

Un schéma de Subdivision approximant/interpolant sur un maillage quad/triangle

Yacine Boumzaid^{1,2} et Sandrine Lanquetin^{1,2} et Marc Neveu^{1,2} et François Destelle^{1,2}

¹LE2i, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France
²{yacine.boumzaid; sandrine.lanquetin; marc.neveu; françois.destelle}@u-bourgogne.fr

Résumé

Récemment, l'étude et la construction des schémas de subdivision mixte (quad/triangle) ont attiré l'attention de la communauté de la modélisation géométrique. À partir d'un maillage mixte composé de quadrangles et de triangles, le schéma de subdivision quad/triangle produit un maillage mixte de plus en plus fin (figure 1). L'utilisation de la structure quad/triangle pour la conception des surfaces est motivée par le fait que dans la modélisation CAO, les concepteurs veulent souvent travailler sur des modèles avec des maillages quadrilatéraux dans certaines régions et triangulaires dans d'autres afin d'obtenir des surfaces de subdivision avec une meilleure qualité visuelle. La construction et l'étude des propriétés mathématiques de ces types de schéma de subdivision ont été établies (dans le cas régulier). Des règles de subdivision particulières dans la zone mixte entre deux schémas de subdivision du même type géométrique (approximant-approximant, interpolant-interpolant) ont été données. Mais dans la littérature il n'existe aucun travail consacré à l'étude conjointe et la construction d'un schéma de subdivision quad/triangle entre deux schémas de subdivisions de types géométriques différents. Dans cet article, nous proposons un nouveau schéma de subdivision quad/triangle qui unifie un schéma approximant et un schéma interpolant. Ce schéma est une généralisation des schémas de Catmull-Clark [CC78] et Butterfly [DGL90]. Nous montrons également que ce schéma de subdivision est C^2 partout sauf au voisinage des points extraordinaires et des points ordinaires de Butterfly où notre schéma est C^1 .

After the first paper of Stam-Loop [SL03], study and construction of quad/triangle subdivision schemes have attracted attention. The quad/triangle subdivision starts with a control net consisting of both quadrangular and triangular faces and produces finer and finer meshes with quads and triangles (Fig.1). Designers often want to model some areas with quad faces and others with triangle faces to get better visual quality of surface. Though the smoothness analysis tool for regular quad/triangle vertices has been established and C^1 and C^2 quad/triangle schemes (for regular vertices) have been constructed, there is no approximating/interpolatory quad/triangle schemes available in the literature. In this paper we introduce a new subdivision operator that unifies triangular and quadrilateral subdivision schemes. Our new scheme is a generalization of the well known Catmull-Clark [CC78] and Butterfly [DGL90] subdivision algorithms. We show that our scheme is C^2 everywhere except for extraordinary points and for ordinary Butterfly points where our scheme is C^1 .

Mots clé : Subdivision, Reproduction des polynômes, Subdivision quad/triangle, Approximation, Interpolation, Quasi-uniforme, Quasi interpolation.

1. Introduction

Dans le domaine de la CAO et des mathématiques, les surfaces de subdivision représentent une façon de créer des surfaces globalement lisses. Les procédés de subdivision sont par nature des algorithmes récursifs. La méthode débute à partir d'un maillage donné. Un schéma de subdivision est alors appliqué à ce maillage. Ce procédé agit sur le maillage

en le subdivisant, en créant de nouveaux points et de nouvelles faces. La position des nouveaux points est calculée à partir de celles des anciens points.

Les schémas de subdivision interpolants ([DGL90], [ZSS96], [Kob96]) sont généralement utilisés lorsqu'on veut faire passer la courbe ou la surface limite par les points de contrôle initiaux. L'avantage d'un schéma de subdivision interpolant est donc de pouvoir aisément contraindre la forme à passer par certains points donnés même si des renflements imprévus peuvent apparaître sur la surface limite générée par ce type de schémas de subdivision. Le choix se porte cepen-

dant sur l'utilisation des schémas approximants ([DS78], [CC78], [Loo87]) lorsqu'on veut obtenir une courbe ou une surface limite de continuité optimale même si on a moins de contrôle sur la courbe ou la surface limite, dans le sens où nous ne pouvons pas contraindre la surface limite à passer par des points déterminés.

