est contenu dans tout ensemble intersectant minimal de $\mathcal{C}$ qui ne contient aucun élément de $O(n)$: d peut être ajouté à $I(n)$;
2. si $d \in \mathcal{N} - O(n)$ est tel que pour tout $c_i \in \mathcal{C}$, $(c_i - \{d\}) \cap I(n) \neq \emptyset$, alors d ne peut être dans aucun ensemble intersectant minimal contenant $I(n)$: d peut être ajouté à $O(n)$. Si d appartient déjà à $I(n)$, la branche correspondante doit être fermée, car alors $I(n) \cap O(n) \neq \emptyset$.

Notons que l'exploitation systématique de la propriété de coupure 2 assure que toutes les feuilles des branches non fermées correspondent à des ensembles intersectants minimaux. La figure 2 représente un arbre binaire correspondant au calcul des ensembles intersectants minimaux de $\mathcal{C} = \{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$ et exploitant ces propriétés de coupure. Ces propriétés sont exploitées dans [5, 6] pour un algorithme dédié à la déduction

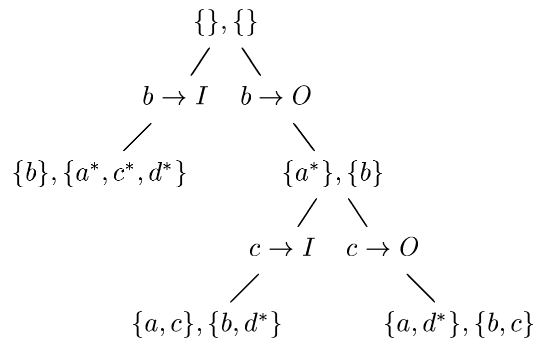


FIG. 3 – *Arbre optimisé pour le calcul des ensembles intersectants minimaux de* $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}\}$.

en logique propositionnelle, ainsi que dans [11, 15, 14] pour des algorithmes liés aux logiques non monotones.

Un facteur pouvant avoir une grande influence sur l'efficacité de cette approche est la méthode de sélection d'un élément $d \in \mathcal{N} - (I(n) \cup O(n))$ à chaque fois que de nouveaux nœuds doivent être créés. [18] suggère d'ordonner strictement tous les éléments de $\mathcal{N}$, pour ensuite sélectionner à chaque fois l'élément minimal de $\mathcal{N} - (I(n) \cup O(n))$. Une approche similaire est suivie dans [14]. Cette technique ne permet pas de tenir compte des spécificités du problème à résoudre.
Par contre, l'algorithme de [5, 6] est guidé, dans le choix d'un élément chaque fois que de nouveaux nœuds doivent être créés, par des heuristiques similaires à celles utilisées avec la méthode de Davis et Putnam. En effet, le calcul d'ensembles intersectants se ramène à un problème de calcul propositionnel : le calcul d'impliquants premiers.

Définition 9 *Un* impliquant premier *d'une formule propositionnelle* φ *est une conjonction* π *de littéraux telle que :*
- $\pi \models \varphi$ *;*
- *pour toute autre conjonction de littéraux* π' *telle que* $\pi' \models \varphi$*, si* $\pi \models \pi'$ *alors* $\pi' \models \pi$*.*

Proposition 2 *Soit* $\mathcal{C} = \{c_i\}$ *un ensemble d'ensembles et soit* L_{prop} *un langage propositionnel dont l'ensemble des symboles de propositions* $\mathcal{P}$ *est l'union des éléments de* $\mathcal{C}$*. Une partie* S *de* $\mathcal{P}$ *est un ensemble intersectant minimal de* $\mathcal{C}$ *si et seulement si* $\wedge_{x \in S} \neg x$ *est un impliquant premier de* $\Phi = \wedge_i \vee_{x \in c_i} \neg x$*.*

La figure 3 représente un arbre dans lequel le premier élément de $\mathcal{N}$ étudié est celui qui apparaît dans le plus grand nombre de conflits. La méthode de calcul d'ensembles intersectants ou d'impliquants premiers par exploration d'un arbre binaire tel que celui décrit ci-dessus est similaire à la méthode de Davis et Putnam de recherche d'un modèle (partiel) de la formule Φ correspondante. La différence essentielle est que nous nous intéressons ici à tous les impliquants premiers de la formule Φ, alors que les heuristiques utilisées avec la méthode de Davis et Putnam ont pour but d'optimiser la découverte soit d'un seul modèle, soit de l'absence de modèle.

