

Représentation de la connaissance probabiliste incomplète

Representation of incomplete probabilistic information

Cédric Baudrit

Didier Dubois

Hélène Fargier

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 4, France.

{baudrit, dubois, fargier}@irit.fr

Résumé :

Cet article traite de la représentation de connaissances incomplètes, incertaines ou vagues que l'on peut être amené à rencontrer quand on fait du calcul d'évaluation de risque pour l'homme et l'environnement. On considère une liste non exhaustive de ce type de connaissances. Pour chaque cas on cherche la représentation la plus fidèle possible à l'aide de différentes théories (possibilité, probabilités imprécises, fonctions de croyance...). On propose aussi quelques résultats théoriques nouveaux sur la transformation probabilité→possibilité et les familles de probabilités codées par des distributions de possibilité.

Mots-Clés :

Probabilités imprécises, Théorie des possibilités, Fonctions de croyance

Abstract:

This article deals with the representation of incomplete, vague knowledge and presents a nonexhaustive list of knowledge types which can be encountered when one makes risk evaluation calculations for man and environment. We will try to represent for each case the available information faithfully using different theories (possibility, probability, belief functions...). We will reconsider theoretical aspects such as the probability→possibility transformation and the probability families induced from possibility distributions.

Keywords:

Imprecise probability, Possibility theory, Belief functions

1 Introduction

Actuellement, les choix relatifs à la gestion des sites potentiellement pollués s'appuient, notamment, sur une évaluation des risques pour l'homme et l'environnement. Cette évaluation est effectuée à l'aide de modèles qui simulent le transfert de polluant depuis une source de pollution vers une cible vulnérable, pour différents scénarios d'exposition. La sélection des

valeurs des arguments de ces modèles s'appuie autant que possible sur les données recueillies lors des investigations de terrain (phase de diagnostic de site). Or pour des raisons de délais et de coût, l'information recueillie lors de cette phase de diagnostic est toujours incomplète; elle est donc entachée d'incertitude. Cet aspect non-probabiliste de l'incertitude doit être pris en compte dans l'évaluation du risque pour que les résultats soient réellement pertinents dans la phase décisionnelle.

L'incertitude a en effet dans le passé surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. On représente alors les arguments incertains par des distributions de probabilité. Si cette approche est bien connue, toute la difficulté est de ne pas choisir arbitrairement la forme des distributions de probabilité affectées aux arguments. En effet dans un contexte d'évaluation des risques liés à l'exposition aux polluants du sol, l'information dont on dispose concernant certains arguments est souvent de nature incomplète ou vague. Elle ne permet pas une analyse fréquentielle ni le calage d'une loi de probabilité unique sur des diagrammes de fréquences observées. Lorsque l'on est confronté à ce type de situation, la représentation de la connaissance dans un cadre possibiliste peut être jugée plus cohérente avec l'information disponible. Il peut arriver dans la pratique que certains arguments du modèle puissent effectivement être représentés par des distributions de probabilité tandis que d'autres sont mieux représentées par des distributions de possibilité (souvent des nombres flous), ou des

fonctions de croyance de Shafer, par manque d'information suffisante ([3], par exemple).

Supposons une grandeur x dont on sait seulement que $x \in [0, 1]$. Si l'on cherche à représenter la connaissance sur x par une distribution de probabilité unique, le principe de Laplace (tout ce qui est équiprobable doit être équiprobable) ou le maximum d'entropie préconisent une loi uniforme. Ce choix est contestable dans le sens où l'on apporte sur l'argument x de l'information dont on ne dispose pas. En fait il existe une infinité de lois de probabilité dont le support est inclus dans $[0, 1]$. La loi uniforme est juste l'une d'entre elles. Il serait peut être préférable de représenter la connaissance sur x à l'aide de la distribution de possibilité π telle que $\pi(x) = 1 \forall x \in [0, 1]$. En effet, π définit une famille de probabilités qui domine toutes les distributions de probabilité sur $[0, 1]$. Mais cette représentation contient trop peu d'information. En pratique on en connaît souvent plus, sans pour autant pouvoir définir une distribution de probabilité unique [11]. Cet article recense des méthodes de représentations d'information incertaines incomplètes, basées sur les liens formels entre mesures de probabilité, de possibilité et fonctions de croyance.