La qualité visuelle d'une surface de subdivision dépend fortement du maillage initial. Les régions composées de triangles sont souvent utilisées pour récupérer des maillages obtenus par des procédés d'acquisition divers (lasers notamment) ou pour bénéficier des propriétés géométriques des triangles. A l'inverse, que ce soit pour des raisons de symétrie (en particulier pour les personnages en production audiovisuelle), ou pour des raisons de l'alignement des arêtes d'un maillage (en particulier pour les formes cylindriques), certains designers préfèrent utiliser des régions composées de carreaux quadrilatéraux. Il est donc parfois très utile de considérer des surfaces avec une structure de maillage initial hybride (ou mixte).

Parallèlement, en ingénierie inverse, les points de données sur les surfaces viennent souvent de mesures par capteurs (par exemple scanner laser 3D) ([TOdSG*99], [SRML09]). Il peut être utile d'utiliser des schémas interpolants pour ajuster les données 3D obtenues avec suffisamment de précision et de confiance et seulement des schémas approximants pour les données bruitées par exemple. En CAGD, des contraintes peuvent être imposées à certaines parties des objets [JMO06]. Ces contraintes peuvent avoir une tolérance variable : de 0 pour des contraintes d'interpolation, à ϵ pour des inexactitudes géométriques tolérées sur des positions relatives ou sur des caractéristiques d'objets conduisant alors à des contraintes d'approximation). Dans ces approches, toute combinaison de portions de surfaces interpolées et de portions de surfaces approximées peut être désirée.

Dans cet article nous présentons un nouveau schéma de subdivision "doublement mixte" pour modéliser une grande variété de formes à partir de maillages mixtes (quad/triangle) avec des conditions de contraintes mixtes (approximant/interpolant). Dans la deuxième section, nous allons donner des notations, des définitions et quelques propriétés de la subdivision uniforme ainsi que quelques notions de reproduction des polynômes. Dans la section (3) nous donnons la méthode de construction d'un schéma de subdivision approximant/interpolant. La section (4) va être consacrée à l'analyse des comportements de la surface limite de ce type de schéma subdivision. Dans la section (5), nous proposons un schéma de subdivision approximant/interpolant ainsi que quelques résultats. Enfin on arrive à la conclusion dans la section (6).

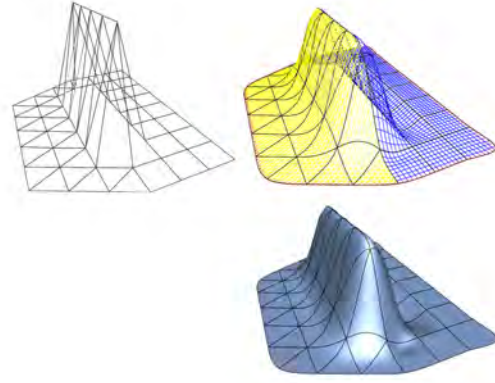


Figure 1: Un exemple de subdivision quad/triangle : le maillage quad/triangle d'origine, le maillage de contrôle et la surface limite.

2. Subdivision Uniforme

2.1. Notations

- Soient $i = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{Z}^s$, et $x \in \mathbb{R}^s$,

$$|i| = |i_1| + |i_2| + \dots + |i_s| \Leftrightarrow x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_s^{i_s}.$$

Soit $X \subset \mathbb{R}^s$.

- On définit $C^m(\mathbb{R}^s)$ comme l'espace des fonctions de classe C^m de \mathbb{R}^s vers \mathbb{R} .
- Soit π_m l'espace des polynômes de degré total au plus égal à m . On suppose que π_m est engendré par la famille des monômes. i.e :

$$\pi_m(X) = \text{span}\{f | f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^i, i \in \mathbb{Z}^s, 0 \leq |i| \leq m\}.$$

$Id : X \subset \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ est l'opérateur d'identité défini par :

$$Id(x) = x, \forall x \in X$$

- Pour $i \geq 0$ et pour $x \in \mathbb{R}^s$, les dérivées partielles sont données par :

