Modèles et algorithmes pour l'aide à la décision

Rapport d'habilitation à diriger des recherches

Hélène Fargier
Institut de Recherche en Informatique de Toulouse
CNRS - Université P. Sabatier

31 octobre 2006

Table des matières

Chapitre 1

INTRODUCTION

L'aide à la décision est un sujet héritier de traditions scientifiques anciennes, particulièrement en économie, en sciences sociales et en psychologie cognitive. Les problèmes de décision sous incertitude (DMU) par exemple et dans une moindre mesure la décision multicritère (MCDM) retiennent par exemple depuis longtemps l'attention des économistes. La décision multicritère est un domaine également investi par la recherche opérationnelle et les sciences de gestion. Autre exemple, le choix social, qui est évidemment un sujet pour les sciences politiques.

Dans les quinze dernières années, l'intelligence artificielle s'est-elle aussi intéressée de près à cette problématique. Un premier groupe de travaux reprend les approches numériques utilisées en théorie de la décision et s'appuie sur le calcul d'utilités espérées ou de sommes pondérées. On la retrouve dans les diagrammes d'influence et dans les processus de décision Markoviens. Mais les années 90 ont également vu l'émergence d'approches logiques et qualitatives du problème. Cette tendance, à laquelle j'appartiens peu ou prou, est motivée par l'intérêt fondateur de l'IA pour les questions de représentation des connaissances et de raisonnement. On raisonne rarement simplement pour savoir, mais aussi pour agir. A un niveau plus théorique, certains chercheurs ont aussi vu la décision sous incertitude comme un prolongement naturel de l'étude du raisonnement – il s'agit d'exploiter, dans des situations de décision, les conclusions de raisonnements plausibles. A un niveau plus fondamental, la théorie de la décision permettait aussi de fonder au sens des approches subjectives (par exemple, au sens des fondements que Savage donne aux probabilités) les modèles qualitatifs de représentation de l'incertitude : les croyances effectives d'une personne étant révélées par son attitude en situation de décision, on peut montrer que si elle agit de telle ou telle manière, alors tout se passe comme si elle utilisait tel ou tel modèle de représentation — les fonctions de croyance, la théorie des possibilités, les modèles de croyances acceptées, etc. En poussant cette démarche jusqu'au bout la théorie de la décision peut même permettre d'isoler de nouveaux modèles de représentation de l'incertitude.

Cela dit, dans un monde pratique la proposition et la caractérisation d'un critère de décision ne suffisent pas. D'abord parce que les connaissances sur l'état du monde, comme les préférences d'ailleurs, peuvent rarement être exprimées globalement et explicitement, mais porte plutôt sur certaines variables caractéristiques des états ou sur certaines variables de décision seulement. Décider, c'est souvent poser, puis résoudre, un problème d'optimisation combinatoire. Ensuite parce que l'utilisateur n'est pas toujours prêt à exprimer ses préférences, même à l'aide d'un langage approprié, et ne veut pas qu'on décide à sa place, même à partir d'un critère identifié comme rationnellement idéal. La décision se prendra en interaction avec la machine — son rôle est d'estimer des critères, de simuler des plans, de propager des hypothèses de choix, de mettre en évidence des incompatibilités : d'aider le décideur à décider. Enfin, parce que l'utilisateur ne veut, ne peut ou ne doit pas forcément décider tout maintenant. Il veut qu'on l'aide à estimer l'état de ses stocks, à projeter la date au plus tôt de la fin de son projet, identifier les aléas qui peuvent mettre en danger le plan d'occupation de sa ressource — il s'agit plus ici de gérer le risque.

La plupart de mes travaux se rattache donc de près ou de loin à la problématique de la décision, telle qu'elle vient d'être évoquée — bref, au sens large. L'ensemble est assez éclectique, la curiosité jouant beaucoup dans mes propres choix, les cas réels et les rencontres aussi. Quelques questions sous-tendent pourtant mon travail :

- La question de la nature des informations et des moyens de les représenter, en particulier lorsqu'il s'agit de connaissances incertaines. Un premier corollaire de cette question est évidement l'opposition numérique / symbolique ; un second l'étude de l'hypothèse de commensurabilité : peut-on ramener les différentes données du problème à une même échelle d'évaluation ?
- La question de l'efficacité de la procédure de décision — est-elle suffisamment décisive, ou met-elle trop de décisions sur un pied d'égalité pour être intéressante ?
- La question de la complexité des problèmes formalisés (au sens de la théorie de la complexité), surtout en vue de ses corollaires pratiques : quel type d'algorithme utiliser et comment la contourner si elle est trop forte ?
- Enfin, la question de la proximité formelle des problèmes rencontrés et celle du sens des modèles proposés. Cette proximité formelle n'implique pas forcément que toute propriété bonne dans un domaine est souhaitable dans l'autre[1], mais permet la réutilisation d'outils techniques, par exemple d'algorithmes, une fois leur intérêt prouvé.

Cette présentation de mes travaux est structurée autour de trois thèmes – et s'articule en quatre chapitres.

Le premier thème regroupe mes travaux sur les modèles et les approches axiomatiques de la décision sous incertitude. Il inclut également mes travaux et questions sur des problèmes connexes (décision multicritère, vote, mesurage) et puisque dans un sens cela en fait partie à part entière, mes travaux sur la simple représentation de l'incertitude, plus ou moins indépendamment d'un contexte d'action. Ce thème fait l'objet des deux premiers chapitres.

Le thème (et chapitre) suivant traite des questions liées à la représentation structurée des éléments de la décision, plus précisément des langages de représentation que j'ai proposés et utilisés — souvent des variantes de la programmation par contraintes (CSP), mais pas seulement —, ainsi que difficultés (et solutions) algorithmiques posés par ce type d'approche.

Enfin, le dernier chapitre s'ouvre sur des problèmes d'aide à la décision au sens large où il n'est plus question de proposer à l'utilisateur une solution optimale ni même un critère de sélection : décision interactive en configuration de produit, approches prévisionnelles par

[1] Par exemple, il est indispensable, en choix social, qu'une coalition donnée de votants ne puisse pas imposer systématiquement son choix — ce serait une oligarchie. En revanche, en décision multicritère, il est normal que les critères prioritaires emportent la décision lorsqu'ils supportent la même préférence — ce n'est qu'en cas d'indifférence de leur part que l'on départagera les ex-aequo par les critères secondaires.

propagation de contraintes et de connaissances (en particulier en planification temporelle de tâches), ordonnancement de production, gestion du risque, etc.

Pour alléger le fil de la lecture, le corps du texte contient aussi peu de définitions formelles que possible. Mais le lecteur intéressé peut à tout moment se reporter à l'annexe A pour voir formalisées la plupart des notions utilisées dans ce mémoire.

Chapitre 2

Décision sous incertitude

2.1 Introduction

En théorie de la décision sous incertitude situations et conséquences possibles sont supposées toutes connus : on peut donc considérer un ensemble S d'états (ou situations) et un ensemble X de conséquences. Un acte, une décision, est alors représenté par une fonction $f : S \mapsto X$ qui associe à chaque situation la conséquence qu'aura l'acte s'il est choisi ; les actes sont donc bien déterministes. Mais, si tous les états et toutes les conséquences possibles sont connus, l'état réel ne l'est pas et donc les conséquences avérées des actes le sont pas non plus. De l'incertitude sur la situation vient l'incertitude sur les conséquences de chaque acte, et la difficulté du choix.

La théorie de la décision peut adopter deux types d'approches, selon qu'elle vise à prescrire, proposer des règles de décision rationnelles, ou décrire, formaliser des comportements observés chez des agents en situation de décision sous incertitude.

En simplifiant, les théories qui suivent une approche prescriptive supposent disposer a priori d'une relation d'utilité sur les conséquences ($\succeq_U$) et d'une relation de confiance sur les événements ($\succeq_L$) — ou, si on a une information plus riche, d'une fonction d'utilité et une mesure de confiance. Ces informations seraient des données objectives du problème. Une règle $R_{U,L}$ est alors proposée qui construit une préférence $\succeq$ sur l'ensemble des actes et l'on montre que, si $\succeq$ doit satisfaire tel ensemble de propriétés, alors la règle $R_{U,L}$ est celle qui doit être suivie par de décideur.

Les analyses descriptives suivent une tradition subjectiviste. Elle ne partent pas de $\succeq_U$ et $\succeq_L$ mais considèrent dès le départ une relation de préférence $\succeq$ sur l'ensemble de tous les actes possibles, i.e. sur $\mathcal{A} = X^S$. L'objectif est de décrire $\succeq$ à l'aide de deux relations $\succeq_\Upsilon$ et $\succeq_\Lambda$, d'une règle $R_{\Upsilon,\Lambda}$:

- $\succeq_\Upsilon$ est une relation de préférence sur X qui estime dans quelle mesure telle ou telle conséquence est plus intéressante que telle autre ;
- $\succeq_\Lambda$ est une relation de confiance sur 2^S qui traduit dans quel mesure on est confiant en la réalisation de tel ou tel événement (ensemble de situations) — on parle souvent de relation d'incertitude ou de relation de confiance ;
- $R_{\Upsilon,\Lambda}$ est une règle (on parle souvent également de critère), qui définit en fonction de $\succeq_\Upsilon$ et $\succeq_\Lambda$ une relation $\succeq_\Delta$ équivalente à $\succeq$. L'idée est donc de montrer que, si le décideur suit la préférence $\succeq$, *tout se passe comme si* il possédait la préférence $\succeq_\Upsilon$ et la connaissance $\succeq_\Lambda$ et qu'il décidait en fonction du critère $R_{\Upsilon,\Lambda}$

Beaucoup de travaux supposent que la préférence $\succeq$ est un préordre complet (est transitive et complète) — mais c'est une hypothèse forte : nombre de relations observées par les psychologues en situation de décision ne sont ni complètes, ni transitives. D'un autre côté, cette hypothèse a l'avantage de permettre l'identification d'un critère d'évaluation numérique (par exemple, une utilité espérée). On peut également avoir une information riche sur les conséquences et réussir à la représenter par une fonction dite *d'utilité* associant un degré d'utilité à tout x plutôt que par une simple relation $\succeq_\Upsilon$. De la même façon, il arrive que l'on puisse décrire les connaissances par une mesure de confiance sur les événements (une capacité, par exemple une probabilité).

En résumé, les analyses prescriptives visent à choisir une règle et à construire $\succeq$, les approches descriptives à représenter $\succeq$. Un écueil à éviter serait une opposition analyse descriptive/ synthèse prescriptive — elles se complètent évidement. D'ailleurs la plupart des critères ont subi les deux cribles.

Tout se passe comme si

Si l'on considère une relation de préférence $\succeq$ obtenue par une règle $R_{U,L}$, et qu'on la passe ensuite au crible d'une analyse descriptive, il peut arriver que $\succeq_L$ et $\succeq_\Lambda$ ne coïncident pas (c'est plus rare pour $\succeq_U$ et $\succeq_\Upsilon$, mais on peut imaginer de telles règles), ce qui n'est pas incohérent. Les approches descriptives suivent en effet une ligne de pensée "subjectiviste" : $\succeq_\Lambda$ est la connaissance telle qu'elle est révélée par l'action. Elle peut donc ne pas correspondre exactement à la connaissance réelle du décideur. Par exemple, le décideur peut ne disposer que d'une relation d'ignorance totale sur l'ensemble des états ($\succeq_L$ est une relation de possibilité) et, voulant que $\succeq$ satisfasse le principe d'efficacité de Pareto, se comporter comme si on disposait d'une mesure d'équi-probabilité ($\succeq_\Lambda$ serait une probabilité).

Le principe subjectiviste comme quoi c'est une situation de décision qui révèle les croyances a donc des limites : des exigences de rationalité de la décision (ici, la Pareto optimalité) peuvent amener le décideur à transformer l'expression de ses croyances (ici, appliquer le principe de Laplace, cf. [Smets, 1994]). Il n'empêche que ses croyances, elles, gardent leur structure d'origine, et que s'il se fait qu'elles évoluent, par exemple parce que de nouvelles informations arrivent, c'est sous leur forme originale qu'elles seront révisées, et non sous la forme révélée par la situation de décision antérieure.

Cette restriction vaut évidement pour les analyses descriptives. Elle peut s'appliquer aussi au cas prescriptif. Je m'explique : on suppose connu et exprimé un état de croyance ; dans le cas où il provient directement d'une mesure objective, par exemple dans le cas de probabilités fréquentistes, l'argument précédent ne peut pas être opposé ; mais s'il s'agit d'informations élicitées par une méthode de type "pari" par exemple, il s'applique encore.

Cet argument fixe les limites de la théorie de la décision, mais pas son intérêt ; il suffit de garder en mémoire que "tout se passe comme si" (de toutes façon, pourra-t-on aller plus loin ?).

Monde discret et monde continu

Les travaux issus de l'économie ont tendance à estimer que l'ensemble des conséquences est continu (grosso-modo, une conséquence est une valeur, un gain, bref, quelque chose qui peut être mesuré et ramené à un réel) ; en décision qualitative au contraire, on considère généralement que cet ensemble, ainsi que l'ensemble des situations sont discrets et finis. Généralement, je fais également cette hypothèse, pour deux raisons. La première est tout simplement que les problèmes que je veux traiter la satisfont : les situations sont décrites par des variables d'état à valeurs discrètes, généralement booléennes, les actes consistent en pratique en un nombre limité de choix pour des variables de décision, le nombre de conséquences est donc lui aussi limité. Mais il est vrai que d'autre part, on peut se demander jusqu'à quel point une grandeur peut être continue : même considérant une mesure monétaire, il y a un seuil de granularité qui fait que les conséquences et les situations sont discrètes. D'un autre côté, une représentation continue présente souvent bien des avantages, par exemple de compacité ou de manipulation mathématique.

Cela dit, ce débat sur approches discrètes et continues est surtout théorique : la plupart des modèles proposés (et tous ceux que j'ai étudiés) peuvent être définis et donc utilisés dans les deux cas. C'est lorsque l'on cherche à leur construire des fondements axiomatiques que l'alternative doit être levée.

Décider par une méthode d'agrégation/comparaison

A quelques exceptions près les travaux sur la théorie de la décision ont presque toujours fait l'hypothèse que $\succeq$ était un préordre complet — le but était de construire une fonction d'agrégation $\psi : \mathcal{A} \mapsto E \subseteq \Re$ qui permette d'évaluer l'intérêt de chaque acte, indépendamment des autres, puis de fixer la préférence en comparant les évaluations. C'est la méthode d'agrégation/comparaison. Entrent dans cette classe tous les modèles fondés sur l'agrégation d'une fonction d'utilité et une mesure de confiance :

- Le critère de l'utilité espérée, évidemment probabiliste. Il a été étudié par [VonNeumann and Morgenstern, 1947] dans une approche prescriptive, [Savage, 1954][Anscombe and Aumann, 1963] dans une approche descriptive — beaucoup d'autres travaux existent. Pour des raisons techniques, ces études font en général une hypothèse de continuité, ou se limitent à des utilités espérées particulières.
- Le modèle d'utilité dépendant du rang [Quiggin, 1982] est un modèle probabiliste fondé sur la comparaison de loteries. Il généralise le modèle de Von Neumann et Morgernstern en ce sens que l'on n'exige pas le principe de la chose sûre, battu en brèche par le paradoxe d'Ellsberg [Ellsberg, 1961], mais sa version co-monotone. On montrera plus tard qu'il revient à utiliser, dans une intégrale de Choquet, non la probabilité d'origine, mais une capacité qui en serait une distorsion [Wakker, 1990].

Encadré 1 (Le paradoxe d'Ellsberg) *Soit une urne contenant* 90 *boules dont* 30 *rouges. Les* 60 *autres boules sont soit noires soit jaunes, sans que l'on connaisse leurs proportions respectives.*
On a maintenant un premier choix entre deux jeux : le jeu A, où l'on reçoit 100 *si une boule rouge est tirée et rien sinon ; et le jeu B ou l'on reçoit* 100 *si une boule noire est tirée, et rien sinon.*
On a également un second choix à faire entre deux autres jeux, C et D : dans le jeu C on reçoit 100 *si c'est une boule rouge ou une jaune qui est tirée, et rien sinon. Dans le choix D on reçoit* 100 *si c'est une boule noire ou une jaune qui est tirée, et rien sinon.*
Les gains étant les mêmes, le décideur maximisant l'utilité espérée préférera A à B si et seulement si il croit que tirer une boule rouge est plus probable que tirer une boule noire. De la même façon, il préférera C à D si et seulement si il pense que tirer une boule rouge ou jaune est plus probable que tirer une boule noire ou jaune. Donc, si il préfère A à B, la théorie de l'utilité espérée prédit qu'il préfère aussi C à D. Et si il préfère D à C, la théorie prédit qu'il préfère B à A.

La réalité est tout autre : les expériences montrent que la plupart des gens préfèrent fortement A à B et D à C. L'hypothèse qu'il maximisent l'utilité espérée est donc violée.

- Sur la base du paradoxe d'Ellsberg, le modèle de l'utilité espérée est étendu au cas où les croyances ne peuvent pas être décrites par une probabilité unique, mais par une famille de probabilités : on parle d'a priori multiples (”multi priors”). Dans ces modèles, il existe tout un ensemble d'utilités espérées, dont pour être prudent, on retient le pire cas — c'est le modèle original de Gilboa et Schmeidler [Gilboa and Schmeidler, 1989]. Pour éviter les problèmes d'indécision de l'approche trop prudente, des combinaisons des pire et meilleur cas ont été proposées, qui intègrent éventuellement la probabilité moyenne.
- Les intégrales de Choquet [Choquet, 1953], introduites en DMU par Gilboa et Schmeidler [Schmeidler, 1986; Gilboa, 1987b]. Elles généralisent l'utilité espérée au cas non probabiliste (la fonction de croyance peut être n'importe quelle mesure monotone sur 2^S) et incluent les modèles d'utilité dépendant du rang, ainsi que les multi-priors prudents. On peut d'ailleurs comprendre toute intégrale de Choquet comme un modèle à a priori multiple dont on arbitre le pire et le meilleur cas [Jaffray and Philippe, 1997].
- Les intégrales de Sugeno — voir [Dubois and Prade, 1995b] pour une approche prescriptive du cas possibiliste et [Dubois *et al.*, 1998d] dans une approche descriptive — sont les contreparties ordinales des intégrales de Choquet. Comme ces dernières, les intégrales de Sugeno supportent n'importe quel type de mesure de confiance monotone sur 2^S, mais elles considèrent que la mesure n'indique qu'un niveau de croyance sur une échelle éventuellement numérique mais en tous cas purement ordinale (les nombres ne valent ici que parce qu'ils codent un ordre).
- La théorie des ordres de grandeurs d'utilités espérées (Order of magnitude expected utilities, [Pearl, 1993; Wilson, 1995; Bonet and Geffner, 1996; Giang and Shenoy, 2000]) qui, à partir de l'ordre de grandeur de l'utilité de chaque conséquence et à l'ordre de grandeur de la probabilité de chaque état calcule l'ordre de grandeur de l'utilité espérée de chaque acte, et fonde ainsi la prise de décision.

Les approches qualitatives de la théorie de la décision

Parmi les modèles proposés plus haut, certains sont fondamentalement numériques, en ce sens qu'ils s'appliquent lorsqu'une information riche est disponible sur les utilités des conséquences, et sur la confiance en la réalisation des événements. Ces informations sont additives, la notion de distance, de soustraction, a un sens. La plupart des axiomatisations des critères à utilité additive (utilité espérée, a priori multiples, Choquet [1]) ont d'ailleurs souvent besoin de poser une hypothèse de continuité, soit sur S, soit sur X.

D'autres approches essaient d'envisager la décision de manière plus qualitative, soit dans le but de représenter le raisonnement et la prise de décision des décideurs humains, soit simplement parce qu'elles considèrent des situations où l'hypothèse d'une information riche ne peut pas être satisfaite en pratique. En général, toutes ces approches sont ordinales, et l'on retomberait dans l'opposition méthodes numériques / méthodes qualitatives,

[1] J'utilise ce terme à dessein pour les intégrales de Choquet, bien que l'on parle souvent de modèle non additifs en ce qui les concerne. On les appelle ainsi car la mesure de croyance n'est pas nécessairement additive ; il n'empêche que les utilités des conséquences sont elles bel et bien additives au sens numérique du terme.

avec d'un côté des méthodes très discriminantes mais requérant une information (très) riche, et de l'autre côté des méthodes adaptées à des données ordinales, mais ayant un très faible pouvoir de décision.

Mon idée était que cette opposition était mal posée. Si l'on suit une approche descriptive, tout est a priori relationnel. Les nombres ne font que coder une relation de préférence. Il devait donc y avoir une frange et compatibilité entre approches qualitatives et approches "efficaces". Rien n'interdit, même si les données du problème ne sont qu'ordinales, de "compter" le nombre d'objets présents à chaque niveau d'utilité. Ce principe est à la base des critères leximax et leximin, qui sont pourtant compatibles avec les approches possibilistes, et j'ai pu montrer qu'en l'utilisant en décision sous incertitude, on pouvait obtenir des utilités espérées ... qualitatives. Ces résultats sont présentés en section 2.3.

D'autre part, toutes les approches quantitatives et la plupart des approches qualitatives de la théorie de la décision font une hypothèse forte de commensurabilité entre échelle d'utilité des conséquences et échelle de mesure de la plausibilité des événements sont commensurables – sinon, l'agrégation de l'utilité d'un événement avec sa plausibilité ne serait pas possible. Une des raisons de cette hypothèse, qui n'est que rarement explicitée, est que l'on cherche à caractériser chaque acte par une mesure sur une échelle complètement ordonnée et donc à obtenir une relation de préférence qui soit un préordre complet : $\succeq$ doit être réflexive, complète et transitive. La réflexivité de $\succeq$ est bien sûr une propriété évidente. Sa complétude ne semble pas aussi immédiate. $\succeq$ représente en effet la préférence au sens large. Elle possède évidement une partie symétrique, $\sim$, qui exprime l'indifférence entre deux actes, une partie asymétrique $\succ$ qui exprime la préférence stricte. Mais il peut arriver que l'on ne soit pas indifférent sans pour autant être capable de préférer l'un des deux actes – ils sont incomparables. La complétude de $\succeq$ ne va donc pas de soi. Sa transitivité ne va pas forcément de soi non plus (l'indifférence n'est pas toujours transitive, en fait), alors que l'on peut plus raisonnablement estimer que la préférence stricte est transitive, i.e. que $\succeq$ est quasi-transitive, ou pour le moins exiger que la préférence stricte est acyclique.

Mon deuxième axe de recherche a abordé la question de la commensurabilité des données en jeu, et m'a amenée a proposer des critères de décision qui ne font pas cette hypothèse. Ceci a permis de présenter des modèles capable de rendre compte de situations où les hypothèses de complétude et de totale transitivité ne sont pas satisfaites. Je présente ce travail dans la section suivante.

2.2 Commensurabilité ou Non-Commensurabilité des axes d'incertitude et d'utilité ?

Un point commun important entre toutes les approches présentées plus haut est qu'elles font une hypothèse de commensurabilité entre l'échelle d'utilité (notons la E_u) et celle sur laquelle on exprime les degrés de confiance (E_σ) : on ne peut pas exprimer les deux fonctions indépendamment l'une de l'autre (voir encadrés 2 et 3).

Dans une approche ordinale, cela veut dire que l'évaluation de l'utilité u d'une conséquence x ne place pas seulement x par rapport aux autres conséquences, mais aussi par rapport aux événements : $u(x) \geq \sigma(A)$, σ étant une mesure de la confiance en l'occurrence de l'événement A, signifie que l'acte constant f_x est au moins aussi intéressant que le pari $x^\top A x_\perp$ [2]. Une petite variation de la manière dont les niveaux de E_u s'intercalent vis à

[2] f_x dénote l'acte qui a x pour conséquence dans toutes les situations et pour toute paire de conséquence

vis de ceux de E_σ peut changer la relation de préférence. Et c'est exactement le même problème en utilité espérée, une fois que l'on a pris la précaution de ramener l'utilité sur l'échelle unitaire (l'utilité espérée n'est pas sensible aux transformations linéaires). De plus, dans les approches à utilité additive, la valeur du degré d'utilité est importante : dire que $3.u(y) > u(x) > 2.u(y)$ ne signifie pas seulement que x est une meilleure conséquence que y, mais aussi que, dans une situation d'équiplausibilité des états du monde, il faut au moins trois chances d'obtenir y pour dépasser l'intérêt d'une chance d'obtenir x.

Encadré 2 (Le problème de la commensurabilité – utilité espérée) *Prenons un ensemble de conséquences* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ *muni de l'ordre de préférence* $x_1 \succ_U x_2 \succ_U x_3 \succ_U x_4$*, et un ensemble d'états* $S = \{s_1, s_2\}$*, avec la connaissance* $\{s_1\} \sim_L \{s_2\}$

Une seule distribution de probabilité est compatible avec $\{s_1\} \sim_L \{s_2\}$ *: celle qui pose* $p(s_1) = p(s_2) = 0.5$*. Différentes fonctions d'utilité conviennent en revanche pour coder* $\succ_U$ *— considérons par exemple* u_1 *et* u_2 *:*

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	*0.9*	*0.6*	*0.4*	*0.3*
u_2	*0.7*	*0.6*	*0.4*	*0.1*

Prenons maintenant les actes :

	s_1	s_2
f	x_1	x_4
g	x_2	x_3

Avec la première fonction d'utilité, l'espérance mathématique de l'utilité de f *(*0.6*) est meilleure que celle de* g *(*0.5*), avec la seconde, c'est le contraire (*g *reste à* 0.5 *mais* f *a une utilité espérée de* 0.4*).*

Encadré 3 (Le problème de la commensurabilité – utilité possibiliste) *Reprenons les actes de l'encadré 2. La sensibilité au choix de* u *semble disparaître avec l'utilité pessimiste. Puisque l'on est en situation d'ignorance totale, on doit utiliser la distribution de possibilité* $\pi = 1$*. La mesure d'utilité pessimiste, définie par*

$$U_{pes}(f) = \max_{\lambda \in E_u} \min(Necessite(\{s, u(f(s)) \geq \lambda\}), u)$$

donne f *et* g *ex-æquo avec* u_1 *comme avec* u_2*.*

Cela ne concerne malheureusement que les cas d'ignorance totale. Si la connaissance était : $\{s_1\} \succ_L \{s_2\}$*, différentes distributions de possibilité pourraient convenir, par exemple par* $\pi(s_1) = 1$ *and* $\pi(s_2) = 0.5$*, et différentes fonction d'utilité — considérons* u_1 *et* u_2 *:*

	x_1	x_2	x_3	x_4
u_1	*0.4*	*0.3*	*0.2*	*0.1*
u_2	*0.9*	*0.8*	*0.7*	*0.6*

A partir de u_1*, l'utilité pessimiste de* f *est de* 0.4 *et celle de* g *de* 0.3*. Si l'on considère plutôt* u_2*, on obtient* 0.6 *pour* f *et* 0.7 *pour* g*.*

Cette inversion des préférences est due au fait que le critère calculé exploite une information supplémentaire, qui n'est pas comprise dans $\succeq_U$ *et* $\succeq_L$ *: la façon dont les degrés de*

x, y, xAy dénote l'acte ayant la conséquence x si l'événement A se réalise, et la conséquence y si il ne se réalise pas. Le lecteur trouvera en annexe A un récapitulatif de toutes les notations et définition utilisées.

possibilité et d'utilité sont positionnés sur l'échelle commune, ou de manière équivalente la relation $\succeq_{U,L}$ *définie sur* $X \cup S$ *par :*

$$\begin{array}{llllll} s_i \succeq_{U,L} s_j & \Leftrightarrow & \pi(s_i) \geq \pi(s_j) & x_i \succeq_{U,L} x_j & \Leftrightarrow & u(x_i) \geq u(x_j) \\ s_i \succeq_{U,L} x_j & \Leftrightarrow & \pi(s_i) \geq u(x_j) & x_i \succeq_{U,L} s_j & \Leftrightarrow & u(x_i) \geq \pi(s_j) \end{array}$$

L'utilisation de u_1 *suppose l'ordre :* $s_1 \succ_{P,L} s_2 \succ_{P,L} x_1 \succ_{P,L} x_2 \succ_{P,L} x_3 \succ_{P,L} x_4$ *tandis que celle de* u_2 *présuppose* $s_1 \succ_{P,L} x_1 \succ_{P,L} x_2 \succ_{P,L} x_3 \succ_{P,L} x_4 \succ_{P,L} s_2$*, ce qui explique les résultats divergents. Cela dit, le modèle possibiliste est plus robuste que l'utilité espérée, en ce sens qu'il n'est pas sensible aux transformations de l'échelle : du moment que l'ordre sur* $S \cup X$ *est respecté, le changement n'affectera pas la préférence sur les actes.*

La question de la commensurabilité m'a longtemps préoccupée. Dans un cadre purement relationnel, à la Savage, commensurabilité ne s'impose pas du tout, ni même dans un cadre prescriptif. On peut très facilement utiliser des règles du type : "je préfère f à g si la possibilité d'avoir de bonnes conséquences est plus forte avec f qu'avec g" (pour les optimistes) ou "je préfère f à g si la possibilité d'avoir de mauvaises conséquences est moins forte avec f qu'avec g (pour les pessimistes). Ou encore, étant donné un niveau d'intérêt, f est bon si la plausibilité que f soit meilleur que ce seuil est assez forte, f est mauvais sinon. Etc. Dans toutes ces règles, on forme des événements en comparant les actes point à point (sur s_1, sur s_2, etc). Puis on ordonne les actes en évaluant les plausibilités de ces événements. Peut-être peut-on faire l'inverse : considérer l'événement le plus plausible, et sur cet événement, comparer les vecteurs d'utilité obtenus (avec un critère connu de comparaison de vecteurs — voir section 2.4.2). C'est ce que font [Cohen and Jaffray, 1980; Boutilier, 1994; Brafman and Tennenholtz, 1996; 1997; 2000; Thomason, 2000] par exemple.

Pour ma part, je me suis intéressée à la recherche de ce que peuvent être des approches qui ne suivent pas d'hypothèse de commensurabilité (cf. [Fargier and Perny, 1999a] et articles suivants ; je pense que les deux articles les plus intéressants pour le lecteur sont [Dubois *et al.*, 2003b] et [Dubois *et al.*, 2002] car plus clairs et présentant une axiomatisation plus aboutie). L'idée était de traduire la non-commensurabilité par un axiome d'invariance ordinale : dans une approche sans commensurabilité, l'axe des utilités doit être complètement indépendant de celui des degrés de confiance. Donc, si l'on a comparé f et g et décidé par exemple $f \succeq g$, modifier sans les inverser les conséquences de f et g en un état ne doit pas inverser la préférence globale : tout ce qui compte, c'est la position des conséquences. Ceci se traduisait par un axiome d'invariance ordinale stipulant que si, sur chaque état, $f(s)$ se positionne par rapport à $g(s)$ de la même façon que $f'(s)$ par rapport à $g'(s)$, alors f se positionne par rapport à g de la même façon que f' par rapport à g' ($f \succeq g \Leftrightarrow f' \succeq g'$) [3].

On peut alors montrer que cet axiome force l'utilisation d'une règle de dominance plausible (nous avons aussi parlé d' "invariance ordinale"), i.e. une règle du type

$$f \trianglerighteq g \Leftrightarrow \{s, f(s) \succeq_{\Upsilon} g(s)\} \succeq_{\Lambda} \{s, g(s) \succeq_{\Upsilon} g(s)\}$$

Si l'on possède une description probabiliste de nos connaissances f sera préféré à g si la probabilité qu'il domine g est plus forte que celle que g le domine. Ce type de règle est l'analogue, en décision sous incertitude, des règles de décision par paire proposées dans le

[3] Je pense maintenant que cet axiome est trop fort, ne serait ce que parce qu'il n'est pas respecté par certains modèles — Brafman et Tennenholtz [Brafman and Tennenholtz, 2000] par exemple proposent d'évaluer un acte par le critère de Wald appliqué aux états les plus plausibles seulement : cette règle ne fait aucune hypothèse de commensurabilité, mais viole l'axiome d'invariance ordinale

système Electre ou des systèmes de vote à la Condorcet (A préféré à B si l'ensemble des votants exprimant cette préférence est plus grand de celui exprimant l'autre choix). Les travers de ce type de règle ne sont pas évités : on peut obtenir une préférence (stricte !) cyclique — c'est ce qu'on appelle un effet Condorcet.

Encadré 4 (L'effet Condorcet dans la règle de dominance par probabilité) *Considérons trois conséquences $x, y, z \in X$ telles que $x \succ_P y$, $y \succ_P z$, $x \succ_P z$ et prenons $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ avec les probabilités $p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = 1/3$. Comparons les actes suivants avec la règle de dominance plausible :*

$$f = x\{s_1\}y\{s_2\}z\{s_3\}, \;\; g = y\{s_1\}z\{s_2\}x\{s_3\} \text{ and } h = z\{s_1\}x\{s_2\}y\{s_3\}$$

f est meilleure que g avec une probabilité de $2/3$ (f domine g sur $\{s_1, s_2\}$), g surclasse h avec une probabilité de $2/3$ (g domine h sur $\{s_1, s_3\}$), mais h domine f avec une probabilité de $2/3$ également ! On a donc le cycle intransitif $f \succ g$, $g \succ h$ et $h \succ f$.

Tous les modèles respectant l'axiome d'invariance ordinale ne souffrent pas, heureusement, de cet effet ; il ne se produit pas par exemple si la mesure de confiance est une nécessité. Nous avons en fait caractérisé rigoureusement l'ensemble des règles permettant l'obtention d'une relation de préférence rationnelle (monotone, réflexive et au moins quasi-transitive) et ordinalement invariante : la structure de confiance sous-jacente doit former une hiérarchie d'événements. En haut de la hiérarchie, les états "normaux", les plus plausibles, puis les exceptions usuelles, les cas rares, etc., en descendant les branches de la hiérarchie. Ce type de relation est ce que l'on appelle une relation de croyance acceptée, ou relation d'acceptance, en raisonnement non-monotone – voir Chapitre 3

Si cette relation est un préordre complet, on a pu montrer qu'elle encodait une hiérarchie d'oligarchies d'états. Les états du premier niveau comparent f et g ; si tous sont indifférents, on passe la main au niveau inférieur. Sinon ils décident par une règle d'unanimité (qui conduit soit à l'expression d'une préférence stricte, soit, s'il y a conflit, à une incomparabilité).

Ce type de résultat est le pendant des résultats de Arrow (existence d'un dictateur, quand $\succeq$ est un préordre complet) et de Weymark en Choix Social (existence d'une oligarchie, quand $\succeq$ est réflexive et quasi-transitive). La nouveauté ici porte sur deux points : on montre qu'en DMU on a les mêmes théorèmes d'impossibilité ; et l'on montre surtout que l'on ne décide pas seulement avec une oligarchie, mais avec une hiérarchie d'oligarchies.

