La complexité des relations d'inférence non-monotone dans les approches syntaxiques*

Marie-Christine Lagasquie-Schiex
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex
e-mail : lagasq@irit.fr – tel : 61 55 66 11 (poste 73 66)

Résumé

Cet article présente différents résultats concernant la complexité des relations d'inférence non-monotone dans quelques approches syntaxiques.

À partir d'une base de croyances E (pouvant être inconsistante) et d'un pré-ordre sur E, nous commençons par rappeler différents mécanismes de sélection de sous-ensembles consistants préférés sur E dans un cadre syntaxique. Puis nous présentons quelques principes d'inférence permettant la gestion de ces multiples sous-ensembles.

Au croisement de chaque mécanisme de sélection m et de chaque principe d'inférence p, on définit une relation d'inférence non-monotone $(E,\leq)\mid\!\sim^{p,m}\Phi$ dont nous étudions la complexité temporelle.

Nous fournissons ainsi une synthèse de diverses approches syntaxiques du raisonnement non-monotone. Les résultats obtenus confirment la similarité de ces approches (elles sont toutes de complexités à peu près équivalentes), tout en restant peu encourageants : en effet, toutes nos relations d'inférence non-monotone ont, dans le pire des cas, une complexité largement supérieure à la complexité de l'inférence monotone.

Introduction

Un des buts de l'intelligence artificielle est la manipulation de connaissances. Tant que ces connaissances sont cohérentes, certaines et complètes, la logique classique s'avère être un outil parfait. Malheureusement, dès qu'il s'agit de traiter des connaissances incomplètes, incertaines ou inconsistantes (on parle alors de croyances), la logique classique ne s'applique plus (par exemple, à partir d'une information inconsistante, on peut déduire toute formule et son contraire). Or la manipulation de telles croyances est capitale si on veut pouvoir modéliser un raisonnement de "sens commun". Une des formes de ce raisonnement appelée *raisonnement non-monotone* est un des sujets de recherche les plus riches en intelligence artificielle actuellement. Beaucoup de chercheurs ont proposé de nouvelles logiques, appelées logiques non-monotones, pour modéliser un tel raisonnement (par exemple, la logique des défauts de (Reiter 1980)). D'autres chercheurs ont essayé de garder le cadre de la logique classique en rajoutant des structures numériques ou symboliques modélisant des relations d'ordre entre les croyances. Nous nous intéressons plus particulièrement à cette dernière possibilité. Ces relations d'ordre, appelées *relations de priorité*, peuvent se définir :

- soit de manière *sémantique* en utilisant le lien sémantique et la dépendance logique existant entre les croyances, on parle alors d'enracinement épistémique – voir (Gärdenfors 1991) ;
- soit de manière *syntaxique*, en s'appuyant sur le langage d'expression des croyances et en considérant chaque croyance de la base comme indivisible (elle est soit acceptée en entier, soit rejetée).

Nous avons choisi d'utiliser la seconde approche (nous parlons alors de raisonnement non-monotone syntaxique) pour deux raisons :

- parce que nous pensons qu'il est plus naturel d'ordonner nos croyances a priori, plutôt que d'exploiter la dépendance logique entre les croyances pour créer cet ordre,
- parce que cette approche syntaxique nous paraît plus générale que l'approche sémantique.

L'utilisation d'une relation de priorité induit une partition de la base de croyances dite alors base *stratifiée* – voir (Brewka 1989; Nebel 1991; Cayrol & al. 1992; Benferhat & al. 1993).
Parmi tous les aspects possibles d'un raisonnement, nous nous attachons plus particulièrement à la déduction. Cet aspect dans le cadre d'un raisonnement non-monotone syntaxique est modélisé par une *relation d'inférence non-monotone syntaxique*. Cette relation est vue, suivant en cela (Pinkas & Loui 1992), comme une procédure en deux étapes qui, premièrement, génère et sélectionne les états de croyances préférés (*mécanisme de sélection*), puis qui utilise l'inférence classique sur tout ou partie de ces multiples états afin de conclure (*principe de résolution des conflits*) ; par exemple, il existe, entre autres dans (Benferhat & al. 1993), une relation d'inférence

*Ces travaux ont été réalisés avec Madame Claudette Cayrol, maître de conférences à l'Université Paul Sabatier de Toulouse.

définie par : *"E infère Φ ssi Φ est classiquement inférée par tous les sous-ensembles préférés de E"*.
Une classification de ces principes de résolution des conflits, des plus crédules aux plus sceptiques, est donnée dans (Pinkas & Loui 1992). Quant à la sélection des sous-ensembles préférés, elle repose sur la définition de modes d'agrégation permettant d'étendre la relation de priorité donnée sur la base initiale en une préférence entre les sous-ensembles – voir (Benferhat & al. 1993; Cayrol & al. 1992).

Dans le contexte décrit ci-dessus, notre contribution consiste en une étude comparative de quelques relations d'inférence non-monotone syntaxique du point de vue de la complexité. C'est, en effet, un aspect primordial pour toute application pratique. À notre connaissance, peu de travaux ont été publiés sur ce sujet. Parmi eux, on trouve (Nebel 1991) sur la complexité de certaines *procédures de révision* syntaxique, ainsi que (Gottlob 1992; Eiter & Gottlob 1992; Eiter & Gottlob 1993) sur la logique des défauts, la révision et certains processus abductifs.