Dans la section 2, on rappelle les liens entre les familles de probabilités, les possibilités et les fonctions de croyances. Dans la section 3, On montrera qu'il existe une différence entre une famille de probabilités définie par une distribution de possibilité π et une famille de probabilités définie par les fonctions de répartition haute et basse déduites de π . Dans la section 4, on considère la transformation probabilité \rightarrow possibilité sous diverses hypothèses. Enfin, dans la section 5, nous présenterons une liste non exhaustive de types de connaissances que l'on peut être amené à rencontrer après une phase de recueil d'information en vue d'une évaluation des risques pour l'homme et l'environnement. On proposera pour chaque cas une représentation adaptée.

2 Représentation de Familles de Probabilités

Soit \mathcal{P} une famille de probabilités sur un référentiel Ω . Pour tout $A \subseteq \Omega$ mesurable, on définit sa probabilité supérieure $P^*(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ et sa probabilité inférieure $P_*(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A)$.

On peut interpréter tout couple de fonctions duales crédibilité/plausibilité [Bel, Pl], ou nécessité/possibilité $[N, \Pi]$ comme des probabilités inférieures et supérieures induites par une famille de probabilités :

- Soit π une distribution de possibilité induisant un couple de fonctions $[N, \Pi]$. On définit une famille de probabilités $\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall A, N(A) \leq P(A)\} = \{P, \forall A, P(A) \leq \Pi(A)\}$. Dans ce cas on a : $\sup_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = \Pi(A)$ et $\inf_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = N(A)$.
- Réciproquement, étant données $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ des sous ensembles de Ω mesurables avec leur degré de confiance $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (λ_i probabilité fournie par des experts par exemple). On définit la famille de probabilité suivante : $\mathcal{P} = \{P, \forall A_i, \lambda_i \leq P(A_i)\}$. On sait alors que $P^* = \Pi$ et $P_* = N$ (voir [4], et dans le cas infini, [2]).
- Les mesures Bel ou Pl définissent la famille $\mathcal{P} = \{P, \forall A, Bel(A) \leq P(A)\} = \{P, \forall A, P(A) \leq Pl(A)\}$. Dans ce cas on a $P^* = Pl$ et $P_* = Bel$ et $\forall P \in \mathcal{P}, Bel \leq P \leq Pl$.

On peut ainsi plonger les théories des possibilités et de Dempster-Shafer dans un cadre probabiliste tout en représentant l'imprécision. Les intervalles $[N, \Pi]$ et $[Bel, Pl]$ sont alors des encadrements de probabilités mal connues ou imprécises. Une modélisation plus directe de variable aléatoire mal connue est obtenue en considérant des paires de fonctions de répartition F^* et F_* telles que $F^* > F_*$ (Ferson [8]). $\mathcal{P}(F_* < F^*)$ est la famille de probabilités définie par : $\mathcal{P}(F_* < F^*) = \{P, \forall x, F_*(x) \leq F(x) \leq F^*(x)\}$ où F définit la fonction de répartition d'une variable aléatoire x (ie $F(x) = P([\cdot - \infty, x])$).

3 Nombre flou et fonction de répartition

Notons que si $P \in \mathcal{P}(\pi)$ pour une distribution de possibilité π , alors en posant

$$\pi^+ = \begin{cases} \pi & \text{pour } x \leq a \\ 1 & \text{pour } x \geq a \end{cases}$$

$$\pi^- = \begin{cases} \pi & \text{pour } x \geq a \\ 1 & \text{pour } x \leq a \end{cases}$$

Les fonctions $\pi^+(x) = \Pi(]-\infty, x])$ et $\pi^-(x) = 1 - N(]-\infty, x])$ peuvent être assimilées à des fonctions de répartition F^* et F_* , ce qui fournit une représentation au sens de Ferson [8]. La réciproque est-elle vraie ? peut-on reconstruire une distribution de possibilité avec ces deux fonctions de répartition ? Le résultat suivant montre la différence entre les deux modèles.

Théorème : 1 Soit π une distribution de possibilité continue unimodale de noyau $\{a\}$.

1. $\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$
2. $\mathcal{P}(\pi) \subset \mathcal{P}(F_* < F^*)$ pour $F_* = 1 - \pi^-$ et $F^* = \pi^+$.

Preuve. (1). \subseteq : Soient $P \in \mathcal{P}(\pi)$ et un intervalle du type $A = [x, y]$ contenant a . Par définition, $N(A) \leq P(A)$ équivaut à $F(y) - F(x) \leq 1 - \sup_{z \notin [x, y]} \pi(z)$, c'est à dire $F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))$. On a donc $\mathcal{P}(\pi) \subseteq \{P, \forall x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$.