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial^{i_1} x_1 \dots \partial^{i_s} x_s}.$$

- Pour $X \subseteq \mathbb{R}^s$, nous définissons $l(X)$ comme l'espace des suites à valeurs réelles :

$$l(X) = \{f | f : X \rightarrow \mathbb{R}\},$$

- et soit $l^1(X)$ l'espace des suites bornées à support fini.
- Pour tout $p \in l(\mathbb{Z}^s)$, p_i (resp. $(Sp)_i$) représente une valeur de p (resp. (Sp)) pour $i \in \mathbb{Z}^s$, où S est l'opérateur de subdivision. Nous notons également par $S|_X$ un schéma de subdivision S sur un ensemble de points X , par $(p_i)_{|\Lambda}$ un ensemble de points de contrôle sur un support ou un ensemble de points Λ et par (Pr) les points d'une règle de subdivision.

- Soit σ un opérateur de dilatation défini sur l'ensemble $C(\mathbb{R}^s)$ par :

$$\sigma f(\cdot) = f\left(\frac{\cdot}{2}\right).$$

- Nous définissons un opérateur de translation ξ de sorte qu'il renvoie tous les points (i, j) d'un ensemble vers les points $(i, j+1)$ dans le même ensemble par :

$$\xi X = \{(i, j+1) | (i, j) \in X\}.$$

- C_i^j est la combinaison : $\frac{i!}{(i-j)!j!}$.

2.2. Définitions

Le principe de subdivision est dit uniforme si les mêmes règles sont appliquées sur tout le réseau de contrôle. De plus, si les règles sont identiques à chaque itération, on parlera de principe stationnaire.

Soit $a \in l^1(\mathbb{Z}^s)$, on définit le schéma de subdivision S par :

$$\forall p \in l(\mathbb{Z}^s), \forall i \in \mathbb{Z}^s, (Sp)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j} p_j \quad (1)$$

La suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$ est appelée le masque du schéma de subdivision. Ce dernier donne l'influence d'un ancien point sur les nouveaux. Le support du masque est l'ensemble $\{i \in \mathbb{Z}^s / a_i \neq 0\}$. Dans la suite, on supposera que $\text{supp}(a) = \llbracket \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rrbracket^s$ avec $\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\} < +\infty$ c'est-à-dire que la construction de $(Sp)_i$ fait intervenir un nombre fini de points. On notera par p les points de contrôle initiaux et par $S^k p$ ou p^k le schéma de subdivision itéré k fois appliqué à p .

Un schéma de subdivision stationnaire est défini comme l'application répétée d'un opérateur de subdivision S sur un ensemble de points de contrôle initiaux $p \in l(\mathbb{Z}^s)$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+, p^k = Sp^{k-1} = S^k p \quad (2)$$

Faisant intervenir les indices pairs et impairs de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$, la relation (1) peut être vue comme un système de 2^s relations. Par exemple :

- Pour $s = 1$

$$(Sp)_{2i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2i-2j} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_{2\mu} p_{i-\mu}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

et

$$(Sp)_{2i+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{2i-2j+1} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} a_{2\mu+1} p_{i-\mu}, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

- Pour $s = 2$

$$(Sp)_{2i+\eta} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} a_{2i+\eta-2j} p_j = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2} a_{2\mu+\eta} p_{i-\mu}, \quad (5)$$

avec $\eta \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$. Les relations (3) à (5) représentent les formules qui donnent les règles de subdivision.

Un schéma de subdivision S est dit uniformément convergent si pour toute suite de points initiaux $p = \{p_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}^s\}$, il existe une fonction continue $F \in C(\mathbb{R}^s)$ telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(S^k p)_i - F(2^{-k} i)\|_{\infty, \mathbb{Z}^s \cap 2^k D} = 0 \quad (6)$$

La fonction $F = S^\infty p$ est dite fonction limite du schéma S associée aux points initiaux p .

2.3. Reproduction des polynômes

Dans la littérature, la notion de reproduction des polynômes se décline de deux façons : reproduction exacte et reproduction simple.

Compte tenu de ce qui va suivre, nous donnons ici la définition d'une suite de polynômes.