Ce papier est organisé comme suit. À partir d'une base de croyances E et d'un pré-ordre sur E, nous présentons trois mécanismes de sélection de sous-ensembles préférés de E, chacun étant plus sélectif que le précédent. Puis nous présentons trois principes d'inférence non-monotone destinés à gérer ces multiples sous-ensembles : les principes *sceptique*, *crédule* et *argumentatif*. Le croisement de chaque mécanisme de sélection m et de chaque principe d'inférence p définit une relation d'inférence $(E, \leq) \mid\!\sim^{p,m} \Phi$ dont nous étudions la complexité dans le cas général et dans les deux cas particuliers d'une base strictement ordonnée et d'une base de Horn. Nous situons alors nos résultats par rapport aux travaux déjà effectués dans le domaine.

Sélection des états de croyances préférés

Dans tout cet article, E dénote un ensemble fini non vide de formules propositionnelles appelé la "base de croyances", éventuellement inconsistant.
L'approche la plus usuelle pour gérer l'inconsistance consiste à travailler à partir de sous-ensembles de E consistants et maximaux pour l'inclusion, que nous avons choisi d'appeler *thèses* de E.

Définition 1 *Un sous-ensemble X de E est une thèse de E ssi X est consistant et il n'existe pas de sous-ensemble consistant de E contenant strictement X.*

Malheureusement, dans le pire des cas, cette approche n'est pas assez sélective : il reste encore beaucoup de thèses à prendre en compte.
Nous supposons maintenant que E est munie d'un pré-ordre total $\leq$. Cela revient à considérer que E est stratifiée en une collection $(E_1, \ldots, E_n)$, où E_1 contient les formules de plus haute priorité et E_n celles de plus faible priorité. La paire $(E, \leq)$ est appelée "base de croyances *avec priorités*" (ou aussi "base de croyances *stratifiée*"). Chaque E_i est appelée une *strate* de E.
Différentes approches ont été proposées pour utiliser la relation de priorité afin de sélectionner les sous-ensembles "préférés" – voir (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993). Dans le cadre de cet article, nous nous concentrons sur les approches qui raffinent l'inclusion et sélectionnent les sous-ensembles préférés parmi les thèses de E. Ainsi, la relation de priorité sur E induit une relation de *préférence* sur l'ensemble des thèses de E.
Rappelons rapidement la définition de la préférence basée sur l'inclusion qui est la plus fréquemment utilisée.

Définition 2 *Soit $E = (E_1, \ldots, E_n)$ une base de croyances stratifiée. Z étant un sous-ensemble de E, Z_i dénote $Z \cap E_i$. La préférence basée sur l'inclusion est l'ordre strict $\ll^{\text{INCL}}$ défini par : soient X, Y des parties de E, $X \ll^{\text{INCL}} Y$ ssi il existe i tel que Y_i contient strictement X_i et pour tout $j < i$, $X_j = Y_j$.*

Remarquons que les thèses $\ll^{\text{INCL}}$-préférées sont aussi appelées sous-théories préférées dans (Brewka 1989), et correspondent exactement aux sous-bases fortement maximales consistantes de (Dubois & al. 1991) et aux sous-bases maximales consistantes pour l'ordre démocratique de (Cayrol & al. 1992).

Pour sélectionner des sous-ensembles préférés, on peut aussi utiliser les sous-ensembles consistants de cardinalité maximale – voir (Benferhat & al. 1993; Lehmann 1992).

Définition 3 *Un sous-ensemble X de E est un sous-ensemble consistant de cardinalité maximale de E ssi X est consistant et pour chaque sous-ensemble consistant Y de E, $|Y| \leq |X|$ (avec $|Y|$ qui dénote la cardinalité de Y).*

La prise en compte de la stratification de E permet de définir la préférence dite "lexicographique" – voir (Benferhat & al. 1993) :

Définition 4 *Soit $E = (E_1, \ldots, E_n)$ une base de croyances stratifiée. La préférence "lexicographique" est l'ordre strict $\ll^{\text{LEX}}$ défini sur l'ensemble des parties de E par : $X \ll^{\text{LEX}} Y$ ssi il existe i tel que $|X_i| < |Y_i|$ et pour tout $j < i$, $|X_j| = |Y_j|$.*

On notera que la préférence lexicographique raffine la préférence basée sur l'inclusion (tout sous-ensemble consistant $\ll^{\text{LEX}}$-préféré est aussi $\ll^{\text{INCL}}$-préféré), et que le pré-ordre lexicographique est total.

Exemple Soient les variables propositionnelles suivantes :

r	choc en reculant
a	choc à l'arrière de la voiture
nr	je ne suis pas responsable
np	je ne paierai pas les réparations du véhicule
x	j'ai souscrit une assurance tous risques
pa	le prix de l'assurance augmentera

Considérons E une base stratifiée composée des cinq strates suivantes :

- $E_1 = \{\rightarrow r\ ; \rightarrow x\}$,
- $E_2 = \{r \rightarrow a\}$,
- $E_3 = \{a \rightarrow nr\ ; r, nr \rightarrow\}$,
- $E_4 = \{nr \rightarrow np\ ; np \rightarrow nr\ ; x \rightarrow np\}$,
- $E_5 = \{\rightarrow nr, pa\}$.

Dans E, on trouve huit thèses. Les thèses incl-préférées sont :

- $Y_1 = \{\rightarrow r\ ; \rightarrow x\ ; r \rightarrow a\ ; r, nr \rightarrow\ ; nr \rightarrow np\ ; x \rightarrow np\ ; \rightarrow nr, pa\}$,
- $Y_2 = \{\rightarrow r\ ; \rightarrow x\ ; r \rightarrow a\ ; r, nr \rightarrow\ ; nr \rightarrow np\ ; np \rightarrow nr\ ; \rightarrow nr, pa\}$,
- $Y_3 = \{\rightarrow r\ ; \rightarrow x\ ; r \rightarrow a\ ; a \rightarrow nr\ ; nr \rightarrow np\ ; np \rightarrow nr\ ; x \rightarrow np\ ; \rightarrow nr, pa\}$.