\supseteq : Soit $P \in \{P, \forall x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$.

Pour $A = [-\infty, x]$ avec $x \leq a$, $F(x) + 1 - F(+\infty) \leq \max(\pi(x), \pi(+\infty)) \Leftrightarrow F(x) \leq \pi^+(x) \Rightarrow P(A) \leq \Pi(A)$.

Pour $A = [y, +\infty]$ avec $y \geq a$, $F(-\infty) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(y), \pi(-\infty)) \Leftrightarrow F(y) \geq 1 - \pi^-(y) \Rightarrow P(A) \leq \Pi(A)$.

Pour $A = [x, y]$ avec $y \leq a$, $P(A) \leq \Pi(A)$ vient du fait que $F(x) \leq \pi^+(x)$.

Pour $A = [x, y]$ avec $x \geq a$, $P(A) \leq \Pi(A)$ vient du fait que $F(y) \geq 1 - \pi^-(y)$.

Pour A union d'intervalles telle que $\Pi(A) = \pi(x) < 1$, on peut considérer un ensemble de la forme $]-\infty, x] \cup [y, +\infty[$ tel que $\pi(x) = \pi(y)$ et contenant A . En effet on aura bien $\Pi(A) = \Pi(]-\infty, x] \cap [y, +\infty[)$. On a bien $x \leq a \leq y$, ainsi $F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y)) \Rightarrow P(A) \leq \Pi(A)$.

Pour A union d'intervalles telle que $\Pi(A) = 1$, Choisissons y sur les frontières de A tel que $\pi(y)$ soit maximale. on peut considérer un ensemble de la forme $[x, y] \subset A$ tel que $\pi(x) = \pi(y)$. On a bien $\Pi(A) = 1$, de plus $x \leq a \leq y$ donc $F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y)) \Leftrightarrow F(y) - F(x) \geq 1 - \pi^-(y) \Rightarrow P(A) \geq N(A)$. On a donc montré que $P \in \mathcal{P}(\pi)$.

(2). Soit $P \in \mathcal{P}(\pi)$. Comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x) + 1 - F(y) = F(x)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \max(\pi(x), \pi(y)) = \pi^+(x)$, il vient $\Rightarrow F(x) \leq \pi^+(x)$.

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) + 1 - F(y) = 1 - F(y)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \max(\pi(x), \pi(y)) = \pi^-(y)$ donc $\Rightarrow F(y) \geq 1 - \pi^-(y)$. Ainsi on a $P \in \mathcal{P}(F_* < F^*)$.

En revanche l'autre inclusion est fautive, en effet prenons par exemple la distribution de possibilité triangulaire π de support $[0, 2]$ et de noyau $\{1\}$. Définissons $\mathcal{P}(F_* < F^*) = \{P, \forall x, 1 - \pi^-(x) \leq F(x) \leq \pi^+(x)\}$ et P une mesure de probabilité telle que $P(\{0.5\}) = 0.5$ et $P(\{1.5\}) = 0.5$. On a bien $P \in \mathcal{P}(F_* < F^*)$, cependant $P \notin \mathcal{P}(\pi)$ car $P(\{0.5\} \cup \{1.5\}) = 1 > \Pi(\{0.5\} \cup \{1.5\}) = 0.5$. On peut conclure : représenter de la connaissance par des fonctions de répartition basses F_* et hautes F^* est moins précis que la représentation par une distribution de possibilité. Notons qu'on peut supposer x et y tels que $\pi(x) = \pi(y)$ dans l'expression de $\mathcal{P}(\pi)$ (Point 1 du théorème), c'est à dire de supposer que $[x, y]$ est une coupe de π . Si I_α est l' α -coupe de π , $\mathcal{P}(\pi) = \{P, P(I_\alpha) \geq N(P(I_\alpha))\}$. Donc en posant $\forall x \leq a, f(x) = y$ si et seulement si $\pi(x) = \pi(y)$, on peut écrire la condition

1 du théorème comme suit :

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall x \leq a, F(x)+1-F(f(x)) \leq \pi(x)\}.$$

Il est clair que $F^*(x) \geq F(x) \geq F_*(x)$ implique $\forall x \leq a \leq y, F(x)+1-F(y) \leq F^*(x)+1-F_*(y)$. Donc avec des intervalles $[x, f(x)]$, où $f(x)$ est tel que $F^*(x) = 1 - F_*(f(x))$ on a $\forall x \leq a, F(x) + 1 - F(f(x)) \leq 2F^*(x)$. Donc, en posant $\pi^+(x) = \min(1, 2F^*(x))$ et $\pi^-(y) = \min(1, 2(1 - F_*(y)))$ on construit une distribution de possibilité (souvent très imprécise) π telle que $\mathcal{P}(F_* < F^*) \subset \mathcal{P}(\pi)$.