4 Relations avec les méthodes basées sur la sélection directe de sous-ensembles K-consistants

4.1 Dualité entre problème de cohérence et problème de conflits

Étant donnée une base de croyances E K-inconsistante, nous considérons les deux problèmes suivants :

- Un problème de cohérence donné sous la forme (K, E), dont les solutions sont les sous-ensembles K-consistants de E.
- Un problème de résolution de conflits donné sous la forme $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ (où $\mathcal{L}$ est l'ensemble des formules libres de E et $\mathcal{C} = \{c_i\}$ est l'ensemble des K-conflits issus de E) et dont les solutions sont les sous-ensembles de E qui ne contiennent aucun conflit. Déterminer les sous-ensembles de E qui ne contiennent aucun conflit revient à déterminer les sous-ensembles de $\mathcal{N}$ (union des conflits) qui ne contiennent aucun conflit et donc à considérer le problème de conflits défini en section 2.1, donné sous la forme $\mathcal{C} = \{c_i\}$.

Parmi toutes les solutions d'un problème de cohérence, on considère traditionnellement celles qui sont maximales pour l'inclusion. Elles correspondent à la définition suivante.

Définition 10 F *sous-ensemble de* E *est une solution maximale du problème de cohérence ssi* F *est un sous-ensemble* K*-consistant, maximal pour l'inclusion parmi les sous-ensembles* K*-consistants de* E*.*

La dualité entre problème de cohérence et problème de conflits est exprimée dans la proposition ci-dessous.

Proposition 3 *Soient* E *une base de croyances et* K *un ensemble de connaissances incontestables. Comme il a été indiqué au début de cette section,* E *et* K *définissent à la fois un problème de cohérence* (K, E) *et un problème de conflits* $(\mathcal{L}, \mathcal{C})$ *(avec* $\mathcal{N}$ *l'union des éléments de* $\mathcal{C}$*).*

On a alors les propriétés suivantes :

- *F sous-ensemble de E est solution du problème de cohérence ssi $(\mathcal{N} \setminus F)$ est solution (au sens de la déf. 1) du problème de conflits.*
- *S sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est solution minimale (au sens de la déf. 2) du problème de conflits ssi $(\mathcal{N} \setminus S)$ est un sous-ensemble maximal pour l'inclusion parmi les sous-ensembles K-consistants de $\mathcal{N}$.*
- *Les solutions maximales du problème de cohérence sont de la forme $\mathcal{L} \cup (\mathcal{N} \setminus S)$ où S est une solution minimale (au sens de la déf. 2) du problème de conflits.*

4.2 Intégration de préférences

Dans le cas où l'on dispose d'une relation de préférence entre les croyances représentée par un pré-ordre partiel $\leq$ sur E, certaines solutions maximales du problème de cohérence sont préférées à d'autres. Différents critères de préférence entre sous-ensembles ont été définis à partir d'un pré-ordre sur les croyances. (Voir [12] pour une étude détaillée de ces critères).
Le critère de préférence démocratique par exemple, permet de privilégier les solutions qui contiennent le plus possible (au sens de l'inclusion) de croyances parmi les plus prioritaires.

Notations On notera $<$ l'ordre strict associé au pré-ordre $\leq$: $x < y$ ssi $(x \leq y) \wedge \neg(y \leq x)$. Le problème de cohérence sera maintenant noté $(K, E, <)$.