Parmi ces trois thèses incl-préférées, Y_3 est la seule thèse lex-préférée (en effet, $Y_1 \ll^{\text{LEX}} Y_3$ et $Y_2 \ll^{\text{LEX}} Y_3$).

Les principes d'inférence syntaxique

Comme dans (Pinkas & Loui 1992), l'inférence non-monotone sur une base de croyances est vue comme une procédure à deux étapes : premièrement, production d'un ensemble d'états de croyances à partir de la base stratifiée initiale $(E, \leq)$, puis application sur ces états de divers principes plus ou moins "prudents".

Dans la section précédente, nous avons présenté trois mécanismes de production appelés T (celui produisant l'ensemble des thèses de E), INCL (celui produisant l'ensemble des thèses de E préférées pour l'inclusion dites thèses incl-préférées) et LEX (le raffinage produisant l'ensemble des thèses préférées lexicographiquement dites thèses lex-préférées).

Une classification de nombreux principes d'inférence a été donnée dans (Pinkas & Loui 1992) basée sur la notion de précaution. Parmi tous ces principes, nous en choisissons trois que nous allons présenter rapidement.

Nous partons d'un ensemble de sous-ensembles consistants de E noté $m(E)$ (m est l'un des mécanismes de sélection T, INCL, LEX). Soit Φ une formule propositionnelle.

Définition 5 *Φ est inférée par $m(E)$ suivant le principe d'inférence sceptique (resp. crédule) ssi Φ est inférée classiquement par chaque élément (resp. au moins un des éléments) de $m(E)$. Ce principe d'inférence, souvent appelé conséquence forte (resp. faible) ou conséquence universelle (resp. existentielle) dans la littérature, est noté $\mid\!\sim^{\forall}$ (resp. $\mid\!\sim^{\exists}$) et appelé le principe* UNI *(resp.* EXI*).*

Ces deux principes UNI et EXI sont les plus communément utilisés en présence d'états de croyances conflictuels. Le principe UNI est plus prudent que le principe EXI, puisque chaque conclusion obtenue de $m(E)$ par l'inférence UNI est aussi obtenue par l'inférence EXI. Un principe intermédiaire consiste à ne garder que les conséquences faibles dont la négation ne peut être inferée – voir (Benferhat, Dubois, et Prade 1993).

Définition 6 *Φ est inférée par $m(E)$ suivant le principe d'inférence argumentatif ssi Φ est inférée classiquement par au moins un élément de $m(E)$ et aucun élément de $m(E)$ n'infère classiquement $\neg\Phi$. Ce principe d'inférence est noté $\mid\!\sim^{A}$ et appelé le principe* ARG.

Nous allons maintenant donner une définition précise des relations d'inférence et des problèmes associés dont nous étudions la complexité, chacun d'entre eux étant au croisement d'un mécanisme de sélection m et d'un principe d'inférence p.

Soit $(E, \leq)$ la base de croyances initiale et Φ une formule propositionnelle.

Définition 7 *Le problème* UNI-T *(resp.* EXI-T, ARG-T*) est défini par "vérifier que Φ est une conséquence forte (resp. faible, argumentative) de E en utilisant les thèses de E" (notation : $E \mid\!\sim^{\forall(resp.\ \exists, A),\mathrm{T}} \Phi$ pour* UNI-T *(resp.* EXI-T, ARG-T*)).*

Définition 8 *Le problème* UNI-INCL *(resp.* EXI-INCL, ARG-INCL*) est défini par "vérifier que Φ est une conséquence forte (resp. faible, argumentative) de E en utilisant les thèses incl-préférées de E" (notation : $E \mid\!\sim^{\forall(resp.\ \exists, A),\mathrm{INCL}} \Phi$ pour* UNI-INCL *(resp.* EXI-INCL, ARG-INCL*)).*

Définition 9 *Le problème* UNI-LEX *(resp.* EXI-LEX, ARG-LEX*) est défini par "vérifier que Φ est une conséquence forte (resp. faible, argumentative) de E en utilisant les thèses lex-préférées de E" (notation : $E \mid\!\sim^{\forall(resp.\ \exists, A),\mathrm{LEX}} \Phi$ pour* UNI-LEX *(resp.* EXI-LEX, ARG-LEX*)).*

Exemple : Appliquons les principes définis ci-dessus sur l'exemple donné dans la section précédente. On trouve alors que :

- $E \mid\!\sim^{\forall,\mathrm{INCL}} a$
- $E \mid\!\sim^{\exists,\mathrm{INCL}} nr$
- $E \mid\!\sim^{A,\mathrm{INCL}} pa$
- $E \mid\!\sim^{\forall,\mathrm{LEX}} np$ qui est équivalent à $E \mid\!\sim^{\exists,\mathrm{LEX}} np$ et à $E \mid\!\sim^{A,\mathrm{LEX}} np$ puisqu'il n'y a qu'une seule thèse lex-préférée.

Quelques éléments de complexité

Ce qui suit est une présentation informelle et volontairement simplifiée de la théorie de la complexité et nous renvoyons le lecteur à (Garey & Johnson 1979) pour plus de précisions.

La théorie de la complexité est destinée à classer les problèmes du point de vue de leur complexité dans le *pire des cas*. Cette complexité peut être d'origine temporelle ou d'origine spatiale. Ici, nous ne nous intéressons qu'à la complexité temporelle et uniquement pour des problèmes de décision (chacune de leurs instances admet soit "oui", soit "non" comme réponse).

La classe P contient ainsi l'ensemble des problèmes que l'on sait résoudre de manière *efficace* (en temps polynomial dans la taille de leurs instances). Ces problèmes sont dits *polynomiaux*, *faciles* ou *déterministes polynomiaux*.