4 Transformations Probabilité → Possibilité

Nous proposons ici une représentation possibiliste d'une famille de densités de probabilité unimodales, éventuellement asymétriques, de mode, et/ou de médiane donnée sur un intervalle I .

Notons M le mode et m la médiane d'une densité de probabilité p . Les propriétés de la fonction de répartition F d'une densité de probabilité p unimodale éventuellement asymétrique à support borné I sont :

- p croissante sur $[inf(I), M] \Rightarrow F$ convexe sur $[inf(I), M]$.
- p décroissante sur $[M, sup(I)] \Rightarrow F$ concave sur $[M, sup(I)]$
- F change donc de concavité en M .
- $F(m) = 0.5$.

Supposons $m < M$. L'idée est la suivante. On considère une famille d'intervalles emboîtés $\{J_\alpha = [x(\alpha), y(\alpha)]\}$ tels que $J_\alpha \subseteq J_\beta$ si $\alpha \geq \beta$, contenant une valeur caractéristique v de p . La distribution de possibilité π telle que

$$\pi(x(\alpha)) = \pi(y(\beta)) = 1 - P(J_\alpha)$$

domine p [6].

4.1 Autour de la médiane

On choisit la famille d'intervalles emboîtés $\{J_\alpha = [F^{-1}(\alpha), F^{-1}(1 - \alpha)], \alpha \in [0, 0.5]\}$. Posons $x = F^{-1}(\alpha)$, x est le fractile d'ordre α . On

peut l'écrire $\{J_x = [x, F^{-1}(1 - F(x))], x < m\}$.

Pour $x < m : \pi(x) = 2F(x)$, pour $x > m : \pi(x) = 2(1 - F(x))$ et $\pi(m) = 1$. On a alors :

- Pour $x \in [inf(I), m]$, π est convexe, on peut donc la majorer par une interpolation linéaire de π sur $[inf(I), m]$.
- Pour $x \in [M, sup(I)]$, π est convexe, on peut donc la majorer par une interpolation linéaire de π sur $[M, sup(I)]$.
- Pour $x \in [m, M]$, π est concave, on va donc chercher à maximiser à gauche (resp minimiser à droite) la pente de F en M (resp m).

La pente de F à gauche de M peut être infinie, la pente de F à droite de M ne peut pas être en dessous de $\frac{1}{m - inf(I)}$. Ainsi pour $x \in [m, M]$, on peut majorer π en interpolant par $1 - \frac{x-m}{m - inf(I)}$.

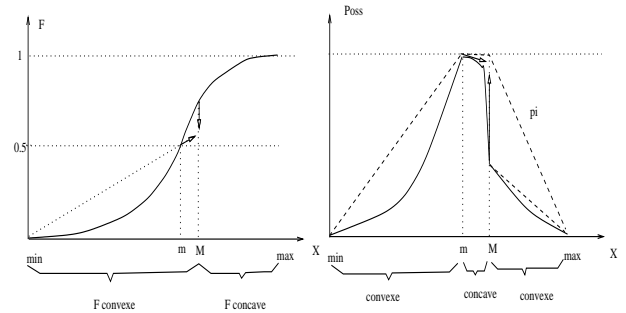


Figure 1 – Transformation de p autour de la médiane

Si on fournit x_α (resp y_α) le fractile d'ordre α (resp $1 - \alpha$) tel que $x_\alpha < M < y_\alpha$. On a $\pi(x_\alpha) = \pi(y_\alpha) = 2\alpha$. Ainsi, on peut faire des interpolations linéaires de π sur $[inf(I), x_\alpha], [x_\alpha, m], [m, M], [M, y_\alpha], [y_\alpha, sup(I)]$.

4.2 Autour du mode

La transformation optimale autour du mode est donnée par [7] : $\pi(x) = \pi(f(x)) = F(x) + 1 - F(f(x))$ où $f(x) = \max\{\omega \geq M | p(\omega) \geq p(x)\}$. Cette transformation est optimale au sens où elle fournit la distribution de possibilité la plus spécifique qui préserve l'ordre induit par p sur l'intervalle support.