Soit $\{p_i^k\}_{i \in \mathbb{Z}^s}$ une suite de points de contrôle à la k -ième itération. On associe les points de contrôle p_i^k à des valeurs de paramètres $x_i^k = \frac{1}{2^k} i$ avec $x_i^k < x_{i+1}^k$ et $x_{i+1}^k - x_i^k = 2^{-k}$.

La suite $p = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}^s}$ est dite suite polynomiale de degré m s'il existe un polynôme $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ de sorte que $p_i = f(x_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}^s$.

2.3.1. Reproduction exacte des polynômes

On dit qu'un schéma de subdivision S reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus m à chaque itération si pour tout polynôme de degré au plus m

$$\forall i \in \mathbb{Z}^s, p_i^k = f(x_i^k), \quad (Sp^k)_i = f(x_i^{k+1}), \quad (7)$$

pour tout $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$. Ce qui veut dire qu'à chaque étape de subdivision on conserve les points de contrôle à l'échelle k comme un sous-ensemble des points de contrôle à l'échelle $k+1$.

Soit S un schéma de subdivision convergent, on dit que S reproduit de façon exacte les polynômes de degré au plus m si pour tout polynôme f de degré au plus m :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^s, p_i = f(x_i), \quad S^\infty p = f. \quad (8)$$

Cela signifie que les points du réseau de contrôle initial sont sur la surface limite et le principe de subdivision est dit interpolant (voir figure 2). À partir des deux dernières relations, nous pouvons montrer que tout schéma de subdivision S qui reproduit de façon exacte les polynômes de degré m à chaque itération reproduit également de façon exacte les polynômes de degré m et inversement. i.e $\forall i \in \mathbb{Z}, p_i^k = f(x_i^k)$:

$$(Sp^k)_i = f(x_i^{k+1}) \iff S^\infty p = f, \quad (9)$$

pour tout $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$.

La relation (9) peut être interprétée de la façon suivante,

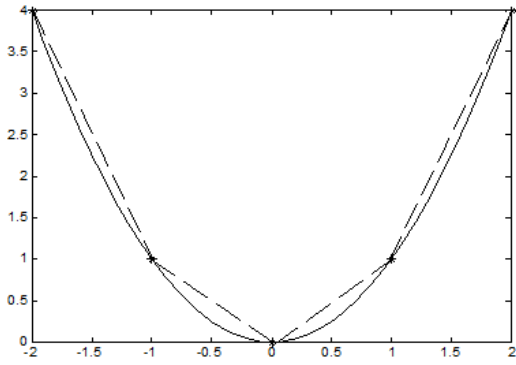


Figure 2: Illustration de la reproduction exacte des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux p_i . La courbe représente la fonction limite $S^\infty p = f$ du schéma 4 points pour $p_i = f(x_i) = f(i) = i^2$.

si on connaît la fonction limite d'un schéma de subdivision qui reproduit les polynômes de façon exacte, on peut trouver le schéma associé à cette fonction limite et inversement, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1

On considère le schéma 4 points défini sur le support $[-3, 3]$. Les règles de subdivision de ce schéma sont données par :

$$\begin{cases} (Sp)_{2i} = p_i, \\ (Sp)_{2i+1} = a_{-3}p_{i-1} + a_{-1}p_i + a_1p_{i+1} + a_3p_{i+2} \end{cases}$$

Ce schéma est connu pour reproduire les polynômes de degré au plus 3 de façon exacte.

Nous avons :

$$\begin{cases} x_i^k = \frac{1}{2^k}i, \\ p_i^k = f(x_i^k) \\ (Sp^k)_i = f(x_i^{k+1}) \end{cases}$$

pour $k = 0$ nous aurons

$$\begin{cases} x_i^0 = i, \\ p_i = f(x_i^0) = f(i), \\ (Sp)_i = f(x_i^1) = f(\frac{1}{2}i) = \sigma f(i), \end{cases}$$

Calcul de S à partir de S^∞

Nous avons déjà $(Sp)_{2i} = p_i$, il nous reste à trouver les poids de la règle :

$$(Sp)_{2i+1} = a_{-3}p_{i-1} + a_{-1}p_i + a_1p_{i+1} + a_3p_{i+2}. \quad (10)$$