Ces résultats n'ont pas un sens aussi négatif qu'en choix social : l'équivalent d'un dictateur, c'est un état quasiment certain ; l'équivalent d'une oligarchie, c'est l'ensemble des "état normaux" d'où découlent les croyances acceptées ("accepted belief") d'une base de croyances. Ces règles de plausible dominance, très qualitatives, sont donc tout à fait en accord avec les travaux de l'IA sur les raisonnement tolérant les exceptions. D'ailleurs, la présence d'une oligarchie première rend ces règles très proches des propositions de l'IA de ne décider que sur la base des états les plus plausibles [Boutilier, 1994; Tan and Pearl, 1994; Brafman and Tennenholtz, 1996; 1997; 2000; Thomason, 2000].

Là où il y a un problème, c'est que ce type de règle est très peu décisif : dès que deux états du premier niveau s'opposent l'un à l'autre, les deux actes sont jugés incomparables.

Par rapport à la question "est il possible de prendre des décisions sur la base d'un modèle rationnel et purement qualitatif, sans faire d'hypothèse de commensurabilité ?", la réponse est donc oui. Et, puisque nous concluons que la relation de confiance doit être une relation de croyance acceptée, notre travail donne des fondements, en termes de décision, aux modèles du raisonnement qui reposent sur ce type de sémantique.

Mais si il est possible de décider sans faire d'hypothèse de commensurabilitité, cela n'est pas pour autant efficace : à moins d'être dans une situation de quasi-certitude, les règles proposées sont peu discriminantes. Comment alors relaxer légèrement nos exigences pour obtenir des modèles plus efficaces ? On pourrait imaginer relaxer l'axiome de quasi-transitivité en un axiome d'acyclicité de $\succ$ — mais empruntant aux résultats du choix social, il est probable que là encore, les modèles compatibles avec l'acyclicité seront trop particuliers.

L'autre option est de relaxer l'axiome OI, de le rendre moins exigeant. Cet axiome pose une exigence "qualitative" ($f \succeq g$ ne dépend que des préférences sur chaque état, et non des valeurs données aux conséquences *i.e* la préférence est ordinale), mais aussi une condition d'indépendance vis à vis des autres actes ($f \succeq g$ dépend des conséquences de f et de g, mais pas de leur position par rapport à d'autres actes, *i.e.* $\succeq$ est indépendant du contexte). C'est ce volet indépendance qu'il faudrait assouplir. On pourrait non seulement rendre compte de plus de modèles intuitivement non-commensurables [4] mais aussi ouvrir la porte à l'étude et à la caractérisation de règles capables de décision non commensurable même hors du cadre des fonctions d'acceptance – je pense à des règles de "dominance stochastique" au sens large. En prenant un acte h comme point de référence spécifiant le niveau d'aspiration du décideur, on peut par exemple proposer les règles :

$$f \trianglerighteq_h^+ g \Leftrightarrow \{s, f(s) \succeq_\Upsilon h(s)\} \succeq_\Lambda \{s, g(s) \succeq_\Upsilon h(s)\}$$

$$f \trianglerighteq_h^- g \Leftrightarrow \{s, h(s) \succeq_\Upsilon g(s)\} \succeq_\Lambda \{s, h(s) \succeq_\Upsilon h(s)\}$$

$$f \trianglerighteq g \Leftrightarrow \forall x, \{s, f(s) \succeq_\Upsilon x\} \succeq_\Lambda \{s, g(s) \succeq_\Upsilon x\}$$

Dans la troisième version, la référence est un acte constant que l'on fait varier sur toute l'échelle des conséquences.

On peut continuer dans ce sens et proposer des règles inspirées des procédures de leximin ou leximax en choix multicritère :

$$f \trianglerighteq g \Leftrightarrow \exists x * \text{ tel que } \quad \left\{ \begin{array}{lll} \{s, f(s) \succeq_P x\} & \simeq_L & \{s, g(s) \succeq_P x\}, \quad \forall x >_P x* \\ \{s, f(s) \succeq_P x^*\} & \succ_L & \{s, g(s) \succeq_P x^*\} \end{array} \right.$$

$$f \trianglerighteq g \Leftrightarrow \exists x * \text{ tel que } \quad \left\{ \begin{array}{lll} \{s, f(s) \succeq_P x\} & \simeq_L & \{s, g(s) \succeq_P x\}, \quad \forall x <_P x* \\ \{s, f(s) \succeq_P x^*\} & \prec_L & \{s, g(s) \succeq_P x^*\} \end{array} \right.$$

Bref, des modèles existent qui semblent a priori plus pertinents que la règle de dominance plausible et la question de la commensurabilité me semble encore largement ouverte.

[4] e.g. [Brafman and Tennenholtz, 2000][Giang and Shenoy, 2000] — ces modèles ne me satisfont pas d'un point de vue prescriptif car les états n'étant pas au plus haut niveau ne prennent aucune part à la décision, même au second rang ; l'intégration de ces modèles est néanmoins indispensable du point de vue descriptif.

2.3 Décision qualitative et/ou modèles quantitatifs ?

Les modèles de la théorie de la décision issus des sciences économiques sont, on l'a vu, essentiellement fondés sur des utilités additives au sens fort, c-à-d autorisant des formes de compensation, alors que l'IA a plutôt recherché à construire des modèles "qualitatifs", basés sur des interprétations ordinales de l'utilité, voire sur les approches purement comparatives. Par exemple :

- L'utilité optimiste qualitative : à partir d'une distribution de possibilité et d'une fonction d'utilité évaluant l'intérêt des conséquences sur la même échelle que la distribution, elle estime l'intérêt d'un acte par le degré de possibilité qu'il ait une bonne utilité — il est maximal à partir du moment où il existe un état entièrement plausible où l'acte donne la meilleure des conséquences (et ce, quels que soient les autres cas), et n'est nul que lorsque dans tous les états un tant soit peut plausibles l'acte a la pire des conséquences.
- L'utilité pessimiste qualitative : toujours dans un cadre possibiliste elle estime l'intérêt d'un acte par le degré de nécessité qu'il ait une bonne utilité — il est minimal dès que l'acte porte une mauvaise conséquence pour un état plausible, et n'est maximal que lorsque dans tous les états un tant soit peu plausibles l'acte a la meilleure des conséquences.
- Les intégrales de Sugeno ou "utilités qualitatives monotones" forment une famille qui inclut les deux cas précédents : à partir d'une mesure de confiance monotone, elle estime l'intérêt d'un acte par la confiance que l'on a dans le fait que l'acte ait de bonnes conséquences (par exemple, la possibilité qu'il ait de bonnes conséquences).
- La théorie des ordres de grandeur d'utilités espérées (Order of magnitude expected utilities) admet que, qualitativement, on a essentiellement accès à l'ordre de grandeur de l'utilité de chaque conséquence et à l'ordre de grandeur de la probabilité de chaque état. On peut alors rapidement obtenir l'ordre de grandeur de l'utilité espérée de chaque acte, et fonder ainsi la prise de décision.

La question de l'ordinalité ne se confond pas avec celle de la commensurabilité : les intégrales de Sugeno sont qualitatives et font une hypothèse de commensurabilité des échelles, une règle d'utilité moyenne sur les états les plus plausibles serait à la fois non commensurable et additive au sens numérique du terme.

Si les approches ordinales sont assez convaincantes d'un point de vue "cognitif" (mentalement, nous nous se contentons souvent de raisonner sur les ordres de grandeur des évaluations d'utilité et de plausibilité que nous possédons) et pratique (on peut les appliquer quand on ne dispose pas d'une information aussi riche que les évaluations à base de coûts et de probabilité demandent), le problème est qu'elles souffrent d'effets de noyade (voir l'encadré 5 ci-dessous) et sont peu décisives.

Encadré 5 (L'effet de noyade dans l'intégrale de Sugeno) *Étant donné une capacité γ qui évalue la plausibilité des événements, et une fonction d'utilité u sur les conséquences, l'intégrale de Sugeno évalue, pour tout acte f, son utilité qualitative. Elle s'écrit :*

$$US_{\gamma,u}(f) = \max_{x \in X} \min(u(x), \gamma(F_x))$$

F_x étant l'ensemble des état pour lesquels f donne une conséquence au moins aussi bonne que x (aussi bonne au sens de u). L'effet dit "de noyade" est lié à l'utilisation, dans l'intégrale de Sugeno, d'opérations idempotentes – le max et le min.

Quand deux actes donnent par exemple une bonne et même conséquence pour deux événements plausibles, ils obtiendront la même évaluation globale, et ce même s'il ont des conséquences significativement différentes dans d'autres états. Le principe d'efficacité de Pareto ne sera pas respecté.

Prenons par exemple un ensemble d'état $S = \{s_1, s_2\}$ *un ensemble de conséquences* $X = x, y, z$ *et les deux actes* f *et* g *décrits ci dessous.*

s	s_1	s_2
$f(s)$ $(u(f(s))$	x (0.7)	z (0.9)
$g(s)$ $(u(g(s))$	x (0.7)	y (0.8)

avec $u(x) = 0.7, u(y) = 0.8, u(z) = 0.9$

Considérons trois capacités γ_1, γ_2 *et* γ_3 *contenant la même information ordinale quant à la plausibilité relative des états (*s_1 *est plus plausible que* s_2 *lui même non impossible) :*

	$\emptyset$	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
γ_1	0	0.8	0.2	1
γ_2	0	1	0.2	1
γ_3	0	0.8	0	1

γ_1 *est une mesure de probabilité,* γ_2 *et* γ_3 *sont respectivement les mesures de possibilité et de necessité construites sur la distribution* $\pi(s_1) = 1$, $\pi(s_2) = 0.2$.

On peut vérifier que, pour chacun des γ_i *:*

$$\begin{aligned} S_{\gamma_i,u}(f) &= max(min(0.9, \gamma_i(\{s_2\})), min(0.7, \gamma_i(\{s_1, s_2\})) &= 0.7 \\ S_{\gamma_i,u}(g) &= max(min(0.8, \gamma_i(\{s_2\})), min(0.7, \gamma_i(\{s_1, s_2\})) &= 0.7 \end{aligned}$$

Ainsi $S_{\gamma_i,u}(f) = S_{\gamma_i,u}(g), \forall i$, *alors que* f *domine strictement* g *(*$u(f(s_1)) = u(g(s_1))$ *et* f *a une meilleure conséquence en* s_2*).*

Ici, l'effet de noyade est dû à l'opération max : dans l'évaluation de $S_{\gamma_i,u}(f)$ *comme dans celle de* $S_{\gamma_i,u}(g)$, *le max extérieur est déterminé par le terme* $min(0.7, \gamma_i(\{s_1, s_2\})$, *lequel est égal à 0.7. Le second terme (*$min(0.9, \gamma_i(\{s_2\})$ *pour* f, $min(0.8, \gamma_i(\{s_2\})$ *pour* g*) n'est pas pris en compte.*

Un second "effet de noyade" peut exister, qui dépend de l'opérateur min : supposons que l'utilité de x *descende et prenne la valeur* 0. *Dans ce cas, le terme* $min(0.7, \gamma_i(\{s_1, s_2\})$ *doit être remplacé par* $min(0, \gamma_i(\{s_1, s_2\})$, *terme qui est égal à* 0. *Donc, pour chacune des capacités, le max sera cette fois déterminé par le premier terme, c'est à dire par* $min(0.9, \gamma_i(\{s_2\}) = \gamma_i(\{s_2\})$ *pour* f *et* $min(0.8, \gamma_i(\{s_2\}) = \gamma_i(\{s_2\}$ *pour* g *— puisque* $\gamma_i(\{s_2\} < 0.8$. *Ainsi, la domination* f *sur* g *dans l'état* s_2 *test noyée par le fait que* $\gamma_i(\{s_2\})$ *est très faible.*

Enfin, on pourrait noter qu'il existe parfois un troisième effet de noyade, inhérent à la capacité elle même ; les mesures de plausibilité ne sont en effet pas tenues d'être préadditives ni même de respecter le principe d'efficacité de Pareto (appliqué aux mesures, il s'écrit $\gamma(B) > 0 \implies \gamma(A \cup B) > \gamma(A)$*). Les probabilités comparatives le respectent évidement, mais pas les mesures de possibilité ni les mesures de plausibilité au sens de Shafer.*

Il faudrait pour le moins que la règle de décision, même qualitative, satisfasse le principe d'efficacité de Pareto : si f est au moins aussi bonne que g en tous les états plausibles, et meilleure en certains, ce principe veut qu'elle lui soit strictement préférée. Il est en général assuré par la satisfaction du principe de la chose sûre (STP) : les conséquences identiques sur un état donné ne jouent aucun rôle dans la comparaison des actes. Dans le cas d'une relation transitive, le STP implique en effet les principes de Pareto (i.e. la monotonie et le principe d'efficacité).

Le problème, c'est que reprenant une fois de plus le théorème d'Arrow, on peut montrer [Marichal, 1997; Fargier and Sabbadin, 2000; 2003] que les seuls cas où une approche par intégrale de Sugeno possibiliste peut satisfaire totalement le principe de la chose sûre sont ceux où ... il n'y a aucune incertitude (l'état certain joue le rôle du dictateur du théorème de Arrow).

Mais la difficulté peut être contournée, et de plusieurs manières. La première est tout simplement de ne pas tenir compte, dans la règle de décision, des états qui sont indifférents [Fargier and Sabbadin, 2000] : pour comparer f et g, on évalue leur utilité par le critère d'agrégation original, mais en réduisant le référentiel aux états qui portent des conséquence différentes. Ces règles étendent au cas de la décision sous incertitude les principes de comparaison de type discrimin [Behringer, 1977]. Dans le cas possibiliste, cela revient à remplacer les conséquences communes par la conséquence neutre (la meilleure dans le cas pessimiste, la pire dans le cas optimiste). Ce principe rétablit le STP, mais perd la transitivité de l'indifférence ; ce qui n'est pas choquant en soit mais empêche de récupérer le principe d'efficacité de Pareto. C'est pourquoi nous n'avons pas poussé l'étude de ces règles plus avant.

La seconde [Fargier and Sabbadin, 2003; 2005] est d'imaginer une règle qui produise un raffinement de la règle originale (de l'utilité optimiste par exemple) c'est à dire qui départage les actes originalement jugés indifférents — l'idée serait de les départager par simple application du principe d'efficacité de Pareto. [Dubois *et al.*, 2000] proposent de raffiner l'utilité pessimiste par la règle optimiste, mais cela ne suffit malheureusement pas à assurer le respect du STP. En fait, puisque Savage a montré que, à peu de choses près, seule l'utilité espérée permet de produire un préordre complet qui respecte le STP, notre idée a été tout simplement de raffiner le critère possibiliste par une utilité espérée qui ne biaise pas l'information originale : il s'agit de transformer la distribution de possibilité en une distribution de probabilité ordinalement équivalente et de transformer de la même façon l'évaluation ordinale de l'utilité en une utilité numérique. L'hypothèse de commensurabilité s'appliquant, les deux transformations ne peuvent pas être indépendantes l'une de l'autre. Plusieurs couples de transformations peuvent exister, mais elle conduisent sauf exceptions très particulières, toujours à la même relation de préférence. En fait, tous les raffinements robustes et sans biais d'une utilité possibiliste optimiste (resp. pessimiste) par une utilité espérée sont équivalents.

Encadré 6 (La transformation par "grandes marches" [Fargier and Sabbadin, 2003]) *La fonction χ^* qui suit, applicable à tout élément $L = (\alpha_0 = 1_L > \cdots > \alpha_k = 0_L)$, permet de raffiner tout ordre construit par une expression de type $max_{i=1,N} min(a_i, b_i)$ en un ordre représentable par une somme de produits – $\sum_{i=1,N} \chi^*(a_i).\chi^*(b_i)$:*

$$\chi^*(\alpha_k) = 0; \qquad \chi^*(\alpha_i) = \frac{v}{N^{2^{i+1}}}, i = 0, k-1$$

$\chi^*(L)$ est la série $\frac{v}{N^2}, \frac{v}{N^4}, \frac{v}{N^8}, \frac{v}{N^{16}}, \frac{v}{N^{32}}, \ldots, 0$ où v est un facteur de normalisation [5].

Donc, si l'on transforme une distribution de possibilité π par χ^*, on peut obtenir une distribution de probabilité $p = \chi^* \circ \pi$ en posant; $v = 1/(\sum_{i=0,k-1} \frac{n_i}{N^{2^{i+1}}})$. L'utilité

[5] L'extrême amplitude des écarts entre les niveaux atteints par les produits justifient l'appellation de "transformation à grandes marches"

optimiste, qui s'exprime par $max_s min(u(f(s)), \pi(s))$ *peut alors être raffinée par l'utilité espérée fondée sur* p *et* $u' = \chi^* \circ u$ – $EU(f) = \sum_s \chi^*(\pi(s))\ .\ \chi^*(u(f(s)))$.

L'utilité de Sugeno, qui s'exprime par $\max_{\lambda_i} min(\lambda_i, \sigma(F_{\lambda_i}))$ *peut être raffinée de manière similaire par une somme de produits :* $\sum_{\lambda_i} \chi^*(\lambda_i)\ .\ \chi^*(\sigma(F_{\lambda_i}))$. *Cette somme peut alors être transformée en un intégrale de Choquet [Dubois and Fargier, 2005].*

Nous avons pu montrer que ces utilités espérées représentent des règles de comparaison ordinales en ce sens qu'elles ne font qu'encoder des généralisations des procédures leximin et leximax de comparaison de vecteurs [Deschamps and Gevers, 1978; Moulin, 1988] et ne fonctionnent que sur des opérations de comparaison soit de degrés, soit de cardinalités d'ensembles. Aucune compensation n'est possible entre degrés différents ; on a affaire à des utilités espérées à (très) grandes marches : une marche $\chi^*(\pi(s))\ .\ \chi^*(u(f(s)))$ ne peut jamais être rattrapée par une somme de marches plus petites. Ces marches étant des produits, les degrés de probabilité et d'utilité fournis par les transformations suivent une loi doublement exponentielle. Les probabilités sous-jacentes sont des "probabilités à grandes marches" au sens de [Dubois *et al.*, 1998c][Dubois and Fargier, 2004] et des cas particuliers de probabilités lexicographiques de [Blume *et al.*, 1991], [Lehmann, 1998]. On en reparlera au chapitre 3. Ce qu'il faut remarquer ici, c'est que des modèles de DMU existent déjà [La Valle and Fishburn, 1992], qui utilisent soit des probabilités à grandes marches, soit des utilités à grandes marches [Hammond, 1998; Lehmann, 1998], mais que dans ces modèles la caractéristique lexicographique n'est présente que dans l'une des deux dimensions (soit les niveaux de plausibilité des états, soit les niveaux d'utilité des conséquences). Les utilités espérées à grandes marches opèrent sur les deux dimensions en même temps – d'où la *double* exponentielle.

Contrairement à ce que nous avons écrit dans [Fargier and Sabbadin, 2003], on peut trouver des cas d'utilité optimiste (ou pessimiste) possédant des raffinement probabilistes sans biais qui ne sont pas équivalents au raffinement par utilité espérée à grandes marches. La source de notre erreur était double :

- D'une part, ces cas sont très particuliers et excluent les cas les plus classiques : ignorance totale, égalité des échelles d'utilité et de possibilité.
- D'autre part, nous prenions pour acquis le principe de pessimisme de Wald. Or, contrairement à ce que l'on admet, l'utilité possibiliste pessimiste ne le satisfait pas (voir l'exemple présenté par l'encadré 7) ! Donc rien ne force son raffinement à le satisfaire .

Ces erreurs corrigées, on peut montrer que la classe d'équivalence des raffinements sans biais est unique pour peu que l'on exige la satisfaction du principe de pessimiste de Wald (ou d'optimisme, pour le cas dual) ou celle d'un simple principe de robustesse de la transformation à des variations sur π.

Encadré 7 (L'utilité pessimiste ne satisfait pas le principe de Wald)
Dans cet exemple, quatre états sont possibles $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ *et l'échelle d'évaluation contient six niveaux —* $L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. *L'état* s_4 *devrait normalement advenir, les autres étant cependant plausibles. On considère deux actes* f *et* g *définis comme suit :*

	s_1	s_2	s_3	s_4
$\mu(f)$	*1*	*1*	*1*	*5*
$\mu(g)$	*2*	*2*	*2*	*5*
$\mu(f')$	*5*	*5*	*5*	*0*
$\mu(g')$	*4*	*4*	*4*	*0*
π	*3*	*3*	*3*	*5*

Raisonnons à l'aide du critère pessimiste de Wald conçu pour comparer des actes en situation d'ignorance totale : le meilleur de deux actes est alors celui dont la pire des conséquences est la moins grave. Il ne s'applique par directement à cet exemple, mais il fonde le raisonnement suivant : si l'on veut comparer f et g de manière pessimiste, on doit s'intéresser aux conséquence les plus graves en premier lieu. L'état le plus plausible, s_4, ne joue donc aucun rôle dans la comparaison car f et g reçoivent la même excellente conséquence dans cet état. On peut alors simplement appliquer le critère de Wald sur les états décisifs restant, c'est à dire sur $S \setminus \{s_4\}$ — tous ces états sont équiplausibles. On déciderait alors que g est préféré à f. D'un autre côté, l'utilité possibiliste dans sa version prudente, U_{pes}, dirait que f et g sont indifférents.

*Le problème est que les utilités des actes sur l'ensemble des états décisifs, (*1 *pour f et* 2 *pour g) ne sont pas pris en compte, car masqués, par le faible degré de surprise des états décisifs ($n(\pi) = 2$).*

Cet exemple est développé dans [Fargier and Sabbadin, 2005], où nous avons formalisé l'application principe de pessimisme de Wald dans le cas equiplausible : pour tout un ensemble d'états équi-plausibles A, si la pire des conséquences de f sur A est strictement meilleure que la pire des conséquences de g sur ce même ensemble, et si f comme g ont la meilleure des conséquences à l'extérieur de A, alors f doit être préféré (strictement) à g. C'est cet axiome de pessimisme qui est violé par U_{pes}.

En résumé, non seulement il existe des utilités espérées tout à fait compatibles avec les utilités possibilistes, mais on a aussi tout à fait intérêt à les utiliser : tout en restant ordinales, elles produisent une préférence plus fine, sont efficaces au sens de Pareto et permettent de récupérer le principe d'optimisme (resp. de pessimisme) auquel peut paradoxalement échapper l'utilité possibiliste optimiste (resp. pessimiste).

Ce travail devrait permettre de reprendre l'application au cas séquentiel des principes de décision possibilistes. Dans les processus de décision markoviens possibilistes [Fargier *et al.*, 1998; Sabbadin, 2001] l'intérêt d'une police donnée est obtenue en agrégeant par des opérations min et de max des degrés de possibilité et d'utilité des transitions — d'où, encore une fois, un faible pouvoir de décision, une perte du principe de Bellman et l'impossibilité d'utiliser des méthodes d'apprentissage par renforcement ; utiliser simplement le codage par utilité espérée des utilités possibilistes permet de récupérer directement les algorithmes du domaine, sans fausser le modèle en termes de solution optimale.

D'autre part, on peut se poser la question des raffinements efficaces des modèles ordinaux — des intégrales de Sugeno. On ne peut pas espérer les voir satisfaire le principe de la chose sûre : en effet, la plupart des capacités ne satisfont même pas la version faible de cette propriété et il peut arriver que la modification des conséquences communes puisse complètement renverser la préférences entre les actes (et non pas simplement la noyer comme dans le cas possibiliste). Aucun raffinement satisfaisant le STP ne pourra donc être construit, puisqu'il faudrait respecter deux préférences strictes inverses ($fAh \succ gAh$

et $gAh' \succ fAh'$). Cependant, l'intégrale de Sugeno ne produit pas de renversement de préférence lorsque l'on modifie les conséquences communes d'actes co-monotones : on peut donc raffiner une intégrale de Sugeno par une intégrale de Choquet et récupérer ainsi le principe de la chose sûre pour les actes co-monotones (voir [Dubois *et al.*, 2003d; 2003e; Dubois and Fargier, 2005] pour plus de détails).

L'idée d'une approche *qualitative* de la décision sous-tend tous les travaux évoqués dans les paragraphes précédents. Elle était latente dans les études sur la non-commensurabilité : l'axiome d'invariance ordinale que nous avons utilisé traduisait une vue très qualitative des utilités des conséquences. L'idée d'une prise de décision qualitative est encore plus évidente dans les motivations des approches ordinales (intégrales de Sugeno) et on a vu qu'elle n'exclut pas les approches numériques — puisque dans le cas fini une utilité espérée, numérique donc, peut très bien encoder un raisonnement qualitatif sur la cardinalité des niveaux d'ordres de grandeur (comparaisons de type leximin, leximax, etc). En poussant ce raisonnement à l'extrême, on peut dire que, dans le cas fini au moins, toutes les analyses subjectives "à la Savage" sont qualitatives : on cherche à représenter une relation entre objets — de manière éventuellement numérique mais les nombres ne font qu'encoder des ordres de grandeur et/ou des principes de compensation. D'ailleurs les représentations numériques ne sont pas uniques lorsqu'il n'y a pas de phénomène de compensations entre éléments (états ou conséquences) de niveaux différents et quand il y a compensation, c'est la condition de normalisation qui permet de récupérer l'unicité.

Il reste encore un peu d'espace pour une vision intrinsèquement quantitative de la prise de décision — dans un monde de mesures continues et d'informations quantitatives qui soient plus que comparatives (par exemple, des probabilités fréquentistes) — mais à mon sens assez peu s'il s'agit de rester proche du raisonnement humain [Gigerenzer *et al.*, 1999; Benferhat *et al.*, 2004].

2.4 Problèmes connexes

Les problèmes de décision sous incertitude tels que présentés plus haut sont formellement des problèmes de comparaison de vecteurs $f = (f(s_1), \ldots, f(s_n))$ à composants non indépendants (i.e. où l'importance d'un groupe de composants n'est pas forcément une simple combinaison des importances individuelles). Ces importances sont souvent représentées par une mesure d'ensemble sur S, une capacité, et forment une donnée du problème. Dans le cas de la décision sous incertitude, où chaque composant correspond à un état, il s'agit de la relation de confiance. Mais ce type de modèle peut exprimer d'autres classes de problèmes, par exemple des problèmes de choix multicritère et des problèmes de vote dans lesquels les critères, ou les votants (qui jouent le même rôle qu'ici les états) s'expriment sur la même échelle. Il peut également être simplifié pour traiter de problèmes de comparaison de vecteurs à composants indépendants (comme par exemple les problèmes de satisfaction de contraintes floues) ou au contraire être étendu pour traiter de problèmes de comparaison de matrices, par exemple des problèmes de choix ou de partage multi-agents (chaque agent fournit un vecteur d'utilité pour évaluer un objet). Mes quelques contributions à ces problèmes connexes sont résumées dans les sections ci-dessous.

2.4.1 Décision sous incertitude, choix social et décision multicritère

En DMU, on peut dire que la question est de classer des objets (des actes) en fonction d'une fonction d'utilité ou relation de préférence sur les conséquences et d'une relation d'importance entre groupes d'états (la capacité) qui code la confiance que l'on a en la réalisation des différents évènements.

En Choix social, le problème est de classer un ensemble d'objets (des candidats, des décisions) en fonction des préférences d'un ensemble de votants $S = \{1, \ldots, n\}$: chacun fournit une relation $\succeq_{U_i}$ ou une utilité u_i sur les objets. Lorsque tous les votants n'ont pas des pouvoirs égaux, il faut également tenir compte d'une relation d'importance $\succeq_L$ sur 2^S. On appelle *profil de vote* un vecteur dont les composants sont des préférences $\succeq_{U_i}$ et on limite à un ensemble $\mathcal{P}$ les vecteurs admissibles (il ne doivent par exemple contenir que des relations quasi-transitives). Il faut alors construire une procédure de choix social "universelle", c'est à dire capable de fournir un classement $\succeq$ sur les objets à partir de n'importe lequel des profils admissibles.

En MCDM, ce sont les critères qui évaluent ou classent les objets : l'ensemble $S = \{1, \ldots, n\}$ est comme dans le cas précédent fini. Chacun d'entre eux fournit sa préférence sous la forme d'un élément x_i d'un ensemble ordonné X_i (ici aussi, on peut considérer soit une utilité u_i soit une relation $\succeq_{U_i}$). Sans perte de généralité, l'ensemble des objets à classer est alors identifié avec l'ensemble des évaluations : $X_1 \times \cdots \times X_n$, tout le problème étant de construire une relation $\succeq$ à partir des $\succeq_{U_i}$, en tenant éventuellement compte d'une relation d'importance $\succeq_L$ qui compare groupes de critères. C'est toute la problématique du mesurage conjoint [Luce *et al.*, 1990], qui inclut et déborde la simple question du choix multicritère.

Donc :

- En posant $\mathcal{P} = X_1 \times \cdots \times X_n$, on peut comprendre un problème MCDM comme un cas de choix social mono-profil (chaque critère/votant n'exprimant qu'une seule préférence sur les objets à classer).
- Dans un problème de DMU, l'ensemble X des conséquences est naturellement ordonné par $\succeq_U$ ou dans le cas numérique, par u. En posant $X_1 = \cdots = X_n = X$ et en considérant la relation de confiance comme une relation d'importance sur 2^S, tout problème de DMU peut être vu comme un problème de choix multicritère.
- Et donc, si l'on considère les états comme des votants, les actes comme des candidats, et les relations de préférence $f \succeq_i g \Leftrightarrow f(s_i) \succeq g(s_i)$ — ou les votes $u_i(f) = u(f(si))$ — tout problème de DMU est un problème de choix social mono-profil dont les votants ne sont pas forcément égaux (l'importance des coalitions est une traduction de la relation de confiance sur les événements[6]). Le cas de la décision sous ignorance totale se traduisant par une situation de choix social où toutes les coalitions ont des rôles symétriques.

Ces analogies sont à manipuler avec précautions : ce n'est pas parce qu'un modèle est bon (ou mauvais) dans un contexte qu'il est bon (ou mauvais) dans l'autre. En choix social, l'égalité des votants est un principe sain. En DMU ou en MCDM, elle se traduit par une restriction du cadre aux cas d'ignorance totale et d'équi-importance des critères.

[6] En choix social, on ne prend en compte qu'une seule relation d'importance mais l'axiome d'universalité demande que la règle soit applicable sur tout un ensemble de profils. En DMU, ce serait plutôt la situation inverse : le profil est évidement unique, mais on voudrait pourvoir imposer un principe de robustesse en considérant toute une famille de relations de confiance.

Inversement, l'existence d'un dictateur est choquante en choix social, alors qu'en DMU, la structure correspondante traduit simplement la situation de certitude totale (il serait dommage de la proscrire à priori) — en choix multicritère elle se traduit par l'existence d'un critère dominant, ce qui est souvent un gage d'efficacité.

En revanche, il faut pouvoir utiliser ces analogies — nos théorèmes de représentation pour la décision sans commensurabilité peuvent être vus comme des variantes des théorèmes de Weymark et de Arrow. De la même façon, si on les transpose aux problèmes de mesurage conjoint ils fournissent une axiomatisation pour les systèmes de concordance à la Electre [Roy, 1968; 1973; 1996]. L'axiome OI en particulier peut être plongé dans ce contexte et compris comme un axiome de non-compensation à la Fishburn [Fishburn, 1976].

On trouvera dans [Fargier and Perny, 1999b; 2001; Dubois *et al.*, 2002; 2003c] la transposition aux problèmes de mesurage conjoint/choix multicritère de notre réflexion sur la non-commensurabilité. Il y est montré formellement qu'elle fonde les règles de comparaison par paires et souffre des même limites que son pendant en décision sous incertitude. Ces travaux ont été repris par [Bouyssou *et al.*, 2001; Bouyssou and Pirlot, 2002b; 2002a]. Pour compléter la transposition, il faudrait ajouter à ces résultats la mise en évidence d'une hiérarchie d'oligarchies de critères en dessous de l'oligarchie principale et analyser de la relation d'importance sous-jacente — on sait que formellement, elle respecte les axiomes des relations d'acceptance ; mais quel sens cela a-t-il dans un monde multicritère ?

En ce qui concerne le choix social, la transposition reste à faire, mais son intérêt ne me semble pas évident. Dans ce domaine, l'incommensurabilité est de mise, et les théorèmes de Arrow et continuateurs fixent depuis longtemps les limites des systèmes qui veulent faire cette hypothèse. L'existence d'une oligarchie ou d'un dictateur est une conséquence rédhibitoire et rend peu intéressantes les règles que nous avons identifiées — peu importe alors la forme de la règle et le type de relation entre les oligarchies. L'extension à ces domaines de nos travaux sur les raffinements des utilités possibilistes par des utilités espérées me semble beaucoup plus intéressante que celles des règles sans commensurabilité, du fait du caractère très égalitariste des procédures de leximin et leximax.

2.4.2 Comparaison de Vecteurs

Les problèmes de décision sous incertitude tels que présentés plus haut sont, on l'a vu, formellement des problèmes de comparaison de vecteurs à composantes éventuellement non indépendantes.

Si on le simplifie, en posant que les composantes sont indépendantes et non pondérées, on obtient un simple problème de comparaison de vecteurs : se rangent dans cette classe les problèmes de décision sous ignorance totale, les problèmes de vote non pondérés (un vecteur contient les candidats choisis par les différents votants), certains problèmes de partage simple (un vecteur contient la part que reçoit chaque agent dans un partage donné), des problèmes de satisfaction de contraintes floues ou valuées et plus largement des problèmes d'agrégation de vecteurs d'utilité.

On peut classer la comparaison de vecteurs simples en trois groupes d'approches :

- Dans un premier groupe, la décision est fondée sur des comparaisons par paires de vecteurs — on peut classer dans ce groupe les méthodes de surclassement à la majorité, la comparaison par Pareto-optimalité, voire les méthodes de regret. Ici, il n'y a pas forcément d'hypothèse sur la commensurabilité des échelles sur lesquelles

les composants s'expriment.

- Dans un second groupe d'approches on utilise directement une fonction d'agrégation (max, min, somme, etc) pour ramener chaque vecteur d'utilités à un nombre (les utilités sont supposées avoir été exprimées numériquement). Pour éviter les effets de noyade dus à certaines de ces fonctions (typiquement, min et max) et assurer le respect du principe d'efficacité de Pareto, on peut n'agréger que les composantes discriminantes des deux vecteurs à comparer — c'est le principe que l'on applique dans la règle du discri-min.
- Enfin, on peut utiliser ces fonctions d'agrégation dans des versions pondérées par rang — il s'agit de donner aux éléments des vecteurs une importance dépendant de leur rang (OWA, leximin, leximax, k ième -meilleur, etc).

J'étais (et je suis encore) particulièrement convaincue par l'intérêt du leximin comme approche qualitative des problèmes de comparaison de vecteurs. Au point de vue théorique, c'est en fait une extension au cas flou d'une comparaison par cardinalité de la même façon que le discrimin est une procédure de comparaison par inclusion d'ensembles flous (chaque vecteur étant vu comme un ensemble flou ; voir [Fargier, 1994; Dubois *et al.*, 1996b] pour plus de détails). Au niveau pratique surtout, c'est la seule procédure permettant à la fois de conserver le caractère ordinal, égalitariste, pessimiste, complet et transitif du min, et de satisfaire le principe d'efficacité de Pareto. Et, contrairement au discrimin, c'est un préordre complet, ce qui permet la mise au point d'algorithmes efficaces [Schiex *et al.*, 1995; Dubois and Fortemps, 1999; Fargier *et al.*, 2004a]. Ajoutons que le cas fini se code facilement par une somme de poids à grandes marches, ce qui simplifie encore sa manipulation.