Quand p est symétrique, la transformation optimale donne une distribution π convexe de chaque coté du mode (cf [9]).

Quand p est asymétrique, la distribution de possibilité π associée à p par transformation optimale n'est pas forcément toujours convexe. En effet prenons un exemple suggéré dans [6] : $p(x) = 0.6x + 1.2$ sur $[-2, -1.5]$, $p(x) = (0.2/3)x + 0.4$ sur $[-1.5, 0]$ et $p(x) = -0.2x + 0.4$ sur $[0, 2]$; π , transformée de p , n'est pas convexe partout (cf figure 4.2).

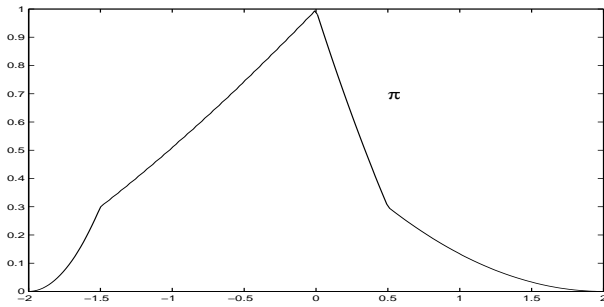


Figure 2 – Transformation de p autour du mode

Par analogie avec le paragraphe précédent, on peut choisir les intervalles de la manière suivante : $J_x = [F^{-1}(1 - F(x)), x]$ pour $x > M$. On a donc $\pi(x) = 2(1 - F(x))$ convexe. On peut associer au mode $x = M$ une valeur $\overline{M} = F^{-1}(1 - F(M))$. Ainsi pour $\inf(I) \leq x < \overline{M}$ on a : $\pi(x) = 2f(x)$ et π convexe. Pour $M \leq x \leq \sup(I)$, on a $\pi(x) = 2(1 - F(x))$ qui est aussi convexe. Pour $x \in [\overline{M}, M]$, on peut prendre $J_x = [x, M]$ et donc $\pi(x) = F(x) + 1 - F(M)$ avec $\pi(M) = 1$ et $\pi(\overline{M}) = 2F(\overline{M})$. On peut ainsi surestimer π par des interpolations linéaires sur $[\inf(I), \overline{M}]$, $[\overline{M}, M]$ et $[M, \sup(I)]$. Encore faut-il connaître la valeur \overline{M} .

5 Représentation de la connaissance incomplète

Nous proposons une liste non exhaustive de types de connaissance que l'on peut être amené à rencontrer dans le recueil de données incertaines, dans le domaine environnemental. La connaissance porte sur des arguments de mo-

dèles physiques et on notera x un argument. Nous allons essayer de proposer une représentation pour chaque cas qui sera la plus fidèle possible. On suppose que $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ avec $A = [\min, \max]$. On peut représenter cette connaissance sur l'argument x par la distribution de possibilité : $\forall x \in \mathbb{R}, \pi_X(x) = \delta_A(x)$ ou par la distribution de masse $m(A) = 1$. On enveloppe ainsi par π ou m toutes les probabilités de support A . Généralement on dispose d'un peu plus d'information : un expert peut avoir une idée d'une valeur plus plausible dans A : médiane, moyenne ou mode ; il peut aussi fournir des fractiles, des intervalles de confiance.

Ferson [8] propose déjà des représentations pour ce type de connaissances imprécises, à l'aide de paires de fonctions de répartition. Par exemple, dans le cas où on connaît le type de loi, on peut construire la famille de probabilités $\mathcal{P}(F_* < F^*)$ avec $F_*(x) = \inf_{\mu \in I} F_\mu(x)$ et $F^*(x) = \sup_{\mu \in I} F_\mu(x)$ où I est l'ensemble contenant la valeur du paramètre μ de la loi de probabilité. Ici on ne suppose rien sur le type de loi sauf qu'elle est unimodale à support borné. On utilise des mesures de possibilité ou des fonctions de croyance pour représenter cette connaissance mais on s'appuiera sur les résultats de Ferson.