À partir de la relation (9), nous avons :

$$S^\infty p = f \Rightarrow (Sp)_{2i+1} = f(x_{2i+1}^1) = f(\frac{1}{2}(2i+1)),$$

et à partir de l'équation (10), nous pouvons écrire :

$$(Sp)_{2i+1} = S(p_j)_{\llbracket i-1, i+2 \rrbracket} = S(f(j))_{\llbracket i-1, i+2 \rrbracket}.$$

Donc à partir des deux dernières relations nous avons :

$$S(f(j))_{\llbracket i-1, i+2 \rrbracket} = f(\frac{1}{2}(2i+1)). \quad (11)$$

Les poids de la règle $(Sp)_{2i+1}$ sont donnés à partir de l'équation (11) pour $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 : a_{-3} + a_{-1} + a_1 + a_3 = 1, \\ x : (i-1)a_{-3} + ia_{-1} + (i+1)a_1 + (i+2)a_3 = \frac{1}{2}(2i+1), \\ x^2 : (i-1)^2a_{-3} + i^2a_{-1} + (i+1)^2a_1 + (i+2)^2a_3 = \frac{1}{4}(2i+1)^2, \\ x^3 : (i-1)^3a_{-3} + i^3a_{-1} + (i+1)^3a_1 + (i+2)^3a_3 = \frac{1}{8}(2i+1)^3. \end{cases}$$

La solution de ce système est donnée par : $\{a_{-3}, a_{-1}, a_1, a_3\} = \{-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, \frac{-1}{16}\}$, ce qui représente les poids de la règle impaire du schéma 4 points.

Calcul de S^∞ à partir de S

Pour l'opération inverse on vérifie que :

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}) : \begin{cases} (S^k p)_{2i} = p_i = f(i) \\ (S^k p)_{2i+1} = f(\frac{1}{2^{k+1}}(2i+1)) \end{cases}.$$

Pour $f(x) = x^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, nous aurons :

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (S^k p)_{2i} = f(i) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (S^k p)_{2i+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} f(2i+1) \end{cases} \Rightarrow S^\infty p = f, f \in \pi_3(\mathbb{R}).$$

2.3.2. Reproduction simple des polynômes

Les schémas B-splines sont parmi les schémas qui reproduisent les polynômes de degré donné de façon simple. En effet, le principe de ces schémas de subdivision est d'approximation, les points du réseau de contrôle initial ne sont pas sur la surface limite et à chaque itération, ceux de l'itération précédente sont déplacés ou éventuellement supprimés (voir figure 3). L'inconvénient majeur de ce principe réside dans le fait que la fonction limite est très difficile à prévoir à partir du réseau de contrôle initial.

On dit que S reproduit de façon simple les polynômes de degré au plus m si pour tout polynôme f de degré au plus m , $\forall i \in \mathbb{Z}^s$, $p_i = f(x_i)$, il existe $g \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$ tel que $S^\infty p = g$.

Dans le cas de la reproduction simple de polynômes, on

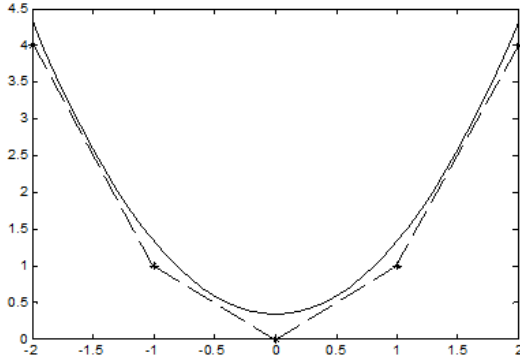


Figure 3: Illustration de la reproduction simple des polynômes. Les étoiles représentent les points de contrôles initiaux p_i . La courbe représente la fonction limite $S^\infty p$ du schéma B-spline cubique (pour $p_i = f(i) = i^2$, les points de contrôle p_i convergent vers une fonction $g, S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}$).

ne peut pas déduire la propriété donnée dans la relation (9) mais on peut construire des données initiales Qp à partir de p pour que S^∞ vérifie (A. Levin [Lev00]) :

$$SQf = Q\sigma f \iff S^\infty Qf = f, \quad (12)$$

pour tout $f \in \pi_m(\mathbb{R}^s)$.