2.4.3 Comparaison de Matrices

D'autres applications ne peuvent pas se ramener simplement à la comparaison de vecteurs, mais demandent un cadre un peu plus général, capable de comparer des matrices. C'est le cas par exemple pour certains problèmes de choix ou de partage multi-agents (chaque agent fournit un vecteur d'utilité sur les objets qu'il compare), de fusion de bases de connaissances pondérées (chaque formule fournit une évaluation de chaque interprétation et chaque base évalue donc l'interprétation par un vecteur), de décision multicritère sous ignorance (un coefficient indique l'utilité d'un acte pour un critère et un état donné). A la rigueur, on pourrait même dire que les problèmes de DMU possibilistes sont représentables par des matrices à deux colonnes (un ligne est un couple (possibilité, utilité)).

Les approches par fonction d'agrégation s'étendent évidement sans difficulté des vecteurs aux matrices. Le principe est d'agréger d'abord chaque ligne indépendamment des autres par un opérateur $\bigotimes$ — ou par autant d'opérateurs $\bigotimes_i$ qu'il y a de lignes (par exemple, d'agents : chacun peut disposer d'une règle propre pour évaluer son utilité propre). La comparaison des deux matrices revient alors à la comparaison de deux vecteurs : chacun est agrégé par un $\bigoplus$ (ici, un seul $\bigoplus$, bien sûr) et il n'y a plus qu'à comparer deux évaluation globales. Bref, on utilise des intégrales $(\bigoplus, \bigotimes)$: sommes de produits, agrégation (max/min) ou (max, +) par exemple.

La grosse difficulté avec ce type d'approche comme avec toutes celles qui reposent sur les fonctions d'agrégation est de pouvoir normaliser les utilités atteintes par les différents agents sur une échelle commune permettant le calcul de l'utilité globale. Du fait de sa simplicité, il a pourtant été souvent proposé, en particulier pour la fusion de bases de connaissances pondérées et pour la fusion de bases représentant les préférences d'agents [Lafage and Lang, 2000; Konieczny *et al.*, 2002; Benferhat and Kaci, 2003; Konieczny and PinoPérez, 2005] — Lafage et Lang [2000] par exemple considèrent que la désutilité d'un agent pour un choix f est la somme des poids de ceux de ses désirs que f ne satisfait pas, et que la désutilité sociale (globale) de f, à minimiser, est celle atteinte par le moins satisfait des agents. J'ai également utilisé ce type d'approche pour un problème de partage équitable de prises de vue ; pour circonvenir le problème de la commensurabilité des échelles, les utilités des agents sont normalisées (elles sont ramenées à la proportion de l'utilité qu'il aurait eu si il avait été le seul exploitant de la ressource). Le principe de l'agrégation était de choisir des poids exponentiellement décroissants pour les prises de vue (des grandes marches) et d'utiliser comme agrégateur interne la somme, la comparaison externe étant le leximin.

Ce travail était une première tentative d'extension des procédures leximin/leximax à la comparaison de matrices : on réalisait en fait une procédure de leximin sur les deux dimensions (explicitement entre les ligne, implicitement dans les lignes). Réflexion faite, le principe de la généralisation explicite du leximin à deux dimensions est pourtant simple [Fargier and Sabbadin, 2003]. En effet, si l'on possède un moyen quelconque de produire un préordre complet $\trianglerighteq$ sur des vecteurs (par exemple selon la somme, le min, le leximin, le leximax, ...), il devient facile de comparer des matrices par une procédure $leximin(\trianglerighteq)$: on reclasse les lignes de la matrice par ordre croissant selon $\trianglerighteq$, puis on applique la comparaison des deux matrices par ligne, de la première à la dernière (ou, pour une procédure $leximax(\trianglerighteq)$, de la dernière à la première) : dès que deux lignes de même niveau ne sont pas indifférentes, la meilleure au sens de $\trianglerighteq$ l'emporte.

Encadré 8 (Comparaison de deux matrices par la procédure leximax(leximin))
Soit les matrices $F = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

En ordonnant les éléments de lignes par ordre croissant, puis les lignes par ordre décroissant selon l'ordre leximin, on obtient :

$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\tilde{G} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

En effet, $(5,3) \succ_{lmin} (2,3) \succ_{lmin} (1,1)$ *et* $(5,3 \succ_{lmin} (4,1) \succ_{lmin} (2,1)$.

On compare ensuite les matrices ligne à ligne, obtenant finalement $F \succ_{lmax(lmin)} G$ *puisque* $(5,3) \sim_{lmin} (5,3)$ *et que* $(2,3) \succ_{lmin} (1,4)$

On peut se demander s'il est possible de généraliser de la même façon d'autres OWA — oui, évidement, il faut alors deux vecteurs de poids, l'un pour agréger les lignes, l'autre pour agréger le vecteur résumant les lignes : c'est par exemple ce qui se passe quand on encode une procédure leximax(leximin) par une utilité espérée afin de raffiner la règle max(min) de l'utilité possibiliste optimiste.

Voila pour les quelques propositions de règles d'agrégation de matrices sur lesquelles j'ai pu travailler. Tout reste à faire en ce qui concerne leur étude et leur caractérisation axiomatique.

Chapitre 3

Représentation de l'incertitude

Les théories de la décision sous incertitude s'appuient évidement sur la question du raisonnement avec des connaissances incertaines et de manière plus fondamentale encore, sur la question de la représentation de l'incertitude.

Bien sûr, on peut toujours éviter la question en supposant connaître a priori la nature des informations et utiliser le type de capacité adapté (grosso modo, une probabilité, une possibilité/necessité, une plausibilité/croyance), voire dans les cas les plus complexes des familles de distributions, ou des distributions de second ordre (possibilités sur les probabilités, etc) — puis, en fonction des propriétés désirées, on utiliserait tel modèle de raisonnement ou tel modèle de décision. C'est un peu le principe des approches de type von Neumann et Morgenstern.

Les approches subjectives m'ont fait comprendre que la question est pourtant fondamentale : sauf données objectives, issues d'expériences, on n'a que des expressions des connaissances incertaines, de l'incertitude. D'une part, ce n'est pas parce qu'elles sont exprimées numériquement qu'elle le sont (il y a codage numérique), il ne faut donc pas forcément prendre les chiffres pour argent comptant. D'autre part, on l'a vu, les situations de décision révèlent les croyances, mais peuvent biaiser leur expression (en situation d'ignorance totale, par exemple l'exigence de Pareto-efficacité fait que tout se passe comme si il y avait équiprobabilité, mais ne permet pas de déduire que les connaissances sont probabilistes).

Les modèles de décision sous incertitude m'ont amenée à utiliser des cadres de représentation de l'incertitude dont certains, pour n'être pas tout à fait inconnus, n'étaient pas cernés en tant que tels : les capacités comparatives, qui généralisent au cas d'ordres partiels la notion de capacité ; les relations d'acceptance ; les probabilités à grandes marches ; et enfin les raffinements préadditifs simples des capacités (typiquement, les discri-possibilités). J'ai alors essayé de les définir, de les étudier et de les caractériser hors du contexte décisionnel, en tant que simples formalismes de représentation de l'incertitude.

Dans ce chapitre, je développerai deux de ces modèles, les capacités comparatives et les modèles de représentation de croyances acceptées (en particulier, les probabilités à grandes marches). Puis j'essaierai de montrer que la notion de capacité n'est souvent pas suffisante pour représenter la connaissance d'un agent : la capacité est souvent l'expression, optimiste ou pessimiste, de cette connaissance.

3.1 Capacités comparatives

Nous avons défini les capacités comparatives comme étant des relations entre événements, et plus généralement entre sous-ensembles d'un même référentiel, réflexives, quasi-transitives et monotones [Dubois *et al.*, 1998b; 2004c; Dubois and Fargier, 2004]. Toute capacité numérique génère évidemment une capacité comparative. Mais une capacité comparative n'est pas forcement complète, et sa partie symétrique (la relation d'indifférence) pas forcément transitive. Si ces deux propriétés sont ajoutées, capacité comparatives et capacités usuelles, numériques, se superposent parfaitement.

Cette équivalence entre approche comparative et approche numérique reste vérifiée en ce qui concerne les capacités possibilistes : toute possibilité comparative peut être représentée par une mesure (et une distribution) de possibilité, et toute mesure de possibilité définit une possibilité comparative. Cette équivalence reste globalement valide pour toutes les fonctions d'acceptance et pour les probabilités à grandes marches, pour tout ce qui est fondamentalement basé sur des ordres de grandeur. Dans un cadre qualitatif, le problème du codage ne semble donc pas majeur (le problème inverse étant évidement trivial). Il ne l'est pas non plus si l'on prend une vision très large : toute capacité comparative complète et transitive peut être encodée par une distribution de croyance (avec des poids éventuellement négatifs) et les mesures Bel/Pl correspondantes.

Le cas de probabilités comparatives constitue un premier accroc à cette vision : elles ne sont pas équivalentes aux probabilités quantifiables — le contre-exemple de Kraft et al [1958] montre une probabilité comparative qui ne peut pas être codée par une probabilité numérique. L'axiome fondamental des probabilités comparatives, l'axiome de préadditivité,

$$\textbf{ADD}\ \forall A, B, C \text{ tels que } (A \cup B) \cap C = \emptyset : A \trianglerighteq B \Leftrightarrow A \cup C \trianglerighteq B \cup C$$

n'est pas le propre des probabilités – il faut ajouter des conditions techniques pour y revenir, conditions qui ne peuvent pas toujours être validées dans un cadre fini.

L'axiome de préadditivité en recouvre beaucoup d'autres, par exemple les axiomes ET et OU, correspondant chacun à l'un des sens de l'implication :

$$\textbf{OU}\ \forall A, B, C \text{ tels que } (A \cup B) \cap C = \emptyset : A \trianglerighteq B \implies A \cup C \trianglerighteq B \cup C$$

$$\textbf{ET}\ \forall A, B, C \text{ tels que } (A \cup B) \cap C = \emptyset : A \cup C \trianglerighteq B \cup C \implies A \trianglerighteq B$$

Ce sont des axiomes encore très riches qui assurent des formes de décomposabilité de la capacité. Dans des versions plus faibles, i.e. restreints aux A et B tels quel $B \subseteq A$, ET et OU sont les axiomes qui définissent les croyances et les plausibilités comparatives [Wong *et al.*, 1991]. La préadditivité implique également la monotonie stricte de la capacité et son autodualité, et plus largement la cohérence entre la capacité et sa duale.

Le problème, c'est que l'on n'a pas de caractérisation intéressante des capacités numériques qui définissent des probabilités qualitatives, ni même de la sous-classe des PL (resp. BEL) satisfaisant OU (resp. ET) . Même le fait de savoir que les probabilités qualitatives sont des mesures décomposables n'apporte pas grand chose : on peut, pour chaque exemple, construire une mesure décomposable ad hoc, sans trouver l'opérateur qui serait celui des probabilités comparatives.

Encadré 9 (Contre Exemples pour les Axiomes ET, OU et la cohérence duale)

Wong [1991] a proposé une paire d'axiome pour caractériser les fonctions de croyance de Shafer, Pl et Bel :

$$\textbf{PL } \forall A, B, C, B \subseteq A : A \cup C \rhd B \cup C \implies A \rhd B$$

$$\textbf{BEL } \forall A, B, C, B \subseteq A \text{ et } C \cap A \neq \emptyset : A \rhd B \implies A \cup C \rhd B \cup C$$

Toute mesure de croyance Bel (resp. mesure de plausibilité Pl) satisfait l'axiome BEL (resp. PL) et réciproquement, cet axiome autorise la représentation d'une capacité comparative par une mesure Bel (resp. Pl)

L'exemple suivant montrent que les mesures de plausibilité (resp. certitude) de Shafer peuvent violer le renforcement de PL (resp. BEL) qu'est l' axiome OU (resp. ET) ; de même, elles violent l'axiome de cohérence duale :

Cohérence duale *:* $A \rhd B \implies A \trianglerighteq^{\top} B$ *où par définition :* $\forall A, B, A \trianglerighteq^{\top} B \Leftrightarrow \bar{B} \trianglerighteq \bar{A}$.

Prenons $m_1 : m_1(\{a\}) = 0.05, m_1(\{a,c\}) = 0.5, m_1(\{b,c\}) = 0.3, m_1(\{b\}) = 0.15$

$m_2 : m_2(\{a\}) = 0.15, m_2(B) = 0.05, m_2(B \cup C) = 0.8$, *ce qui donne :*

$$\begin{array}{llllll} Pl_1(\{a\}) = 0.55 & > & Pl_1(\{b\}) = 0.45 & Pl_1(\{a,c\}) = 0.85 & < & Pl_1(\{a,c\}) = 0.95 \\ Pl_2(\{a\}) = 0.15 & < & P(\{b\}) = 0.85 & Pl_2(\{a,c\}) = 0.95 & > & Pl_2(\{b,c\}) = 0.85 \\ Bel_2(\{a\}) = 0.15 & > & Bel_2(\{b\}) = 0.05 & Bel_2(\{a,c\}) = 0.15 & < & Bel_2(\{b,c\}) = 0.85 \end{array}$$

On peut vérifier que Pl_1 *viole l'axiome OU,* Bel_2 *l'axiome ET, et que* Bel_2 *comme* Pl_2 *violent la cohérence duale.*

L'équivalence entre système comparatif et type de mesure n'est donc pas du tout évidente. Bien que les axiomes OU, ET et ADD aient en théorie de la décision un sens fort, puisque le premier découle d'une condition de neutralité par rapport aux pertes, le second d'une condition de neutralité par rapport aux gains, et le troisième de la neutralité complète (le STP), il semble paradoxalement qu'ils n'aient pas de sens particulier dans une pure théorie de l'incertitude, les concepts ayant du sens (belief et plausibilité, probabilités additives) étant soit plus faibles, soit plus forts.

3.2 Croyances acceptées

Les relations de confiance sont supposées pouvoir exprimer des notions de plausibilité, de certitude, d'ignorance, de hasard, de croyance ; allons un peu plus loin sur ce dernier point : on peut dire qu'un événement est cru, ou "accepté", dans la mesure où il est suffisamment plausible pour que l'on accepte de raisonner et d'agir comme s'il devait s'avérer. Quand l'on parle de croyances acceptées, c'est que l'on accepte de tirer toutes les conséquences de ce qui est accepté, en termes de conclusions de raisonnements comme d'action ; ce qui n'est pas cru n'est éventuellement pris en compte que si aucune préférence ne se dégage pour les situations considérées comme normales.

3.2.1 Relations d'acceptance

Nous avons étudié de plus près les capacités comparatives qui comparent des événements sur la base des croyances acceptées ou "relations d'acceptance" [Dubois *et al.*, 1998b; 2004c]. Dans ce cadre, un événement A est considéré comme accepté si $A \succ_L \bar{A}$. Puisque la conjonction de deux événements acceptés doit être acceptée, une relation ne peut coder la croyance que si :

$$A \succ_L \bar{A} \text{ et } B \succ_L \bar{B} \implies A \cap B \succ_L \bar{A} \cup \bar{B}$$

Cette propriété doit rester valide quel que soit le contexte de croyance dans lequel on se place : A est accepté dans le contexte C si $A \cap C \succ_L \bar{A} \cap C$. Le conditionnement à l'oeuvre quand l'on dit A accepté dans le contexte C ici est bien la focalisation : on n'affirme pas que C est vrai, ni même cru. On cherche simplement, en observant tous les mondes respectant la propriété C, à savoir si la conclusion A peut être acceptée en ce qui les concerne. La révision des croyances serait une autre opération qui modifierait toute la relation de confiance.

La propriété fondamentale des relations d'acceptance exprime donc que si A et B sont crus pour les mondes vérifiant C alors, dans ce contexte, $A \cap B$ l'est aussi. Sous l'hypothèse de monotonie de $\succeq_L$ (qui est vérifiée puisque $\succeq_L$ est une capacité comparative), cette propriété s'écrit :

$$\textbf{CCS} : \forall X, Y, Z \subseteq S, X \cap (Y \cup Z) = \emptyset : X \cup Z \succ_L Y \text{ et } X \cup Y \succ_L Z \Rightarrow X \succ_L Y \cup Z$$

Nous avons essayé d'explorer un peu plus le monde des relations d'acceptance, à la lumière de ce que l'on savait sur les capacités comparatives en général.

Le premier résultat est sans surprise : seules les relations obéissant à l'axiome de négligeabilité de Lehmann [Lehmann, 1996] sont capables de supporter les caractéristiques des croyances acceptées : si A est accepté dès que $A \succ_L \bar{A}$, $A \succ_L \bar{A}$ doit signifier que la confiance en la réalisation de $\bar{A}$ est négligeable devant celle de A.

Le second résultat montre que l'axiome d'acceptance est quasiment incompatible avec l'axiome BEL (et donc, les fonctions de croyances et les probabilités) [1] car il implique que si $A \sim_L A \cup B$, alors la confiance en B est minimale et de l'ordre de celle de l'événement impossible. Cette interprétation de $A \sim_L A \cup B$, est bien différente de celle qui est faite dans les relations de négligeabilité : dans ce dernier cas, $A \sim_L A \cup B$ indique simplement que la confiance en $A \cup B$ est du même ordre de grandeur que celle en A — la confiance en B peut très bien être non nulle, elle peut même être de l'ordre de grandeur de celle en A.

Les probabilités comparatives et les relations de type ET ne peuvent donc en général pas être des relations d'acceptance car sauf cas très particulier, elles ne peuvent pas être des relations de négligeabilité. La frange de compatibilité, très restreinte, concerne les cas où il n'existe pas d'événements exclusifs de même niveau de confiance. Dans le cas des préordres complets, elle ne contient que les probabilités à grandes marches linéaires.

[1] En fait, il y a quelque chose de trompeur dans le fait d'une part d'appeler les mesures Bel de Shafer des mesures de "croyance" (belief), et d'autre part de parler de "croyances acceptées" pour les mesures d'acceptance. Indubitablement, les Bel sont des mesures de certitude, puisqu'elles mesurent à quel point les événements sont impliqués par l'état de connaissance actuel (la distribution de masse sur les élément focaux) ; mais elles ne sont que très rarement des croyances au sens des croyances acceptées induit pas CCS.

En fait, nous avons pu montrer que la partie stricte d'une relation d'acceptance est équivalente à une famille de distribution de possibilités linéaires (i.e. qu'il existe une famille de mesures de possibilité telle que $A \succ_L B$ si et seulement si c'est le cas pour toutes les mesures de la famille). Si la relation de confiance est complète, la partie symétrique est obtenue par complémentation de la partie stricte. Sinon, la partie complémentaire intègre à la fois la relation d'incomparabilité et la relation d'indifférence — le partage dépendant d'informations qui sont en dehors de la caractérisation de la relation en termes de relation d'acceptance.

Encadré 10 (Exemple de relation d'acceptance) *Soit une urne contenant des boules vertes, des boules bleues, et peut être une boule rouge. Les boules bleues, comme les vertes, sont quasiment toujours marquées d'un nombre pair, alors que les rouges sont toujours marquées d'un nombre impair.*

En tirant une boule, on peut donc être dans l'une des six situations suivantes : VI, VP, BI, BP, RI, RP. La connaissance serait représentée par une famille de distributions de possibilité, chacune portant au plus au niveau les états VP et BP, et au niveau le plus bas l'état RP. Les trois autres états se répartissent de toutes les manières possibles sur les niveaux intermédiaires, définissant ainsi la famille de distribution de possibilité. Dans la relation qui en découle, $\{VP, BP\} \rhd \{VI, BI, RI\} \rhd \{RP\}$ et on a par exemple $\{VP\} \rhd \{VI\} \rhd \{RP\}$. Mais les événements $\{VI\}$ et $\{RI\}$ sont incomparables.

L'ensemble des états acceptés est $\{VP, BP\}$, et l'on parierait de toute évidence sur les événements "pair", "bleu" ou "vert".

Une boule est tirée et annoncée rouge. On focalise donc la relation sur le contexte "rouge", i.e. sur l'ensemble $\{RI, RP\}$, dont le noyau accepté est $\{RI\}$ – le pari serait alors évidement "impaire".

Si l'on avait seulement annoncé que la boule était impaire, la focalisation aurait porté sur l'ensemble $\{VI, BI, RI\}$ dont les éléments ne sont pas ordonnés. On n'aurait su sur quelle couleur parier, tant il est improbable que la boule soit rouge (et impaire), ou impaire si elle est bleue ou verte.

Enfin, on peut montrer que les relations d'acceptance capturent parfaitement la sémantique des approches préférentielles du raisonnement non-monotone — "système P" [Kraus *et al.*, 1990; Lehmann and Magidor, 1992; Dubois and Prade, 1995a; Friedman and Halpern, 1996] : il suffit d'interpréter les assertion conditionnelles $A \to B$ comme disant que dans le contexte A, B est accepté comme normal, i.e. que $A \cap B \succ_L A \cap \bar{B}$.

Plaçons maintenant ces relations dans le cadre d'une théorie de la décision sous incertitude. La propriété fondamentale des relations d'acceptance, CCS, est satisfaite par tous les modèles quasi-transitifs de décision sous incertitude qui obéissent à l'invariance ordinale. Le fait que les relations de confiance compatibles avec OI sont des relations d'acceptance est un résultat intéressant en soi, car il fournit une justification axiomatique "à la Savage" des croyances acceptées. Ce résultat est également intéressant dans les extensions qu'il suggère : dans le domaine du choix multicritère, les règles de comparaison par paires ne sont viables que si l'importance des coalitions de critères forme une relation de négligeabilité de même structure que les relations d'acceptance — dans le domaine du vote, les coalitions de votants forment une hiérarchie d'oligarchies.

Sous l'axiome OI, le choix entre f et g est, on l'a vu, forcément basé sur la comparaison des deux hypothèses de dominance, i.e de $\{s, f(s) > g(s)\}$ et de $\{s, g(s) > f(s)\}$. Dans un contexte d'action, la condition de stabilité des croyances acceptées s'écrit " si je crois assez en X pour décider comme si X était vrai, et que je crois assez en Y pour décider comme si Y était vrai, alors que je crois assez en leur conjonction pour fonder ma décision sur cette événement" : décidant $f \succ g$ car $\{s, f(s) > g(s)\} \succ_L \{s, g(s) > f(s)\}$, puis $h \succ g$ car $\{s, h(s) > g(s)\} \succ_L \{s, h(s) > f(s)\}$, je déciderai $min(f, h) \succ g$ car $\{s, min(f(s), h(s)) > g(s)\} \succ_L \{s, h(s) > min(f(s), h(s))\}$.

Le conditionnement à l'oeuvre dans cette propriété est bien la focalisation : si je compare f à g sur la base de $\{s, f(s) > g(s)\}$ et de $\{s, g(s) > f(s)\}$, je n'apprends pas que les états conduisant à des conséquences identiques sont impossibles, je veux seulement savoir quels sont les événements les plus crédibles parmi ceux qui expriment une préférence nette entre f et g. En d'autres termes, je me restreins à l'événement $\{s, f(s) <> g(s)\}$, de la même façon qu'en raisonnement déductif, lorsque je dis que "A est cru dans les contexte C", je ne dis pas que C est vrai, ni même cru. Je dis simplement, en observant tous les mondes respectant la propriété C, que la conclusion A peut être tirée en ce qui les concerne.

Pour les problèmes de décision satisfaisant le principe de la chose sûre (au moins dans sa version faible), la théorie de la décision sous incertitude suggère une définition à première vue différente du conditionnement, mais peut être similaire à la focalisation. Il faudrait en faire une étude comparée, enrichie de ce que l'on sait déjà du conditionnement en simple raisonnement plausible. En particulier, il faudrait clairement faire la différence entre la focalisation, qui consiste à mettre de côté des états, par exemple parce qu'il ne font pas de différence assez forte entre les actes, et la révision qui reconstruit la relation d'incertitude, et de fait la relation entre actes.

3.2.2 Probabilités à grandes marches

Les relations d'acceptance sont donc des relations de négligeabilité, mais elles ne sont heureusement pas les seules à être fondées sur des comparaison d'ordre de grandeur — je dis heureusement, car la frange de compatibilité exacte entre négligeabilité et préordres complets se réduit grosso modo aux possibilités. Nous avons en effet montré qu'un raisonnement sur l'ordre de grandeur des croyances pouvait conduire à d'autres types de mesures, comme les discri-possibilités et les probabilités à grandes marches (voir [Dubois *et al.*, 1998c] et [Dubois and Fargier, 2004]).

Les probabilités à grandes marches généralisent les ordres linéaires identifiés par [Snow, 1999; Benferhat *et al.*, 1999] : une probabilité comparative est à grandes marches si le niveau de probabilité d'un événement, ou même d'un état, reste toujours supérieur à celui de l'ensemble des états de probabilité inférieure — d'où le terme "grandes marches". Ici, la relation *stricte* est une relation de négligeabilité si on la réduit aux événements disjoints ; la totalité de la partie stricte se récupère ensuite par préadditivité et transitivité. Il faut noter que la partie symétrique ne traduit pas l'égalité des ordres de grandeur. Noter également que sur les probabilités à grandes marches, il y a une parfaite adéquation en représentation relationnelle ordinale, et codage numérique : toute probabilité à grandes marches à la fois trouve un codage par une probabilité numérique et est équivalente à une procédure de leximax sur les plausibilités des états composant l'événement. Un conséquence de cette dernière remarque est que les probabilités à grandes marches raffinent les possibilités (pour toute possibilité, il existe une probabilité à grandes marches qui la raffine, et réciproquement on peut construire une mesure possibilité à partir des marches de la probabilité). On retrouve sur une dimension, l'incertitude, notre travail sur les raffinements des utilités possibilistes.

Le second exemple concerne le discri-raffinement des possibilités : A est plus plausible que B si $A \cap \bar{B}$ est plus possible que $\bar{A} \cap B$. Comme les probabilités à grandes marches, ce type de relation de confiance respecte le principe de préadditivité, mais à la différence de ces dernières, l'indifférence n'est pas transitive ; en fait, on obtient le simple raffinement par préadditivité des possibilités ; on peut le raffiner lui même de façon à récupérer la transitivité de l'indifférence : on retrouve alors des probabilités à grandes marches.

C'est le sens des théorèmes de représentation que nous avons proposé dans [Dubois and Fargier, 2004] pour caractériser les relations de confiance en accord avec une interprétation en termes d'ordre de grandeur de la confiance accordée aux états. Le pur raisonnement sur les ordres de grandeur conduit, dans le cas transitif et complet, aux possibilités. L'accord parfait avec l'ordre de grandeur "toutes choses égales par ailleurs", c'est à dire, sur les événements disjoints caractérise les discri-possibilités, et l'accord avec la composante stricte, la relation de négligeabilité, caractérise les probabilités à grandes marches.

Reste le cas où les états sont partionnés en classes d'ordres de grandeur, mais où à l'intérieur d'une même classe, il ne sont pas forcément équiplausibles — le cas des probabilités lexicographiques [Blume *et al.*, 1991; Boutilier, 1994; Lehmann, 1998] et plus généralement celui des "probabilités généralisées" de Lehmann [Lehmann, 1996]. Là aussi, on peut fournir une axiomatique en termes d'accord avec les ordres de grandeur.

3.3 Dualité, neutralité, optimisme, pessimisme

Les capacités usuelles vont souvent par deux : Bel / Pl, possibilité / nécessité, probabilité inférieure / probabilité supérieure — probabilité / probabilité ;-). Chacune est liée à l'autre par dualité : cette notion se formalise facilement pour les capacités numériques (à partir d'une fonction de renversement d'ordre : $\sigma^\top(A) = n(\sigma(\bar{A}))$ et par extension, dans le cas d'une capacité comparative : $A \trianglerighteq^\top B \Leftrightarrow \overline{B} \trianglerighteq \overline{A}$. La notion d'auto-dualité en découle directement : il y a auto-dualité quand les deux relations, l'originale et sa duale, classent les événements de la même façon. La préadditivité est une bonne manière de garantir l'auto-dualité mais l'auto dualité n'implique pas la préadditivité. Ainsi, les probabilités comparatives comme numériques sont auto-duales, la duale d'une possibilité est une nécessité, celle d'une probabilité supérieure une probabilité inférieure.

Ceci pour dire qu'à partir d'un certain état de connaissance, on ne peut pas toujours statuer directement sur la confiance que l'on a en la réalisation d'un événement, mais on peut dire dans quelle mesure il est plausible et dans quelle mesure il est certain, les deux mesures étant duales d'une de l'autre — une chose est certaine dans la mesure où son contraire n'est pas possible. L'une des deux mesures — la mesure de plausibilité — est une capacité concave et sa duale — la mesure de certitude — une capacité convexe. A l'intersection des types de capacités, on trouve les probabilités mais aussi des fonctions de croyance, les Bel préadditives (par exemple celle du contre-exemple de [Kraft *et al.*, 1958]) et plus largement les Bel auto-duales.

Dire que la connaissance d'un décideur est de l'un des deux types serait une erreur. Selon ce qu'il veut faire, ce entre quoi il doit choisir, l'agent utilisera soit les certitudes déductibles de ses connaissances, soit les plausibilités. C'est le caractère prudent ou aventureux du décideur qui fixera le type de la capacité révélée et (ou) la forme de la fonction d'utilité, selon que cadre utilisé offre ou non ces deux degrés de liberté.

Lorsque le décideur est prudent et essaie d'éviter les pertes ou les faibles gains la fonction d'utilité est en effet concave ; plus aventureux, il est attiré par les forts gains, et la fonction est alors convexe. Certains décideurs peuvent avoir les deux comportements : l'attitude face aux gains et au pertes est bipolaire et conduit à une fonction d'utilité en S – concave sur les pertes, et convexes sur les gains. L'attitude face aux conséquences influence aussi l'évaluation, pessimiste ou optimiste, des événements, lorsque la connaissance porte un certaine ambiguïté et ne se réduit pas à une unique distribution de probabilité. Le pessimiste, en situation de décision, surestime l'occurrence des événements à pertes, l'optimiste celle des événements à forts gains. La connaissance des événements ne change pas pour autant ; simplement, l'évaluation des événements conduisant à une perte utilise une capacité convexe (dans le modèle des a priori multiples, le décideur se dirige vers les mesures de probabilité produisant les pires cas), et celle des événements conduisant à des situations très positives sa duale, concave. Le pur pessimiste, pour qui tout n'est que perte, n'utilisera que la capacité exprimant la certitude, le pur optimiste que celle estimant la possibilité. Seule l'une des deux capacités serait révélée. Dans un modèle d'utilité espérée, le principe de la chose sûre force le décideur à se fixer une probabilité [Smets, 1994] : seule la fonction d'utilité peut exprimer la prudence et le pessimisme se confond avec l'aversion pour la perte. Dans les modèles ordinaux (les intégrales de Sugeno) au contraire, seule la capacité peut porter l'attitude du décideur – la concavité ou la convexité d'une fonction d'utilité sur un échelle ordinale, non munie de la notion de distance, n'a pas grand sens – et toute notion d'aversion pour la perte se confond avec le pessimisme.

Mais il est des situations où l'on n'est pas complètement prudent, ni complètement attiré par les gains et les décideurs n'ont pas forcément un comportement uniforme dans leur manière de d'utiliser, et donc de révéler, leur connaissance. Elle dépend, je pense, du type de conséquence — l'axiome S4 de Savage, même affaibli comme il l'est dans les intégrales de Choquet et Sugeno, me semble loin d'être universel. Le décideur ne serait pas lié à une capacité, mais pourrait passer de la forme prudente à sa duale, voire chercher à la désambiguïser, comme l'a montré Smets [1994]. Quelques questions issues ce cette réflexion :

- Des modèles ont été proposés qui tentent d'intégrer une certaine bipolarité en prenant en compte, en plus de l'utilité espérée, la pire conséquence, voire les pire et meilleure conséquence (voir par exemple [Gilboa, 1987a; Jaffray, 1988; Cohen, 1992]). Je serais tentée par une voie un peu différente — dans un modèle bipolaire, la connaissance devrait être révélée sous ses deux formes, voire sous trois formes – si il existe une zone de neutralité des conséquences, c'est une probabilité qui s'exprimerait dans cette zone. Un modèle simple, inspiré de la cumulative prospect theory [Tversky and Kahneman, 1992] serait l'utilisation d'une somme pondérée de trois intégrales de Choquet, construites sur les trois zones d'utilité (pertes, neutres, gains) et trois capacités révélées (convexe, préadditive, concave).
- Les descriptions fondées sur une approche objective, à la von Neuman et Morgernstern doivent être maniées avec précaution. On ne doit pas, sauf cas particulier, supposer que la donnée objective est une capacité, mais une information plus complexe, typiquement, une distribution de masse ou une famille de probabilités. Dit autrement, si c'est une capacité qui est donnée, il faut savoir utiliser également sa duale.
- L'élicitation de la connaissance est une question délicate, puisque selon les paris proposés, l'utilisateur utilisera la mesure de certitude, la mesure de plausibilité, ou une mesure de probabilité. Le même problème de construction se pose aux approches

axiomatiques à venir : il faut savoir déterminer un élément neutre, ou une zone de neutralité, puis construire la double structure sur les événements. Je ne pense pas qu'un bi-capacité soit nécessaire — la capacité comparative et sa duale devraient suffire.

– De même que l'on peut raisonner en même temps sur les nécessités et les possibilités, on peut décider en conduisant à la fois une approche positive et une approche conservative — ce qui permet éventuellement de conclure à une opposition, à une incomparabilité. Dans un monde réel, ce type d'attitude conduit alors soit à lever ses incertitudes par des actions, soit à rechercher d'autres critères de choix, ce qui me semble bien plus rationnel que de forcer l'un des critères. Il ne s'agit plus alors d'utiliser une prédisposition globale fondée sur une somme pondérée de trois capacités.

3.4 Quelques autres voies de recherche

Encore le principe de la chose sûre Cet axiome est d'une richesse étonnante : tel quel, il porte la cohérence des choix pris toutes choses égales par ailleurs ; limité aux actes comonotones, il fonde les intégrales de Choquet ; renforcé, c'est un axiome d'invariance ordinale ; affaibli d'une certaine manière c'est un axiome d'indépendance, d'une autre un axiome de neutralité de la mesure de confiance par rapport aux pertes ou un axiome de neutralité par rapport aux gains – et globalement, un axiome de neutralité concluant à une représentation probabiliste. C'est grâce à ce type d'axiome que l'on peut définir le conditionnement. Dans le cadre des préférences transitives, il permet d'assurer le principe d'efficacité de Pareto. Bref, il est extrêmement compact. Tous les modèles non-standard le rejettent tel quel, forcément, vu sa quasi équivalence avec le choix par utilité espérée. Il serait peut être temps de le décomposer autant que faire se peut pour en établir une "road map" — le même travail devant être fait pour son équivalent sur les capacités comparatives, le principe de préadditivité.

Révision des croyances et décision La notion de conditionnement par focalisation a été abordée dans le cadre des relations d'acceptance, où elle est centrale. Elle débouche sur plusieurs questions plus larges : tout d'abord, celle de la focalisation d'une (paire de) capacité(s) comparative(s), et du rapport entre focalisation et conditionnement d'une relation de préférence sur les actes. Vient ensuite la question de la révision, qui serait une autre opération modifiant la connaissance de fond, et par là la (ou les) relation(s) de confiance révélées qui en découlent, et plus largement la préférence sur les actes en concurrence.