5.1 Moyenne connue

Posons $moy =$ moyenne et \mathcal{P}_A^{moy} l'ensemble des probabilités de support $[\min, \max]$ et de moyenne moy . On dispose de la moyenne de l'argument x , c'est à dire $E(X) =$ moyenne où X est la variable aléatoire associée à l'argument x . Ferson [8] propose de représenter cette connaissance par une paire $[F_*, F^*]$ (fonction de répartition inférieure et supérieure). On résout les deux problèmes suivants : $F^*(x) = \sup_{E(X)=moy} F(x)$ et $F_*(x) = \inf_{E(X)=moy} F(x)$ (l'inconnue est F) La moyenne d'une variable aléatoire vérifie l'équation suivante :

$$\int_{\min}^{moy} F(y)dy = \int_{moy}^{\max} (1 - F(y))dy \quad (1)$$

Pour déterminer F^* : à x fixé on va déterminer la fonction de répartition F qui vérifie (1) et qui est maximale en x . La figure ?? suggère la méthode de détermination de F^* : le cas optimal est celui où la masse est à droite de x et où F^* y est constante.

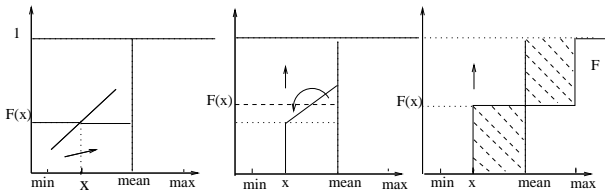


Figure 3 – Construction de $F^*(x)$

Pour F_* , on effectue un raisonnement analogue à gauche de moyenne. On obtient ainsi (exemple figure 4) :

$$F_*(x) = \begin{cases} \frac{x-moy}{x-min} & \forall x \in [moy, max] \\ 0 & \forall x \in [min, moy] \end{cases}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [moy, max] \\ \frac{max-moy}{max-x} & \forall x \in [min, moy] \end{cases}$$

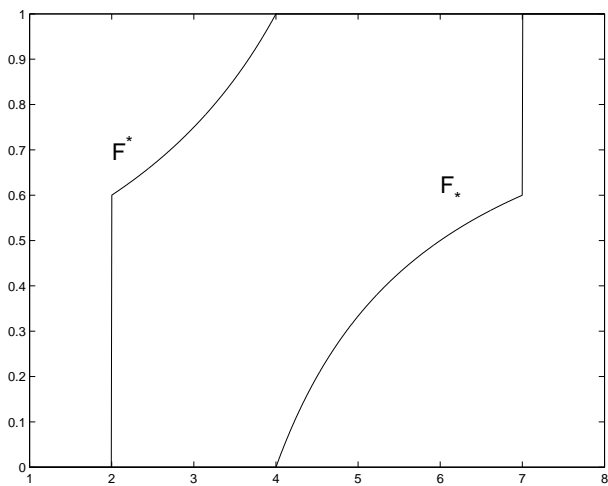


Figure 4 – $x \in [2, 7]$ et $E(X)=4$

Le couple $[F_*, F^*]$ définit la famille de probabilités $\mathcal{P}(F_*, F^*)$ qui contient \mathcal{P}_A^{moy} . La question de savoir si $\mathcal{P}_A^{moy} \subset \mathcal{P}(\pi)$ où $\pi(x) = \frac{max-moy}{max-x}$ pour $x \in [min, moy]$ et $\pi(x) = \frac{x-moy}{x-min}$ pour $x \in [moy, max]$ se pose, car la famille $\mathcal{P}(\pi)$ est plus précise que la famille $\mathcal{P}(F_*, F^*)$ (cf section 3).

5.2 Médiane connue

Notons m la médiane, et \mathcal{P}_A^{med} l'ensemble des probabilités de support $[min, max]$ et de médiane m . La médiane en terme de probabilité correspond à : $P(X \leq m) = 0.5$. Ainsi, on peut représenter cette connaissance exactement par la fonction de masse m_m telle que $m_m([min, m]) = m_m([m, max]) = 0.5$. La fonction de croyance Bel, déduite de m_m , rend compte de toutes les probabilités de médiane m . C'est à dire que : $\mathcal{P}_A^{med} = \{P, \forall C, Bel(C) \leq P(C)\}$.

5.3 Mode connu

Soit \mathcal{P}_A^{mode} l'ensemble des probabilités de support $[min, max]$ et de mode M . Ferson (cf [8]) propose de représenter cette connaissance par la famille de probabilités définie de la manière suivante : $\{P, \forall x, F_*(x) \leq F(x) \leq F^*(x)\}$ où $F^*(x) = \frac{x-min}{M-min}$ pour $x \in [min, M]$ et 1 sinon ; $F_*(x) = \frac{x-M}{max-M}$ pour $x \in [M, max]$ et 0 sinon.