L'idée est de traiter les points de contrôle initiaux p par un opérateur Q qui peut être vu ici comme un opérateur de translation afin de prévoir la fonction limite générée par l'application d'un schéma de subdivision approximant à un ensemble de points de contrôle initiaux (voir figure 4). Autrement dit, au lieu d'appliquer le schéma de subdivision sur un ensemble de points de contrôle $\{p_i, i \in \mathbb{Z}^s\}$ et chercher par la suite vers quelle fonction limite ces points de contrôles convergent, on applique le schéma de subdivision sur un ensemble de points de contrôle bien choisi dont on connaît déjà la fonction limite générée par l'application de ce schéma de subdivision.

Comme dans le cas de la reproduction exacte des polynômes et à partir de la relation (12), nous pouvons construire un schéma de subdivision S qui reproduit de façon simple les polynômes de degré au plus m à partir de sa fonction limite et inversement. Dans ce qui suit, nous allons voir comment l'identification des relations entre un opérateur de subdivision S , un opérateur limite S^∞ et un opérateur quasi-interpolant Q peut être appliquée pour construire des schémas de subdivision à partir de leur fonctions limites dans le cas de la reproduction simple des polynômes.

Calcul de Q à partir de S

Soit S un schéma de subdivision uniformément convergent, on définit une fonction de base $\phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ comme la fonction limite du schéma associée à la suite initiale $(\delta_{i,0})_{i \in \mathbb{Z}^s}$ par :

$$\phi = S^\infty \delta_{i,0} \quad \text{avec} \quad \delta_{i,0} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

On suppose que la fonction de base ϕ vérifie la relation de raffinement :

$$\forall i \in \mathbb{R}^s, \phi(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_j \phi(2i - j). \quad (14)$$

En utilisant la condition de raffinement (14) et la formule de Taylor, A. Levin a montré dans [Lev03], que la fonction limite $S^\infty p$ peut être donnée comme une fonction polynomiale par l'équation suivante :

$$\forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s), \quad S^\infty f(\cdot) = f + \sum_{1 < |i| \leq m} \frac{m_i}{i!} D^i f(\cdot) \quad (15)$$

où les moments m_i sont donnés par :

$$m_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} \phi(-j) j^i. \quad (16)$$

et D^i sont les dérivées partielles.

À partir de la première partie de l'équivalence donnée dans l'équation (12), nous avons :

$$S^\infty Q = Id,$$

à partir de cette dernière relation, nous pouvons montrer que l'opérateur quasi-interpolant Q est donné par l'équation suivante :

$$\forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s), \quad Qf(\cdot) = f - \sum_{1 < |i| \leq m} \frac{m_i}{i!} D^i f(\cdot). \quad (17)$$

Notons que, pour des schémas interpolants, l'opérateur quasi-interpolant est exact c'est-à-dire :

$$\forall f \in \pi_m(\mathbb{R}^s), \quad Qf(\cdot) = f(\cdot) \quad (18)$$

Calcul de S à partir de Q

La deuxième partie de l'équivalence donnée dans l'équation (12) va nous permettre de calculer l'opérateur de subdivision S à partir d'un opérateur quasi-interpolant Q à l'équation connue. En effet, la relation :