Chapitre 4

Préférences structurées et problèmes de décision à énoncé compact : langages de représentation et algorithmes

Dans un monde pratique la proposition, l'argumentation et la caractérisation d'une règle de décision ne suffisent pas. Ne serait-ce que parce que connaissances et préférences peuvent rarement être exprimées globalement et explicitement, mais plutôt localement et indépendamment les unes des autres, sur certains groupes de variables d'état ou de décision. Décider, c'est souvent poser, puis résoudre, un problème d'optimisation combinatoire.

Puisque l'on doit traiter à la fois de connaissances et de préférences, il faut à la fois raisonner et décider. Plusieurs cadres ont été proposés, en particulier la logique propositionnelle, les problèmes de satisfactions de contraintes (CSP)et la programmation linéaire en nombres entiers. Dans les trois cas, on propose un langage d'expression de problème, un ensemble de requêtes et un ensemble d'algorithmes capables de traiter ces requêtes. Dans les trois cas aussi, il faut faire face à la généralité du cadre d'expression : de nombreux problèmes sont NP-complets. Mais il faut bien comprendre que le cadre CSP n'est pas dédié aux problèmes de décision, comme la logique propositionnelle n'est pas dédiée au raisonnement. Ce sont juste des outils de représentation d'informations, munis d'algorithmes permettant de répondre à des requêtes. On peut très bien représenter des connaissances sur des événements temporels dans un cadre CSP — et déterminer la cohérence de ces connaissances en posant une requête de satisfiabilité sur l'ensemble des contraintes. On peut bien sûr aussi modéliser par des contraintes des desiderata, des spécifications sur un scénario temporel à établir, et en rechercher de satisfaisants par exemple à l'aide d'une algorithme de backtrack. Dans le premier cas on raisonne, dans le second on décide, et dans les deux cas on utilise le cadre CSP. Ce que l'on ne peut pas faire dans les cadres PLNE, SAT ou CSP classiques, c'est raisonner *et* décider à la fois – prendre des décisions sous incertitude. Ce type de problème a en général une complexité supérieure à celle des problèmes de NP, et ne peut pas être traité par des outils restreints à NP.

Il est d'autres limitations au formalisme CSP le plus simple, en particulier l'expression et le traitement de contraintes dynamiques, la recherche et la manipulation d'ensembles de solutions plutôt que d'une solution unique, et le traitement du problème en l'absence de solution, souvent lié à l'expression sous forme de contraintes de propriétés qu'ils n'est pas absolument nécessaire de satisfaire (préférences dans un problèmes de décision, connaissances incertaines ou règles spécifiques dans un problèmes de raisonnement).

Ces questions ont motivé une part importante des recherches en IA dans les années 90. La liste des travaux publiés dans cette période sur les CSP dynamiques, les CSP valués, les rapports entre CSP et logique propositionnelle, et le traitement de contraintes particulières est vraiment longue. En France, la dynamique de recherche a été forte, en particulier au sein du PRC-IA. Je pense aux résultats des membres des groupes "Booléens : Algorithmes et Heuristiques pour L'Intelligence Artificielle" (BAHIA), "Classes polynomiales" et "CSP flexibles". Voir par exemples les articles collectifs issus de ces groupes [Bahia, 1992; CSP flexibles, 1992; Bahia, 1995; CSP flexibles, 1995; Classes Polynomiales, 1995].

Pour ma part, j'ai surtout travaillé à la prise en compte de préférences et/ou d'incertitude au sein du cadre CSP, au sens large (CSP valués, CSP probabilistes, CSP flous) et dans le cas particulier des CSP temporels. Les travaux dont je vais rendre compte datent généralement des années 90 et le domaine s'est beaucoup enrichi depuis : j'essaierai dans ce chapitre de donner également des pointeurs sur des développements plus récents. Avant de les présenter en Sections 4.2.1 et 4.3, je voudrais brièvement revenir sur l'opposition "SAT/CSP".

4.1 Sat vs CSP

Face à la logique propositionnelle, le cadre CSP offre un ensemble de caractéristiques pragmatiques intéressantes :

- Le langage d'expression des contraintes est général et souple. De fait l'expression est généralement plus concise qu'avec une CNF voire plus largement qu'avec une conjonction de formules logiques.
- De nombreux algorithmes existent pour résoudre une grande variété de problèmes, de complexités variées
- Les concepts et algorithmes qui sont définis sur le cadre général se spécialisent bien quand ont veut les adapter à des cas particuliers, quand on possède une restriction a priori des types de contraintes (par exemple, quand toutes les contraintes expriment des relations temporelles dans l'algèbre d'Allen).

En fait, la différence de fond, c'est que le formalisme CSP vise à trouver une solution à un ensemble de "contraintes", sans hypothèse sur leur forme interne. A priori, la logique propositionnelle aussi, mais en pratique, quand on construit des outils, on les construit pour résoudre des ensembles de clauses, et cette caractéristique est exploitée autant que faire ce peut par les algorithmes SAT étudiés dans la communauté IA. C'est ce qui fait leur efficacité. Pour moi donc, la différence entre SAT et CSP, c'est moins l'opposition "booléeen/domaine discret", que la restriction clausale par opposition à la généralité des contraintes.

On peut objecter que tout problème non clausal peut être ramené à un problème clausal. C'est vrai, mais il y a risque d'explosion combinatoire et surtout on y perd sans doute des caractéristiques du problème qui gagneraient à être exploitées. L'argument de bon sens est qu'il faut se placer dans le cadre le plus proche de la spécificité des contraintes de l'application – mais il faudrait vérifie cette hypothèse au moins une fois par un protocole d'expérimentation rigoureux. Par exemple en résolvant un problème non clausal (et éventuellement non booléen) dans plusieurs cadres : le cadre le plus proche des contraintes effectives, les CSP généraux, le cadre SAT-CNF ou la logique propositionnelle en général.

En bref, du point de vue algorithmique, tout ce qui est bon pour CSP est bon pour SAT-CNF la réciproque étant moins évidente.

Inversement, la logique propositionnelle contient beaucoup de concepts qui ont longtemps manqué aux systèmes à contraintes : les notions de preuve, d'impliqués, d'impliquants, de nogoods, d'explication, etc. On retrouve ces notions, sous des formes plus ou moins dégénérées, dans plusieurs articles orientés "contraintes" — les décisions maximales cohérentes de [Lesaint, 1994] sont des impliquants premiers ; les "explications" [Fargier *et al.*, 2000a; Jussien and Barichard, 2000; Junker, 2001; Amilhastre *et al.*, 2002] sont plutôt des environnements incohérents [1] ; on retrouve aussi dans [Fargier, 1994; Fargier and Lang, 1993; Verfaillie and Lobjois, 1999] des notions de sous-bases maximales cohérentes et de sous-bases minimales incohérentes. L'équivalent des OBDD a été construit, dans les domaines discrets sous la forme d'automates par [Vempaty, 1992; Amilhastre, 1999] ; j'ai travaillé, avec M.C. Vilarem, à une extension de ces automates quasi-équivalente aux DNNF étudiées par Darwiche et Marquis [Darwiche, 1999; Darwiche and Marquis, 2001] — voir [Fargier and Vilarem, 2004]. Plus généralement, il a été montré [Fargier and Castell, 1997; Castell and Fargier, 1998a; 1998b] comment des notions de la logique propositionnelle comme celles de conséquence logique, impliqués, impliquants, nogoods, etc. s'élargissent aux CSP et comment impliqués et impliquants peuvent être calculés par un algorithme de produit unioniste très proche de l'algorithme de calcul de décision maximale consistante proposé par Lesaint [Lesaint, 1994] et surtout de l'algorithme FC-CPR proposé par Hubbe et Freuder [1995] pour la décomposition de l'ensemble des solutions d'un CSP en une disjonction de cubes.

Si l'on se restreint aux formes clausales, l'intersection entre CNF et CSP est la classe des "CSP clausaux" [Castell and Fargier, 1998a; 1998b; Bauland and Fargier, 2000], un modèle à domaines discrets où une contrainte (n-aire) exprime que "x appartient à l'ensemble A ou y appartient à l'ensemble B ou etc". Ce qu'il faut comprendre, dans le fond, c'est qu'un littéral, c'est une contrainte unaire ("$x \in A$", A étant un sous-ensemble du domaine de x). Toute la syntaxe, toutes les notions sémantiques et logiques (par exemple, la conséquence logique), tous les algorithmes, les heuristiques dédiées aux CNF, peuvent alors être portés. Ainsi le principe de résolution, par exemple (on a montré qu'il est sain et complet).

Encadré 11 (Un CSP clausal [Castell and Fargier, 1998a]) *Soit deux variables à domaines discrets représentant des choix d'options sur des voitures, par exemple la couleur de la carrosserie (x_1 de domaine $\{vert, bleu, jaune, gris, noir\}$) et celle des enjoliveurs (x_2, de domaine $D_2 = \{gris, bleu, noir, acier\}$).*

Pour représenter la contrainte "si la carrosserie est verte, bleue ou jaune, la couleur des enjoliveurs doit être bleue. Pour ce on définit trois "littéraux", trois contraintes unaires :

$C_a : x_1 \in \{vert, bleu, jaune\}$ *est une contrainte sur* x_1 *;*

$C_b : x_1 \in \{gris, noir\}$ *est aussi une contrainte sur* x_1*.* C_a *est satisfaite quand* C_b *ne*

[1] Il existe toutefois dans les CSP une notion d'explication d'un intérêt pratique peut être plus fort que les nogoods de la logique propositionnelle : une "explication locale" est une conjonction de littéraux incohérente avec la base *modulo un algorithme*. Par exemple, dans une résolution interactive, un explication locale est une restriction des domaines de quelques variables pour laquelle l'algorithme de propagation utilisé par le système détecte l'incohérence. Il existe Peut-être d'autres environnements incohérents ... mais non détectés par l'algorithme de maintien de cohérence : comme ils ne provoquent pas de problème (pour l'instant), on n'a pas à les traiter

l'est pas : c'est sa "négation" et on peut la noter $\neg C_a$;

$C_c : x_2 \in \{bleu\}$ est une contrainte sur x_2

On peut alors construire la contrainte C_d, satisfaite dès que soit C_b l'est, soit C_c l'est :

$C_d : x_1 \in \{noir, gris\} \vee x_2 \in \{bleu\}$

On peut noter cette contrainte "clausale" (c'est une disjonction de littéraux) $C_b \vee C_c$ ou encore $\neg C_a \vee C_c$. Elle ne sera satisfaite que par les affectations où, si x_1 est vert, bleu ou jaune, x_2 est bleu.

Imaginons que le problème contienne également la clause "si la carrosserie est verte ou grise, le toit doit être en pvc clair ", et le choix utilisateur "je ne veux pas de voiture noire" — deux nouvelles clauses :

$C_e : x_1 \in \{bleu, noir, jaube\} \vee x_3 \in \{pcvBlanc, pvcTransp\}$

$C_f : x_1 \notin \{noir\}$.

En remarquant que les deux littéraux $x_1 \in \{noir, gris\}$ (de C_c) et $x_1 \in \{noir, bleu, jaune\}$ (de C_e) ne sont pas inclus l'un dans l'autre, on en déduit une nouvelle contrainte par "résolution" sur x_1 :

$$
\begin{array}{llclcl}
C_d : & x_1 \in \{noir, gris\} & \vee & x_2 \in \{bleu\} & & \\
C_e : & x_1 \in \{noir, bleu, jaune\} & & & \vee & x_3 \in \{pcvBlanc, pvcTransp\} \\
\hline
C_g : & x_1 \in \{noir\} & \vee & x_2 \in \{grisBleute\} & \vee & x_3 \in \{pcvBlanc, pvcTransp\}
\end{array}
$$

C_g, est la "résolvante" de C_d et C_e. La résolution n'a été que partielle car l'intersection des deux littéraux sur x_1, $x_1 \in \{noir, gris\}$ et $x_1 \in \{noir, bleu\}$ n'est pas vide. Dans les domaines booléens, il n'y a jamais de résolution partielle (il n'est pas possible d'avoir sur la même variable deux littéraux qui ne soient ni disjoints ni égaux).

On peut ensuite faire la résolution (totale cette fois ci) de C_g et C_f, on en déduit que si le toit n'est pas en pvc clair, les enjoliveurs doivent être gris bleutés.

$$
\begin{array}{llclcl}
C_f : & x_1 \notin \{noir\} & & & & \\
C_g : & x_1 \in \{noir\} & \vee & x_2 \in \{grisBleute\} & \vee & x_3 \in \{pcvBlanc, pvcTransp\} \\
\hline
 & & & x_2 \in \{grisBleute\} & \vee & x_3 \in \{pcvBlanc, pvcTransp\}
\end{array}
$$

On peut porter de la même façon les résultats portant sur les clauses de Horn — on peut montrer que l'algorithme MAC par exemple traite en temps polynômial tout problème Horn-nommable, sans avoir à détecter que le problème est Horn-nommable. Et heureusement, car, contrairement à ce que l'on pense généralement, la Horn nommabilité n'est pas une propriété qui s'établit polynômialement. En effet, en s'appuyant sur les travaux de Jeavon et al [1996] sur les classes polynômiales de CSP, on peut montrer qu'un littéral est négatif ou positif non pas dans l'absolu mais vis à vis d'un ordre sur son domaine (un littéral "$x \in A$" est négatif ssi A est convexe vis à vis de cet ordre). Dans le cas booléen, il n'y a que deux ordres. Dans le cas général, ils sont en nombre au moins factoriel. En d'autre termes, la Horn-nommabilité n'est un problème facile en SAT-CNF que parce que l'on a limité la taille des domaines. C'est par exemple un problème NP-complet dans les CSP clausaux.

4.2 Les CSP comme langage d'expression structurée de préférences ou (exclusif) d'incertitudes

4.2.1 CSP Valués

Le formalisme CSP s'étend sans trop de difficultés au cas de la prise en compte de préférences. Dans [Schiex *et al.*, 1995], nous avons proposé d'attacher à chaque contrainte un poids (une valuation) sur une échelle $L = [0_L, 1_L]$ munie d'un ordre $>_L$, les contraintes de valuation 1_L étant impératives. Il n'y a généralement pas de contraintes de valuation 0_L : ce degré signifie que la satisfaction ou la violation de la contrainte seraient indifférentes à l'utilisateur. On considère alors que la valuation attachée à une affectation de toutes les variables est la combinaison, au sens d'une opération $\oplus$, des poids de toutes les contraintes *violées* par l'affectation. On cherche donc à trouver une affectation de valuation minimale ou à connaître la valeur de cette valuation minimale.

$\oplus$ doit donc être une loi interne à L, monotone non décroissante (plus l'affectation viole de contraintes, plus sa valuation doit être forte), d'élément neutre 0_L et d'élément absorbant 1_L. Pour peu que l'on exige un minimum de $\oplus$ (associativité et commutativité, nécessaires pour la mise au point d'algorithmes efficaces) et de L (typiquement, $>_L$ doit être un ordre total), il vient que $\oplus$ est une co-norme triangulaire.

Ce formalisme très général encode différents types de problèmes, entre autres :
- des problèmes de décision sous contraintes plus ou moins importantes : CSP à priorité où il faut minimiser la priorité de la plus importante des contraintes violées ($\oplus = \max$) — cf. [Schiex, 1992; Fargier, 1994] ; les CSP partiels où il faut minimiser le coût des contraintes violées ($\oplus = +$) — cf. [Freuder and Wallace, 1992] ; les "lexiCSP"où les vecteurs de contraintes violées sont comparés avec l'ordre leximin (en utilisant le codage par exponentielles du leximin [2], on prendra encore $\oplus = +$) — cf. [Fargier *et al.*, 1993].
- des problèmes de décision sous contraintes incertaines : les CSP probabilistes [Fargier and Lang, 1993] (on attache à chaque contrainte la probabilité que ce soit une contrainte à satisfaire, et on prend $\oplus = \times$) et les CSP possibilistes [Schiex, 1992] (on attache à chaque contrainte la nécessité que ce soit une contrainte à satisfaire, et on prend $\oplus = \max$) ;
- des problèmes de raisonnement où les formules sont pondérées : logique possibiliste ($\oplus = \max$, voir [Dubois *et al.*, 1994]) et logique des pénalités ($\oplus = \max$, [Pinkas, 1991; de Saint-Cyr *et al.*, 1994]). En trouvant une affectation de valuation minimale, on obtient le degré de cohérence du problème.

Les algorithmes de recherche de solution de type Forward checking s'adaptent bien aux CSP valués mais, sauf cas particulier, les algorithmes de propagation de contraintes ne sont sains que si $\oplus$ est idempotent, c'est à dire que si $\oplus = \vee$ ou $\oplus = max$: pour les CSP classiques et les CSP possibilistes. Au niveau formel, il a été montré que définir le degré d'arc-cohérence d'un CSP valué est un problème NP-difficile [Schiex *et al.*, 1995].

Le cas particulier est celui des CSP à structure d'hyper-arbre – sous l'hypothèse que le calcul de $\oplus$ est polynômial, on peut trouver non seulement des algorithmes de propa-

[2] On a pu montrer au passage que tout leximin-CSP Peut-être réduit polynômialement à un CSP partiel (c'est l'habituel codage d'un leximin par une somme) ; on ne connaît pas la transformation inverse. On sait cependant que le problème de décision associé aux leximin-CSP est NP complet, puisque MAX-SAT-2-CNF s'y ramène polynômialement.

gation et filtrage polynômiaux, mais également des algorithmes de recherche complets et polynômiaux. Ces résultats sur les structures acycliques ne sont pas vraiment nouveaux : il remontent au moins aux travaux de Shenoy et Shafer [Shenoy and Shafer, 1990], sinon plus haut [Rosenfeld *et al.*, 1976].

L'algorithmique des CSP valués a beaucoup évolué depuis le papier de 1995 [Schiex *et al.*, 1995] qui proposait un branch and bound avec propagation limitée aux variables voisines ; par exemple une propagation plus large mais toujours limitée est possible [Larrosa *et al.*, 1998; Cooper and Schiex, 2004; Larrosa and Schiex, 2004] ; on peut aussi chercher à améliorer les bornes du branch and bound [Verfaillie *et al.*, 1996]. De manière plus générale, le travail d'unification entrepris avec les VCSP a été repris [Pralet *et al.*, 2005], dans l'esprit de [Shenoy and Shafer, 1990] avec dans l'idée de généraliser à des structures algébriques abstraites toute une famille de formalismes (et d'algorithmes) exprimant des préférences et des connaissances par des valuations.

4.2.2 CSP souples et extensions

Si les préférences ne portent pas sur les contraintes, mais plutôt sur des combinaisons de valeurs, le modèle des CSP valués est difficile à utiliser (cela reste néanmoins possible). On peut alors faire appel à des contraintes "souples" [Snow and Freuder, 1990; Martin-Clouaire, 1992; Fargier *et al.*, 1992; Dubois *et al.*, 1993; Bistarelli *et al.*, 1995] : chacune n'est plus définie par un ensemble strict, mais par une fonction qui associe à chaque combinaison de valeurs d'un groupe de variables un degré de satisfaction, dans une échelle $L = [0_L, 1_L]$. Le degré de satisfaction d'une affectation est la combinaison des degrés de satisfaction qu'elle reçoit sur les différentes contraintes. 0_L étant le degré qui exprime une violation des contraintes, il doit être absorbant. L'opérateur de combinaison $\odot$ est donc une norme triangulaire. Par exemple, dans les CSP flous [Snow and Freuder, 1990; Martin-Clouaire, 1992; Fargier *et al.*, 1992; Dubois *et al.*, 1993; Fargier, 1994], le degré de satisfaction d'une affectation est le minimum des degrés de satisfaction qu'elle reçoit ($\odot = \min$). Il faut noter que ce type de CSP peut prendre en compte des contraintes à priorité : il suffit de traduire toute contrainte de priorité i par la fonction qui donne le degré de satisfaction 1_L aux affectations qui satisfont la contrainte et un degré $n(i)$ aux autres, n étant une transformation de renversement d'ordre pour L. Le passage réciproque, des CSP souples aux CSP valués est possible mais plus compliqué. Lorsque le problème à coder met en jeu des priorité sur des contraintes souples, le codage est encore possible sous une hypothèse de commensurabilité des échelles de satisfaction et de pondération [Dubois *et al.*, 1996a].

Le cadre un peu plus général des "semi-ring CSP" (littéralement, "CSP sur des semi-anneaux") permet d'utiliser des structures de satisfaction plus complexes (typiquement, L n'est que partiellement ordonnée et $(L, \odot)$ est un semi-anneau) ; cela dit, l'algorithmique associée aux semi-ring CSP ne traite en général que du cas où $\odot$ est idempotent. Pour peu que L soit complètement ordonnée cela revient à dire que le semi-ring CSP est un CSP flou — bref, il n'y a d'algorithmique efficace pour les semi-ring CSP que lorsqu'ils sont réduits aux CSP flous ou à leur cas particulier, les CSP classiques.

Mais, au moins, on possède une algorithmique solide pour le cas des CSP flous : tous les algorithmes sur les CSP classiques s'étendent de manière saine et, dans le cas discret, sans augmentation notable de la complexité. Dans le cas continu, on peut faire appel à des approximations par α-coupes pour éviter un éventuel saut de complexité.

4.3 Expression structurée de préférences ET d'incertitudes — CSP mixtes et formules booléennes quantifiées

Les travaux sur les CSP ont été très productifs dans les dix dernières années, surtout sur le plan de l'algorithmique pratique, et dans une moindre mesure sur le plan théorique (par exemple, par l'identification de classes polynômiales). Mon travail est un peu marginal par rapport à ces avancées sur l'outil CSP. Mon idée était plutôt de m'appuyer sur ces bons résultats et d'essayer de voir comment on pouvait les utiliser, en tant qu'outils de d'expression et de résolution, pour formaliser et résoudre les problèmes de décision sous incertitude mettant en jeu à la fois des préférences (exprimées localement, sur certaines combinaisons de valeurs) et des connaissances, locales elles aussi.

Il faut bien voir que si les langages propositionnels (logique propositionnelle, PLNE, CSP) ont beaucoup à offrir pour la résolution de problèmes mettant en jeu des préférences ou des connaissances, il sont de peu d'utilité lorsque préférences ET connaissances sont en jeu. Je suis même allée un peu vite en suggérant dans la section précédente, que problèmes de décision sans préférence mais sous incertitude, et problèmes de raisonnement avec des connaissances, éventuellement incertaines, mais sans préférence, tout cela revenait au même : à la résolution d'un CSP valué. Algorithmiquement, c'est vrai, mais sur beaucoup d'autres aspects, c'est faux.

4.3.1 Raisonner ou Décider ?

Le point fondamental, c'est que dans un problème de décision pur, toutes les variables sont contrôlables, c'est l'utilisateur qui leur donnera une valeur de manière à satisfaire des contraintes, des désirs, des préférences. Dans un problème de raisonnement pur, toutes les variables sont des variables d'état, contingentes, non contrôlables — et il s'agit d'essayer de déduire, à partir de connaissances, quelles valeurs elles ont. Il y a donc une grosse différence quant à l'interprétation des données ; il y en a aussi une quant à l'interprétation des résultats [Fargier *et al.*, 1999] :

- Si le CSP a une seule solution : dans un problème orienté raisonnement, c'est la situation la plus favorable — après réflexion, aucune incertitude ne demeure et cette unique solution fournit la valeur réelle des variables contingentes. Dans un problème orienté décision, la situation est beaucoup moins favorable, puisque cela signifie que les préférences sont tout juste satisfiables ; une petite perturbation des données peut les rendre insatisfiables.
- Si le CSP n'a pas de solution : s'il est purement orienté décision, cela signifie que le problème est surcontraint et que certaines contraintes doivent être relâchées. S'il est purement orienté raisonnement, le diagnostic est complètement différent : une connaissance au moins n'a pas été spécifiée correctement (car chacune de ces variables possède une valeur effective dans le monde réel).
- Si le CSP a plusieurs solutions : la situation est plutôt favorable dans une problème de décision pur, puisque l'une quelconque devrait satisfaire l'utilisateur — il peut ajouter des critères ou de nouvelles contraintes pour discriminer davantage. A l'inverse, si le CSP est purement orienté raisonnement, l'existence de plusieurs solutions signifie qu'il n'a pas été possible de trouver avec certitude la valeur réelle des variables. Donner une seule solution reviendrait à sélectionner arbitrairement une situation qui parait possible mais qui n'est pas nécessairement la situation réelle. On pourrait donc dire que plus le CSP a de solutions, plus c'est favorable dans un

problème de décision — et moins c'est favorable dans un problème de raisonnement.

Une autre différence apparaît au niveau des requêtes : autant en décision on est intéressé à la recherche d'une solution, autant en raisonnement on est intéressé à des questions de déduction (inférence, preuve d'incohérence). L'exhibition d'un modèle n'est en revanche pas une requête très intéressante dans le traitement d'un ensemble de connaissances. Inversement, la preuve d'incohérence d'une base n'a généralement de sens que lorsqu'elle est utilisée pour montrer qu'une formule en est une conséquence logique. Dans ce cas, la trace de la preuve est en elle même une information intéressante, voire constitue le résultat attendu.

En fait, la notion de déduction n'est pas complètement absente des problèmes de décision, mais y joue un rôle différent. On la retrouve dans les algorithmes de production de conséquences par arc-cohérence, chemin-cohérence, etc. ; mais son rôle est essentiellement algorithmique : ici, on déduit de petites contraintes (unaires, binaires) dans le but de faciliter la résolution par un algorithme de retour arrière, ou de prouver la cohérence sur certains cas polynômiaux. Dans certains cas très particuliers, essentiellement la résolution interactive, la déduction peut être une requête : on s'intéresse à rendre le problème "globalement cohérent", c'est à dire que la machine doit ne laisser dans les domaines des variables que des valeurs qui apparaissent dans au moins une solution. La production de conséquence est donc limitée à un champ syntaxique sur le type de conséquence (les impliqués unaires) ; il est beaucoup plus rare que l'on cherche à montrer que toutes les affectations cohérentes ont telle ou telle caractéristique, alors que c'est l'une des requêtes principales des problèmes de raisonnement.

4.3.2 Raisonner *et* Décider : CSP mixtes et formules booléennes quantifiées

Que se passerait il si l'on modélisait par un CSP classique un problème mettant en jeu des connaissances et des préférences, des variables de décision et des variables d'état ?

- Trouver une "solution" de ce CSP serait sélectionner un monde possible et une décision valide dans ce monde. Information qui peut à la rigueur être utile si le monde réel est connu juste avant l'action — mais alors, il faudrait avoir calculé toutes les "solutions" du CSP, ce qui pose de toutes façons des problèmes de stockage. Et cela ne permet pas de détecter les situations d'incohérence — les mondes possibles dans lesquels les contraintes ne peuvent pas être satisfaites seraient simplement ignorés et confondus avec les mondes impossibles.
- De même, si l'on applique une procédure de production de conséquences, par exemple un algorithme d'arc-cohérence : disparaîtront des domaines des variables de décision des valeurs qui ne peuvent convenir dans aucun des mondes possibles et disparaîtront des domaines des variables d'état les valeurs soit impossibles (éliminées par les connaissances) soit pour lesquelles ont ne peut pas satisfaire les contraintes. En éliminant ces valeurs gênantes, on prend simplement ses désirs (les contraintes) pour des réalités (les connaissances).
- Enfin, même si la conclusion du système est l'incohérence du CSP, l'information est insuffisante : est-ce que les connaissances sont contradictoires, est-ce que les contraintes sont contradictoires dans l'absolu, ou est-ce que, dans tous les mondes possibles, les contraintes ne peuvent pas être satisfaites ?

Et les mêmes réflexions peuvent être faites dans un cadre fondé sur la logique propositionnelle. Il faut donc offrir un cadre un peu plus riche que les cadres CSP ou SAT – un cadre qui permette de distinguer les variables d'état des variables de décision.

Le(s) formalismes(s). Dans l'ensemble de mes travaux sur ce sujet, l'idée était de permettre l'expression et la résolution de problèmes de décision sous incertitude non séquentiels mais combinatoires, où les données étaient exprimées localement. Dans [Fargier, 1994; Fargier *et al.*, 1996a; 1996b], nous nous sommes appuyés sur une représentation par variables à domaines discrets et contraintes, définissant des "CSP mixtes". Dans [Fargier *et al.*, 2002; 2000c; Coste-Marquis *et al.*, 2006] nous nous sommes appuyés sur la logique propositionnelle et la notion de "formule booléenne quantifiée". Mais les mêmes concepts et les mêmes principes sont partagés par les deux groupes de travaux et les résultats qui valent pour l'un valent pour l'autre. Le point important, c'était la distinction entre deux types de variables : les variables d'état et les variables de décision ; et deux types de contraintes/formules : les connaissances et les buts.

– *Les variables.* Les variables de décision sont donc celles qui sont sous le contrôle de l'utilisateur. C'est à lui, ou au système, de leur choisir une valeur. Par opposition, on ne décide pas des valeurs des variables d'état (disons que c'est la nature qui les contrôle). En revanche, certaines d'entre elles peuvent être observables (leur valeur peut être connue avant la prise de décision, quelquefois seulement *juste* avant), les autres restant non observables : on ne saura jamais plus sur les valeurs de ces variables que ce que l'on sait déjà ; leurs valeurs ne sont pas accessibles, sauf par raisonnement à partir de connaissances.

– *Les connaissances.* Représentées par des formules ou des contraintes, elles peuvent lier soit des variables d'état entre elles – ce sont des connaissances pures – soit des décisions et des variables d'état dont au moins une non observable [3]. Ce second cas permet de modéliser des actes à effets mal connus.

– *Les buts.* Représentés eux aussi par des formules ou des contraintes, ils peuvent lier tous types de variables — on peut avoir des préférences sur les valeurs des variables d'état, sans avoir aucun levier d'action dessus.

On peut donc définir : les mondes possibles (affectation des variables d'état qui satisfont toutes les connaissances), les observations possibles (projection des mondes possibles sur les variables observables), les décisions satisfaisantes dans un monde donné (affectation des variables de décision qui, avec l'affectation des variables de d'état que constitue le monde, satisfont tous les buts), les mondes cohérents avec une décision donnée (projection sur les variables d'état des couples (décision, monde) mondes satisfaisant toutes les connaissances) et les mondes couvrables (projection sur les variables d'état des couples (décision, monde) mondes satisfaisant tous les buts).

Trois types de problèmes sont à distinguer :
– Le cas de la décision en environnement non observable (aucune variable observable) : on n'en saura jamais plus sur l'état du monde que ce que l'on sait déjà ; la valeur

[3]On voit mal comment une connaissance pourrait mettre en jeu des décisions, des variables observables, mais aucune variable non observable (les décisions étant libres et prises après observation).

des variables d'état n'est pas accessible, sauf par les connaissances modélisées. Il faut alors trouver une décision qui satisfasse tous les buts quel que soit le monde parmi les mondes cohérents avec la décision.

- Le cas de la décision en environnement totalement observable (aucune variable non observable) : l'état réel du monde sera complètement connu avant la prise de décision (souvent, juste avant). Il faut alors définir, de la manière la plus concise possible, une politique de décision ou "décision conditionnelle", c'est à dire une fonction capable d'associer en temps polynômial une décision satisfaisante à chaque observation possible.
- Enfin le cas général de la décision en environnement partiellement observable ; là encore, on recherche une politique : on veut, pour toute observation possible, pouvoir fournir rapidement une décision qui satisfasse tous les buts pour tous les mondes cohérents avec la décision et l'observation. S'il n'en existe pas de parfaitement satisfaisante pour chaque observation possible, on la veut au moins maximale, c'est à dire fournissant une décision satisfaisante pour toutes les observations qui peuvent être couvertes.

Si l'on veut mettre en rapport ces requêtes avec la théorie de la décision sous incertitude, il faut tout d'abord se placer dans un cas très simple, où les situations sont toutes de même plausibilité (ce sont les mondes possibles) et où les "préférences" sont dégénérées : une décision est, pour une situation donnée, satisfaisante ou non. On est donc dans un cadre qualitatif, le cadre possibiliste "tout ou rien" ; on pourrait dire que la règle pessimiste correspond au problème de décision sans observabilité. Au vu des réflexions précédentes, le critère optimiste semble difficile à justifier (il s'agirait de recherche une décision satisfaisante dans au moins une situation possible).

Complexité théorique Ces problèmes ne sont pas des problèmes de décision au sens de la théorie de la complexité, puisque l'on veut plus obtenir un objet (une politique) que savoir s'il en existe un. Mais on peut définir un problème de décision associé, au moins dans le but de calculer la classe de complexité du formalisme. En bref : tous les problèmes posés ci-dessus sont difficiles, généralement au dessus de NP. Les problèmes de décision associés sont en effet $\Pi^p{}_3$-complets (observabilité partielle), $\Pi^p{}_2$-complets (observabilité totale) et $\Sigma^p{}_2$-complets (non observabilité). Ces problèmes sont équivalents à des formules booléennes quantifiées — ils font alterner deux ou trois quantificateurs ; par exemple, savoir s'il existe une politique saine dans le cas partiellement observable revient à déterminer si, pour toute observation, il existe une décision telle que pour tout monde, soit le triplet satisfait les connaissances et les buts, soit il n'est pas possible (viole les connaissances).

Mais dans le type de problème qui nous intéresse, statuer sur des problèmes de décision n'est pas suffisant : il ne suffit pas de savoir si oui ou non il existe une affectation des variables de décision pour tout monde possible, il faut être capable de la montrer et/ou de l'utiliser. De la même façon que dans un CSP, on est moins intéressé par l'existence d'une solution que par son obtention. C'est ce qui nous a poussé à étudier d'un peu plus près la complexité de ce type de problème et à essayer d'introduire dans le cadre QBF la notion de "problème fonctionnel" [Fargier *et al.*, 2002; Coste-Marquis *et al.*, 2003] — le problème de calcul de modèle quand le cadre SAT, et, plus largement, dans le cadre QBF, le problème de calcul de politique.

Algorithmes Au niveau pratique, il fallait proposer des moyens de calculer (et stocker) les politiques. Nous avons dégagé les premières directions algorithmiques, sans pousser les expérimentations.

Notre idée a été de construire des algorithmes généraux qui reprennent des algorithmes CSP ou des algorithmes issus de la logique propositionnelle [Fargier *et al.*, 1996b]. Par exemple, pour les CSP mixtes et dans le cas très simple où il n'y a aucune observabilité et où aucune connaissance ne restreint les mondes possibles, on se ramène à la résolution d'un CSP. Dans les cas de totale observabilité, on peut utiliser un algorithme énumératif qui pose des CSP et appelle leur résolution (cf. Exemple 12).