Définition 11 *Soient F_1 et F_2 deux sous-ensembles K-consistants de E. F_2 est démocratiquement préférée à F_1 ssi pour tout x élément de $F_1 \setminus F_2$, il existe un élément y de $F_2 \setminus F_1$ tel que $x < y$.*
Les solutions du problème de cohérence $(K, E, <)$ qui sont maximales pour la relation de préférence démocratique sont appelées solutions démo-préférées.

Dans le cas particulier où le pré-ordre $\leq$ sur E est total, il est équivalent de considérer que la base E est stratifiée en $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ où E_1 contient les croyances $\leq$-maximales de E, et $\forall i$, E_{i+1} contient les croyances $\leq$-maximales de $E \setminus (E_1 \cup E2 \cup \ldots \cup E_i)$. Le problème de cohérence est alors noté $(K, E_1, \ldots, E_n)$. Les solutions démo-préférées du problème de cohérence $(K, E_1, \ldots, E_n)$ correspondent exactement aux sous-bases K-consistantes de E préférées au sens de Brewka, définies comme suit. (voir [3, 7]).

Définition 12 *Soit F un sous-ensemble K-consistant de E stratifiée en $(E_1, \ldots, E_n)$. Soit $F_i = F \cup E_i$ la projection de F sur la strate E_i. F est préférée au sens de Brewka ssi $\forall k$, $1 \leq k \leq n$, $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ est un sous-ensemble maximal (pour l'inclusion) parmi les sous-ensembles K-consistants de $E_1 \cup \ldots \cup E_k$.*

Remarque Dans le cas où la base de croyances est seulement munie d'un pré-ordre partiel, il est commode de considérer la stratification "uniforme" de E construite sur le même principe que ci-dessus (c'est-à-dire que E_{i+1} contient les éléments $\leq$-maximaux de $E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_i)$). Les solutions préférées au sens de Brewka du problème de cohérence $(K, E_1, \ldots, E_n)$ ainsi obtenu sont toutes des solutions démo-préférées du problème de cohérence initial $(K, E, <)$. La réciproque est généralement fausse.

Caractérisation des solutions minimales préférées d'un problème de conflits Nous considérons ici un problème de conflits avec expression locale de préférences. Rappelons que $\mathcal{N}_{min}$ désigne l'union des $f(ci)$.
Dans le cas où $\mathcal{N}_{min}$ est strictement inclus dans $\mathcal{N}$, on peut considérer la stratification de E en (E_1, E_2, E_3) où $E_1 = \mathcal{L}$, $E_2 = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{min}$ et $E_3 = \mathcal{N}_{min}$.

Proposition 4 *S sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est solution minimale préférée (au sens de la définition 3) du problème de conflits ssi $E \setminus S$ est une solution démo-préférée du problème de cohérence (K, E_1, E_2, E_3).*

> **Preuve :** elle repose sur les trois points suivants :
> - la base de croyances étant donnée sous forme d'une base stratifiée, les solutions démo-préférées et les solutions préférées au sens de Brewka coïncident ;
> - la proposition 3 ;
> - pour tout i, $f(c_i)$ étant non vide, $\mathcal{N}_{min}$ rencontre chaque conflit et donc $(\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{min}) \cup \mathcal{L}$ est K-consistant.

Exemple 2 (suite) Reprenons ici le problème de conflits défini par $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ avec :
$c_1 = \{a_6, \underline{a_1, a_2}\}$, $c_2 = \{a_7, \underline{a_2, a_3}\}$, $c_3 = \{a_3, \underline{a_4, a_8}\}$, $c_4 = \{a_4, \underline{a_5}\}$ (pour chaque c_i, les éléments soulignés sont les éléments minimaux de ce conflit).
On a donc :
$E = \mathcal{N}$ (rappelons que $\mathcal{N} = \bigcup_i c_i$),
$\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{min} = \{a_6, a_7\}$
et $\mathcal{N}_{min} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_8\}$.
Les solutions démo-préférées (qui sont aussi les solutions préférées au sens de Brewka) du problème de cohérence défini par $(K, \{a_6, a_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_8\})$ sont :
$F_1 = \{a_6, a_7, a_1, a_3, a_5, a_8\}$,
$F_2 = \{a_6, a_7, a_3, a_1, a_4\}$,
$F_3 = \{a_6, a_7, a_2, a_4, a_8\}$,