Si la distribution de probabilité est symétrique, on peut être tenté de représenter cette connaissance par une distribution de possibilité triangulaire de support $[min, max]$ et de noyau $\{M\}$ (cf [6]).

Mais d'après les sections 3 et 4.2, si on ne connaît rien sur la symétrie de la distribution de probabilité, la distribution de possibilité triangulaire de support $[min, max]$ et de noyau $\{M\}$ ne contient pas nécessairement \mathcal{P}_A^{mode} . La distribution de probabilité est au pire uniforme sur $[min, M]$ ou $[M, max]$. Donc, on peut représenter cette connaissance par une distribution de possibilité π de support $[min, max]$ et de noyau $[\frac{M-min}{2}, \frac{max-M}{2}]$. Dans ce cas on est certain que $\mathcal{P}_A^{mode} \subset \mathcal{P}(\pi)$. On n'est sûr de la distribution de possibilité triangulaire comme représentation valide que si on suppose les distributions de probabilité symétriques [9, 6].

5.4 Médiane et mode connus

En utilisant les résultats de la section 4.1, on peut représenter cette connaissance par un nombre flou π trapezoidal de support $[min, max]$ et de noyau $[mediane, mode]$. De plus si la médiane coïncide avec le mode, on pourra adopter le nombre flou triangulaire de support $[min, max]$, de noyau $\{mode\}$ et être plus précis que la représentation de Ferson [8] (cf section 3). Alors, on aura : $\mathcal{P}_A^{mode, med}$, l'ensemble des probabilités de densité unimodale, de support $[min, max]$, de mode et de médiane connus, inclus dans $\mathcal{P}(\pi)$.

5.5 Fractiles connus

Un expert donne les fractiles x_1, x_2 et x_3 à 5%, 50% et 95%. Nous pourrions essayer de représenter cette connaissance à l'aide d'une distribution de probabilité en cherchant à satisfaire au mieux cet avis d'expert. Le problème porte sur le choix de la distribution (lognormale, normale, triangulaire ...). En effet il paraît clair que plusieurs types de distributions satisferont ces contraintes.

Supposons un support borné A et notons $\mathcal{P}_A^{x_1, x_2, x_3}$ l'ensemble des probabilités de densité unimodale, et de support $[min, max]$ et de fractiles x_1, x_2, x_3 . Par définition x_2 est la médiane, supposons que celle-ci et le mode coïncident. D'après ce que l'on a exposé dans la section 4, on peut représenter cette connaissance par la distribution de possibilité suivante : $\pi(x_1) = \pi(x_3) = 0.1, \pi(x_2) = 1$ et on fait des interpolations linéaires sur $[min, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3]$ et $[x_3, max]$ (cf figure 5). Ainsi on aura $\mathcal{P}_A^{x_1, x_2, x_3} \subset \mathcal{P}(\pi)$.

On peut également représenter cette connaissance de manière exacte à l'aide de la théorie de Dempster-Shafer en construisant la fonction de masse m_{fract} de la façon suivante : $m_{fract}([min, x_1[) = 0.05, m_{fract}([x_1, x_2]) = 0.45, m_{fract}([x_2, x_3[)$ et $m_{fract}([x_3, max[) = 0.05$.

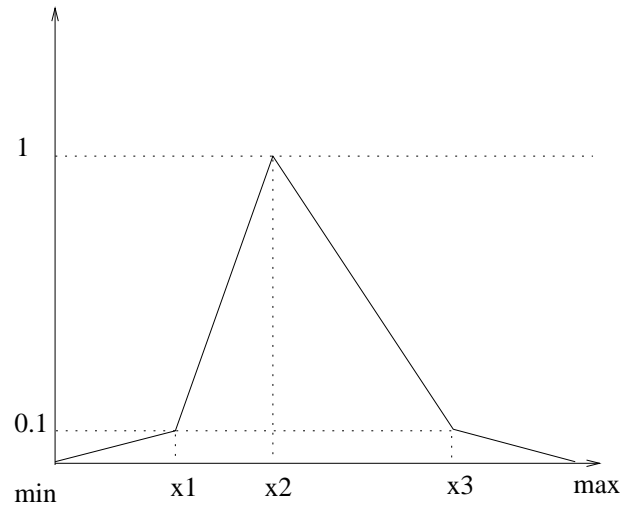


Figure 5 – Avis d'expert.