Encadré 12 (Calcul d'une politique saine maximale) *L'algorithme ci-dessous associe à des ensembles de mondes observables (décrits par des produits cartésiens de valeurs pour les variables d'état, ou "environnements") des décisions qui les couvrent. Les mondes non couvrables sont reconnus et stockés. Cet algorithme fait l'hypothèse que toutes les variables d'état seront observables.*

Λ *est l'ensembles des variables observables, leur domaine est* $L = L_1 \times \cdots \times L_p$. X *est l'ensembles des variables de décision, leur domaine est* $D = D_1 \times \cdots \times D_n$. $\mathcal{K}$ *est l'ensemble des connaissances.* $\mathcal{C}$ *est l'ensemble des buts.*

Cet algorithme fait l'hypothèse que chaque contrainte comprend au plus une variable d'état. Il est donc facile de calculer les mondes couverts par une décision d : c'est le produit cartésien des domaines de ces variables une fois les variables de décision affectées selon d et le problème filtré par arc-cohérence. $Covers_{\mathcal{P}}(d)$ *effectue cette tâche.*

La fonction $Dec(F, R)$ *érode un environnement* F *en en retirant tous les tuples contenus dans l'environnement* R *— en résulte une liste d'environnements. C'est globalement la procédure "d'extraction de sous-domaine" proposée par [Freuder and Hubbe, 1995].*

Debut
`Dec` := $\varnothing$; $\{$*liste de décisions et d'environnements couverts par ces décisions*$\}$
`Env` := $\{L_1 \times \cdots \times L_p\}$; $\{$*Liste d'environnements qui n'ont pas encore été couverts* $\}$
`Bad` := $\varnothing$; $\{$*Liste d'environnements dont on a montré qu'ils ne peuvent pas être couverts.*$\}$
Repéter
    $E :=$ *un environnent de* `Env` ;
    Si $\langle \Lambda, L, \mathcal{K} \cup E \rangle$ *est un CSP cohérent* $\{E$ *contient des mondes possibles*$\}$
    alors
        Si $\langle \Lambda \cup X, L \times D, \mathcal{K} \cup \mathcal{C} \cup E \rangle$ *est incohérent*
        $\{E$ *ne contient que des mondes non couvrables*$\}$
        alors `Bad` := `Bad` $\cup E$
        sinon $s :=$ *une solution de* $\langle \Lambda \cup X, L \times D, \mathcal{K} \cup \mathcal{C} \cup E \rangle$;
            $d :=$ *projection de s sur les variables de décision ;*
            $\{d$ *couvre au moins un monde possible de* $E\}$
            $R := Covers_{\mathcal{P}}(d)$ $\{$*Contraintes unaires sur les variables d'état*$\}$
            Ajouter $\langle R, d \rangle$ *à* `Dec` ;
            `Env` := $\cup_{F \in \texttt{Env}} Dec(F, R)$ *(3)*
        end $\{$*sinon*$\}$
    end $\{$*else*$\}$
jusqu'à `Env` $= \varnothing$ *(ou interruption par l'utilisateur)*
Fin $\{$`Dec` *couvre les observations possibles et couvrables* $\}$

Voies de recherche En ce qui concerne les CSP mixtes, le premier domaine à creuser est l'algorithmique : il faut enrichir, tester et entedre l'algorithme simplifié que nous avons proposé. Dans le cas plus simple d'une représentation par variables booléennes et formules de la logique propositionnelle on se retrouve en fait dans le cadre de problèmes booléens quantifiés (QBF) à deux ou trois niveaux de quantificateurs [Fargier *et al.*, 2000c], et l'on peut a priori utiliser les outils qui existent maintenant pour traiter ce genre de problème. De plus en plus de travaux apparaissent en effet depuis le début des années 2000 sur la résolution de CSP quantifiés [Bordeaux and Monfroy, 2002; Chen, 2004; Gent *et al.*, 2004] ou de formules booléennes quantifiées (voir [Berre *et al.*, 2003; Simon *et al.*, 2004; Letombe, 2005] pour de bonnes listes de points d'entrée dans la littérature). En général, ils insistent sur le problème de décision correspondant. Les mêmes remarques s'appliquent aux tous récents "CSP quantifiés", qui seraient le cadre théorique généralisant les CSP mixtes.

Le problème fonctionnel, le problème de calcul efficace de politique, me semble au moins aussi important d'un point de vue pratique. On peut déjà remarquer qu'en ce qui concerne l'espace, le stockage de politique est évidement une question difficile : dans le pire des cas, il faut mémoriser une décision pour chaque observation possible, et ces dernières sont au pire des cas en nombre exponentiel. Se pose alors directement la question de la représentation compacte de la politique (il ne s'agit pas de la livrer in extenso à l'utilisateur, c'est généralement impossible d'ailleurs ; il faut pouvoir la stocker sous une forme garantissant, pour toute affectation des observations, le calcul en temps polynômial de la décision compatible associée), voire de son expression partielle [4].

L'autre dimension à développer est celle de l'introduction de la gradualité et de la quantification de l'incertitude. Elle apparaît dans les travaux de [Dubois *et al.*, 1998a] qui montrent comment on peut obtenir une solution optimale au sens des critères possibilistes pessimiste en utilisant des algorithmes abductifs sur deux bases de formules possibilistes stratifiées (l'une représentant les préférences plus ou moins prioritaires, l'autre de connaissances plus ou moins sûres). On est ici dans le cadre non observable. Le même type de travail avait été effectué dans le cadre des problèmes d'ordonnancement sous contraintes [Fargier, 1994; Dubois *et al.*, 1995]. Il permettait l'expression de préférences flexibles (sur les dates d'approvisionnement par exemple) et de connaissances graduelles (sur les durées des tâches) par des ensembles flous. C'est même dans ce cadre, qui distinguait déjà variables de décision et variables d'état, contraintes et connaissances, qu'on a défini pour la première fois les utilités possibilistes pessimiste et optimiste. Il me parait évident maintenant qu'il faut reprendre l'étude conjointe des CSP mixtes et valués.

Ceci pour les problèmes de décision combinatoire en environnement incertain partiellement observables, et sous l'hypothèse de commensurabilité. Dans les cas non-commensurables, la solution est sans doute un retour aux sources, vers la logique QDT proposée par Boutilier [Boutilier, 1994], qu'il faut étudier à la fois du point de vue de la complexité théorique et du point de algorithmique – voir [Herzig *et al.*, 2003a]

4.3.3 Satisfaction de contraintes temporelles en environnement incertitude

Mes premiers travaux sur la décision sous incertitude [Fargier, 1994] ont porté sur les problèmes de satisfaction de contraintes temporelles particuliers, des problèmes d'ordonnancement de tâches sur des machines de type "job-shop", l'incertitude venant du fait que les durées des tâches ne sont pas des variables contrôlables et ne sont pas parfaitement connues.

[4] Par exemple, on peut chercher à ne prévoir que l'affectation des premières variables existentielles (des variables de décision), sachant qu'un laps de temps suffisant sera disponible entre l'exécution de cette décision et la prochaine observation. En termes de jeu, il s'agit de calculer mon prochain coup tel que, tout prochain coup de l'adversaire, je sois sûr de gagner in fine (mais sans forcément dire comment).

Ce problème de job-shop sous incertitude se généralise facilement sous la forme d'un "problème temporel sous incertitude". Ce cadre est aux TCSP ce que les CSP mixtes sont aux CSP. A la petite différence qu'ici, ce ne sont pas les variables qui sont contrôlables ou non, mais les contraintes ; ce qui est normal, puisque les arcs d'un TCSP, qui expriment des contraintes du type "$x_j - x_i \in I_{ij} = I_1 \cup \cdots \cup I_k$", jouent le même rôle que les variables d'un CSP. Dans un TCSP sous incertitude, on distingue deux types d'arcs (ou de contraintes) : les arcs contrôlables et les arcs contingents. Lorsque l'arc est contrôlable, c'est à l'utilisateur (ou au système) de choisir une valeur pour $x_j - x_i$ dans I ; lorsqu'il est contingent, c'est la nature qui choisira cette valeur. Le TCSP étant cohérent si l'ensemble des différences de potentiel obtenu l'est aussi. Pour retrouver les concepts utilisés dans les CSP mixtes, il faut comprendre que l'ensemble des arcs contingents est un ensemble de connaissances et pose un problème de raisonnement ; on appellera configuration possible, plutôt que monde possible une solution de ce TCSP. De même, l'ensemble des arcs contrôlables forme un problème de décision, lui aussi représentable par un TCSP.

On peut reporter sur le problème les hypothèses d'observabilité totale et de non observabilité. Dans le premier cas, il faut trouver une politique saine, c-à-d montrer que, pour toute configuration possible des valeurs de durées des arcs contingents dans leur intervalle de variation il existe une décision satisfaisante, c'est à dire valeur des arcs contrôlables satisfaisant toutes les contraintes. Dans le cas non observable, il faut trouver une affectation des durées des arcs contrôlables cohérente dans toutes les configurations possibles des durées. Le problème est alors dit fortement contrôlable et l'affectation est une "solution forte" du problème ; en termes de décision sous incertitude, c'est une solution maximisant la nécessité de satisfaire le problème — une décision optimale au sens de l'utilité possibiliste pessimiste.

Une troisième notion apparaît avec la dimension temporelle : la contrôlabilité dynamique [Morris and Muscettola, 1999] ; en effet si la durée d'un événement contingent n'est pas observable avant le début de l'événement, elle est connue dès qu'il est terminé. Si l'on pose la restriction que les durées des événements contingents sont indépendantes les unes des autres et puisque c'est l'utilisateur qui fixe le début des tâches, on peut parler de contrôlabilité dynamique : le problème est dynamiquement contrôlable si on peut choisir une date de début d'un premier ensemble de tâches tel que, quelle que soit leur durée, on puisse lancer un second ensemble de tâches, tel que, quel que soit, (etc), toutes les contraintes contrôlables soient satisfaites.

Nous n'avons pas travaillé dans le cas général mais dans un cas simple où pour une configuration possible donnée, le problème de décision résultant est polynômial — c'est un CSP temporel où les arcs ne portent qu'un intervalle. L'ensemble défini donc un "simple temporal problem under uncertainty" (STPU) [Vidal and Ghallab, 1996; Vidal and Fargier, 1997]

Ce fragment polynômial permet déjà de représenter pas mal de situations. Il est facile de montrer que dans ce cas là, l'obtention d'une solution forte est un problème polynômial, et nous avons conjecturé que le problème de la contrôlabilité dynamique est CO-NP complet, résultat prouvé par [Morris and Muscettola, 1999]. Ils ont également poussé plus à fond l'étude de la contrôlabilité dynamique : de façon surprenante, le problème de décision associé est polynômial [Morris *et al.*, 2001] ; ces auteurs ont étendu toutes ces notions au cas flou, via la notion d'alpha-coupe [Khatib *et al.*, 2001] — sans surprise ce coup-ci, on peut prendre en compte des préférences exprimées par des intervalles flous sans qu'il y ait de saut de complexité.

Dans tous ces travaux, l'idée était d'essayer de rester sur un fragment polynômial : le

STPU devait être un composant de base d'un planificateur. Cette hypothèse permettait aussi de ne pas calculer et stocker les politiques de manière provisionnelle : puisqu'une fois la configuration observée, on se retrouve avec un problème (très) facile, il suffisait de vérifier l'existence d'une politique saine.

Peut-être peut-on maintenant relâcher cette hypothèse, ce qui permettrait d'aborder d'autres questions intéressantes, comme par exemple le traitement de CSP temporels sous incertitude en général, et des problèmes de job shop en particulier — la notion de contrôlabilité dynamique y est tout à fait pertinente. Sous l'hypothèse de non observabilité, le problème est connu et il n'y a pas de saut de complexité notable pour le cas du job-shop (c'est le problème du job-shop à durées floues sous le critère pessimiste) ; en est-il de même pour le cas des TCSP généraux ? Sous l'hypothèse d'observabilité totale, on ne peut plus se permettre de résoudre en ligne le problème correspondant à la configuration qui vient de sortir, et la question de la mémorisation et /ou de la compilation de politique redevient majeure.

4.4 D'autres problèmes raisonnement/décision à énoncé compact

Dans ce chapitre, j'ai présenté la question comme suit : l'utilisateur ne décrit pas explicitement ses préférences et ses connaissances par des relations sur les mondes et les décisions, mais à l'aide d'un "langage" propositionnel, typiquement à l'aide de contraintes ou de formules logiques ; il faut alors des algorithmes et des structures de données pour construire des décisions adaptées aux différentes situations (ou vérifier qu'il en existe), et il faut les stocker. Il existe bien sûr d'autres langages que ceux présentés ici, et d'autres problèmes à énoncé compact mettant en jeu les notions de décision et de raisonnement.

Des langages logiques pour la décision sous incertitude

Par exemple, les logiques dites BDI pour "belief desire intention" ne sont pas des formalismes de d'aide à la décision, mais plutôt des outils de raisonnement sur les croyances, désirs et politiques de décision d'agents. Le point de départ est la donnée d'un plan conditionnel, décrit par un arbre de décision et la donnée d'un critère (par exemple, la maximisation de l'utilité espérée) ; des connaissances (décrites par des formules logiques) sont attachées à chaque noeud de l'arbre. On teste alors la satisfiabilité ou la validité d'autres formules modales – par exemple, "est-il vrai que l'agent croit ceci, désire cela, ou décide cela ?". L'objet de base étant l'arbre de décision, il est difficile de dire que les BDI fournissent des outils compacts/structurés pour l'expression de connaissances et de préférences : ce travail a dû être fait en amont (pourquoi pas à partir d'une modélisation QBF au lieu d'un arbre de décision de type utilité espérée), et la politique de décision a être fixée avant son inspection par les requêtes BDI.

D'autres formalismes logiques sont dédiés au raisonnement sur l'action ou inversement à l'action en vue d'améliorer les connaissances (aux "actions epistémiques"). A l'extrême, on va jusqu'à des langages logiques pour la planification en environnement partiellement observable. Pour de bons point d'entrée sur ces logiques, on pourra se référer à [Lang, 2003; Herzig *et al.*, 2003b]. Une autre manière de considérer ces problèmes serait de faire des CSP mixtes séquentiels, des CSP mixtes pour la planification, mais elle ne serait pas foncièrement différente. Plus intéressante serait l'introduction de nouvelles requêtes, comme celle de la contrôlabilité dynamique dans les problèmes de planification ; cela éviterait le calcul explicite d'un plan conditionnel sur n étapes tout en garantissant l'optimalité de la prochaine action (et souvent son calcul en temps raisonnable).

Préférences conditionnelles "toutes choses égales par ailleurs"

Les travaux sur les préférences conditionnelles essaient d'exploiter le fait que les relations de préférence sur des "mondes" possèdent des projections "toutes choses égales par ailleurs". Ici, un monde est la spécification de propriétés que des objets ont ou n'ont pas — on peut voir les mondes comme des vecteurs de satisfaction ou non satisfaction de critères tout ou rien : sauf restriction par une contrainte de faisabilité, l'ensemble des mondes est formé de toutes les affectations d'un nombre fini n de variables booléennes. Ici, aucune forme d'incertitude n'est prise en compte : on serait plutôt dans une extension aux ordres partiels de CSP graduels.

Les préférences exprimées localement le sont souvent sous l'hypothèse que les propriétés non impliquées dans un énoncé sont supposées prendre la même valeur dans le cas dominé et dans le cas dominant. C'est pourquoi l'assertion de base de ce type de langage est de la forme : pour tous les mondes où la propriété p est vérifiée, la propriété q est préférée à la propriété r. Ce qui s'interprète généralement par : un monde qui satisfait p, q mais pas r est strictement préféré à tout monde qui satisfait p, r mais pas q, du moment que les autres propriétés prennent la même valeur dans les deux mondes. Un "modèle" de ce type de base d'assertion est donc un ordre, généralement partiel, sur les mondes, une relation de préférence.

Les CP-nets forment un langage assez restreint pour l'expression de ce type de connaissances. Les assertions d'un CP-net expriment que, un certain nombre v de variables étant fixées à une combinaison donnée, p est préféré à $\neg p$, toutes choses (c'est à dire les $n-v-1$ autres variables) étant égales par ailleurs. Liant toute variable à celles dont elle peut dépendre, on obtient un réseau. La première requête qui a suscité l'intérêt est la comparaison de deux mondes ; elle est difficile même dans le cas où le réseau est acyclique mais, dans une optique de décision, son intérêt me semble limité. Me semblent plus intéressantes les questions de détermination de la cohérence d'un CP-net et de recherche d'un monde non dominé.

La première de ces requêtes est surtout pertinente lors de l'élicitation des préférences. Intuitivement, les préférence exprimées sont incohérentes ssi elles forment un circuit, c-à-d s'il existe une affectation des variables puis un certain nombre d'améliorations qui retombent in fine sur l'affectation originale. C'est donc ces cycles de préférence stricte qu'il faudrait fournir à l'utilisateur, de manière à ce qu'il revoie l'expression de ses préférences ; idéalement, il faudrait lui fournir des circuits minimaux. La difficulté est que la détermination de la cohérence d'ub CP-net est un problème PSPACE-complet en général. Il est trivialement facile si le graphe est acyclique, mais dans ce cas la requête perd tout son intérêt (puisque dans ce cas, la base est forcement cohérente). Cette restriction polynômiale peut être élargie en autorisant les graphes orientés sans circuit et des hyper-arbres où plusieurs assertions concluent sur la même variable.

La seconde requête a sa place en ligne, lorsque l'utilisateur recherche un objet en accord avec la base de préférences à partir soit de l'affectation d'un certain nombre des variables (ce sont des contraintes utilisateur) soit d'un monde original (c'est la requête "qu'y a-il mieux que ?"). Disons, un monde non dominé qui complète son affectation ou améliore le point de référence. Quelques remarques :

– Le problème est facile dans le cas d'un graphe acyclique ; il est NP-complet dans le

cas général [Brafman and Dimopolous, 2004]. Deux cas particuliers devraient être étudiés : celui des bases cohérentes (la procédure d'amélioration ne risquant pas de boucler, il n'est pas nécessaire de mémoriser les améliorations suivies), et encore une fois, celui des réseaux sans circuit.
– Même si la base est incohérente, il peut rester des mondes non dominés. C'est une remarque importante d'un point de vue pratique, puisque dans ce cas là l'utilisateur peut avoir une réponse. Disons qu'en ligne, un bon algorithme est un algorithme qui soit capable de fournir un monde non dominé s'il y en a, ou de détecter un circuit obligatoire s'il n'y en a pas.
– Plus largement, on peut vivre dans des cycles de dominance. On l'a vu, parce qu'il peut rester des mondes non dominés. L'autre option est de briser ces cycles comme on peut le faire en choix multicritère. Une autre voie à creuser.

Enfin, pour conclure ces quelques réflexions sur les CP-nets, disons que le problème inverse est intéressant également, et se rapproche des préoccupations de la communauté du mesurage conjoint : comment représenter une relation sur des vecteurs, sachant qu'elle représente un certain nombre de propriétés (typiquement, des groupes de préférences locales ceteris paribus). Ici, il faudrait la représenter par des désirs conditionnels en nombre minimal. Lorsque la relation et un préordre, on peut se poser la question de sa représentation soit par une mesure monotone plus ou moins décomposable soit par un CSP valué.

Communautés d'agents et décision combinatoire

Le troisième groupe de problèmes de décision à représentation compacte auquel je pense, et non le moindre, est celui des problèmes mettant en jeu des communautés d'agents : enchères combinatoires, problèmes de partage équitable, décision collective (vote combinatoire). Pour ce dernier domaine, on peut se référer aux travaux de Jérôme Lang, qui étudient la richesse et la complexité théorique d'un certain nombre de langages de représentation des préférences [Lang, 2002].

Les deux premiers problèmes, enchères combinatoires et partage équitable, se ressemblent un peu (puisqu'un objet ne peut être emporté que par un agent), c'est le type de critère qui diffère : il est plutôt utilitariste dans le premier cas, certainement égalitariste dans le second cas. La difficulté dans le premier cas est que les agents expriment des préférences sur les combinaisons de biens et non sur des biens élémentaires ; on a alors facilement affaire à des problèmes NP-difficiles. Voir [Cramton *et al.*, 2005] pour un tour d'horizon des enchères combinatoires. J'ai un peu abordé les problèmes de partage, avec J. Lang et M. Lemaitre et sur un projet d'allocation de prises de vues proposé par le CNES [Lemaitre *et al.*, 2002; Fargier *et al.*, 2004b; 2004a] : nous avons proposé un langage d'expression des demandes de prises de vue, élémentaires ou composées comme dans les enchères combinatoires, et un critère d'évaluation des allocations fondé sur une vue à la fois égalitariste et efficace (au sens de la Pareto optimalité) : il s'agissait de minimiser l'insatisfaction du moins satisfait des agents, cette insatisfaction étant elle même évaluée par rapport à l'importance de la plus prioritaire de ses demandes non satisfaites ; implicitement, nous avons utilisé une procédure d'agrégation de type leximin(leximin) (voir Section 2.4.3) — procédure qui reste encore à axiomatiser correctement.

Cela dit, les problèmes de partage combinatoires sont rarement étudiés. Pourtant, il faudrait, à la suite de [Bouveret and Lang, 2005], mener une étude de la richesse d'expression et de la complexité des problèmes de partage similaire à celle menée sur les problèmes de vote combinatoire.

Chapitre 5

Aide à la décision

Ce dernier chapitre présente mes contributions sur des problème d'aide à la décision au sens large où il n'est plus question de proposer à l'utilisateur une solution optimale ni même un critère de sélection. Il est difficile de le présenter de manière homogène, puisqu'autant d'applications peuvent faire émerger autant de problèmes différents (et c'est bien ce qui rend les applications indispensables à la recherche, même fondamentale [1]). Se dégagent des problèmes que j'ai étudiés, plusieurs besoins ; en aide à la décision, il faut entre autres pouvoir :

- Prévoir, c'est-à-dire évaluer les valeurs plus ou moins certaines de variables d'état à partir de connaissances plus ou moins imprécises. C'est le problème qui se pose par exemple dans les PERT flous, où il s'agit de calculer, à partir de contraintes de séquencement et de la connaissance des durées, incertaines, de tâches, les valeurs plus ou moins possibles du makespan, des marges des tâches, etc. Il est au centre de plusieurs des applications que nous avons étudiées : un problème d'évaluation des stocks, des besoins en sous-traitance et plus généralement du plan directeur de production à partir de demandes prévisionnelles [Fargier and Thierry, 1997; 1998], un problème d'évaluation du risque d'exposition à la pollution [Guyonnet *et al.*, 2003] et un problème d'évaluation du risque de dérive du plan d'un gestionnaire de projet aéronautique [Fargier and Thierry, 2002; Parrod *et al.*, 2003; 2005].
- Aider l'utilisateur à converger sur une solution satisfaisant des critères bien définis mais dont la fonction d'agrégation n'est pas connue. Le rôle de la machine peut se limiter à une simple évaluation selon ces critères de décisions proposées par l'utilisateur — par exemple, estimer dans quelle mesure il est possible ou certain que tel ou tel plan satisfera la demande (sur le problème de gestion du plan directeur de production). Dans des problèmes plus combinatoires, où l'utilisateur ne peut pas énumérer les solutions potentielles, le système peut lui proposer de diriger un processus d'optimisation interactif. C'est ce que nous avons fait dans un problème d'ordonnancement d'atelier de traitement de surface où deux critères doivent être optimisés, la qualité minimum et le temps [Fargier and Lamothe, 2001]
- Simuler les conséquences des choix de l'utilisateur – c'est l'un des besoins principaux des problèmes de configuration interactive [Amilhastre *et al.*, 2002], et plus généralement de résolution interactive de CSP. C'était aussi l'option que nous avons

[1] D'ailleurs, le mot application est mal choisit : nos résultats ne peuvent souvent que répondre imparfaitement aux situations industrielles sur lesquelles on les applique, du fait de la complexité et de la diversité des besoins de ces situations. En revanche, la réalité fournit la matière première de la recherche – questions, besoins, exemples et contres-exemples

choisie pour un problème d'évaluation du risque de dérive temporelle des projets aéronautique nécessitant une ressource stratégique sous-traitées [Parrod *et al.*, 2003; 2005] : là, c'est la qualité des politiques d'échange et du niveau de flexibilité de la relation donneur d'ordres - sous-traitant qui doit être évaluée à partir de jeux d'aléas.
- Aider l'utilisateur à retrouver une solution quand la situation est conflictuelle – il peut s'agir de lui indiquer quels éléments du problème sont en conflit et plus largement de calculer des explications, ou de lui proposer des moyens de lever le conflit. Nous avons utilisé la première idée dans un problème de gestion distribuée de production de satellite [DIDOM, 1997; 2000; Galvagnon, 2000] où il s'agissait d'énumérer ceux des chemins d'un graphe de séquencement qui conduisaient au dépassement des contraintes de jalons, la seconde idée ayant été développée pour l'aide à la configuration de produit.

Sur ces problèmes, tous liés à la productique, j'ai principalement participé au traitement de deux difficultés : d'une part, la prise en compte de la flexibilité des données et partant, le calcul de quantités floues ; d'autre part, la résolution interactive proprement dite, en ce qu'elle exige des temps de réaction rapides et donc exclut le déroulement d'un algorithme qui risque d'être exponentiel.

5.1 Prise en compte de données graduelles et calcul de quantités floues

Dans [Fargier and Thierry, 1997; 1998; DIDOM, 1997; 2000; Fargier and Lamothe, 2001; Fargier and Thierry, 2002; Dubois *et al.*, 2003a] préférences comme connaissances possèdent une certaine gradualité, sans que l'on puisse obtenir des données statistiques ou avoir une idée précise des coûts induits par tel ou tel choix. Dans le problème de plan directeur de production par exemple, aucune statistique n'est disponible sur les commandes prévisionnelles des clients ou sur les possibles dérives de tâches sous-traitées. Dans le problème de traitement de surfaces on connaît juste les plages de valeurs optimales du temps de traitement, et l'on peut faire l'hypothèse d'une dégradation continue jusqu'aux limites acceptables de qualité.

La solution est alors d'utiliser une modélisation par ensembles flous des préférences comme des connaissances. Cette solution a en outre souvent l'avantage de permettre un traitement du problème par propagation de contraintes, traitement qui n'aurait pas été possible avec une approche stochastique. Par exemple, les deux applications aéronautiques et spatiales [DIDOM, 1997; 2000; Parrod *et al.*, 2003; 2005] étaient organisées selon une structure projet, le coeur du problème étant donc la planification temporelle de tâches, au sens des graphes PERT. Or le calcul de date au plus tard dans un PERT flou se résout par une simple propagation avant des dates de disponibilité, alors que dans un PERT stochastique, il devient fortement combinatoire.

Les applications considérées portant sur des grandeurs réelles, on se retrouve avec des problèmes de calcul d'intervalles, et souvent d'intervalles flous. Selon les cas, nous y avons apporté différentes solutions :
- Lorsque les contraintes sont linéaires, on peut utiliser des techniques de programmation linéaire floue pour trouver rapidement des solutions satisfaisant l'un ou l'autre des critères à optimiser ; c'est cette solution qui a été retenue pour servir de moteur à la résolution interactive de problème de traitement de surface [Fargier and

Lamothe, 2001].

– La technique de résolution par α-coupes reste une valeur sûre dans tous les cas où existe une algorithmique efficace pour résoudre un problème de calcul d'intervalles – nous l'avons utilisé pour le problème de plan directeur de production comme pour les problèmes de planification de projet [Fargier and Thierry, 2002] [Dubois *et al.*, 2003a]
– Dans certain cas, où le(s) équation(s) définissant le paramètre à calculer sont monotones dans leurs arguments (flous), le calcul flou peut utiliser des principes de calcul par fronts – nous avons repris et développé cette idée initiée dans [Fargier, 1994; Fargier *et al.*, 2000b] dans le cadre du travail de thèse de J. Fortin [Dubois *et al.*, 2004a; 2004b; D. Dubois, 2005].
– Dans d'autres cas, le problème est fondamentalement combinatoire – il l'est alors dès que des intervalles, flous ou non, décrivent les données. Il faut donc revenir au cas d'intervalles non flous pour en étudier la complexité théorique, et proposer une algorithmique adaptée. C'est ce qui a été fait dans le cadre des thèses de V. Galvagnon [Galvagnon, 2000] puis J. Fortin : nous avons repris le "vieux" problème du PERT flou, que nous avons considéré comme un problème d'identification des configurations des durées des tâches qui optimise la valeur des paramètres à calculer : configuration qui minimise la marge d'une tâche, configuration qui la rend critique, etc. Certaines de ces requêtes définissent des problèmes polynômiaux (la configuration optimale peut être définie à l'avance), d'autres des problèmes NP-difficiles où il faut donc utiliser intelligemment un algorithme d'énumération [Dubois *et al.*, 2005; Zielinski *et al.*, 2005]. Heureusement, nous avons pu montrer que lorsque le graphe du projet est série-parallèle (c'est à dire, pour la plupart des projets réels) toutes ces requêtes deviennent polynômiales [Fargier *et al.*, 2000b; Dubois *et al.*, 2003a].

Ces techniques ne sont applicables que lorsque les données sont homogènes ou commensurables – on utilise alors la théorie des possibilités, et plus largement la théorie de l'utilité possibiliste (cf. [Dubois *et al.*, 1995; Fargier and Thierry, 1997; 1998]). Une difficulté supplémentaire intervient lorsque les données sont hétérogènes. En effet, ce n'est pas parce que deux grandeurs sont modélisées par des ensembles flous qu'elle sont faciles à combiner — si aucune hypothèse de commensurabilité ne peut être faite, on doit faire une évaluation multicritère des solutions. Il y a également problème multicritère lorsque tout n'est pas gradualité floue — dans notre application de traitement de surfaces, les données étaient intrinsèquement hétérogènes, puisqu'il fallait maximiser la qualité (floue, obtenue à partir d'un CSP flou) et minimiser le makespan. Lorsque c'est possible, il me semble que le mieux est d'aider l'utilisateur à arbitrer entre les critères, dans l'esprit par exemple de la méthode STEM qui n'optimise qu'un critère à la fois, le niveau de satisfaction des autres étant fixé par le décideur en fonction des degrés de satisfaction obtenus lors des itérations précédentes. C'est ce que nous avons fait pour le problème de traitement de surface où deux critères étaient à optimiser, la qualité et le temps de traitement. Si ce n'est pas possible il faudrait alors nous tourner vers les algorithmes de résolution de problème combinatoires multicritère qui font aujourd'hui l'objet d'études poussées en recherche opérationnelle.

Enfin, l'hétérogénéité peut concerner l'évaluation de l'incertitude elle même – dans le problème de gestion du risque de pollution par exemple, l'incertitude était évaluée sur certains paramètres par des distributions de possibilité, sur d'autres par des distributions de probabilité. Ici, une approche multicritère n'a pas de sens et il faut ramener les évaluations de l'incertitude à un cadre commun. Soit en développant des transformations possibilité-probabilité, soit en se plaçant naturellement dans un cadre qui inclut les deux théories, les fonctions de croyance de Dempster-Shafer. C'est le travail que nous avons été entamé dans le cadre d'un projet porté par le BRGM [Guyonnet *et al.*, 2003] ; il a ensuite été approfondi et développé par C. Baudrit lors de sa thèse [Baudrit *et al.*, 2003b; 2003a; 2004a; 2004c; 2004b; Baudrit, 2005].

5.2 Résolution interactive

Certaines applications, comme dans les applications de configuration de produit [Aldanondo *et al.*, 2001][Fargier *et al.*, 2000a; Amilhastre *et al.*, 2002] et de planification distribuée [Galvagnon, 2000] cités plus haut, définissent clairement un CSP. Mais ce n'est pas la machine mais l'utilisateur qui le résout, en fonction de critères et de préférences qui lui sont propres. Dans ces problèmes de résolution interactive, le temps imparti à la machine est fortement limité : de l'ordre de quelques secondes. Ce qui n'est a priori pas compatible avec la complexité au pire cas des algorithmes qui résolvent des problèmes NP-difficiles comme le maintien de la cohérence globale des domaines dans un CSP ou le calcul d'explications optimales s'il s'avère incohérent.

D'un autre côté :

- Tout le travail de la machine n'a pas forcément à être réalisé en ligne, lors de l'interaction finale avec l'utilisateur ; une grande partie du travail peut être réalisée hors ligne et être temporellement moins contrainte — dans un problème de configuration, il est toujours possible de procéder à un preprocessing sur le CSP qui représente le produit configurable en amont (et une fois pour toutes, à la construction du configurateur), avant les sessions de configuration proprement dites [Pargamin, 2003; Amilhastre *et al.*, 2002].
- La plupart du temps, l'application ne se situe pas dans la zone des pire cas – dans l'exemple précédent, nous avons choisit de "compiler" le CSP décrivant le produit configurable en un OBDD, compilation qui est au pire cas exponentielle, mais en l'occurrence tout à fait traitable, puisque la représentation par automate était en fait plus économique que le CSP original lorsque ses contraintes représentées par des tables. Dans le même ordre d'idée, un algorithme qui n'est pas complet en général peut l'être quasiment toujours sur une application. Ainsi, dans le cadre de la thèse de M. Véron [Véron, 2001] nous avons utilisé un filtrage par arc cohérence, qui suffisait généralement à rendre le produit configurable globalement cohérent après chaque choix utilisateur.
- La notion d'algorithme efficace au sens "algorithme polynômial" doit être relativisée ; d'un côté, si le polynôme représente la complexité optimale et est d'un degré élevé, le temps imparti à la résolution est vite dépassé. D'un autre côté, dans les problèmes d'explication où la taille de la sortie est au pire cas non polynômiale, la notion n'a plus de sens. Si l'utilisateur est capable d'appréhender une sortie, c'est la dimension de cette information qui forme, avec bien sûr la taille de la donnée d'entrée, l'unité de mesure. Dans le problème de calcul d'explications pour des plans inconsistants, nous avons choisi d'énumérer les explications, de la plus contrainte à la moins contrainte, l'utilisateur pouvant interrompre le processus en cours de route et le temps de production d'une explication étant linéaire dans sa taille.

Les questions de fond qui sont ressorties de ces études peuvent donc être très théoriques, par exemple des questions de complexité – d'algorithmes et de structure de données, de langages d'expression.

Nous sommes restés à un niveau un peu plus pratique, en reprenant les travaux de [Vempaty, 1992] sur la compilation de CSP par des automates et surtout l'utilisation de ces automates pour les requêtes qui nous intéressaient. Nous avons pu montrer que des algorithmes de propagation avant et arrière le long des chemin de l'automate, tout à fait similaires à ceux utilisés dans les PERT, permettent de traiter en un temps linéaire en la taille de l'automate des requêtes aussi diverses que celles du maintien dynamique de la consistance globale, du calcul de relaxations optimales, de calcul de nombre de solutions — voir [Amilhastre *et al.*, 2002] pour plus de détails.

La compilation par automates d'un CSP représentant un produit configurable est efficace car elle sait tirer avantage du fait que, dans ce genre de CSP, de nombreuses valeurs sont interchangeables. Elle ne tire pas partie cependant d'une autre caractéristique – l'indépendance ou l'indépendance conditionnelle de certaines variables. Pour mieux en tirer parti, nous avons proposé une structure un peu plus générale, les "automates d'arbres" — des OBDD en forme d'arbre et non de ligne, qui posséderaient en quelque sorte plusieurs bouts (voir [Vilarem, 2004; Fargier and Vilarem, 2004]). Cette structure s'avère plus intéressante, puisqu'elle permet une représentation linéaire de tout CSP arborescent alors que, nous l'avons montré, certains CSP arborescents peuvent être compilés par un OBDD qu'au prix d'une explosion exponentielle du nombre d'états. Si l'on veut les replacer dans la "road map" des formes compilées tracée par Darwiche et Marquis [2001], les "automates d'arbres" sont des DNNF ordonnées et non booléennes — voir [Marquis, 2006].