$F_4 = \{a_6, a_7, a_1, a_4, a_8\}$
et $F_5 = \{a_6, a_7, a_2, a_5, a_8\}$.
Ces solutions correspondent respectivement aux solutions minimales préférées du problème de conflits :
$S_1 = \{a_2, a_4\}$,
$S_2 = \{a_2, a_8, a_5\}$,
$S_3 = \{a_1, a_3, a_5\}$,
$S_4 = \{a_2, a_3, a_5\}$
et $S_5 = \{a_1, a_3, a_4\}$.

Caractérisation des solutions éli-préférées d'un problème de conflits Notre objectif étant toujours d'exploiter la dualité entre problème de conflits et problème de cohérence, nous nous plaçons désormais dans la situation particulière où il existe un ordre sur E qui est compatible avec la stratification locale à chaque conflit. Cet ordre est défini par la construction ci-dessous :

Définition 13 *Soient x et y dans $\mathcal{N}$. On définit : xRy ssi il existe un conflit c_i tel que x est dans $f(c_i)$ et y est dans $c_i \setminus f(c_i)$.*

Notons que la fermeture transitive de la relation R ne définit pas toujours un ordre strict, comme l'illustre l'exemple suivant.

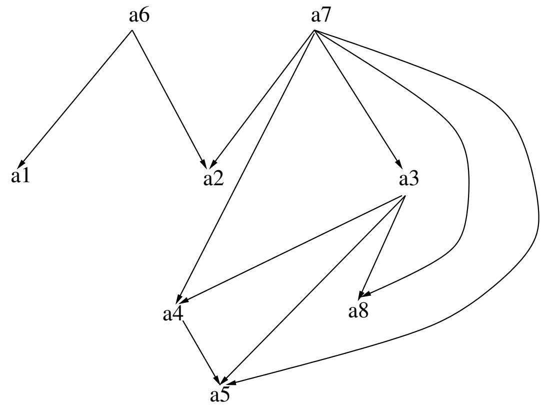
Exemple 3 Soit le problème de conflits défini par $\mathcal{C} = \{\{a, \underline{b, e}\}, \{b, f, \underline{c}\}, \{c, g, \underline{a, d}\}\}$.
On a alors :
$E = \mathcal{N}$,
$\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{min} = \{f, g\}$
et $\mathcal{N}_{min} = \{a, b, c, d, e\}$.
On aura alors :
bRa : car on préfère abandonner b plutôt que a dans le conflit c_1.
aRc : car on préfère abandonner a plutôt que c dans le conflit c_3.
cRb : car on préfère abandonner c plutôt que b dans le conflit c_2.

Nous supposons donc dans la suite que la fermeture transitive de la relation R définit un ordre strict (partiel) sur $\mathcal{N}$, que nous dénoterons par $<$. Nous étendons cet ordre à E par : pour tout x dans $E \setminus \mathcal{N}$, pour tout y dans $\mathcal{N}$, $y < x$.

Proposition 5 *Soit S une solution minimale du problème de conflits. Si $E \setminus S$ est une solution démo-préférée du problème de cohérence $(K, E, <)$ alors S est une solution éli-préférée du problème de conflits.*

Preuve : On montre que si S_1 et S_2 sont solutions minimales du problème de conflits telles que $S_1 \leq S_2$ au sens de la définition 6, alors $(E \setminus S_2)$ et $(E \setminus S_1)$ sont des solutions du problème de cohérence $(K, E, <)$ telles que $(E \setminus S_2)$ est démocratiquement préférée à $(E \setminus S_1)$. Par construction de l'ordre strict $<$ sur E, si $S_1 \leq S_2$ (définition 6) alors : pour tout x élément de $S_2 \setminus S_1$, il existe y élément de $S_1 \setminus S_2$ tel que $x < y$. Or, $(E \setminus S_1) \setminus (E \setminus S_2) = S_2 \setminus S_1$. On a donc : pour tout x élément de $(E \setminus S_1) \setminus (E \setminus S_2)$, il existe y élément de $(E \setminus S_2) \setminus (E \setminus S_1)$ tel que $x < y$.