Cependant, il existe nombre de problèmes pratiques pour lesquels on ne sait ni prouver qu'il existe un algorithme polynomial qui les résolve, ni prouver qu'il n'en existe pas. Pour pallier cette limitation, la classe NP (*non-déterministe polynomial*) a été introduite.

Un problème appartient à NP si à toute instance I du problème dont la réponse est "oui" (et à elles seulement), il est possible d'associer un certificat $C(I)$ permettant à un algorithme de vérifier effectivement que la réponse est oui en temps polynomial. De manière intuitive, NP est la classe des problèmes pour lesquels il est aisé de vérifier qu'une solution potentielle est effectivement solution. Les problèmes de NP sont dits *non-déterministes polynomiaux*. Ainsi, le problème SAT (satisfiabilité d'un ensemble de clauses) est dans la classe NP puisqu'il suffit de "deviner une assignation", ce qui est réalisé en effectuant une série polynomiale de choix (un par variable propositionnelle utilisée) puis de "vérifier que c'est un modèle", ce qui se fait en temps polynomial[1]. Signalons que la classe NP contient la classe P, le déterminisme étant un cas particulier du non-déterminisme.

Ensuite, on définit parmi tous les problèmes de la classe NP ceux qui sont les plus difficiles, appelés NP-*complets*. Ce sont les problèmes Q qui appartiennent à la classe NP et auxquels tous les problèmes Q' de cette classe peuvent se ramener de manière efficace. Cette transformation dite polynomiale est notée $Q' \propto Q$ et elle symbolise le fait que Q est au moins aussi difficile que Q'. SAT est un problème NP-complet de même que de très nombreux problèmes liés à la logique ou à la recherche opérationnelle. Il n'existe pas à l'heure actuelle d'algorithme efficace pour les problèmes NP-complets. Nous nous trouvons donc devant la conjecture $\mathsf{NP} \neq \mathsf{P}$ qui est essentielle en complexité : il suffirait de trouver un algorithme efficace pour un problème NP-complet pour la falsifier.

À coté de cette classe NP, on trouve la classe co-NP correspondant aux *problèmes complémentaires* (les réponses "oui" et "non" sont échangées) des problèmes NP. Le complémentaire d'un problème NP-complet est co-NP-complet. Ainsi, UNSAT (insatisfiabilité d'un ensemble de clauses) est co-NP-complet. Nous utiliserons aussi les classes de la *hiérarchie polynomiale* (notée PH), chacune contenant des problèmes de plus en plus difficiles. Cette définition est inductive et s'appuie sur la notion d'*oracle*. Un oracle de complexité X peut être vu comme un sous-programme pouvant résoudre tout problème de complexité X. Chaque appel à un oracle est compté comme une unité de temps. On a ainsi des problèmes polynomiaux utilisant des oracles de complexité X et des problèmes non-déterministes polynomiaux utilisant des oracles de complexité X ; ils définissent respectivement les classes P^X et NP^X. PH est définie comme l'ensemble des classes $\{\Delta_k^p, \Sigma_k^p, \Pi_k^p$ pour $k \geq 0\}$, avec :

- $\Sigma_0^p = \Delta_0^p = \Pi_0^p = \mathsf{P}$
- $\Delta_{k+1}^p = \mathsf{P}^{\Sigma_k^p}$
- $\Sigma_{k+1}^p = \mathsf{NP}^{\Sigma_k^p}$
- $\Pi_{k+1}^p = \text{co-}\Sigma_{k+1}^p$

Pour chacune de ces classes, on retrouve bien sûr la notion de complétude intéressante par le fait qu'un problème Σ_{k+1}^p-complet est toujours plus difficile à résoudre qu'un problème Σ_k^p ou même qu'un problème Δ_{k+1}^p, $\forall k \geq 0$.

La conjecture $\mathsf{NP} \neq \mathsf{P}$ se généralise à PH avec les conjectures $\mathsf{NP} \neq$co-NP et $\forall k, \Sigma_k^p \neq \Pi_k^p$. Cela implique que, si $\mathsf{NP}=\mathsf{P}$, alors toute la hiérarchie polynomiale s'effondre sur P.

Le problème 2-QBF noté $\exists a \forall b H(a,b)$ est un exemple de problème Σ_2^p-complet – (Johnson 1990; Nebel 1991) :

> **Instance** : une formule propositionnelle $H(a,b)$ où a et b dénotent des ensembles de variables propositionnelles : $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $b = \{b_1, \ldots, b_m\}$
> **Question** : Existe-t-il une assignation des variables de a telle que $H(a,b)$ soit vraie pour toute assignation des variables de b ?

La complexité des relations d'inférence dans le cas général

Nous considérons les relations d'inférence de la forme $(E, \leq) \mid\!\sim^{p,m} \Phi$ avec E, $\leq$, p et m correspondant aux définitions des sections précédentes, et Φ une formule propositionnelle. Les résultats de complexité dans le cas général sont donnés dans la table 1. Par manque de place, nous ne donnerons pas les preuves détaillées – voir dans (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993).

[1] Ici, le certificat est l'assignation et l'algorithme est la procédure de vérification qu'il s'agit bien d'un modèle.