Au terme de ce travail, quelques questions restent en suspens. Par exemple, l'utilisation d'une forme compilée est justifiée en pratique par sa faisabilité et en théorie par la NP-difficulté des tâches à réaliser ; mais les solveurs SAT étant devenus très performants, il faudrait tester en pratique leur (in)efficacité sur les problèmes de satisfiabilité itérative et de calcul de sous-problèmes maximaux consistants que sont les problèmes de satisfaction interactive, et par là poser des concurrents aux approches compilées. Autre question : celle de la compilation des objets livrés à l'utilisateur ; je pense en particulier à des problèmes de décision sous incertitude et plus largement de planification non déterministe, où c'est une politique (un plan conditionnel) qui est demandée à la machine ; calculée hors ligne, elle est utilisée en ligne et donc en temps contraint. Là encore, il semble qu'une structure comme un OBDD ou mieux un automate d'arbre permette de répondre efficacement à la question de l'exécution et du suivi de plan en contexte non déterministe.

Chapitre 6

Perspectives

Dans ce texte, j'ai essayé de présenter à la fois nos résultats et les questions que qu'ils soulèvent. Il s'agit certaines fois de simples propositions d'études comparées (par exemple, étudier les relations sur les coalitions de critères induites par toute approche à la fois non commensurable et transitive) ou de généralisations (porter les leximin(leximax) sur des problèmes de comparaison de matrices). Quelquefois aussi, nos résultats sont encore trop partiels et doivent être complétés et/ou expérimentés pour former une théorie solide — il faut par exemple mener une comparaison expérimentale des approches directes et compilée de la résolution interactive de CSP. D'autres questions sont plus fondamentales, et forment les perspectives de mon travail.

Les modèles qualitatifs efficaces Un gros travail a été accompli, ces dix dernières années, pour construire une (des) théorie(s) de la décision qualitative. Le problème est que ces modèles, pour cohérents qu'ils soient avec l'idée de raisonnement par ordre de grandeur, sont inefficaces, peu discriminants et n'arrivent généralement pas à respecter le principe d'efficacité de Pareto — qui est pourtant lui même un principe purement ordinal.

Nous avons pu montrer que les principes mis en oeuvre par ces modèles ne sont pas incompatibles avec le principe d'efficacité : des raffinements efficaces des règles qualitatives existent, fondés sur des principes de lexi- et discri-comparaison. En existe-il d'autres ? qu'est ce qui les différencie les uns des autres ? D'autre part, notre travail a mis en évidence les limites des approches non commensurables basées sur l'indépendance ordinale – un axiome, on l'a vu, qui doit être relâché pour laisser de la place à des modèles basés sur une notion de dominance "stochastique" et de comparaison à des objets de référence.

En d'autres termes, il est nécessaire, pour clore la question de la décision sous incertitude qualitative, de mener une étude axiomatique un peu systématique des modèles qualitatifs efficaces. Dans un second temps, il faudra munir ces théories de langages d'expression locale et compacte, des préférences, langages dont les règles identifiées plus haut formeraient les bases sémantiques.

Bipolarité en DMU : pour en finir avec les capacités Le second axe théorique qu'il est nécessaire d'attaquer est la construction d'une théorie bipolaire de la décision, et en particulier de la décision qualitative. Il me semble que c'est la seule manière de mettre en lumière la nature jumelle des capacités et l'idée que c'est la question, la manière d'éliciter les connaissances, qui force leur expression sous une forme ou l'autre. Le second volet de cette théorie de l'incertitude portera naturellement sur la révision des connaissances, fondée sur l'idée que l'on ne révise pas la capacité, mais la connaissance sous-jacente.

Représentation compacte de préférences Des langages de plus en plus nombreux sont proposés pour l'expression locale de préférences, qui utilisent généralement des principes de décision très faibles ; inversement, les travaux en théorie de la décision proposent et argumentent des règles de décision riches, mais sans offrir aucun autre langage de description qu'une fonction d'utilité sur les conséquences et une capacité sur les événements – autant d'informations qui sont impossibles à décrire in extenso lorsque conséquences et mondes possibles sont décrits par des variables de décision et d'états.

Le problème est bien évidement de faire le lien entre les deux, et il est vaste. Pour ma part, j'aimerais l'aborder sous l'angle de la compilation de relations de préférences : étant donné une relation rationnelle, qui obéit à un certain nombre d'axiomes de décision, dans quel langage cible peut-on l'exprimer ? Par exemple, de la même façon qu'il est possible de mémoriser une distribution de probabilité par un CSP valué ou un réseau bayésien, il doit être possible de représenter une relation d'utilité espérée par un CSP valué mixte. Une fois identifiée l'expressivité des langages, il faut bien sûr se poser la question complémentaire de la complexité des requêtes (par exemple, combien coûte dans les réseaux d'utilité espérée l'identification d'une solution optimale ?) et celle de l'algorithmique associée.

Algorithmes et structures de données pour la décision sous incertitude Au niveau informatique, on l'a vu au chapitre 4, la résolution de problèmes de NP a fait l'objet d'avancées spectaculaires (e.g. SAT, CSP, CSP valués, etc). La question est maintenant de savoir si l'on peut poser et résoudre de manière réaliste des problèmes de décision sous incertitude à énoncé compact.

La réponse est oui pour des problèmes simple comme les CSP mixtes, qui se placent au premier niveau de la hiérarchie polynômiale. Elle l'est encore si l'on ajoute à ces cas simples des préférences et connaissances graduelles, voire définissant des ordres partiels sur les mondes. Plus généralement, la question est de définir des versions gradualisées des problèmes QBF. Elle se double d'une seconde question, qui ne se pose pas lorsque l'on reste dans le simple cadre des problèmes de décision (au sens de la théorie de la complexité) : celle de la représentation de la réponse et de la mesure de l'efficacité d'un algorithme à qui l'on demande de calculer un objet de taille conséquente, comme un plan conditionnel.

Annexe A

Notations et définitions

A.1 Relations

Definition 1 (Partie stricte et partie symétrique d'une relation) *Soit $\succeq$ une relation sur un ensemble Z, A et B deux de ses sous-ensembles . On définit :*
- *la partie stricte (ou "asymétrique") de $\succeq$: $A \succ B \Leftrightarrow A \succeq B$ et $not(B \succeq A)$*
- *la partie symétrique de $\succeq$: $A \simeq B \Leftrightarrow A \succeq B$ et $B \succeq A$*
- *la relation d'incomparabilité associée : $A \asymp B \Leftrightarrow not(A \succeq B)$ et $not(B \succeq A)$*

Definition 2 (Propriétés sur les relations) *$\succeq$ est :*
- *réflexive ssi $\forall A : A \succeq A$*
- *complète ssi $\forall A, B : A \succeq B$ ou $B \succeq A$*
- *transitive ssi $\forall A, B, C : A \succeq B$ et $B \succeq C \implies A \succeq C$*
- *quasi transitive ssi $\forall A, B, C : A \succ B$ et $B \succ C \implies A \succ C$*
- *un préordre : réflexive et transitive*
- *un préordre complet : complète et transitive*
- *un ordre d'intervalle : réflexive et respecte la propriété de Ferrers ($A \succeq B$ et $C \succeq D \implies A \succeq D$ ou $C \succeq B$)*
- *un quasi ordre : réflexive, quasi-transitive et Ferrers*

A.2 Capacités et mesures d'incertitude

Capacités comparatives

Definition 3 (Capacité comparative) *Soit $\trianglerighteq$ une relation sur un ensemble 2^S, $\triangleright$ sa partie stricte, $\bowtie$ la relation d'incomparabilité correspondante.*

$\trianglerighteq$ *est une* pré-capacité comparative
ssi elle est :
- *réflexive,*
- *non-triviale : $S \triangleright \emptyset$,*
- *cohérente avec l'implication matérielle : $A \subseteq B \implies B \trianglerighteq A$.*

C'est une capacité comparative *ssi elle est de plus :*
- *quasi transitive,*

- *monotone à gauche :* $\forall A, B, C \subseteq S,\ A \trianglerighteq B \Rightarrow A \cup C \trianglerighteq B$,
- *monotone à droite :* $\forall A, B, C \subseteq S,\ A \trianglerighteq B \cup C \Rightarrow A \trianglerighteq B$.

La monotonie de $\trianglerighteq$ entraîne celle de $\triangleright$: $A \triangleright B \Rightarrow A \cup C \triangleright B$ et $A \triangleright B \cup C \Rightarrow A \triangleright B$.

Definition 4 (Axiomes sur les capacités comparatives)
Soit $\trianglerighteq$ un capacité comparative ;

– $\trianglerighteq$ *est préadditive ssi elle respecte l'axiome :*
ADD $\forall A, B, C$ *tq.* $(A \cup B) \cap C = \emptyset : A \trianglerighteq B \Leftrightarrow A \cup C \trianglerighteq B \cup C$

– $\trianglerighteq$ *est faiblement préadditive ssi elle respecte l'axiome :*
WEAK-ADD *:* $\forall A, B, C$ *tq.* $(A \cup B) \cap C = \emptyset : A \trianglerighteq B \implies A \cup C \trianglerighteq B \cup C$

– $\trianglerighteq$ *est strictement monotone (principe de Pareto efficacité) ssi elle respecte l'axiome :*
Pareto *:* $\forall A, B, B \triangleright \emptyset \implies A \cup B \triangleright B$

– $\trianglerighteq$ *est de type OU ssi elle respecte l'axiome :*
OU *:* $\forall A, B, C$ *tels que* $(A \cup B) \cap C = \emptyset : A \trianglerighteq B \implies A \cup C \trianglerighteq B \cup C$

– $\trianglerighteq$ *est de type OU-décomposable ssi elle respecte l'axiome :*
OU-DEC *:* $\forall A, B, C$ *tels que* $(A \cap C) = (D \cap C) = \emptyset : A \trianglerighteq B$ *et* $C \trianglerighteq B \implies A \cup C \trianglerighteq B \cup D$

– $\trianglerighteq$ *est de type et ssi elle respecte l'axiome :*
ET *:* $\forall A, B, C$ *tels que* $(A \cup B) \cap C = \emptyset : A \cup C \trianglerighteq B \cup C \implies A \trianglerighteq B$

– $\trianglerighteq$ *est de type ET-décomposable ssi elle respecte l'axiome :*
ET-DEC *:* $\forall A, B, C$ *tq.* $(A \cup C) = (D \cup C) = S$ *:*
$A \trianglerighteq B$ *et* $C \trianglerighteq B \Rightarrow A \cap C \trianglerighteq B \cap D$

Le OU implique WEAK-ADD. Dans le cadre d'un préordre complet, l'axiome OU est équivalent à l'axiome des capacités OU-décomposables [Dubois, 1986].

Le WEAK ADD peut être compris comme l'axiome de séparabilité du mesurage conjoint appliqué aux capacité comparatives. L'indépendance faible définie dans le cadre du mesurage conjoint peut également être ramenée dans ce contexte – elle s'écrit comme une propriété de non interactivité des événements nuls.

– A est un *ensemble faiblement indépendant* ssi $\emptyset \bowtie A \Leftrightarrow S \bowtie S \setminus A$
– $\trianglerighteq$ respecte l' *indépendance faible des états* ssi tous les singletons sont faiblement indépendants :
WEAK-S-IND :$\forall s, \emptyset \bowtie \{s\} \Leftrightarrow S \bowtie S \setminus \{s\}$
– $\trianglerighteq$ respecte l' *indépendance faible* ssi il satisfait la propriété :
WEAK-IND : $\forall A, \emptyset \bowtie A \Leftrightarrow S \bowtie S \setminus A$

Il me semble que plus que le Weak ADD, ou le OU, c'est l'axiome d'indépendance faible qui caractériserait la classe des capacités mesurant la plausibilité, comprise une forme de cohérence avec la connaissance

Definition 5 (Capacités comparatives particulières)

- *Une* probabilité comparative *est une capacité comparative complète, transitive et préadditive.*
- *Une capacité comparative est* à grandes marches *ssi* $\forall A, A \rhd \bigcup\{B, A \rhd B\}$
- *Une* plausibilité comparative *est une capacité comparative complète, transitive et satisfaisant la restriction suivante du de l'axiome OU :*
  PL *:* $\forall A, B, C, B \subseteq A : A \cup C \rhd B \cup C \implies A \rhd B$
- *Une* belief comparative *est une capacité comparative complète, transitive et satisfaisant la restriction suivante du de l'axiome ET :*
  BEL *:* $\forall A, B, C, B \subseteq A, A \cap C = \emptyset : A \rhd B \implies A \cup C \rhd B \cup C$
- *Une* possibilité comparative *est une capacité comparative complète, transitive et inconditionnellement de type OU, i.e. satisfaisant l'axiome :*
  POS *:* $\forall A, B, C : A \trianglerighteq B \implies A \cup C \trianglerighteq B \cup C$
- *Une* nécessité comparative *est une capacité comparative complète, transitive et inconditionnellement de type ET, i.e. satisfaisant l'axiome :*
  NEC *:* $\forall A, B, C : A \cup C \trianglerighteq B \cup C \implies A \trianglerighteq B$
- *Une capacité comparative est de type possibilité ssi elle satisfait l'axiome :*
  P-like *:* $\forall A, A \rhd \emptyset$ *ou* $\bar{A} \rhd \emptyset$*.*
- *Une capacité comparative est de type nécessité ssi elle satisfait l'axiome :*
  N-like *:* $\forall A, S \rhd A$ *ou* $S \rhd \bar{A}$*.*

On peut vérifier que $\mathbf{POS} \implies \mathbf{OU} \implies \mathbf{PL} \implies \mathbf{P-like}$ et que $\mathbf{NEC} \implies \mathbf{ET} \implies \mathbf{BEL} \implies \mathbf{N-like}$

Definition 6 (Dualité) *Soit* $\trianglerighteq$ *une capacité comparative.*

La relation $\trianglerighteq^\top$ *duale de* $\trianglerighteq$ *est définie par :* $\forall A, B : A \trianglerighteq^\top B \Leftrightarrow \overline{B} \trianglerighteq \overline{A}$*.*

$\rhd$ *est dite autoduale ssi* $\trianglerighteq \equiv \trianglerighteq^\top$*, i.e. :* $\forall A, B : A \trianglerighteq B \Leftrightarrow \overline{B} \trianglerighteq \overline{A}$*.*

Pour mémoire, la duale d'un capacité comparative est une capacité comparative et la préadditivité entraîne l'autodualité (réciproque fausse). Les propriétés ET et OU sont duales l'une de l'autre

Les axiomes suivants cherchent tous à caractériser des notions de raisonnement sur les ordres de grandeur et de négligeabilité propres aux capacités purement ordinales :

Definition 7 (Axiomes sur les capacités comparatives (suite))

NEG *:* $\forall A, B, C \subseteq S, A \cap (B \cup C) = \emptyset : A \succ B$ *et* $A \rhd C \implies A \rhd B \cup C$

GNEG *:* $\forall A, B, C, D \subseteq S, A \rhd B$ *et* $C \rhd D \implies A \cup C \rhd B \cup D$

CCS *:* $\forall A, B, C \subseteq S, A \cap (B \cup C) = \emptyset : A \cup C \rhd B$ *et* $A \cup B \rhd C \Rightarrow A \rhd B \cup C$ [1]

[1]Cette version de CCS est équivalente (sous hypothèse de monotonie) la version qui exprime plus clairement la stabilité conjonctive $A \cap C \rhd \bar{A} \cap C, A \cap C \rhd \bar{A} \cap C \implies A \cap B \cap C \rhd (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C$

QUAL $\forall A, B, C \subseteq S:\ A \cup C \rhd B$ *et* $A \cup B \rhd C \implies A \succ B \cup C$

CLO *:* $\forall A, B, C \subseteq S\ A \sim B$ *et* $(A \succ C$ *ou* $A \sim C) \implies A \sim B \cup C$.

Noter que $QUAL \implies CCS \implies NEG$.

Definition 8 (Acceptance)

Une capacité comparative $\trianglerighteq$ *on* 2^S *est* une relation d'ordre de grandeur *ssi sa partie stricte satisfait l'axiome de négligeabilité (NEG) et sa partie symétrique l'axiome de proximité (CLO).*

Une capacité comparative $\trianglerighteq$ *on* 2^S *est une* relation d'acceptance *ssi elle satisfait CCS.*

Mesure de capacité

Definition 9 (Capacité, mesure monotone, mesure floue) *Soit* $L_\sigma = [0_\sigma, 1_\sigma] \subseteq \mathbb{R}$ *un échelle. Une fonction* $\sigma : 2^S \mapsto L_\sigma$ *est une mesure de* capacité *(ou mesure floue, ou encore mesure monotone) ssi elle est :*

- *normalisée :* $\sigma(S) = 1_\sigma$,
- *consistante :* $\sigma(\emptyset) = 0_\sigma$,
- *cohérente avec l'implication matérielle :* $\forall A, B, A \subseteq B \implies \sigma(B) \geq \sigma(A)$

En général, $L_\sigma = [0, 1]$ *et donc* $\sigma(S) = 1$ *et* $\sigma(\emptyset) = 0$

Definition 10 (Distribution de capacité) *Soit* $L_\sigma = [0_\sigma, 1_\sigma]$ *une échelle ordonnée :*

- *Une distribution de capacité est une fonction* $m : 2^S \mapsto L_m \subseteq L_\sigma$ *supposée consistante* ($m(\emptyset) = 0_\sigma$).

- *Tout* A *tel qu* $m(A) \neq 0_\sigma$ *est appelé élément focal de* m.

- m *est dite exclusive si tous ses éléments focaux sont disjoints deux à deux.*

- m *est dite atomique si tous ses éléments focaux sont des singletons.*

Par exemple, les distributions de possibilité et de probabilité sont des distributions de capacité exclusives ; les "basic probability assignments" au sens de Dempster-Shafer sont des distributions de capacité non exclusives.

Definition 11 (Capacités particulières) *Toutes les capacité suivantes sont définies sur l'échelle* $[0, 1]$.

- *Une probabilité est une capacité* P *telle que* $\forall A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- *Une possibilité est une capacité* Π *telle que* $\forall A, B : \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$

- *Une nécessité est une capacité N telle que $\forall A, B : N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$*

- *Une mesure décomposable est une capacité telle qu'il existe une opération $*$ assurant que $A \cap B = \emptyset \implies \sigma(A \cup B) = \sigma(A) * \sigma(B)$*

Ainsi, les probabilités, les possibilités et toute mesure g définie à partir d'une distribution exclusive m et d'une co-norme triangulaire $*$ est une mesure décomposable et réciproquement : $g(A)$ est égal au produit (par $*$) des poids éléments qu'il contient. On peut alors facilement définir la mesure duale. Plus généralement, on peut définir la distribution p, π, m, selon les cas, telle que :
- $P(A) = \sum_{s \in A} p(\{s\})$
- $\Pi(A) = Max_{s \in A} \pi(\{s\}), N(A) = min_{s \notin A}(1 - \pi(s)$
- $Pl(A) = \sum_{F, A \cap F \neq \emptyset A} m(F)$, $Bel(A) = \sum_{F, F \subseteq A} m(F)$

Definition 12 (Capacité associée à une capacité comparative)

Soit σ une capacité ; la capacité comparative associée à σ est la relation $\trianglerighteq_\sigma$ définie par : $A \trianglerighteq_\sigma B \Leftrightarrow \sigma(A) \geq \sigma(B)$

Soit $\trianglerighteq$ une capacité comparative complète est transitive ; la capacité σ est dite encoder $\trianglerighteq$ ssi : $A \trianglerighteq_\sigma B \Leftrightarrow \sigma(A) \geq \sigma(B)$

Pour mémoire, on peut toujours construire la mesure de Belief (resp. Plausibilité, Nécessité, Possibilité) associée à une belief (resp. Plausibilité, Nécessité, Possibilité) comparative mais une probabilité comparative ne peut pas toujours être encodée par une mesure de probabilité. Mais toute probabilité comparative étant une Belief comparative, elle être représentée par une mesure de Belief au sens de Shafer, préadditive de surcroît.

Definition 13 (Application des propriétés des capacités comparatives)

On dira qu'une capacité σ possède une propriété $\mathcal{P}$ définie sur les capacités comparatives ssi la capacité comparative associée à σ la possède.

En particulier :
- *σ est dite préadditive ssi :*
  $\forall A, B, C$ tels que $(A \cup B) \cap C = \emptyset : \sigma(A) \geq \sigma(B) \Leftrightarrow \sigma(A \cup C) \geq \sigma(B \cup C)$.
- *Soit n une fonction de renversement de $[0_\sigma, 1_\sigma]$. La duale d'une mesure de capacité σ est une la mesure σ_n définie par : $\sigma_n(A) = n(\sigma(\bar{A}))$.*
- *σ est autoduale ssi il existe une fonction de renversement n telle que $\forall A, \sigma(A) = \sigma_n(\bar{A})$.*

Les mesures de probabilité sont donc auto-duales (on utilise le renversement $n(v) = 1 - v$).

A.3 Décision sous incertitude

Actes

Definition 14 (Actes) *Soit S un ensemble d'états et X un ensemble de conséquences.*

Un acte *est une fonction $f : S \mapsto X$*
On note $\mathcal{A} = X^S$ l'ensemble des actes définis par X et S. On note $f^{-1} : X \mapsto 2^S$ la fonction inverse de f : $f^{-1}(x)$ donne l'ensemble des états de conséquence x.

Un acte constant *est un acte qui associe la même conséquence à tous les états. L'acte constant défini par la conséquence x est noté f_x.*

Soient $\{A_1, \ldots A_k\}$ un ensemble d'événements disjoints et $\{f_1, \ldots f_k\}$ un ensemble d'autant d'actes. Il définissent un acte "composé" *: l'acte $f_1A_1f_2A_2 \ldots f_kA_kg$ dont les conséquences sont celles prescrites par f_i sur A_i, $i = 1, \ldots, k$, et par g sur les autres états.*

Un acte binaire*, ou paris, est un acte n'offrant que deux conséquences — un acte de la forme f_xAf_y.*

Definition 15 (Conditionnement de $\succeq$, équiplausibilité, événement nul)

Le conditionnenement *(universel) de $\succeq$ sur $A \subseteq S$ est la relation $\succeq_A$ définie par :*
$f \succeq_A g \Leftrightarrow \forall h \in \mathcal{A}, fAh \succeq gAh$

On dit qu'un événement A est nul *ssi $\forall f, g, h : fAh \succeq gAh$*

A et B sont des événements équi-plausibles ssi pour toute paire de conséquences (x, y) et tout acte $h \in \mathcal{A}$, $xAyBh \sim yAxBh$.
Deux états sont équiplausibles ssi ils définissent des singletons équi-plausibles.

Definition 16 (Projection de $\succeq$ sur X : $\succeq_\Upsilon$) *La projection de $\succeq$ sur X est la relation $\succeq_\Upsilon$ définie par : $x \succeq_\Upsilon y \Leftrightarrow f_x \succeq f_y$*

Definition 17 (Projection de $\succeq$ sur 2^S : $\succeq_\Lambda$) *La projection de $\succeq$ sur 2^X est la relation $\succeq_\Lambda$ définie par :*
$A \succeq_\Lambda B \Leftrightarrow \exists x, y$ *tels que* $x \succ_\Upsilon y$ *et* $xAy \succeq xBy$

Definition 18 (Axiomes sur $\succeq$, pour le cas descriptif)

S2 (ou "STP", principe de la chose sûre)
$\forall f, g, h, h'A : fAh \succeq gAh \Leftrightarrow fAh' \succeq gAh'$

S3 : unicité des projections sur X
$\forall x, y, A$ *non null* $: f_x \succeq f_y \Leftrightarrow f_x \succeq_A f_y$

S4 : unicité des projections sur 2^S
$\forall A, B, \forall\ x \succ_\Upsilon y,\ x' \succ_\Upsilon y' : xAy \succeq xBy \implies x'Ay' \succeq x'By'$

S5 : non trivialité
$\exists f, g$ *tels que* $f \succ g$

ANO : interchangeabilité des états équiplausibles
si s_1 *et* s_2 *sont des d'états équiplausibles, alors :*
$\forall f, g : f \succeq g \Leftrightarrow f_{s_1 \leftrightarrow s_2} \succeq g_{s_1 \leftrightarrow s_2}$
où $f_{s_1 \leftrightarrow s_2} = f(s_1)\{s_2\}f(s_2)\{s_1\}f$ *et* $g_{s_1 \leftrightarrow s_2} = g(s_1)\{s_2\}g(s_2)\{s_1\}g$

Notons que ANO est une conséquence de S2+S3+S4 dans le cadre d'un préordre complet. Lorsque l'on ne peut pas respecter S2, S3 ou S4 (généralement pour cause d'effet de noyade), on peut au moins assurer sa version plus faible :

Definition 19 (Axiomes sur $\succeq$: version affaiblies)

Weak STP *:*
$\forall f, g, h, h'A : fAh \succ gAh \implies fAh' \succeq gAh'$

Weak S3 *(aussi appelé CFAC) :*
$\forall x, y, h, A$ *non null* $: f_x \succeq f_y \implies f_x \succeq_A f_y$

Weak S4 *:*
$\forall A, B, \forall\ x \succ_\Upsilon y,\ x' \succ_\Upsilon y' : xAy \succ xBy \implies x'Ay' \succeq x'By'$

Definition 20 (Axiomes sur $\succeq$: Principe de Pareto et principe d'unanimité)

Pareto optimalité (efficacité) *:*
$\forall s, f(s) \succeq_\Upsilon g(s)$ *et* $\exists s$ *non null* $, f(s) \succ_\Upsilon g(s) \quad \implies \quad f \succ g$

Pareto faible (unanimité, dominance) *:*
$\forall s, f(s) \succeq_\Upsilon g(s) \quad \implies f \quad \succeq g$

Unanimité de Lehmann [Lehmann, 1996]
$\forall A, B$ *t. q.* $A \cup B = S : (f \succeq g)_A$ *and* $(f \succeq g)_B \implies (f \succeq g)_{A \cup B}$
Unanimité étendue [Brafman and Tennenholtz, 1996; 1997; 2000].
$\forall A, B : (f \succeq g)_A$ *and* $(f \succeq g)_B \implies (f \succeq g)_{A \cup B}$

Dans le cadre d'un préordre complet, le principe d'efficacité (resp. le principe de pareto faible) est une conséquence directe du STP (resp. du STP faible), de même que le principe d'unanimité de Lehmann. L'unanimité étendue en est une version beaucoup plus forte, qui n'est pas vérifiée en général.

Definition 21 (Axiomes sur $\succeq$: Autour du STP)

STP : principe de la chose sûre
$\forall f, g, h, h'A : fAh \succeq gAh \Leftrightarrow fAh' \succeq gAh'$

Neutralité vis à vis des pertes
$\forall A, f, g, h, h'$ *t.q.* $(h \succeq h')_A : hAf \succ hAg \implies h'Af \succ h'Ag$

Neutralité vis à vis des gains
$\forall A, f, g, h, h'$ *t.q.* $(h' \succeq h)_A : hAf \succ hAg \implies h'Af \succ h'Ag$

Indépendance *:*
$\succeq$ *est indépendant sur* A *ssi* $\forall x, y, h, h', s : f_xAh \succeq f_yAh \Leftrightarrow f_xAh' \succeq f_yAh'$
$\succeq$ *est fortement indépendant ssi il l'est sur tout les* A
$\succeq$ *est faiblement indépendant ssi il l'est sur tout les singletons.*

Lorsque $\succeq$ est complète et neutre vis à vis des pertes comme des gains, le STP est respecté et la capacité comparative sous-jacente est préadditive.

La notion d'indépendance est importée des axiomes du mesurage conjoint. L'indépendance forte est évidement le STP. L'indépendance faible est utilisée pour construire les préférences sur les conséquences dans un cadre où l'on ne peut pas se référer à la notion d'acte constant. Ses rapports avec S3 et CFAC sont à étudier.

Definition 22 (Actes comonotones et actes ordinalement équivalents)
Deux actes f *et* g *sont co-monotones ssi il n'existe pas de paire d'états* s, s' *tels que* $f(s) > f(s')$ *et* $g(s) < g(s')$, $\exists \tau, f(s_{\tau(1)}) \succeq_\Upsilon \ldots f(s_{\tau(n)})$ *et* $g(s_{\tau(1)}) \succeq_\Upsilon \ldots g(s_{\tau(n)})$

Deux paires d'actes (f, g) *and* (f', g') *sont ordinalement équivalentes – ce qui s'écrit* $(f, g) \equiv (f', g)$ *– ssi :* $\forall s \in S$, $(f(s) \succeq_\Upsilon g(s) \Leftrightarrow f'(s) \succeq_\Upsilon g'(s))$.

Definition 23 (Axiomes sur $\succeq$)

Axiome COMON. $\succeq$ *respecte le principe de la chose sûre co-monotone ssi, pour tout ensemble d'actes* f, g, h, h' *comonotones, pour tout ensemble d'états* A *:* $fAh \succeq gAh \Leftrightarrow fAh' \succeq gAh'$.

Axiome OI. $\forall f, f', g, g' \in X^S, ((f, g) \equiv (f', g')) \implies (f \succeq g \Leftrightarrow f' \succeq g')$

On peut montrer que l'axiome OI force l'utilisation d'une règle de plausibilité de dominance, i.e. une règle du type :

$$f \succeq g \Leftrightarrow \{s, f(s) \succeq_\Upsilon g(s)\} \succeq_\Lambda \{s, g(s) \succeq_\Upsilon f(s)\}$$

Definition 24 (Axiomes sur $\succeq$: ordinalité, optimisme et pessimisme)

DCR : Domination conjonctive restreinte.

$\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall x \in X, g \succ f$ *et* $f_x \succ f \Rightarrow g \wedge f_x \succ f$.

DDR : Domination disjonctive restreinte.
$\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall x \in X, f \succ g$ *et* $f \succ f_x \Rightarrow f \succ g \vee f_x$.

Pessimisme possibiliste [2] *:*
$\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall A \subseteq S,$ *[* $fAg \succ f \Rightarrow f \succeq gAf$*]*.

Optimisme possibiliste *:*
$\forall f, g \in \mathcal{A}, \forall A \subseteq S, [f \succ fAg \Rightarrow gAf \succeq f$ *]*.

Pessimisme fort (Wald) *: Pour tout ensemble A d'états equi plausibles,* $[\exists s^* \in A, \forall s \in A, f(s) \succ_\Upsilon g(s^*)] \implies fAx_\top \succ gAx_\top$

Optimisme fort *: Pour tout ensemble A d'états equi plausibles,* $[\exists s^* \in A, \forall s \in A, f(s) \succ_\Upsilon g(s)] \implies fAx_\perp \succ gAx_\perp$

Les deux premiers axiomes sont vérifiés par toutes les intégrales de Sugeno (et les force dans le cadre d'une caractérisation axiomatique). L'axiome de pessimisme caractérise l'utilité possibiliste pessimiste, l'axiome d'optimiste l'utilité possibiliste optimiste. Paradoxalement, l'axiome de pessimisme de Wald (resp. d'optimisme fort) n'est pas vérifié dans le cas possibiliste.

Definition 25 (Vetos, ensembles décisifs et dictateurs)

Un état s est a droit de véto dans un ensemble S' ssi :
$\forall f, g \in X^S, [f(s) \succ_\Upsilon g(s) \implies not((g \succeq f)_{S'})]$

O est un sous-ensemble décisif d'un ensemble S' ssi :
$\forall f, g \in X^S, [(\forall s \in O, (f(s) \succ_\Upsilon g(s))_{S'}) \implies (f \succeq_P g)_{S'}]$.

Un sous-ensemble $O \subseteq S'$ est prédominant dans S' ssi il y est décisif et ne contient que des états à droit de véto.

Un dictateur est un singleton décisif et avec droit de véto pour S :

Mixtures probabilistes et loteries

La plupart des systèmes d'axiomes (ceux qui sont basés sur l'approche de Von Neuman et Morgenstern, et ceux qui suivent les principes de Anscombe et Auman) se réfèrent à la notion de mixture probabiliste.

Definition 26 (Mixture probabiliste) *Soit pour toute paire d'actes f, g et tout $\alpha \in [0,1]$, la mixture selon α et f et g est la loi de probabilité P telle que $P(f) = \alpha, P(g) = 1-\alpha$. On la note $\alpha.f + (1-\alpha).g$*

[2] L'axiome de pessimisme peut être interprété de la manière suivante : étant donnée l'action$f$, si le fait de changer f en l'action g lorsque l'événement $\bar{A}$ intervient "améliore" l'action f aux yeux de l'agent alors il n'y a aucun moyen d'améliorer l'action f en la modifiant lorsque A intervient. Ceci, tout simplement parce que l'agent considère que A est au moins aussi plausible que $\bar{A}$ et qu'à cause de son "pessimisme", il néglige totalement les éventuelles bonnes conséquences, obtenues lorsque $\bar{A}$ intervient.

Si f_x et f_y sont de actes constants, $\alpha.f_x + (1-\alpha).f_y$ est un genre de loterie, on l'on reçoit x avec une probabilité α et y avec une probabilité $1-\alpha$. On peut construire un infinité de mixtures probabilistes à partir d'un ensemble d'actes.

Dans les approches à la Anscombe Auman, on suppose non seulement que le décideur peut fixer un préordre complet sur l'ensemble des actes, mais aussi que l'on peut toujours lui demander son choix entre deux mixtures probabilistes sur les actes en question.

La connaissance d'une mesure de probabilité sur S permet de transformer un acte f une distribution de probabilité sur les conséquences, ou loterie [3] :

$$\forall x, l_f(x) = \sigma(f^{-1}(x))$$

Definition 27 (Loterie probabiliste) *Soit X un ensemble de conséquences et L une échelle.*

Une loterie est une distribution de probabilité p sur X

On notera $\mathcal{L} = \{p : X \mapsto L\}$

Definition 28 (Composition de loteries) *Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de loteries probabilistes sur X.*

Une loterie composée (ou mixture de loteries) est une distribution de probabilité p sur $\mathcal{L}$

On notera $(l_1/\ p1, l_2/\ p2, \ldots, l_k/\ pk)$ la loterie composée p définie par $p(l_i) = p_i$ si $l_i \in (l_1, \ldots, l_k)$, $p(l) = 0_L$ si $l \notin (l_1, \ldots, l_k)$.

Definition 29 (Aversion pour l'incertain)

Aversion pour l'incertain *[Schmeidler, 1989] $f \succeq g \implies \alpha.f + (1-\alpha).g \succeq g$*

Aversion pour l'incertain *[Epstein, 1999] Soit $\mathcal{H}$ est un ensemble d'états "non-ambigus" (sur lesquels $\succeq_L$ est une probabilité comparative). $\succeq$ est adverse de l'incertitude ssi*

$\exists p, u, \forall h \in \mathcal{H}, g : h \succeq g \implies h \succeq_{p,u} g$ et $h \succ g \implies h \succ_{p,u} g$

Definition 30 (Utilité simple des paris, biséparabilité) *Un pari est un acte binaire de la forme xAy, où x et y sont des actes constants.*

$\succeq$ est dite biséparable ssi $\exists u, \sigma, \forall xAy, x'By, xAy \succeq x'By' \Leftrightarrow u(x).\sigma(A) + u(y).(1 - \sigma(A)) \geq u(x).\sigma(A) + u(y).(1 - \sigma(A))$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des (u, σ) permettant de représenter les préférences sur les paris d'une relation biséparable. Dans un espace continu, on simplifie à une utilité unique considérant que $u(x) = x$.