Exemple 2 (fin) À partir du problème de conflit correspondant à cet exemple ($c_1 = \{a_6, \underline{a_1, a_2}\}$, $c_2 = \{a_7, \underline{a_2, a_3}\}$, $c_3 = \{a_3, \underline{a_4, a_8}\}$, $c_4 = \{a_4, \underline{a_5}\}$), on trouve un ordre strict $<$ compatible avec les stratifications locales des conflits. Son graphe est donné par la figure 4.



Légende : a ⟶ b signifie "a est préféré à b"

FIG. 4 – *Graphe de la relation $<$ obtenue à partir de l'exemple 2*

Les solutions démo-préférées du problème de cohérence $(K, E, <)$ sont :
$F_1 = \{a_6, a_7, a_1, a_3, a_5, a_8\}$,
$F_2 = \{a_6, a_7, a_3, a_1, a_4\}$,
$F_3 = \{a_6, a_7, a_2, a_4, a_8\}$.
Remarquons que ce sont aussi les solutions préférées au sens de Brewka du problème de cohérence obtenu par stratification uniforme de $(E, <)$:
$E = (\{a_6, a_7\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_8\}, \{a_5\})$.
Ces 3 solutions fournissent les 3 solutions éli-préférées S_1, S_2 et S_3 du problème de conflits (voir en fin de section 2.2).

5 Conclusion

La définition de solutions d'un problème de résolution de conflits pose une question similaire à celui rencontré lorsqu'on cherche à définir les solutions d'un problème de restauration de cohérence par sélection directe de sous-bases consistantes : il s'agit de la difficulté de concilier deux contraintes dont le respect est intuitivement nécessaire. L'une de ces contraintes impose que les solutions soient les plus petites (respectivement les plus grandes) possibles. L'autre contrainte impose de respecter les préférences éventuellement exprimées entre les croyances.

Afin d'étudier comment ces deux contraintes interagissent lorsqu'on résout des conflits, nous avons été conduits à traduire chacune d'entre elles par un ou plusieurs principes. Ces principes conduisent ensuite à différentes définitions de solutions, et permettent de comparer simplement ces définitions. Nous avons aussi comparé certaines de ces définitions avec les résultats obtenus lorsqu'on aborde le problème, jusqu'ici plus étudié, de la sélection directe de sous-bases consistantes.

L'une des définitions semble ressortir d'un point de vue calculatoire : calculer les *solutions minimales préférées* revient à calculer les ensembles intersectants minimaux de l'ensemble des parties minimales (au sens des préférences) des conflits. On peut noter que le respect des préférences n'induit pas dans ce cas de difficulté calculatoire supplémentaire (à part le simple calcul des parties minimales des conflits): au contraire, le calcul des solutions minimales préférées est plus simple que le calcul des solutions minimales, puisque les ensembles à "intersecter" sont plus petits. Nous avons décrit plusieurs algorithmes qui ont été proposés en Intelligence Artificielle pour effectuer ces calculs. Le lien avec la notion d'impliquants premiers semble particulièrement intéressant, puisqu'il permet d'exploiter des heuristiques mises au point dans le cadre des nombreuses études d'algorithmes permettant de tester la consistance d'un ensemble de formules propositionnelles.

Les solutions minimales préférées sont d'autant plus intéressantes que la plupart des autres solutions que nous avons proposées sont minimales préférées. Un prolongement naturel de notre travail est donc l'étude de modifications des algorithmes de calcul d'ensembles intersectants afin de calculer directement ces autres solutions. Nous nous intéressons en particulier à une approche dans laquelle les conflits doivent être résolus dans un certain ordre, qui est fonction du type de solutions qu'on cherche à obtenir.