Un cas similaire connu est celui où un expert fournit un intervalle de confiance. On connaît alors le degré de certitude λ avec lequel on est sûr que $x \in A$. π définit la famille de probabilités $\mathcal{P} = \{P, \lambda \leq P(A)\}$. On peut représenter cette connaissance par la distribution de possibilité :

$$\forall x \in \mathcal{R} \quad \pi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 1 - \lambda & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

π définit la famille de probabilités $\mathcal{P} = \{P, \lambda \leq P(A)\}$. Cette information est moins précise que des fractiles : si $A = [x_1, x_3]$, on ne peut pas en déduire les probabilités attachées aux intervalles $(-\infty, x_1]$ et $[x_3, +\infty)$, sauf à supposer la symétrie.

5.6 Connaissance linguistique

Il se peut parfois que l'on ne dispose que de connaissances linguistiques comme $x \in A$ (A borné) est "**centré autour**" de la valeur " a ". On peut se raccrocher à la section 5.3 en supposant que a est un mode. Dans ce cas, cette connaissance est souvent modélisée par une distribution de probabilité triangulaire de mode a . Ce choix se justifie si on suppose une distribution symétrique. Mais on peut jouer sur la concavité-convexité de la distribution s'il s'agit d'un terme linguistique dont la fonction d'appartenance est déterminée par des moyens non-

statistiques.

6 Conclusion

On dispose, avec l'utilisation de familles de probabilités, d'un cadre formel uniforme pour représenter la connaissance imprécise sur la valeur de paramètres physiques. Dans nombre de cas, les distributions de possibilité offrent une représentation concise interprétable en termes d'intervalles de confiance. Certains types de connaissances sont directement et exactement représentables par des fonctions de croyance. Des efforts supplémentaires seront utiles pour comparer l'approche par paire de distributions de Ferson et l'approche possibiliste sur des cas particuliers comme celui d'une moyenne connue. Ce travail sert de point de départ à une étude de la gestion du risque qui nécessite la propagation de l'incertitude au travers d'un modèle numérique. Le cadre unifié proposé ici permet d'envisager un mode de propagation uniforme, malgré le caractère hétérogène des données recueillies et de faire des évaluations prudentes qui respectent le principe de précaution, ce que ne permettent pas les méthodes probabilistes classiques basées sur les méthodes de Monte-Carlo, des hypothèses de connaissances riches ou d'indépendance entre paramètres. Voir [1] pour une étude préliminaire des méthodes de propagation.

Remerciements :

Ce travail s'inscrit dans une collaboration entre l'IRIT, le B. R. G. M, l'I. R. S. N, et l'I. N. E. R. I. S.

Références

- [1] C. Baudrit, D. Dubois, H. Fargier Propagation of Uncertainty involving imprecision and Randomness. Soumis à EUSFLAT 03, Zittau, Allemagne, 2003
- [2] De Cooman G. , Aeyels D. (1999). Supremum-preserving upper probabilities. *Information Sciences*, 118, 173-212.
- [3] D. Dubois, H. T. Nguyen, H. Prade. Possibility theory, probability and fuzzy sets : misunderstandings, bridges and gaps. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Dubois, D. Prade, H. , Eds : Kluwer , Boston, Mass, 343-438 , 2000.
- [4] D. Dubois, H. Prade : When upper probabilities are possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 49, 1992, 65-74.
- [5] D. Dubois, H. Prade. Le calcul des intervalles flous. *Logique floue, principes, aide à la décision*, B. Bouchon-Meunier, C. Marsala, Réds. Paris : Hermes, 2003, 43-80.
- [6] D. Dubois, H. Prade, G. Mauris, L. Foulloy. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities. Proc. Inter. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), Annecy, 2002 (Version Longue)
- [7] D. Dubois, H. Prade, S. A. Sandri : On possibility/probability transformations. *Fuzzy Logic : State of the Art* (R. Lowen, M. Lowen, eds.), Kluwer Academic Publ. , 1993, 103-112
- [8] S. Ferson, L. Ginzburg, R. Akcakaya. Whereof one cannot speak : when input distributions are unknown. A paraître dans *Risk Analysis*, 2003.
- [9] V. Lasserre. Modélisation Floue des Incertitudes de Mesures de Capteurs. *Thèse Université de Savoie*, 1999.
- [10] G. Shafer. A Mathematical Theory of Evidence. *Princeton University Press* Princeton, 1976.
- [11] C. Rommens. Exemple simplifié de modèle d'évaluation du risque proposé comme cas d'étude de la représentation de la connaissance. *Institut de Radio-protection et de Sureté Nucléaire*, 2002.