Definition 31 Aversion pour l'ambiguïté — en continu *[Ghirardato and Marinacci, 1998] Soit $\succeq$ une préférence biséparable, u la fonction d'utilité correspondante. $\succeq$ est adverse de l'ambiguïté ssi :*

$\exists p : x \succeq g \implies x \succeq_{p,u} g$ et $x \succ g \implies x \succ_{p,u} g$

[3] Le passage acte–loterie n'est donc pas bijectif et les axiomatiques sur les loteries me semblent donc très restrictives, puisque qu'il ne peut être sain que lorsque l'axiome d'interchangeabilité des états equiplausibles est respecté.

Mixtures généralisées

La notion de mixture probabiliste peut être étendue au cas non aléatoire, en utilisant d'autres types de distribution de confiance que des probabilités (par exemple, une distribution de possibilité).

Definition 32 (Mixture) *Une mixture est une distribution de confiance* $m : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$

On notera $(F_1/\ m1, F_2/\ m2, \ldots, F_k/\ mk)$*, où chaque* F_i *est un ensemble d'actes, la mixture* m *définie par* $m(F_i) = m_i$ *si* $F_i \in (F_1, \ldots, F_k)$*,* $m(F) = 0$ *si* $F \notin (F_1, \ldots, F_k)$

Enfin, dans une approche prescriptive, la connaissance d'une distribution de confiance m sur S permet de transformer un acte f une distribution de confiance sur les conséquences, ou loterie :

$$\forall Y \subseteq X, m(Y) = \bigoplus_{A, m(A) \neq 0 \text{ et } f(A)=Y} m(A)$$

L'opération de combinaison $\bigoplus$ est dépend de la nature de m : + pour les probabilités et les bpa de Shafer, max pour les distribution de possibilité.

Definition 33 (Loterie) *Soit* X *un ensemble de conséquences et* L *une échelle.*

Une loterie est une distribution de capacité $l : 2^X \mapsto L$

On notera $\mathcal{L} = \{l : 2^X \mapsto L\}$

Definition 34 (Composition de loteries) *Une loterie composée (ou mixture de loteries) est une distribution de confiance exclusive* $m : \mathcal{L} \mapsto L$

On notera $(L_1/\ m1, L_2/\ m2, \ldots, L_k/\ mk)$ *la loterie composée* m *définie par* $m(L_i) = m_i$ *si* $L_i \in (L_1, \ldots, L_k)$*,* $m(L) = 0$ *si* $L \notin (L_1, \ldots, L_k)$*.*

Utilités agrégées

Pour chacun de ces critère, on part d'une utilité $u : X \mapsto E_u$ sur les conséquences et d'une mesure $\sigma : 2^S \mapsto E_\sigma$ sur les événements (E_u et E_σ sont des échelles commensurables) et l'on préfère l'acte qui maximise le critère

$$R_{U,\sigma,u} : f \succeq_U g \Leftrightarrow U_{\sigma,u}(f) \geq U_{\sigma,u}(g)$$

Definition 35 (Utilité Monotone) *Soit* σ *une mesure de confiance sur* 2^S *et* u *une fonction d'utilité telles que* E_u *et* E_σ *sont deux sous-ensembles d'une échelles ordonnées commune. On peut définir les utilité monotone (Sugeno) d'un acte* f

$$US_{\sigma,u}(f) = \max_{x \in X} \min(u(x), \sigma(F_x)) = \max_{s \in S} \min(\sigma(F_s), u(f(s)))$$

Où $F_x = \{s \in S, u(f(s)) \geq u(x)\}$ *et* $F_s = \{s' \in S, u(f(s')) \geq u(f(s))\}$*.*

Definition 36 (Utilité de Choquet) *Soit* σ *une mesure de confiance sur* 2^S *et* u *une fonction d'utilité telles que* E_u *et* E_σ *sont deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}$*.*

En supposant ordonnés les éléments de X *:* $x_0 \leq \cdots \leq x_n$*, l'utilité de Choquet s'écrit :*

$$UC_{\sigma,u}(f) = \sum_{x_i \in X} (u(x_i) - u(x_{i-1}) \dot{\sigma}(F_{x_i})) \qquad = \sum_{x_i \in X} u(x_i).\sigma(F_{x_i}) - \sigma(F_{x_i+1})$$

Tout OWA peut être exprimé par une intégrale de Choquet.

Definition 37 (Utilité espérée) *Soit P une mesure de probabilité sur 2^S et u une fonction d'utilité sur X. L'utilité espérée d'un acte f est définie par :*

$$EU(f) = UC_{P,u}(f) = \sum_{s \in S} u(s).p(s)$$

Definition 38 (Utilité dépendant du rang) *Soit P une mesure de probabilité sur 2^S et u une fonction d'utilité sur X. L'utilité espérée d'un acte f est définie par :*

$$EU(f) = UC_{P,u}(f) = \sum_{s \in S} u(s).p(s)$$

Definition 39 (Utilités possibiliste : utilité pessimiste, utilité optimiste) *Soit π une distribution de possibilité sur S, $8Pi$ et N les mesures de possibilité et de nécessité associée et u une fonction d'utilité. On peut définir les utilité optimiste et pessimiste d'un acte f.*

$$U_{opt}(f) = US_{\Pi,u}(f) = \max_{x \in X} \min(\Pi(F_x), u(x)) = \max_{s \in S} \min(\pi(s), u(f(s)))$$

$$U_{pes}(f) = US_{N,u}(f) = \max_{x \in X} \min(N(F_x), u(x)) = \min_{s \in S} \max(1 - \pi(s), u(f(s)))$$

A.4 Problèmes de décision à énoncé compact

Definition 40 (CSP) *Un* CSP *est un triplet* $\mathcal{P} = \langle X, D, \mathcal{C} \rangle$ *où :*
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *est un ensemble de variables de décision ;*
- $D = D_1 \times \cdots \times D_n$*, où* D_i *est le domaine de* x_i *;*
- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de contraintes sur* X *.*
  $V(C)$ *dénote les variables sur lesquelles porte une contrainte* C *et* $R(C)$ *est l'ensemble des instanciations de* $V(C)$ *qui la satisfont.*

Une solution de $\mathcal{P}$ *est une affectation de ses variables dans leurs domaine qui satisfait toutes les contraintes˙*

Un CSP est satisfiable (ou cohérent) ssi il possède une solution.

Definition 41 *Soient* C *et* C' *deux contraintes.*
- *On dit que* C satisfait C' *(ou que* C' *est une conséquence de* C*), noté* $C \models C'$ *ssi toute affectation de* $v(C) \cup v(C')$ *qui satisfait* C *satisfait aussi* C'*.*
- *On dit que* C falsifie *C' si aucune des affectations de* $v(C) \cup v(C')$ *qui satisfont* C *ne satisfait C'.*
- C *et* C' *sont* équivalentes *si elles ont même ensembles de modèles, i.e. si* $C \models C'$ *et* $C' \models C$*.*

Definition 42 (Connecteurs sur des contraintes) *Soient* C *et* C' *deux contraintes.*
- *La* négation $\neg C$ *de* C *est une contrainte sur* $v(C)$ *satisfaite par toute affectation qui falsifie* C *et falsifiée par toute affectation satisfaisant* C*.*
- *La* conjonction $C \wedge C'$ *de* C *et* C' *est une contrainte sur* $v(C) \cup v(C')$ *satisfaite par toute affectation satisfaisant à la fois* C *et* C'*.*
- *La* disjonction $C \vee C'$ *de* C *et* C' *est une contrainte sur* $v(C) \cup v(C')$ *satisfaite par toute affectation qui satisfait* C *ou qui satisfait* C'*.*

Definition 43 (Littéral, Clause, Cube, etc) *Soient* X *une variable et* D *son domaine.*
- *Un* littéral *sur une variable* X *est une contrainte unaire sur* X*.*
- *Une* contrainte clausale*, ou clause, est une disjonction de littéraux. Elle est unitaire ssi elle ne contient qu'un littéral.*
- *Un* cube *(ou environnement)est une conjonction de littéraux.*
- *Une CNF est une conjonction de contraintes clausales*
- *Une DNF est une disjonction de cubes*
- *Une DNF est uniforme ssi tous ses cubes portent exactement sur les mêmes variables.*
- *Une CDNF (resp. une CDNF uniforme)est une conjonction de DNF (resp. une conjonction de DNF uniformes.*

Un CSP "classique" est toujours une conjonction. S'l est défini par des contraintes à tuples, c'est une CDNF.

Definition 44 (Impliqués, impliquants)
- *Une contrainte est un impliquant d'un CSP ssi toutes les instanciations de* $\mathcal{X}$ *qui la satisfont sont des solutions du CSP.*

- *Une contrainte est un impliqué d'un CSP ssi toutes les solutions du CSP la satisfont.*
- *Un cube est un impliquant premier du CSP ssi aucun des cubes qu'il implique n'est un impliquant du CSP. On dit aussi qu'il est une "décision maximale cohérente".*
- *Une clause un impliqué premier ssi aucune des clauses qui l'impliquent n'est un impliqué du CSP.*
- *Un environnement incohérent est un cube dont aucune instanciation n'est solution du CSP. C'est un nogood ssi aucun des cubes qu'il implique n'est un environnement incohérent*

CSP clausaux

Definition 45 (CSP clausal, consistance) *Un* CSP clausal *est un un triplet* $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *où* $\mathcal{X}$ *est un ensemble de variables,* $\mathcal{D}$ *l'ensemble des domaines associés aux différentes variables et* $\mathcal{C}$ *une CNF sur* $\mathcal{X}$*.*

Une solution de $(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *est une affectation de* $\mathcal{X}$ *qui satisfait toutes les clauses de* $\mathcal{C}$*.*

$(\mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C})$ *est dit satisfiable, ou cohérent, ssi il admet une solution.*

On retrouve le cas de CNF de la logique proportionnelle pour $|D_x| = \forall x \in \mathcal{X}$

Par analogie avec le formalisme SAT, une clause $L_1 \vee ... \vee L_k$ peut être représentée par l'ensemble de ses littéraux $\{L_1, ..., L_k\}$.

La "clause vide", notée est une contrainte qui ne peut jamais être satisfaite. Tout CSP clausal contenant cette contrainte est incohérent. Symétriquement, toute contrainte clausale contenant un littéral de la forme $X_i \in D_i$ est toujours satisfaite : c'est une "tautologie".

Definition 46 (Résolution) *Soient* L_x *et* L'_x *deux littéraux sur la même variable* x*,* C *une clause contenant* L_x *et* C' *une clause contenant* L'_x*.*

C *et* C' *se résolvent (resp. se résolvent totalement) ssi aucun des deux littéraux n'est conséquence de l'autre (resp. si les deux littéraux sont disjoints).*

La résolvante selon x *de* C *et* C' *est la clause* $(C \setminus L_x) \vee (C' \setminus L'_x) \vee \{L_x \wedge L'_x\})$

La résolution est une procédure exponentielle, saine est complète (elle conclut sur l'obtention de la clause vide ssi le CSP clausal est insatisfiable). Elle est également complète pour la production des impliqués premiers.

La résolution des clauses unitaires est la procédure qui consiste à n'effectuer que les résolutions mettant en jeu une clause et une contrainte unaire.

La simplification est la procédure qui consiste à retirer du CSP les clauses satisfaites étant donné l'état des domaines.

Definition 47 (Clause de Horn) *Soit* $>_x$ *ordre total sur le domaine* D_x *d'une variable* x*.*

Un littéral L *sur* x *est négatif selon* $>_x$*, ssi, pour toute paire de valeurs* v_1 *et* v_2 *dans le domaine de* x*,* $max_>(v1, v2)$ *satisfait* L*. Sinon,* L *est dit positif selon* $>_x$*.*

Un CSP clausal est Horn-nommable ssi, il existe un ordre sur chacune des variables de X *tel que chaque clause du CSP contient au plus un littéral positif selon cet ordre.*

Appliqué à un problème Horn-nommable, la résolution des clauses unitaire est complète, de même que tout algorithme d'énumération appliquant à chaque noeud une phase d'arc consistance (ou une phase de résolution des clauses unaires et de simplification).

En revanche, savoir si un problème est Horn nommable est une question NP-complète.

CSP valués

Definition 48 (Structure de valuation) *Une* structure de valuation *est un quadruplet* $\langle E, \circledast, \succeq \rangle$ *où :*

- *E est un ensemble ordonné par une relation $\succ$, d'élément maximum $\top$ et d'élément minimum $\perp$; les éléments de E sont appelés les valuations*
- *$\circledast$ est une opération binaire sur E, associative et commutative, d'élément neutre $\perp$ d'élément absorbant $\top$, et monotone de surcroît ($\forall a, b, c \in E, (a \succcurlyeq b) \Rightarrow \big((a \circledast c) \succcurlyeq (b \circledast c)\big)$)*

Elle est dite polynômiale lorsque le calcul de $\circledast$ et la comparaison par $\succ$ peuvent s'effectuer en temps polynômial dans la taille de leurs arguments. Elle est dite complète lorsque $\succ$ est un ordre total

Notons que la seule opération $\circledast$ idempotente ($a \circledast a = a$ est $\circledast = \max$).

Definition 49 ((VCSP)) *Un CSP valué est défini par un CSP classique $\langle V, D, C\rangle$, une structure de valuation $S = (E, \circledast, \succ)$, et une application φ de C dans E. On le note $\langle V, D, C, S, \varphi\rangle$. $\varphi(C)$ est appelée la valuation de la contrainte C.*

Une affectation A d'un ensemble de variables est évaluée en combinant par $\circledast$ les valuation des contraintes qu'elle viole.

Definition 50 (Valuation d'une affectation) *Soit $\mathcal{P} = \langle V, D, C, S, \varphi\rangle$ un VCSP. La valuation d'une affection d'un ensemble de variables $W \subset X$ est la valuation :*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}}(A) = \underset{\substack{c \in C, V(C) \subset W \\ A \text{ viole } c}}{\circledast} [\varphi(c)]$$

Definition 51 (Degré de consistance) *Le degré de cohérence d'un VCSP est la valuation de la meilleure (c-à-d la moins haute) des valuations des affectations de X.*

Idéalement, quand aucune contrainte n'est violée, c'est $\perp$.

Les CSP possibilistes correspondent à l'opération $\circledast = \max$ (traditionnellement sur $E = [0, 1]$ ordonné par $<$, $0 = \perp$, $1 = \top$).

Les CSP à poids correspondent à l'opération $\circledast = +$ sur $E = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ordonné par $<$.

Comme la probabilité qu'affectation qui viole deux contraintes incertaines ne satisfasse pas le problème est $1 - (1 - \varphi(c_1))(1 - \varphi(c_2))$, le cas des CSP probabiliste est retrouvé avec CSP $x \circledast y = 1 - (1 - x)(1 - y)$ sur $E = [0, 1]$. L'opération est dans ce cas strictement monotone.

CSP mixtes

Definition 52 (CSP mixtes) *Un* CSP mixte *est un sextuplet* $\mathcal{P} = \langle \Lambda, L, X, D, \mathcal{K}, \mathcal{C} \rangle$ *où :*

- $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *est un ensemble de variables d'état ; il est divisé en deux sous-ensembles disjoints, les variables d'état avant action et les variables d'état après action* Λ^+ *et* Λ^- *;* Λ^+ *est lui même divisé en variables d'état observables (*$\mathcal{O}$*) et variables d'état non observables (*$\mathcal{N}$*) ;*
- $L = L_1 \times \cdots \times L_p$*, où* L_i *est le domaine de* λ_i *;*
- $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *est un ensemble de variables de décision ;*
- $D = D_1 \times \cdots \times D_n$*, où* D_i *est le domaine de* x_i *;*
- $\mathcal{K}$ *est un ensemble de contraintes sur* $\Lambda \cup X$ *(les connaissances) ; on note* $\mathcal{K}^{\mathcal{P}}$ *les éléments de* $\mathcal{K}$ *qui ne portent que sur des variables d'état (les connaissances pures) et* $\mathcal{E}$ *les éléments de* $\mathcal{K}$ *sur au moins une variable d'état (les effets d'action).*
- $\mathcal{C}$ *est un ensemble de contraintes sur* $\Lambda \cup X$ *(les buts). On note* $\mathcal{C}^{\mathcal{P}}$ *les éléments de* $\mathcal{C}$ *qui ne portent que sur des variables de décision (les contraintes pures).*

Definition 53

- *Un* monde possible *est une solution de* $\langle \Lambda, L, \mathcal{K}^{\mathcal{P}} \rangle$*. Tout monde possible se décompose en un état possible (sa projection sur* $\mathcal{N}$*), une observation possible (sa projection sur* $\prime$*) et un effet possible (sa projection sur* Λ^+*).*
- *Une* décision disponible *est une solution de* $\langle X, D, \mathcal{C}^{\mathcal{P}} \rangle$
- *Un monde est dit cohérent avec une décision (et la décision cohérence avec le monde) si il est possible, et satisfait toutes les connaissances liant les variables d'état et variables de décision.*
- *Une* décision *est dite* satisfaisante *dans un monde si elle est disponible et satisfait toutes les buts liant les variables d'état et les variables de décision.*
- Une décision disponible *couvre une observation possible ssi, dans tous les mondes possibles cohérents avec la décision et l'observation, la décision est satisfaisante*

On suppose que les connaissances sont saines, c'est à dire que toute décision disponible est cohérente avec au moins un monde possible.

Definition 54 *Un CSP mixte est dit* satisfiable *ssi toute observation possible peut être couvert par une décision disponible*

Definition 55 (Politique)

Une politique *est une fonction d'un sous-ensemble O des observation dans l'ensemble des décisions.*

Elle est complète *si O contient toutes les observations possibles.*

Elle est saine *si la décision associée à chaque observation la couvre.*

Le CSP est satisfiable *ssi il possède une politique saine et complète.*

Si le CSP n'est pas satisfiable il faut fournir une politique saine et maximale

Definition 56 *Une politique est* maximale *saine ssi elle associe à toute observation possible qui peut être couverte une décision qui la couvre.*

Formules Booléennes Quantifiées

Une formule booléenne quantifiée consiste informellement en une formule propositionnelle classique à laquelle on associe une partition ordonnée de l'ensemble de ses variables, correspondant à des alternances de quantificateurs. Ainsi, si Φ est une formule propositionnelle sur $\{a, b, c, d\}$, $(\exists\{a\})(\forall\{b, d\})(\exists\{c\})\Phi$ est une QBF. Une QBF est dite *positive* si l'énoncé correspondant, où les quantificateurs sur des variables portent en fait sur les *valeurs de vérité* de ces variables, est valide : ainsi, la QBF précédente est positive s'il existe une affectation (à vrai ou à faux) de la variable a telle que pour toute affectation des variables b et d, il existe une affectation de c telle que Φ soit vérifiée.

Definition 57 (quantificateurs)
On note $Q = \{\exists, \forall\}$. Si $q \in Q$ alors le complément de q, noté $\bar{q}$, est simplement défini par $\bar{\exists} = \forall$ et $\bar{\forall} = \exists$. Enfin, si $q \in Q$ et k est un entier positif, on note :

- $last(k, q) = \begin{cases} q & \text{si } k \text{ est impair} \\ \bar{q} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$
- $|\exists(k, q)| = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{k+1}{2} & \text{si } k \text{ est impair et } q = \exists \\ \frac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ est impair et } q = \forall \end{cases}$
- $|\forall(k, q)| = k - |\exists(k, q)|$.

Definition 58 (formules booléennes quantifiées) *Soit k un entier positif et $q \in Q$ un quantificateur. Une formule booléenne quantifiée (QBF) est un $(k + 3)$-uplet $P = \langle k, q, X_k, ..., X_1, \Phi\rangle$ où $\{X_1, ..., X_k\}$ est une partition de l'ensemble des variables propositionnelles de Φ, une formule de $PROP_{PS}$.*

Lorsque X représente des variables de décision et Y des variables d'état (non observables), les formules booléennes quantifiées du deuxième niveau de la forme $\langle 2, \forall, Y, X, \Phi\rangle$ représentent donc les problèmes de décision sous observabilité totale (il faut une décision pour chaque observation possible des variables d'état) et inversement, $\langle 2, \exists, X, Y, \Phi\rangle$ correspond aux cas de totale inobservabilité des variables d'état

On représente au troisième niveau les problèmes de décision non séquentiels partiellement observables, par une formule de la forme $\langle 3, \forall, Y_1, X, Y_2, \Phi\rangle$: Y_1 (resp. Y_2) correspond aux variables d'état observables (resp. non observables).

Definition 59 (politiques totales)
L'ensemble $TP(k, q, X_k, ..., X_1)$ est défini récursivement comme suit :

- $TP(0, q) = \{\lambda\}$;
- $TP(k, \exists, X_k, ..., X_1) =$
  $\{\vec{x_k} ; \pi_{k-1} \mid \pi_{k-1} \in TP(k-1, \forall, X_{k-1}, ..., X_1)\}$;
- $TP(k, \forall, X_k, ..., X_1)$
  $= [2^{X_k} \to TP(k-1, \exists, X_{k-1}, ..., X_1)\}]^4$.

[4] c-à-d l'ensemble des fonctions totales de 2^{X_k} dans $TP(k-1, \exists, X_{k-1}, ..., X_1)$.

Definition 60 (satisfaction par une politique)
On définit récursivement la satisfaction d'une instance $P = \langle k, q, X_k, ..., X_1, \Phi\rangle$ de $QBF_{k,q}$ par une politique π de $TP(k, q, X_k, ..., X_1)$ comme suit : π satisfait P (noté $\pi \models P$) ssi l'une de ces conditions est vérifiée :
- $k = 0$ *et* $\pi = \lambda$ *et* $\Phi = vrai$ *;*
- $k \geq 1$ *et* $q = \exists$ *et* $\pi = (\vec{x_k}; \pi')$ *avec* $\pi' \models \langle k-1, \forall, X_{k-1}, ..., X_1, \Phi_{\vec{x_k}}\rangle$ *;*
- $k \geq 1$ *et* $q = \forall$ *et pour tout* $\vec{x_k} \in 2^{X_k}$ *on a* $\pi(\vec{x_k}) \models \langle k-1, \exists, X_{k-1}, ..., X_1, \Phi_{\vec{x_k}}\rangle$.

Definition 61 (politique partielle)
L'ensemble $PP(k, q, X_k, ..., X_1)$ des politiques partielles pour la QBF $P = \langle k, q, X_k, \ldots, X_1\rangle$ est défini récursivement comme suit :
- $TP(1, \exists, X_1) = 2^{X_1} \cup \{\otimes\}$ *;*
- $TP(1, \forall, X_1) = (2^{X_1} \rightarrow \{\lambda, \otimes\})$ *;*
- $TP(k, \exists, X_k, ..., X_1) =$
  $\{\vec{x_k}; \pi_{k-1} | \pi_{k-1} \in PP(k-1, \forall, X_{k-1}, .., X_1) \cup \{\otimes\}$ *;*
- $TP(k, \forall, X_k, ..., X_1)$
  $= (2^{X_k} \rightarrow PP(k-1, \exists, X_{k-1}, ..., X_1))$.

$\otimes$ représente l'échec (i.e. il n'est pas possible de trouver une politique solution pour la QBF considérée).

Definition 62 (politique partielle saine)
Une politique partielle $\pi \in PP(k, q, X_k, ..., X_1)$ est saine *pour $P = \langle k, q, X_k, ..., X_1, \Phi\rangle$ ssi l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $q = \exists$ *et* $\pi = \otimes$ *;*
2. $(k, q) = (1, \exists)$, $\pi = \vec{x_1}$ *et* $\vec{x_1} \models \Phi$ *;*
3. $(k, q) = (1, \forall)$ *et pour tout* $\vec{x_1} \in 2^{X_1}$ *on a soit* $\pi(\vec{x_1}) = \otimes$, *soit* $(\pi(\vec{x_1}) = \lambda$ *et* $\vec{x_1} \models \Phi)$ *;*
4. $k > 1$, $q = \exists$, $\pi = \vec{x_k}; \pi_{k-1}$ *et* π_{k-1} *est saine pour* $\langle k-1, \forall, X_{k-1}, ..., X_1, \Phi_{\vec{x_k}}\rangle$ *;*
5. $k > 1$, $q = \forall$, *et pour tout* $\vec{x_k} \in 2^{X_k}$, $\pi(\vec{x_k})$ *est saine pour* $\langle k-1, \exists, X_{k-1}, ..., X_1, \Phi_{\vec{x_k}}\rangle$ *;*

Definition 63 (politiques saines maximales)
Soient π et π' deux politiques partielles de $PP(q, k, X_k, ..., X_1)$. On dit que π est au moins aussi couvrante que π', noté $\pi \sqsupseteq \pi'$, ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- $q = \exists$ *et* $\pi' = \otimes$ *;*
- $q = \exists$, $\pi = [\vec{x_k}; \pi_{k-1}]$, $\pi' = [\vec{x'_k}; \pi'_{k-1}]$, *et* $\pi_{k-1} \sqsupseteq \pi'_{k-1}$ *;*
- $q = \forall$ *et pour tout* $\vec{x_k} \in 2^{X_k}$, *on a* $\pi(\vec{x_k}) \sqsupseteq \pi'(\vec{x_k})$.

π est un préordre partiel ; on note $\pi \gg \pi'$ pour $\pi \sqsupseteq \pi'$ et non $(\pi' \sqsupseteq \pi)$.
π est une politique partielle saine maximale *pour une instance P de* QBF *ssi π est saine pour P et il n'existe pas de politique π' saine pour P telle que $\pi' \gg \pi'$ et $\pi' \models P$.*

Definition 64 (politiques saines efficaces)
Une politique π saine pour $P = \langle 3, \forall, X, Y, Z, \Phi\rangle$ est efficace *ssi π est calculable efficacement en tant que fonction, i.e., il existe un algorithme en temps polynômial en la taille de l'entrée qui, pour toute entrée $\vec{x} \in 2^X$, retourne $\pi(\vec{x})$.*

Definition 65 (FQBF : problème de recherche (function problem))
Soit $P = \langle k, q, X_k, ..., X_1, \Phi \rangle$ une QBF. Résoudre le problème de recherche associé à P consiste à exhiber une politique π telle que $\pi \models P$, s'il en existe une. On appelle FQBF (respectivement $FQBF_{k,q}$) le problème de recherche associé à QBF (respectivement $FQBF_{k,q}$)).

Definition 66 (SQBF : 2^e problème de recherche) *Soit $P = \langle k, q, X_k, ..., X_1, \Phi \rangle$ une QBF. Résoudre le second problème de recherche associé à P consiste à exhiber une politique π saine maximale pour P. On appelle SFQBF (respectivement $SFQBF_{k,q}$) le second problème de recherche associé à QBF (respectivement $QBF_{k,q}$).*

A.5 Résolution interactive

Fronts

Definition 67 *Un* front *est une fonction Φ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.*

Un front n'est pas nécessairement une fonction monotone.

Definition 68 *Soit I un intervalle flou. On apelle* front gauche de *I (noté I^-) le front défini par :*

$$\begin{array}{llll} I^- : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & I^-(\lambda) = inf\{x | \mu_I(x) \geq \lambda,\ x \geq s^-\} \end{array}$$

On apelle front droit de *I (noté I^+) le front défini par :*

$$\begin{array}{llll} I^+ : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & I^+(\lambda) = sup\{x | \mu_I(x) \geq \lambda, x \leq s^+\} \end{array}$$

Definition 69 *Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ n variables indépendantes, dont les valeurs sont restreints par les intervalles $X_1, \cdots, X_n$. Une* configuration floue extreme f Ω *est un n-upplet de front gauches et droits : $\Omega = (X_1^{\epsilon_1}, X_2^{\epsilon_2}, \cdots, X_n^{\epsilon_n})$, où $\epsilon_i \in \{+, -\}$. On note $\mathbb{H}$ l'ensemble de toutes les configurations extremes floues : $\mathbb{H} = \times_i \{X_i^-, X_i^+\}$ ($|\mathbb{H}| = 2^n$)*

SoitΩ_i le i^{ieme} front de la configuration Ω. Pour tout $\Omega \in \mathbb{H}$, $\Omega(\lambda)$ est la configuration (classique) obtenue au niveau λ. $\Omega(\lambda) = (\Omega_1(\lambda), \Omega_2(\lambda), \cdots, \Omega_n(\lambda)) \in \mathbb{R}^n$ est un vertex de l'hyper-rectangle $\times_i [X_i]_\lambda$.

Definition 70 *Soit f une fonction de n arguments et $\dot{f}$ l'extension de f applicable aux fronts : pour tout nupplet de fronts $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n)$, $\dot{f}(\Omega)$ est le front défini par $\forall \lambda \in [0,1]$*

$$\begin{array}{lll} \dot{f}(\Omega)(\lambda) & = & f(\Omega(\lambda)) \\ & = & f(\Omega_1(\lambda), \Omega_2(\lambda), \cdots, \Omega_n(\lambda)) \end{array}$$

Definition 71 *Une fonction f est* localement monotone *$x_i$ssi, pour chacune des ses variables x_i, et pour tout nupplet $(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ la fonction $f(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots$ est monotone.*

L'intéret des fronts est qu'il permettent un calcul de f à partir des fronts des ensembles flous X_i. On peut en effet montrer que, si f est localement monotone vis à vis de chacun de ses arguments, alors les fronts gauche et droit de $Y = f(X_1, \ldots, X_n)$ sont $Y^- =$

$\dot{min}_{\Omega\in\mathbb{H}}(\dot{f}(\Omega))$
et $Y^+ = \dot{max}_{\Omega\in\mathbb{H}}(\dot{f}(\Omega))$

CSP à hypothèses

Definition 72 *Un* CSP à hypothèses *est un* 4-*uple* $\mathcal{P} = \langle X, D, \mathcal{C}, \mathcal{H}\rangle$ *où* $\langle X, D, \mathcal{C}\rangle$ *est un CSP et* $\mathcal{H}$ *un ensemble fini de contraintes unaires sur les variables de* X.
$P' = \langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{H}\rangle$ *est le CSP (classique) CSP associé à*$\mathcal{P}$.

Definition 73
Une affectation s *est solution A-CSP* $\mathcal{P}$ *ssi* s *est un solution de* $P' = \langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{H}\rangle$.
$\mathcal{P}$ *est cohérent (resp. incohérent) ssi il a au moins une solution.*

Definition 74 *Soit* $\mathcal{P}$ *un A-CSP.*
Un sous-ensemble $E \subseteq \mathcal{H}$ *est appelé un* environnement.
E *est* cohérent *(resp.* incohérent*)*
modulo $\mathcal{P}$ *ssi* $\langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{E}\rangle$ *est un CSP consistent (resp. incohérent).*

Un environnement incohérent est appelé un *conflit* pour $\mathcal{P}$ (ou conflit sur $\mathcal{H}$ modulo $\mathcal{C}$). Tout environnement cohérent défini un ensemble de $\mathcal{H}$ à relaxer pour retrouver la cohérence : si E est environnement cohérent, relâcher $\mathcal{H} \setminus E$ suffit à restaurer la cohérence.

Definition 75
Un nogood *pour* $\mathcal{C}$ *sur* $\mathcal{H}$ *(ou nogood de* $\mathcal{P}$*) est un environnement minimal incohérent, i.e., un conflit* E *de* $\mathcal{P}$ *tel qu'aucun autre conflit* E' *est inclus dans* E.
Une interprétation *de* $\mathcal{P}$ *est un environnement maximal consistent de* $\mathcal{P}$*, i.e., un environnement consistent* E *et qu'aucun autre environnement cohérent* E' *ne contient* E.

Definition 76 *Soit* $\mathcal{P}$ *un CSP à hypothèses et* L *une contrainte unaire sur une variable de* X.
Une explication *de* L *sur* P *est un environnement* E *tel que* $\langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{E}\rangle$ *est un CSP consistent et* $\langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{E}\rangle \cup \{\neg\mathcal{L}\}$ *est un CSP incohérent.*
Une explication E *de* L *sur* $\mathcal{P}$ *est* minimale *ssi il n'existe pas d'autre explication* E' *de* L *sur*$\mathcal{P}$ *telle que* $E' \subsetneq E$.

Definition 77 *Soit* $\mathcal{P}$ *un CSP à hypothèses et* L *une contrainte unaire sur une variable de* X.
Une restauration *de* L *est un environnement* E *tel que* $\langle X, D, \mathcal{C} \cup \mathcal{E} \cup \{\mathcal{L}\}\rangle$ *est un CSP cohérent.*
C'est une restauration maximale ssi elle n'est contenue dans aucune autre restauration .

Bibliographie

[Aldanondo *et al.*, 2001] M. Aldanondo, H. Fargier, and M. Véron. *Configuration, configurateurs et gestion de production*, pages 179–209. Hermes Science, Traité IC2 Productique, 2001.

[Amilhastre *et al.*, 2002] J. Amilhastre, H. Fargier, and P. Marquis. Consistency restoration and explanations in dynamic CSPs - application to configuration. *Artificial Intelligence*, 135(2002) :199–234, 2002.

[Amilhastre, 1999] J. Amilhastre. *Représentation par automate de l'ensemble des solutions de problèmes de satisfaction de contraintes*. PhD thesis, LIRMM (Université Montpellier II / CNRS), 1999.

[Anscombe and Aumann, 1963] F.J. Anscombe and R.J. Aumann. A definition of subjective probability. *Annals of Mathematical Statistics*, 34 :199–205, 1963.

[Bahia, 1992] Projet Bahia. Étude comparative de trois formalismes en calcul propositionnel. In *Actes des 4èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 239–318, 1992.

[Bahia, 1995] Projet Bahia. Étude comparative de trois formalismes en calcul propositionnel. In *Actes des 5èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 125–157, 1995.

[Baudrit *et al.*, 2003a] C. Baudrit, D. Dubois, and H. Fargier. Propagation of uncertainty involving imprecision and randomness. In *Proceedings of the International Conference in Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT'03)*, 2003.

[Baudrit *et al.*, 2003b] C. Baudrit, D. Dubois, and H. Fargier. Représentation de la connaissance probabiliste incomplète. In *Actes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2003)*, pages 65–72, 2003.

[Baudrit *et al.*, 2004a] C. Baudrit, D. Dubois, and H. Fargier. Practical representation of incomplete probabilistic information. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Soft Methods in Probability and Statistics*, 149-156 2004.

[Baudrit *et al.*, 2004b] C. Baudrit, D. Dubois, and H. Fargier. *Representation of incomplete probabilistic information*, pages 149–156. Springer, 2004.

[Baudrit *et al.*, 2004c] C. Baudrit, D. Dubois, D. Guyonnet, and H. Fargier. Joint treatment of imprecision and randomness in uncertainty propagation. In *Proceedings of IPMU'04 (version longue à paraitre dans IJAR, 2005)*, pages 873–880, 2004.

[Baudrit, 2005] C. Baudrit. *Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines : Application à l' évaluation des risques liés aux sites et aux sols pollués.* PhD thesis, Université P. Sabatier, 2005.