Références

[1] Salem Benferhat, Claudette Cayrol, Didier Dubois, Jérôme Lang, et Henri Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. Dans Ruzena Bajcsy, éditeur, *Proc. of the 13^{th} IJCAI*, pages 640–645, Chambéry, France, 1993. Morgan-Kaufmann.

[2] Salem Benferhat et Laurent Garcia. Traitement de bases de connaissances incohérentes localement stratifiées et application au raisonnement tolérant les exceptions. Dans LASMEA, éditeur, *Proc. of the 11^{th} RFIA*, pages 233–242, Clermont Ferrand, France, 1998. AFCET.

[3] Gerhard Brewka. Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning. Dans N.S. Sridharan, éditeur, *Proc. of the 11^{th} IJCAI*, pages 1043–1048, Detroit, MI, 1989. Morgan-Kaufmann.

[4] Gerhard Brewka. Reasoning about priorities in default logic. Dans *Proc. of AAAI-94*, pages 940–945, Seattle, WA, 1994.

[5] Thierry Castell. Computation of prime implicates and prime implicants by a variant of the Davis and Putnam procedure. Dans *Proceedings of the Eighth International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, pages 428–429. IEEE, 1996.

[6] Thierry Castell. *Consistance et déduction en logique propositionnelle.* Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1997.

[7] Claudette Cayrol, Véronique Royer, et Claire Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. Dans R. Yager et B. Bouchon, éditeurs, *Advanced methods in AI. Lecture notes in computer science 682*, pages 13–22. Springer Verlag, 1993. Extended version in Technical Report IRIT-CERT, 92-13R (University Paul Sabatier Toulouse).

[8] Didier Dubois, Jérôme Lang, et Henri Prade. Inconsistency in possibilistic knowledge bases - to live or not to live with it. Dans L.A. Zadeh et J. Kacprzyk, éditeurs, *Fuzzy logic for the Management of Uncertainty*, pages 335–351. Wiley and sons, 1991.

[9] Laurent Garcia. *Raisonnement local dans les bases de connaissances ordonnées : Applications au traitement des incohérences et au raisonnement plausible.* Thèse, Université Paul Sabatier, IRIT, 1998.

[10] Russel Greiner, Barbara A. Smith, et Ralph W. Wilkerson. A correction to the algorithm in Rei-

ter's theory of diagnosis. *Artificial Intelligence*, 41:79–88, 1989.

[11] Ulrich Junker et Kurt Konolige. Computing the Extensions of Autoepistemic and Default Logics with a Truth Maintenance System. Dans *Proceedings of the Eighth National Conference on Artificial Intelligence*, pages 278–283. MIT Press, 1990.

[12] Marie-Christine Lagasquie-Schiex. *Contribution à l'étude des relations d'inférence non-monotone combinant inférence classique et préférences*. Thèse, Université Paul Sabatier, IRIT, 1995.

[13] François Levy. Reason maintenance systems and default theories. Pré-publication 92-2, LIPN, Université Paris Nord, 1992.

[14] Jérôme Mengin. A theorem prover for default logic based on an extended resolution principle and prioritized conflict resolution. Dans Christine Froidevaux et Jürg Kohlas, éditeurs, *Proceedings of the European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, volume 946 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1995.

[15] Ilkka Niemelä. Towards Efficient Default Reasoning. Dans Chris S. Mellish, éditeur, *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 312–318. Morgan Kaufmann, 1995.

[16] H. Prakken et G. Sartor. Argument-based extended logic programming with defeasible priorities. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 7:25–75, 1997.

[17] Raymond Reiter. A theory of diagnosis from first principles. *Artificial Intelligence*, 32:57–95, 1987.

[18] Ron Rymon. Search through Systematic Set Enumeration. Dans Bernhard Nebel, Charles Rich, et William Swartout, éditeurs, *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 539–550. Morgan Kaufmann, 1992.