Problèmes	Classe de complexité
UNI-T	Π_2^p-complet
EXI-T	Σ_2^p-complet
ARG-T	$\Delta_3^p - (\Sigma_2^p \cup \Pi_2^p)$ si $\Sigma_2^p \neq \Pi_2^p$
UNI-INCL	Π_2^p-complet
EXI-INCL	Σ_2^p-complet
ARG-INCL	$\Delta_3^p - (\Sigma_2^p \cup \Pi_2^p)$ si $\Sigma_2^p \neq \Pi_2^p$
UNI-LEX	Δ_2^p-complet
EXI-LEX	Σ_2^p-complet
ARG-LEX	Δ_3^p, Σ_2^p-difficile

Table 1: Complexités dans le cas général

Pour chaque problème Q, la preuve de complexité se fait en deux étapes :

- premièrement, exhiber un algorithme qui résout Q permettant de garantir que Q est de complexité X (preuve d'appartenance à une classe qui donne une borne *supérieure* à la complexité) ;
- puis, prouver que Q est X-complet en trouvant une transformation polynomiale d'un problème X-complet en Q (ou bien trouver une autre borne *inférieure* pour la complexité).

Appartenance à une classe pour les conséquences fortes : Pour UNI-T et UNI-INCL nous utilisons les résultats obtenus par Nebel dans (Nebel 1991). En effet, ces mécanismes d'inférence correspondent exactement aux mécanismes de révision SBR et PBR dont Nebel a démontré qu'ils sont Π_2^p-complets. On en conclut que UNI-T et UNI-INCL appartiennent à la classe Π_2^p.
Pour UNI-LEX, l'étude est différente. En effet, soit $(E, \leq)$ une base stratifiée et Φ une formule propositionnelle, considérons la fonction f : $f((E, \leq)) = (\{\Phi \rightarrow \ell\} \cup E \cup \{\neg\ell\}, \leq)$ où ℓ est une nouvelle variable propositionnelle. Le pré-ordre $\leq$ est étendu de telle sorte que $(\Phi \rightarrow \ell)$ constitue la première strate de $f((E, \leq))$ et que $(\neg\ell)$ constitue la dernière strate de $f((E, \leq))$. En utilisant f, nous obtenons : UNI-LEX $\propto$ EXI-LEX et co-UNI-LEX $\propto$ UNI-LEX. Nous en déduisons l'algorithme suivant :

1. $E' \leftarrow \{\Phi \rightarrow \ell\} \cup E \cup \{\neg\ell\}$
2. $k \leftarrow < 0, 0, \ldots, 0 >$
  (* k = *tableau de dimension* n *avec* *)
  (* n = *nombre de strates dans* E' *)
3. Pour n_s *de 1 à* n *faire*
4. $n_f \leftarrow$ *nombre de formules dans* E'_{n_s}
5. *fini* $\leftarrow$ *faux*
6. *tant que* ($n_f \geq 0$) *et (non fini) faire*
7. $k[n_s] \leftarrow n_f$
8. *si* MAX-GSAT-ARRAY(E', k)
    alors fini $\leftarrow$ *vrai*
   sinon $n_f \leftarrow n_f - 1$
  fin si
 fin tant que
fin pour
9. Vérifier que $k[n] \neq 1$

Dans cet algorithme, nous utilisons un oracle MAX-GSAT-ARRAY défini par :

> **Instance** : un ensemble pré-ordonné $(Y, \leq)$ de formules propositionnelles, un tableau k de dimension n avec n le nombre de strates dans Y.
> **Question** : Existe-t-il une assignation qui satisfait pour chaque strate i de Y au moins $k[i]$ formules ?

Ce problème est NP-complet (l'appartenance à la classe NP est immédiate, la complétude est prouvée par une restriction à SAT). On en conclut que UNI-LEX appartient à la classe Δ_2^p.

Complétude pour les relations de conséquence forte : Pour UNI-T et UNI-INCL, nous prouvons la complétude en utilisant une fois de plus les problèmes de révision SBR et PBR – voir (Nebel 1991).
Pour UNI-LEX, nous prouvons la Δ_2^p-complétude en utilisant un problème Δ_2^p-complet défini dans (Eiter & Gottlob 1993) que nous notons ALM (instance : $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ un ensemble de clauses satisfiable, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des variables propositionnelles de C, $O(X) =< x_1, \ldots, x_n >$ une prioritisation de X (suite strictement ordonnée des variables de X), question : l'assignation V_M lexicographiquement maximale par rapport à $O(X)$ satisfaisant C, vérifie-t-elle $V_M(x_n)$ = true ?). Considérons la transformation polynomiale suivante de ALM en UNI-LEX : Soit "$C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ satisfiable, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $O(X) =< x_1, \ldots, x_n >$" une instance de ALM, l'instance de UNI-LEX est définie par $\Phi = x_n$ et $(E, \leq) = \{C_1 \wedge \ldots \wedge C_m, x_1, \ldots, x_n\}$ avec l'ordre suivant : la formule $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ est plus prioritaire que la formule x_1 qui est plus prioritaire que la formule x_2 qui est plus prioritaire que la formule ... la formule x_n. On a ainsi ALM $\propto$ UNI-LEX et on en conclut que UNI-LEX est Δ_2^p-complet.

Appartenance à une classe pour les conséquences faibles : Les problèmes EXI-m, pour $m \in \{\mathrm{T}, \mathrm{INCL}, \mathrm{LEX}\}$, peuvent être résolus par l'algorithme suivant :

1. deviner un sous-ensemble Y *de* E
2. vérifier que Y *est :*
  - une thèse (pour EXI-T*)*
  - une thèse incl-préférée (pour EXI-INCL*)*
  - une thèse lex-préférée (pour EXI-LEX*)*
3. vérifier que Y *infère classiquement* Φ

Tout d'abord, notons que "*vérifier que* Y *infère classiquement* Φ" est co-NP-complet et que "*vérifier que* Y *est une thèse*" consiste seulement à vérifier la consistance de Y et l'inconsistance de $Y \cup \{g\}$ pour toute formule $g \in E \setminus Y$. Pour les thèses incl-préférées, le même principe de vérification s'applique strate par strate. On en conclut que l'algorithme précédent est non-déterministe polynomial et qu'il utilise des oracles non-déterministes polynomiaux. Donc, EXI-T et EXI-INCL appartiennent à la classe $NP^{NP} = \Sigma_2^p$. Pour "*vérifier que* Y *est une thèse lex-préférée*", nous utilisons un oracle résolvant le problème suivant :

> **Instance** : un ensemble Y de formules propositionnelles, un entier $k \leq |Y|$.
> **Question** : Existe-t-il un sous-ensemble consistant Y' de Y tel que $|Y'| > k$?