$$SQ = Q\sigma, \quad (19)$$

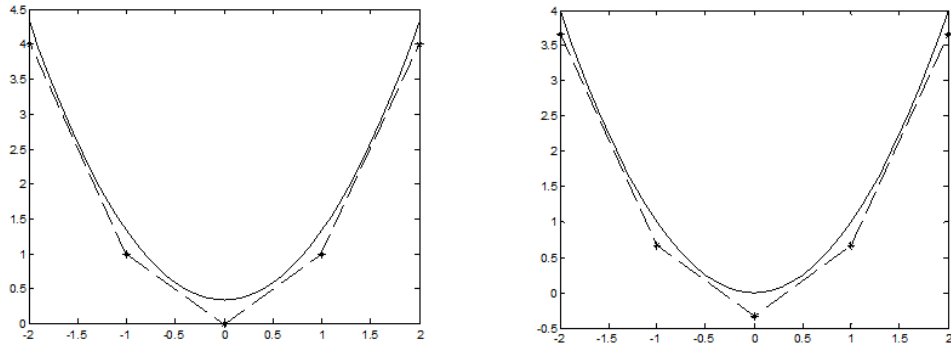


Figure 4: . La figure de gauche représente la fonction limite $S^\infty p$ du schéma B-spline cubique (pour $p_i = f(i) = i^2$, les points de contrôle p_i convergent vers une fonction $g, S^\infty p = g = i^2 + \frac{1}{3}$). La figure de droite représente la fonction limite $S^\infty Qp$ du schéma B-spline cubique appliqué à l'ensemble de points de contrôle échantillonné par l'application d'un opérateur Q (pour $p_i = f(i), Qp_i = Qf(i) = i^2 - \frac{1}{3}$, les points de contrôle Qp_i convergent vers une fonction $f, S^\infty Qp = f = i^2$).

donne des informations importantes sur les valeurs et vecteurs propres de S . Soient $f(x) = x^{|\alpha|}$, $|\alpha| \leq m$, $x \in \mathbb{R}^s$, $\alpha \in \mathbb{Z}^s$, et $\sigma f(x) = f(\frac{x}{2})$, par substitution dans l'équation (18) :

$$SQf(x) = Q\sigma f(x) = 2^{-|\alpha|} Q(x^{|\alpha|}), \quad |\alpha| \leq m. \quad (20)$$

À partir de l'équation (20), nous pouvons voir que pour tout $|\alpha| \leq m$, $Q(x^{|\alpha|})$ est le vecteur propre de S associé à la valeur propre $2^{-|\alpha|}$.

Soit $(Sp)_\tau \in l(\mathbb{Z}^s)$ une règle de subdivision en un point $\tau \in \mathbb{Z}^s$ défini sur un support fini $\Lambda = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\} \subset \mathbb{Z}^s$ par :

$$(Sp)_\tau = b_1 p_{\tau_1} + \dots + b_n p_{\tau_n}. \quad (21)$$

Soit $(Pr)_\tau$ un vecteur-colonne de dimension $|\tau|$, qui représente les poids de la règle $(Sp)_\tau$,

$$(Pr)_\tau = (b_1, \dots, b_n)^t, \quad (22)$$

Si S vérifie la relation (20), alors il est possible de montrer que les poids $(Pr)_\tau$ sont définis comme étant solutions de l'équation suivante :

$$\Sigma_{Q(\Lambda)} (Pr)_\tau = d_{Q(\tau)}, \quad (23)$$

où $\Sigma_{Q(\Lambda)}$ est une matrice de dimension $(C_{m+s}^s \times |\Lambda|)$ et $d_{Q(\tau)}$ est un vecteur-colonne de dimension C_{m+s}^s de sorte que les composantes de ces deux derniers sont données par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \Sigma_{\alpha_j} = Q(x^{|\alpha|})(\tau_j) \\ d_\alpha = 2^{-|\alpha|} Q(x^{|\alpha|})(\tau) \end{cases}, \quad (24)$$

pour tout $0 \leq |\alpha| \leq m$, et $j \in \{1, \dots, |\Lambda|\}$.

Exemple 2

On considère le schéma B-spline cubique défini sur le support $[-2, 2]$. Les règles de subdivision de ce schéma sont données sur les deux supports $\begin{cases} \Lambda^1 = \{i-1, i, i+1\} \\ \Lambda^2 = \{i, i+1\} \end{cases}$, par :

$$\begin{cases} (Sp)_{2i} = a_{-2} p_{i-1} + a_0 p_i + a_2 p_{i+1} \\ (Sp)_{2i+1} = a_{-1} p_i + a_1 p_{i+1} \end{cases}$$

Ce schéma est connu pour reproduire les polynômes de degré au plus 3 de façon simple.