[Bauland and Fargier, 2000] N. Bauland and H. Fargier. Heuristique pour la satisfaction de csp clausaux. In *Actes de RFIA'2000*, pages 257–266, février 2000.

[Behringer, 1977] F.A. Behringer. On optimal decisions under complete ignorance : a new criterion stronger than both Pareto and maxmin. *EJOR*, 1 :295–306, 1977.

[Benferhat and Kaci, 2003] S. Benferhat and S. Kaci. Logical representation and fusion of prioritized information based on guaranteed possibility measures : Application to the distance-based merging of classical bases. *Artificial Intelligence*, 148 :291–333, 2003.

[Benferhat *et al.*, 1999] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge. *Journal of Logic and Computation*, 9 :873–895, 1999.

[Benferhat *et al.*, 2004] Salem Benferhat, Jean-François Bonnefon, and Rui Da Silva Neves. An experimental analysis of possibilistic default reasoning. In *KR*, pages 130–140, 2004.

[Berre *et al.*, 2003] D. Le Berre, L. Simon, and A. Tachella. Challenges in the qbf arena : the sat'03 evaluation of qbf solvers. In *Sixth International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT2003)*, volume 2919 of *LNAI*, pages 468–485. Springer-Verlag, June 2003.

[Bistarelli *et al.*, 1995] S. Bistarelli, U. Montanari, and F. Rossi. Constraint solving over semirings. In Chris Mellish, editor, *Proceedings of IJCAI'95*, pages 624–630, Montreal, 1995.

[Blume *et al.*, 1991] L. Blume, A. Brandenburger, and E. Dekel. Lexicographic probabilities and choice under uncertainty. *Econometrica*, 59(1) :61–79, 1991.

[Bonet and Geffner, 1996] B. Bonet and H. Geffner. Arguing for decisions : A qualitative model of decision making. In *Proceedings of UAI'96*, pages 98–105, 1996.

[Bordeaux and Monfroy, 2002] L. Bordeaux and E. Monfroy. Beyond NP : Arc-consistency for quantified constraints. In P. Van Hentenryck, editor, *Proceedings of CP'02*, pages 371–386, 2002.

[Boutilier, 1994] C. Boutilier. Toward a logic for qualitative decision theory. In *Proceedings of KR'94*, pages 75–86, 1994.

[Bouveret and Lang, 2005] S. Bouveret and J. Lang. Efficiency and envy-freeness in fair division of indivisible goods : logical representation and complexity. In *Proceedings of IJCAI'05*, page à paraitre, 2005.

[Bouyssou and Pirlot, 2002a] D. Bouyssou and M. Pirlot. A characterization of strict concordance relations. In D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Słowiński, D. Vanderpooten, and Ph. Vincke, editors, *Aiding Decisions with Multiple Criteria : Essays in Honour of Bernard Roy*, pages 121–145. Kluwer, Dordrecht, 2002.

[Bouyssou and Pirlot, 2002b] D. Bouyssou and M. Pirlot. Non transitive decomposable conjoint measurement. *Journal of Mathematical Psychology*, 46 :677–703, 2002.

[Bouyssou *et al.*, 2001] D. Bouyssou, P. Perny, and M. Pirlot. Non-transitive decomposable conjoint measurement as a general framework for mcdm and decision under uncertainty. In *Proceedings of the 17th EURO conference*, 2001.

[Brafman and Dimopolous, 2004] R. I. Brafman and Y. Dimopolous. Extended semantics and optimization algorithms for CP-networks. *Computational Intelligence*, 20(2) :218–245, 2004.

[Brafman and Tennenholtz, 1996] R. Brafman and M. Tennenholtz. On the foundations of qualitative decision theory. In *Proceedings AAAI'96*, pages 1291–1296, 1996.

[Brafman and Tennenholtz, 1997] R. Brafman and M. Tennenholtz. On the axiomatization of qualitative decision theory. In *Proceedings AAAI'97*, pages 76–81, 1997.

[Brafman and Tennenholtz, 2000] R. Brafman and M. Tennenholtz. An axiomatic treatment of three qualitative decision criteria. *Journal of the ACM*, 47(3) :452–482, 2000.

[Castell and Fargier, 1998a] T. Castell and H. Fargier. Between sat and csp : propositionnal satisfaction problems and clausal csps. In *Proceedings of ECAI'98*, pages 214–218, août 1998.

[Castell and Fargier, 1998b] T. Castell and H. Fargier. Entre SAT et CSP : Problèmes de satisfaction propositionnels et CSPs clausaux. In *Actes de (RFIA'98)*, pages 117–126, 1998.

[Chen, 2004] H. Chen. Quantified constraint satisfaction and bounded treewidth. In *Proceedings of ECAI'04*, pages 161–165, 2004.

[Choquet, 1953] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'institut Fourrier*, 5 :131–295, 1953.

[Classes Polynomiales, 1995] Projet Classes Polynomiales. Classes polynomiales : Travaux et résultats. In *Actes des 5èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 3–28, 1995.

[Cohen and Jaffray, 1980] M. Cohen and J. Y. Jaffray. Rational behavior under complete ignorance. *Econometrica*, 48(5) :1281–99, 1980.

[Cohen, 1992] M. Cohen. Security level, potential level, expected utility : A three-criteria decision model under risk. *Theory and Decision*, 33(2) :101–134, 1992.

[Cooper and Schiex, 2004] M. Cooper and T. Schiex. Arc consistency for soft constraints. *Artificial Intelligence*, 154(1-2) :199–227, 2004.

[Coste-Marquis *et al.*, 2003] S. Coste-Marquis, H. Fargier, J. Lang, D. Le Berre, and P. Marquis. Function problems for quantified boolean formulas. Journée de Travail sur les Formules Booléennes Quantifiées, 21 novembre 2003. Rapport technique CRIL, http ://www.cril.univ-artois.fr/asqbf/pub/index.php4.

[Coste-Marquis *et al.*, 2006] Sylvie Coste-Marquis, Hélène Fargier, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. Representing Policies for Quantified Boolean Formulae. In *Proc of 10th International Conference on Principles of Knowledge Representation and reasoning (KR 2006), Lake District (UK), 02/06/2006-05/06/2006*, pages 286–296, http ://www.aaai.org/Press/press.php, 2006. AAAI Press.

[Cramton *et al.*, 2005] P. Cramton, Y. Shoham, and R. Steinberg. *Combinatorial Auctions.* MIT Press, 2005.

[CSP flexibles, 1992] Projet CSP flexibles. Représentation et traitement pratique de la flexibilité dans les problèmes sous contraintes. In *Actes des 4èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle*, pages 369–428, 1992.

[CSP flexibles, 1995] Projet CSP flexibles. Autour des problèmes de satisfactions de contraintes. In *Actes des 5èmes journées nationales du PRC-GDR Intelligence Artificielle.*, pages 159–178, 1995.

[D. Dubois, 2005] J. Fortin D. Dubois, H. Fargier. The empirical variance of a set of fuzzy intervals. In *Proceedings of FUZZ'IEEE 2005*, 2005.

[Darwiche and Marquis, 2001] A. Darwiche and P. Marquis. A perspective on knowledge compilation. In *Proceedings of IJCAI'01*, pages 175–182, 2001.

[Darwiche, 1999] A. Darwiche. Compiling devices into decomposable negation normal form. In *Proceedings of IJCAI99*, pages 284–289, 1999.

[de Saint-Cyr *et al.*, 1994] F. Dupin de Saint-Cyr, J. Lang, and T. Schiex. Penalty logic and its link with Dempster–Shafer theory. In *Proceedings of UAI'94*, pages 204–211, San Francisco, CA, 1994.

[Deschamps and Gevers, 1978] R. Deschamps and L. Gevers. Leximin and utilitarian rules : a joint characterization. *Journal of Economic Theory*, 17 :143–163, 1978.

[DIDOM, 1997] Groupe DIDOM. (J.Erschler , P.Lopez , C.Merce, P.Esquirol , G.Bel, J.B.Cavaillé, J. Delmas, C.Thierry, D.Dubois, H.Fargier , H.Prade) distribution de la décision dans un contexte multi-projets : une approche par contraintes. In *7ième mini-Euro conférence*, pages 5 – 8, mars 1997.

[DIDOM, 2000] Groupe DIDOM. (I. Bazet, J. P. Camalot, V. Galvagnon, J. B. Cavaillé, D. Dubois, J. Erschler, P. Esquirol,H. Fargier, P. Lopez, C. Mercé, H. Prade, G. de Terssac, and C. Thierry) planning by repairing and cooperation in multi project management. In *Conférence on Management and Control of Production and Logistics*, pages 5 – 8, July 2000.

[Dubois and Fargier, 2004] D. Dubois and H. Fargier. An axiomatic framework for order of magnitude confidence relations. In *Proceedings of UAI'04*, pages 138–145, Banff, CA, 2004.

[Dubois and Fargier, 2005] D. Dubois and H. Fargier. Bridging the gap between discrete sugeno and Choquet integrals. Présenté à la conférence RUD'2005, June 2005.

[Dubois and Fortemps, 1999] D. Dubois and P. Fortemps. Computing improved optimal solutions to max-min flexible constraint satisfaction problems. *European Journal of Operational Research*, 118 :95–126, 1999.

[Dubois and Prade, 1995a] D. Dubois and H. Prade. Conditional objects, possibility theory and default rules. In G. Crocco, L. Fariñas del Cerro, and A. Herzig, editors, *Conditionals : From Philosophy to Computer Sciences*, pages 301–336. Oxford University Press, 1995.

[Dubois and Prade, 1995b] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory as a basis for qualitative decision theory. In *Proceedings of IJCAI'95*, pages 1925–1930, Montreal, 20-25 August 1995.

[Dubois *et al.*, 1993] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. The calculus of fuzzy restrictions as a basis for flexible constraint satisfaction. In *Proceedings of FUZZ-IEEE'93*, pages 1131–1136, Vol. II, mars 1993.

[Dubois *et al.*, 1994] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In D. M. Gabbay, C. J. Hogger, and J. A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming-Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning(Volume 3)*, pages 439–513. Clarendon Press, Oxford, 1994.

[Dubois *et al.*, 1995] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Fuzzy constraints in job-shop scheduling. *Journal of Intelligent Manufacturing*, pages 215–234, 1995.

[Dubois *et al.*, 1996a] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibility theory in constraint satisfaction problems : Handling priority, preference and uncertainty. *Applied Intelligence*, 6(4) :287–309, 1996.

[Dubois *et al.*, 1996b] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Refinements of the maximin approach to decision-making in a fuzzy environment. *Fuzzy Sets ans Systems*, 81(1) :103–122, 1996.

[Dubois *et al.*, 1998a] D. Dubois, D. Le Berre, H. Prade, and R. Sabbadin. Logical representation and computation of optimal decisions in a qualitative setting. In *Proceedings of AAAI-98*, pages 588–593, 1998.

[Dubois *et al.*, 1998b] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Comparative uncertainty, belief functions and accepted beliefs. In *Proceedings of UAI'98*, pages 113–120, 1998.

[Dubois *et al.*, 1998c] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibilistic likelihood relations. In *Proceedings of IPMU'98*, pages 1196–1203, 1998.

[Dubois *et al.*, 1998d] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Qualitative decision theory with Sugeno integrals. In *Proceedings of UAI'98*, pages 121–128, Madison, WI, 1998.

[Dubois *et al.*, 2000] D. Dubois, L. Godo, H. Prade, and A. Zapico. Advances in qualitative decision theory : Refined rankings. In *Proceedings IBERAMIA'00*, pages 427–436, 2000.

[Dubois *et al.*, 2002] D. Dubois, H. Fargier, and P. Perny. On the limitations of ordinal approaches to decision-making. In *Proceedings of KR'2002 , Toulouse, France*, pages 133–144, 22-25 avril 2002.

[Dubois *et al.*, 2003a] D. Dubois, H. Fargier, and V. Galvagnon. On latest starting times and floats in activity networks with ill-known durations. *European Journal of Operation Research*, 147 :266–280, 2003.

[Dubois *et al.*, 2003b] D. Dubois, H. Fargier, and P. Perny. Qualitative decision theory with preference relations and comparative uncertainty : An axiomatic approach. *Artificial Intelligence*, 148 :219–260, 2003.

[Dubois *et al.*, 2003c] D. Dubois, H. Fargier, and P. Perny H. Prade. A characterization of generalized concordance rules in multicriteria decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 18 :751–774, 2003.

[Dubois *et al.*, 2003d] D. Dubois, H. Fargier, and R. Sabbadin. Additive refinements of qualitative decision criteria. part I : Possibilistic preference functionals. 24th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 4-8 février 2003.

[Dubois *et al.*, 2003e] D. Dubois, H. Fargier, and R. Sabbadin. Additive refinements of qualitative decision criteria. part II : Sugeno integrals. 24th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory, 4-8 février 2003.

[Dubois *et al.*, 2004a] D. Dubois, H. Fargier, and J. Fortin. A generalized vertex method for computing with fuzzy intervals. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 541–546, 2004.

[Dubois *et al.*, 2004b] D. Dubois, H. Fargier, and J. Fortin. Le calcul des intervalles flous par la méthode des fronts. In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'04)*, pages 25–32, 2004.

[Dubois *et al.*, 2004c] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Ordinal and probabilistic representations of acceptance. *JAIR*, 22 :23–56, 2004.

[Dubois *et al.*, 2005] D. Dubois, H. Fargier, and J. Fortin. Computational methods for determining the latest starting times and floats of tasks in interval-valued activity networks. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2005.

[Dubois, 1986] D. Dubois. Belief structures, possibility theory and decomposable confidence measures on finite sets. *Computers and Artificial Intelligence*, 5(5) :403–416, 1986.

[Ellsberg, 1961] D. Ellsberg. Risk, ambiguity and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, 75 :643–669, 1961.

[Epstein, 1999] L. G. Epstein. A definition of uncertainty aversion. *Review of Economic Studies*, 66(3) :579–608, 1999.

[Fargier and Castell, 1997] H. Fargier and T. Castell. Une approche générale de la logique propositionnelle et des problèmes de satisfaction de contraintes, 1997.

[Fargier and Lamothe, 2001] H. Fargier and J. Lamothe. Handling soft constraints in hoist scheduling problems. *Engineering Applications for Artificial Intelligence (The International Journal of Intelligent Real-Time Automata : Special Issue on Artificial Intelligence and Soft Computing for PLanning and Scheduling.*, 14(3) :387–399, 2001.

[Fargier and Lang, 1993] H. Fargier and J. Lang. Uncertainty in constraint satisfaction problems : a probalistic approach. In *Proceedings of ECSQARU'93*, pages 97–104, 1993.

[Fargier and Perny, 1999a] H. Fargier and P. Perny. Qualitative decision models under uncertainty without the commensurability hypothesis. In *Proceedings of UAI'99*, pages 188–195, 1999.

[Fargier and Perny, 1999b] H. Fargier and P. Perny. Une approche axiomatique pour les méthodes de surclassement basées sur une règle de concordance. In *50èmes Journées du groupe de travail Européen "Aide multicritere à la décision"*, Cerisy La Salle, 28 Sept - 2 oct 1999.

[Fargier and Perny, 2001] H. Fargier and P. Perny. Modélisation des préférences par une règle de concordancegénéralisée. In A. Colorni, M. Paruccini, and B. Roy, editors, *Multiple Criteria Decision Aiding (A-MCD-A)*, pages 99–116. European Commission Joint Research Centre, 2001.

[Fargier and Sabbadin, 2000] H. Fargier and R. Sabbadin. Can qualitative utility criteria obey the sure thing principle ? In *Proceedings of IPMU'2000*, pages 821–826, Madrid, 2000.

[Fargier and Sabbadin, 2003] H. Fargier and R. Sabbadin. Qualitative decision under uncertainty : Back to expected utility. In *Proceedings of IJCAI'03*, pages 303–308, Acapulco, Mexico, 2003.

[Fargier and Sabbadin, 2005] H. Fargier and R. Sabbadin. Qualitative decision under uncertainty : Back to expected utility. *Artificial Intelligence*, 164 :245–280, 2005.

[Fargier and Thierry, 1997] H. Fargier and C. Thierry. Fuzzy manufacturing planning and control : preliminary results. In *Proceedings of 2nd European Workshop on Fuzzy Decision analysis and Neural Networks for Management, Planning and Optimization (EFDAN 97)*, pages 185–193, 1997. Travaux présentés également à la conférence EURO XV / INFORMS XXXIV Joint International Conference, Barcelone, juillet 1997.

[Fargier and Thierry, 1998] H. Fargier and C. Thierry. *The use of qualitative decision theory in manufacturing planning and control : recent results in Fuzzy Master Production Scheduling.*, pages 45–59. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-verlag Group (Physica-Verlag), 1998.

[Fargier and Thierry, 2002] H. Fargier and C. Thierry. Evaluation du risque dans la gestion d'un projet sous contraintes de ressources externes : l'approche possibiliste . In *Actes des Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'02)*, pages 153–160, 2002.

[Fargier and Vilarem, 2004] H. Fargier and M.C. Vilarem. Compiling csps into tree-driven automata for interactive solving. *Constraints, an International Journal*, 9 :263–287, 2004.

[Fargier *et al.*, 1992] H. Fargier, R. Martin-Clouhaire, and T. Schiex. Satisfaction de contraintes souples. In *Actes de premières Journées nationales sur les applications des ensembles flous (LFA)*, pages 183–191, 1992.

[Fargier *et al.*, 1993] H. Fargier, J. Lang, and T. Schiex. Selecting preferred solutions in fuzzy constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the first European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, pages 1128–1134, 1993.

[Fargier *et al.*, 1996a] H. Fargier, J. Lang, R. Martin-Clouaire, and T. Schiex. A constraint satisfaction framework for decision under uncertainty. In *Proceedings of UAI'96*, pages 167–174, 1996.

[Fargier *et al.*, 1996b] H. Fargier, J. Lang, and T. Schiex. Mixed constraint satisfaction : A framework for decision problems under incomplete knowledge. In *Proceedings of AAAI'96*, pages 175–180, 1996.

[Fargier *et al.*, 1998] H. Fargier, J. Lang, and R. Sabbadin. Towards qualitative approaches to multi-stage decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 19 :441–471, 1998.

[Fargier *et al.*, 1999] H. Fargier, J. Lang, and P. Marquis. Décision en environnement partiellement observable et résolution de formules booléennes quantifiées. In *Actes de JNPC-99*, pages 129–138, 1999.

[Fargier *et al.*, 2000a] H. Fargier, J. Amilhastre, and P. Marquis. Explications et aide à la restauration de la cohérence dans les csp interactifs : application à la configuration. In *Actes de JNPC'00*, pages 43–56, juin 2000.

[Fargier *et al.*, 2000b] H. Fargier, V. Galvagnon, and D. Dubois. Fuzzy pert in series-prallel graphs. In *Proceedings of FUZZ-IEEE'2000*, pages 717–722, 2000.

[Fargier *et al.*, 2000c] H. Fargier, J. Lang, and P. Marquis. Propositional logic and one-stage decision making. In *Proceedings of KR'2000*, pages 445–456, 2000.

[Fargier *et al.*, 2002] H. Fargier, J. Lang, D.Le Berre, P. Marquis, and S. Coste-Marquis. Résolution de formules booléennes quantifiées : problèmes et algorithmes. In *Actes de RFIA 2002*, pages 289–298, janvier 2002.

[Fargier *et al.*, 2004a] H. Fargier, J. Lang, M. Lemaitre, and G.Verfaillie. Partage équitable de ressources communes. (2) Éléments de complexité et d'algorithmique. *Technique et Science Informatiques (TSI)*, 22(9) :1219–1238, 2004.

[Fargier *et al.*, 2004b] H. Fargier, J. Lang, M. Lemaitre, and G.Verfaillie. Partage équitable de ressources communes. (1) un modèle général et son application au partage de ressources satellitaires. *Technique et Science Informatiques (TSI)*, 22(9) :1187–1217, 2004.

[Fargier, 1994] H. Fargier. *Problèmes de satisfaction de contraintes souples ; application à l'ordonnancement de production.* Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, juin 1994.

[Fishburn, 1976] P. C. Fishburn. Noncompensatory preferences. *Synthèse*, 33 :393–403, 1976.

[Freuder and Hubbe, 1995] E. C. Freuder and P. D. Hubbe. Extracting constraint satisfaction subproblems. In *Proceedings of IJCAI'95*, pages 548–555, Montreal, Canada, 1995.

[Freuder and Wallace, 1992] Eugene C. Freuder and Richard J. Wallace. Partial constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, 58(1-3) :21–70, 1992.

[Friedman and Halpern, 1996] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measures and default reasoning. In *Proceedings of AAAI'96*, pages 1297–1304, 1996.

[Galvagnon, 2000] V. Galvagnon. *Aide a la décision en gestion multi-projet distribuée : approche locale pour la planification a moyen terme.* PhD thesis, Ecole Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, ONERA/CERT, December 2000.

[Gent *et al.*, 2004] I.P. Gent, P. Nightingale, and A. Rowley. Encoding quantified CSPs as quantified boolean formulae. In *ECAI'04*, pages 176–180, 2004.

[Ghirardato and Marinacci, 1998] P. Ghirardato and M. Marinacci. Ambiguity made precise : A comparative foundation. In *Proceedings of TARK 1998)*, pages 293–296, San Francisco, California, 1998. Also in Journal of Economic Theory, Elsevier, vol. 102(2), pages 251-289, 2000.

[Giang and Shenoy, 2000] P. H. Giang and P. P. Shenoy. A qualitative utility theory for spohn's theory of epistemic beliefs. In *Proceedings of UAI'2000*, pages 220–227, 2000.

[Gigerenzer *et al.*, 1999] G. Gigerenzer, P. M. Todd, and the ABC group. *Simple heuristics that make us smart.* Oxford Univ. Press, 1999.

[Gilboa and Schmeidler, 1989] I. Gilboa and D. Schmeidler. Maxmin expected utility with non-unique prior. *Journal of Economic Theory*, 18 :141–153, 1989.

[Gilboa, 1987a] I. Gilboa. A combination of expected utility and maxmin decision criteria. *Journal of Mathematical Psychology*, 31 :405–420, 1987.

[Gilboa, 1987b] I. Gilboa. Expected utility with purely subjective non-additive probabilities. *Journal of Mathematical Economics*, 16 :65–88, 1987.

[Guyonnet *et al.*, 2003] D. Guyonnet, B. Bourgine, D. Dubois, B. Côme H. Fargier, and J.P. Chilès. Hybrid approach for addressing uncertainty in risk assessments. *Journal of Environmental Engineering*, 129(1) :68–78, janvier 2003.

[Hammond, 1998] P. J. Hammond. *The logic of strategy*, chapter Consequentialism, non archimedean probabilities and lexicographic expected utility. C. Bicchieri, R. Jeffrey and B. Skyrms, 1998.

[Herzig *et al.*, 2003a] A. Herzig, J. Lang, and P. Marquis. Action representation and partially observable planning using epistemic logic. In *Proceedings IJCAI-03 , Acapulco*, pages 1067–1072, 12-15 août 2003.

[Herzig *et al.*, 2003b] A. Herzig, J. Lang, and P. Marquis. Action representation and partially observable planning using epistemic logic. In *Proceedings (IJCAI-03)*, pages 1067–1072, 2003.

[Jaffray and Philippe, 1997] J-Y. Jaffray and F. Philippe. On the existence of subjective upper and lower probabilities. *Mathematics on Operation Research*, 22(1) :165–185, 1997.

[Jaffray, 1988] J.Y. Jaffray. Choice under risk and the security factor : An axiomatic model. *Theory and Decision*, 24 :169–200, 1988.

[Jeavons *et al.*, 1996] P. Jeavons, D. A. Cohen, and M. Gyssens. A test for tractability. In *Proceedings of CP'96*, pages 267–281, 1996.

[Junker, 2001] U. Junker. Quickxplain : Conflict detection for arbitrary constraint propagation algorithms. In *IJCAI'01 Workshop on Modelling and Solving Problems with Constraints*, Seattle, WA, USA, August 2001.

[Jussien and Barichard, 2000] N. Jussien and V. Barichard. The PaLM system : explanation-based constraint programming. In *Proceedings of TRICS : Techniques foR Implementing Constraint programming Systems, a post-conference workshop of CP 2000*, pages 118–133, Singapore, September 2000.

[Khatib *et al.*, 2001] L. Khatib, P. Morris, R. A. Morris, and F. Rossi. Temporal constraint reasoning with preferences. In *Proceedings of IJCAI'01*, pages 322–327, 2001.

[Konieczny and PinoPérez, 2005] S. Konieczny and R. PinoPérez. Propositional belief base merging or how to merge beliefs/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3) :785–802, 2005.

[Konieczny *et al.*, 2002] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging : a general framework and some complexity results. In *Proceedings of KR'02*, pages 97–108, 2002.

[Kraft *et al.*, 1958] C. H. Kraft, J. W. Pratt, and A. Seidenberg. Intuitive probability on finite sets. *Annals of Mathematical Statistics*, 30 :408–419, 1958.

[Kraus *et al.*, 1990] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44(1-2) :167–207, 1990.

[La Valle and Fishburn, 1992] I. H. La Valle and P. C. Fishburn. State-independent subjective expected lexicographic utility. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 :217–240, 1992.

[Lafage and Lang, 2000] C. Lafage and J. Lang. Logical representation of preferences for group decision making. In *Proceedings KR'00*, pages 457–468, 2000.

[Lang, 2002] J. Lang. From preference representation to combinatorial vote. In *Proceedings KR'02*, pages 277–290, 2002.

[Lang, 2003] J. Lang. *Contribution à l'étude de modèles, de langages et d'algorithmes pour le raisonnement et la prise de décision en intelligence artificielle*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier, Toulouse, septembre 2003.

[Larrosa and Schiex, 2004] J. Larrosa and T. Schiex. Solving weighted csp by maintaining arc consistency. *Artificial Intelligence*, 159(1-2) :1–26, 2004.

[Larrosa *et al.*, 1998] J. Larrosa, P. Meseguer, T. Schiex, and Gérard Verfaillie. Reversible dac and other improvements for solving max-csp. In *Proceedings of AAAI '98*, pages 347–352, 1998.

[Lehmann and Magidor, 1992] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail ? *Artificial Intelligence*, 55(1) :1–60, 1992.

[Lehmann, 1996] D. Lehmann. Generalized qualitative probability : Savage revisited. In *Proceedings of UAI'96*, pages 381–388, 1996.

[Lehmann, 1998] D. Lehmann. Non standard numbers for qualitative decision making. In *Proceedings of TARK'98*, pages 161–174, 1998.

[Lemaitre *et al.*, 2002] M. Lemaitre, G. Verfaillie, H. Fargier, J. Lang Jérôme, and N. Bataille J.M Lachiver. Sharing the use of earth observation satellites. In *3rd Workshop on planning and scheduling for space , Houston, Texas*, octobre 2002.

[Lesaint, 1994] D. Lesaint. Maximal sets of solutions for constraint satisfaction problems. In *Proceedings of ECAI'94*, pages 110–114, 1994.

[Letombe, 2005] F. Letombe. *De la validité des formules booléennes quantifiées : étude de complexité et exploitation de classes traitables au sein d'un prouveur QBF.* PhD thesis, Université d'Artois, décembre 2005.

[Luce *et al.*, 1990] R.D. Luce, D.H. Krantz, P. Suppes, and A. Tversky. *Foundations of measurement.* Academic Press, New York, 1990.

[Marichal, 1997] J.-L. Marichal. On Sugeno integrals as an aggregation function. Technical Report 9710, GEMME, Faculté d'économie, de gestion et de science sociales, Liége, Belgium, May 1997.

[Marquis, 2006] H. Fargier P. Marquis. On the use of partially ordered decision graphs for knowledge compilation and quantified boolean formulae. In *Proceedings AAAI'06*, page A paraitre, juillet 2006.

[Martin-Clouaire, 1992] R. Martin-Clouaire. Dealing with soft constraints in a constraint satisfaction problem. In *Proceeding of IPMU'92*, pages 37–40, 1992.

[Morris and Muscettola, 1999] P. Morris and N. Muscettola. Managing temporal uncertainty through waypoint controllability. In *Proceedings of IJCAI'99*, pages 1253–1258, 1999.

[Morris *et al.*, 2001] P. Morris, N. Muscettola, and T. Vidal. Dynamic control of plans with temporal uncertainty. In *Proceedings of IJCAI'01*, pages 494–502, 2001.

[Moulin, 1988] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making.* Wiley, New-York, 1988.

[Pargamin, 2003] B. Pargamin. Extending cluster tree compilation with non-boolean variables in product configuration : a tractable approach to preference-based configuration. In *Proceedings of the IJCAI'03 Workshop on Configuration*, 2003.

[Parrod *et al.*, 2003] N. Parrod, C. Thierry, H. Fargier, and J.B. Cavaille. Etude d'un processus coopératif de planification de ressources stratégiques : vers un outil de simulation. In *Actes du 5e Congrès International de Génie Industriel : le génie industriel et les défis mondiaux*, 2003.

[Parrod *et al.*, 2005] N. Parrod, C. Thierry, H. Fargier, and J.B. Cavaillé. Evaluation de performances d'une relation coopérative de sous-traitance de spécialité au sein d'une chaîne logistique projet. *Journal Européen des systèmes automatisés numéro spécial Modélisation et évaluation de performances des chaînes logistiques*, page A paraitre, 2005.

[Pearl, 1993] J. Pearl. From conditional oughts to qualitative decision theory. In *Proceedings of UAI'93*, pages 12–20, 1993.

[Pinkas, 1991] G. Pinkas. Propositional non-monotonic reasoning and inconsistency in symmetric neural networks. In *Proceedings of IJCAI'91*, pages 525–531, 1991.

[Pralet *et al.*, 2005] C. Pralet, G. Verfaillie, and T. Schiex. Complex queries on belief-feasibility-desire networks. In *Actes des JFPLC'05*, 2005.

[Quiggin, 1982] J. Quiggin. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 3 :323–343, 1982.

[Rosenfeld *et al.*, 1976] A. Rosenfeld, R. Hummel, and S. Zucker. Scene labeling by relaxation operations. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 6 :420–433, June 1976.

[Roy, 1968] B. Roy. Classement et choix en présence de points de vues multiples (la méthode electre). *Cahiers du CERO*, 8 :57–75, 1968.

[Roy, 1973] B. Roy. How outranking relations helps multiple criteria decision making. In J. Cochrane and M. Zeleny, editors, *Multicriteria Decision Making*, pages 179–201. University of Carolina, 1973.

[Roy, 1996] B. Roy. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding.* Kluwer Academic Publishers, 1996.

[Sabbadin, 2001] R. Sabbadin. Possibilistic markov decision processes. *Engineering Appl. of Artificial Intelligence*, 14 :287–300, 2001.

[Savage, 1954] L.J. Savage. *The Foundations of Statistics.* Wiley, New York, 1954.

[Schiex *et al.*, 1995] T. Schiex, H. Fargier, and G. Verfaillie. Valued constraint satisfaction problems : Hard and easy problems. In *Proceedings of IJCAI'95*, Montreal, 1995.

[Schiex, 1992] T. Schiex. Possibilistic constraint satisfaction problems or "how to handle soft constraints ?". In *Proceedings of UAI-92*, pages 268–275, San Mateo, CA, 1992.

[Schmeidler, 1986] D. Schmeidler. Integral representation without additivity. *Prooceedings of the American Mathematical Society*, 97(2) :255–261, 1986.

[Schmeidler, 1989] D. Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57 :571–587, 1989.

[Shenoy and Shafer, 1990] P. P. Shenoy and G. Shafer. Axioms for probability and belief-function propagation. In G. Shafer and J. Pearl, editors, *Readings in Uncertain Reasoning*, pages 575–609. Kaufmann, San Mateo, CA, 1990.

[Simon *et al.*, 2004] L. Simon, D. Le Berre, M. Narizzano, and A. Tacchella. The second qbf solvers comparative evaluation. In *Proceedings of SAT2004 – Gemo Report 364*, 2004.

[Smets, 1994] P. Smets. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66 :191–234, 1994.

[Snow and Freuder, 1990] P. Snow and E. C. Freuder. Improved relaxation and search methods for approximate constraint satisfacxtion with a maximin criterion. In P. F. Patel-Schneider, editor, *Proceedings of the Eighth Biennial Conference of the Canadian Society for Computational Studies of Intelligence*, pages 227–230, 1990.

[Snow, 1999] P. Snow. Diverse confidence levels in a probabilistic semantics for conditional logics. *Artificial Intelligence*, 113(1–2) :269–279, 1999.

[Tan and Pearl, 1994] S. Tan and J. Pearl. Specification and evaluation of preferences under uncertainty. In *Proceedings of KR'94*, pages 530–539, Bonn, Germany, May 1994.

[Thomason, 2000] R. Thomason. Desires and defaults : A framework for planning with inferred goals. In *Proceedings of KR'2000*, pages 702–713, 2000.

[Tversky and Kahneman, 1992] A. Tversky and D. Kahneman. Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5 :297–323, 1992.

[Vempaty, 1992] N. R. Vempaty. Solving constraint satisfaction problems using finite state automata. In *Proceedings of AAAI'92*, pages 453–458, San Jose, 1992.

[Verfaillie and Lobjois, 1999] G. Verfaillie and L. Lobjois. Problèmes incohérents : expliquer l'incohérence, restaurer la cohérence. In *Actes des 5ièmes Journées Nationales sur la Résolution Pratique de Problèmes NP-Complets (JNPC-99)*, pages 111–120, 1999.

[Verfaillie *et al.*, 1996] G. Verfaillie, M. Lemaitre, and T.Schiex. Russian doll search for solving constraint optimization problems. In *Proceedings AAAI'96*, pages 181–187, 1996.

[Vidal and Fargier, 1997] T. Vidal and H. Fargier. Contingent durations in temporal CSPs : From consistency to controllabilities. In *Proceedings of TIME'97S*, pages 78–85, 1997.

[Vidal and Ghallab, 1996] T. Vidal and M. Ghallab. Dealing with uncertain durations in temporal constraint networks dedicated to planning. In *Proceedings of ECAI'96*, pages 48–54, 1996.

[Vilarem, 2004] H. Fargier M.C. Vilarem. Compiling csps into tree-driven automata for interactive solving. *Constraints, an International Journal*, 9 :263–287, 2004.

[VonNeumann and Morgenstern, 1947] J. VonNeumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1947.

[Véron, 2001] M. Véron. *Modélisation et résolution du problème de configuration industrielle : utilisation des techniques de satisfaction de contraintes*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, France, 2001.

[Wakker, 1990] P. Wakker. Under stochastic dominance, choquet expected utility and anticipated utility are identical. *Thoery and Decision*, 29 :119–132, 1990.

[Wilson, 1995] N. Wilson. An order of magnitude calculus. In *Proceedings of UAI'95*, pages 548–555, 1995.

[Wong *et al.*, 1991] S. K. M. Wong, P. Bollmann Y. Y. Yao, and H. C. Burger. Axiomatization of qualitaitve belief structure. *IEEE transactions on SMC*, 21(34) :726–734, 1991.

[Zielinski *et al.*, 2005] P. Zielinski, J. Fortin, D. Dubois, and H. Fargier. Interval analysis in scheduling. In *Proceedings of CP'05*, 2005.