Ce problème est NP-complet (la preuve d'appartenance à la classe NP est immédiate, la complétude est prouvée par une restriction à SAT). Donc, $\forall m$, EXI-m appartient à la classe Σ_2^p.

Complétude pour les conséquences faibles : Pour EXI-T, considérons la transformation polynomiale suivante de 2-QBF en EXI-T : soit "$\exists a \forall b H(a,b)$" une instance de 2-QBF, posons $E = \{a_1, \ldots, a_n, \neg a_1, \ldots, \neg a_n\}$ et $\Phi = H(a,b)$. Nous prouvons ainsi que 2-QBF $\propto$ EXI-T, ce qui implique que EXI-T est Σ_2^p-complet[2].
Pour EXI-INCL, la complétude est triviale, puisque EXI-T est une restriction de EXI-INCL.
Pour EXI-LEX, nous conservons la même preuve que pour EXI-T puisque toute thèse de E, quand E est de la forme $E = \{a_1, \ldots, a_n, \neg a_1, \ldots, \neg a_n\}$ est aussi lex-préférée.

Appartenance à une classe pour les relations de conséquence argumentative : $\forall m \in \{\mathrm{T}, \textsc{Incl}, \textsc{Lex}\}$, les problèmes ARG-$m$ peuvent être résolus par l'algorithme suivant :

1. *vérifier que* $(E, \leq) \not\mid\!\sim^{\exists,m} \neg\Phi$
2. *vérifier que* $(E, \leq) \mid\!\sim^{\exists,m} \Phi$

Cet algorithme est déterministe polynomial et utilise un oracle Σ_2^p résolvant EXI-m. Ainsi, $\forall m$, ARG-m appartient à Δ_3^p.

Complétude pour les conséquences argumentatives : Nous ne prouvons pas la complétude mais nous raffinons le résultat d'appartenance, comme dans (Nebel 1991). Ainsi, nous prouvons que la plupart des problèmes ARG-m sont dans $\Delta_3^p - (\Sigma_2^p \cup \Pi_2^p)$.
Pour ARG-T, nous prouvons qu'il existe une transformation polynomiale de EXI-T en ARG-T : soit (E, Φ) une instance de EXI-T, considérons la fonction f définie par $f(E) = E \cup \{\Phi \to \ell\}$ où ℓ est une nouvelle variable propositionnelle (ℓ n'apparaît pas dans E) et $f(\Phi) = \ell$. D'autre part, il existe une transformation polynomiale de co-EXI-T en ARG-T : soit (E, Φ) une instance de co-EXI-T, considérons la fonction g définie par $g(E) = E \cup \{\neg\Phi\}$ et $g(\Phi) = \neg\Phi$.
Ainsi, EXI-T et co-EXI-T peuvent être transformés polynomialement en ARG-T. Or EXI-T étant Σ_2^p-complet et co-EXI-T étant Π_2^p-complet, supposer que ARG-T$\in (\Sigma_2^p \cup \Pi_2^p)$ implique que $\Sigma_2^p = \Pi_2^p$. On en conclut donc que ARG-T $\in \Delta_3^p - (\Sigma_2^p \cup \Pi_2^p)$.
Pour ARG-INCL, nous utilisons le fait que ARG-T est une restriction de ARG-INCL : ARG-T $\propto$ ARG-INCL. Et, puisque EXI-T $\propto$ ARG-T et co-EXI-T $\propto$ ARG-T, nous obtenons la même conclusion que pour ARG-T.
Pour ARG-LEX, comme pour ARG-T, il est possible de prouver que EXI-LEX $\propto$ ARG-LEX. Par contre, nous n'avons pas trouvé de transformation polynomiale de co-EXI-LEX (ou tout autre problème Π_2^p-complet) en ARG-LEX. Nous en concluons uniquement que ARG-LEX est Σ_2^p-difficile.

Étude de cas particuliers

Dans cette section, nous considérons deux restrictions possibles des problèmes précédemment étudiés[3]. Tout d'abord, nous supposons que la base de croyances est totalement et strictement ordonnée. Dans ce cas, E est stratifiée avec exactement une formule par strate. Puis, nous étudions le cas où le langage utilisé est restreint aux clauses de Horn.
La complexité des problèmes p-T (pour p dans {UNI, EXI, ARG}) n'est pas affectée par la première restriction, puisque le pré-ordre sur la base de croyances n'est pas pris en compte par le mécanisme de sélection T. Par contre, tous les autres problèmes deviennent équivalents à un seul problème appelé 1-STRATE.
Dans le second cas, SAT et le problème d'inférence classique deviennent polynomiaux.

Les bases stratifiées avec une seule formule par strate

Proposition 1 *Soit $<$ un ordre strict et total sur E. Il existe une et une seule thèse incl-préférée, qui est aussi la seule thèse lex-préférée – voir preuve dans (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993).*

Corollaire 1 *Les problèmes* UNI-INCL *(resp.* LEX*),* EXI-INCL *(resp.* LEX*),* ARG-INCL *(resp.* LEX*) sont équivalents à un seul problème appelé* 1-STRATE.

La complexité du problème 1-STRATE est donnée dans la table 2.

[2] Ce résultat n'est pas surprenant. Dans (Eiter & Gottlob 1993), on trouve un problème abductif A défini par : instance : $P = (V, H, M, T)$ un problème propositionnel abductif avec V un ensemble de variables propositionnelles, H un ensemble d'hypothèses (atomes propositionnels), M un ensemble de manifestations (formules propositionnelles), T une théorie consistante (formules propositionnelles), question: existe-t-il une explication pour P ? Ce problème, qui est Σ_2^p-complet, peut être transformé en EXI-T en utilisant la transformation suivante : $E = T \cup H$ et $\Phi = M$.

[3] Quand E et Φ sont des formules CNF (forme normale conjonctive), les résultats de complexité demeurent inchangés (voir (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993)).

Problème	Classe de complexité
1-STRATE	Δ_2^p-complet

Table 2: Complexité dans le cas d'une formule par strate

La preuve est donnée dans (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993). Elle est très similaire à la preuve de UNI-LEX donnée dans le cas général.

Les clauses de Horn

La base de croyances et la formule Φ sont des conjonctions de clauses de Horn propositionnelles. Les résultats de complexité sont donnés dans la table 3. Remarquons que les complexités des problèmes basés sur la cardinalité restent inchangées alors que tous les autres problèmes descendent d'un niveau dans la hiérarchie polynomiale.

Problèmes	Classe de complexité
UNI-T	co-NP-complet
EXI-T	NP-complet
ARG-T	$\Delta_2^p - (NP \cup \text{co-NP})$ si $NP \neq \text{co-NP}$
UNI-INCL	co-NP-complet
EXI-INCL	NP-complet
ARG-INCL	$\Delta_2^p - (NP \cup \text{co-NP})$ si $NP \neq \text{co-NP}$
UNI-LEX	Δ_2^p-complet
EXI-LEX	Σ_2^p
ARG-LEX	Δ_3^p

Table 3: Complexités dans le cas de clauses de Horn

Les preuves sont toutes données dans (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993). L'appartenance se prouve en gardant les algorithmes du cas général et en constatant que les oracles SAT utilisés deviennent polynomiaux dans le cas de clauses de Horn alors que les oracles propres à la cardinalité demeurent NP-complets. La complétude ou le raffinage du résultat d'appartenance sont démontrés en utilisant le type de démonstration proposée par Eiter et Gottlob dans (Eiter & Gottlob 1992) (transformation de SAT en un problème utilisant des clauses de Horn).

Comparaison avec les autres travaux

Les seuls travaux, que nous avons identifiés portant sur ce domaine, sont les papiers (Nebel 1991; Eiter & Gottlob 1992; Eiter & Gottlob 1993; Gottlob 1992). Ils concernent la complexité de problèmes différents mais pouvant se ramener à certains des nôtres. Les principaux liens que nous avons pu établir concernent :

- certaines relations d'inférence non-monotone basées sur la conséquence forte qui se ramènent aux problèmes de révision de (Nebel 1991) : UNI-T se ramène à SBR, UNI-INCL se ramène à PBR (voir les études correspondantes pour le cas général) ;
- la relation d'inférence non-monotone EXI-T qui se ramène à l'un des problèmes d'abduction de (Eiter & Gottlob 1993) (voir étude de EXI-T dans le cas général) ;
- les relations d'inférence non-monotone UNI-T, EXI-T, UNI-INCL, EXI-INCL dont les résultats sont cohérents avec ceux présentés dans (Gottlob 1992; Stillman 1990; Kautz & Selman 1991) concernant la logique des défauts de (Reiter 1980). Ceci n'est pas surprenant, puisqu'il est prouvé dans (Brewka 1989) qu'il existe un lien étroit entre la logique des défauts et la théorie de Brewka qui sert de support à la définition des relations d'inférence non-monotone étudiées ici.

Conclusion

Nous avons étudié la complexité de diverses relations d'inférence non-monotone syntaxique définies par : $(E, \leq) \mid\!\sim^{p,m} \Phi$, E dénotant un ensemble de croyances, $\leq$ une relation de priorité sur E, et p, m permettant de combiner l'inférence classique et la sélection de sous-ensembles consistants préférés. Une étude similaire pour d'autres relations d'inférence est présentée dans (Cayrol & Lagasquie-Schiex 1993) (par exemple, pour l'ordre *Best-out* de (Dubois & al. 1991), pour les *Extensions* de la logique des défauts de (Reiter 1980) – voir aussi dans (Gottlob 1992)).

Le principal intérêt de ce papier est de montrer que la majorité des relations d'inférence non-monotone syntaxique définies ici appartiennent à peu près toutes à la même classe de complexité.

Malheureusement, nous constatons aussi que ces problèmes ont une complexité exponentielle par rapport à leur taille. Bien que les complexités observées ne dépassent pas le troisième niveau de PH (Σ_2^p, Π_2^p, Δ_3^p), elles restent prohibitives.

À la recherche d'un gain en efficacité, nous avons alors étudié deux restrictions (base de croyances strictement ordonnée, base de Horn), mais *aucune* d'entre elles ne nous mène à un problème de complexité polynomiale.

Notons que la complexité est indépendante de la notion de précaution. En effet, $\forall m$, la relation ARG-m est plus prudente que EXI-m et moins prudente que UNI-m, et pourtant c'est la plus complexe des trois.

Une analyse plus poussée des résultats nous permet de distinguer la relation d'inférence non-monotone UNI-LEX qui, dans le pire des cas, ne dépasse pas le premier niveau (Δ_2^p, NP, co-NP) de la hiérarchie polynomiale. Paradoxalement, UNI-LEX n'est pas affectée par la restriction à un langage pauvre (les clauses de Horn) alors que presque toutes les autres relations la rejoignent sur le premier niveau de PH.

Ces résultats ne permettent pas d'affirmer que toute utilisation pratique de ces formalismes est impossible, en effet :

- la complexité est déjà un problème pour la logique classique (l'inférence classique est un problème co-NP-complet) et pourtant de récents algorithmes fournissent des résultats intéressants (voir les travaux sur GSAT dans (Levesque & al. 1992)) ;
- des machines massivement parallèles de plus en plus rapides pourraient peut-être permettre de repousser la frontière de l'"inutilisabilité" pratique suffisamment loin pour pouvoir traiter des instances de taille suffisante ;
- et surtout, ces résultats concernent le *pire* cas et on peut espérer que beaucoup de problèmes seront plus faciles à résoudre.

Malgré ces possibilités, il nous paraît nécessaire, afin d'envisager l'utilisation de tels formalismes sur des problèmes pratiques, d'identifier les restrictions les plus usuelles, ou même des approximations (numériques ou non) de ces problèmes qui pourront être résolues de manière plus efficace.

Nos travaux futurs porteront sur une extension de cette comparaison de relations d'inférence non monotone, mais cette fois du point de vue des propriétés telles que la monotonie rationnelle par exemple (voir (Kraus & al. 1990; Gärdenfors 1991) pour un catalogue de ces propriétés de relations d'inférence)[4].

Bibliographie

Benferhat, S., C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, et H. Prade (1993). Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. Dans R. Bajcsy (Ed.), *Proc. of the 13^{th} IJCAI*, Chambéry, France, p. 640–645. Morgan-Kaufmann.

Benferhat, S., D. Dubois, et H. Prade (1993). Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge bases. Dans D. Heckerman et A. Mamdani (Eds.), *Proc. of the 9^{th} UAI*, Washington, DC, p. 411–419. Morgan-Kaufmann.

Brewka, G. (1989). Preferred subtheories : An extended logical framework for default reasoning. Dans N. Sridharan (Ed.), *Proc. of the 11^{th} IJCAI*, Detroit, MI, p. 1043–1048. Morgan-Kaufmann.

Cayrol, C. et M.-C. Lagasquie-Schiex (1993, Septembre). Comparaison de relations d'inférence nonmonotone : étude de complexité. Rapport de recherche 93-23R, Institut de Recherche en Informatique de Toulouse (I.R.I.T.), France.

Cayrol, C., V. Royer, et C. Saurel (1992). Management of preferences in assumption-based reasoning. Dans R. Yager et B. Bouchon (Eds.), *Advanced methods in AI. Lecture notes in computer science 682*, p. 13–22. Springer Verlag. Extended version in Technical Report IRIT-CERT, 92-13R (University Paul Sabatier Toulouse).

Dubois, D., J. Lang, et H. Prade (1991). Inconsistency in possibilistic knowledge bases - to live or not to live with it. Dans L. Zadeh et J. Kacprzyk (Eds.), *Fuzzy logic for the Management of Uncertainty*, p. 335–351. Wiley and sons.

Eiter, T. et G. Gottlob (1992). On the complexity of propositional knowledge base revision, updates, and counterfactuals. *Artificial Intelligence 57*, 227–270.

Eiter, T. et G. Gottlob (1993). The complexity of logic-based abduction. Dans P. Enjalbert, A. Finkel, et K. W. Wagner (Eds.), *Proc. of the 10^{th} Symposium on Theoretical Aspects of Computing STACS*, Würzburg, Germany, p. 70–79. Springer-Verlag. Long version to appear in *Journal of the ACM*.

Gärdenfors, P. (1991). Nonmonotonic inferences based on expectations: A preliminary report. Dans J. Allen, R. Fikes, et E. Sandewall (Eds.), *Proc. of the 2^{nd} KR*, Cambridge, MA, p. 585–590. Morgan-Kaufmann.

Garey, M. R. et D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness.* New York : W.H. Freeman and Company.

Gottlob, G. (1992). Complexity results for nonmonotonic logics. *Journal of Logic and Computation 2*(3), 397–425.

Johnson, D. S. (1990). A catalog of complexity classes. Dans J. van Leeuwen (Ed.), *Handbook of Theoretical Computer Science*, Volume A : Algorithms and Complexity, Chapitre 2, p. 67–161. Elsevier.

Kautz, H. A. et B. Selman (1991). Hard problems for simple default logics. *Artificial Intelligence 49*, 243–279.

Kraus, S., D. Lehmann, et M. Magidor (1990). Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence 44*, 167–207.

Lehmann, D. (1992, Juillet). Another perspective on default reasoning. Rapport de recherche 92-12, Leibniz Center for Research in Computer Science. Hebrew University of Jerusalem, Israel.

Levesque, H., D. Mitchell, et B. Selman (1992). A new method for solving hard satisfiability problems. Dans *Proc. of AAAI-92*, San Jose, CA, p. 440–446.

Nebel, B. (1991). Belief revision and default reasoning: Syntax-based approaches. Dans J. Allen, R. Fikes, et E. Sandewall (Eds.), *Proc. of the 2^{nd} KR*, Cambridge, MA, p. 417–428. Morgan-Kaufmann.

Pinkas, G. et R. P. Loui (1992). Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict. Dans J. Allen, R. Fikes, et E. Sandewall (Eds.), *Proc. of the 3^{rd} KR*, Cambridge, MA, p. 709–719. Morgan-Kaufmann.

Reiter, R. (1980). A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence 13*(1-2), 81–132.

Stillman, J. (1990). It's not my default : The complexity of membership problems in restricted propositional default logics. Dans M. Press (Ed.), *Proc. of the 8^{th} AAAI*, Boston, MA, p. 571–578. AAAI-Press.

[4] Une étude similaire a été présentée dans (Benferhat & al. 1993), mais seulement pour le principe d'inférence UNI.