À partir de l'équation (19) les variables $\{a_\beta, \beta \in [-2, 2]\}$ sont déterminées par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} S(Qp_j)|_{\Lambda^1} = Q(\sigma p)_{2i} \\ S(Qp_j)|_{\Lambda^2} = Q(\sigma p)_{2i+1} \end{cases}$$

Pour tout $p_j = f(x_j) = f(j)$, nous aurons :

$$\begin{cases} S(Qf)(j)|_{\Lambda^1} = Q(\sigma f)(2i) \\ S(Qf)(j)|_{\Lambda^2} = Q(\sigma f)(2i+1) \end{cases} \quad (25)$$

Notons que l'opérateur quasi-interpolant B-spline cubique est donné par :

$$Qf = f - \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f. \quad (26)$$

Supposons que $f(x) = x^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 2$.

Par substitution des valeurs de $f(x)$ et $\sigma f(x)$ dans l'équation (25) les poids $\{a_\beta, \beta \in [-2, 2]\}$ sont donnés à partir des équations (23) et (24) par les deux systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (i-1) & i & i+1 \\ ((i-1)^2 - \frac{1}{3}) & ((i)^2 - \frac{1}{3}) & ((i+1)^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-2} \\ a_0 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \frac{1}{4}((2i)^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i+1 \\ ((i)^2 - \frac{1}{3}) & ((i+1)^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(2i+1) \\ \frac{1}{4}((2i+1)^2 - \frac{1}{3}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Les solutions de ces deux systèmes sont données par :

$$[a_{-2} \ a_0 \ a_2] = [\frac{1}{8} \ \frac{3}{4} \ \frac{1}{8}],$$

$$[a_{-1} \ a_1] = [\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}].$$

D'où les règles de subdivision B-spline cubique.

2.4. Reproduction des polynômes et continuité C^m

Dans [CDM91], (corollaire 8.2), A.S. Cavaretta et al. ont montré que la reproduction des polynômes donne une condition nécessaire à la continuité C^m . Autrement dit : pour tout schéma de subdivision uniformément convergent S défini en fonction d'un masque $\{a_i : i \in \mathbb{Z}^s\}$ et d'une fonction de base ϕ , si $\phi \in C^m$ alors S reproduit des polynômes de degré au plus m .

De façon plus générale, si S reproduit les polynômes de degré au plus m , alors les valeurs $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$ sont les valeurs propres de la matrice de subdivision associée à ce schéma. De plus, il a été montré dans [DS78] et [BS88] que si toutes les valeurs propres λ_j différentes de $\{2^d, d = 0, \dots, m\}$ sont de modules strictement plus petits que 2^{-m} , alors le schéma S est de continuité C^m .

3. Construction des schémas mixtes Quad/Triangle

Considérons une grille quad/triangle $X \in \mathbb{R}^2$, régulière dans les deux moitiés du plan, $x > 0$ et $x < 0$ comme illustré en figure 3 et définissons cette grille par :

$$X = X_1 \cup X_2$$

$$= \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \leq 0\} \cup \{(x, y - \frac{1}{2}x) | (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \geq 0\} \tag{27}$$

La définition (25) garantit que la grille est régulière dans les deux moitiés du plan $\{x < 0\}$ et $\{x > 0\}$ et que les deux moitiés de la grille sont alignées sur une frontière commune.

Nous définissons un schéma de subdivision approximant/interpolant $S|_X$ sur la grille quad/triangle qui coïncide avec le schéma approximant de Catmull-Clark $S|_{X_1}$ sur la

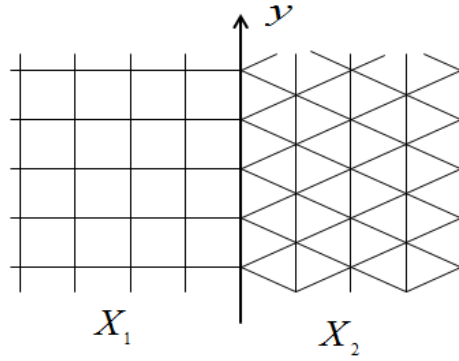


Figure 5: La grille quad/triangle.

moitié gauche de la grille et le schéma interpolant Butterfly $S|_{X_2}$ sur la moitié droite de cette grille. Les règles de subdivision de ces deux schémas de subdivision sont données dans la figure 6 et leur fonctions limites sont données par :

$$\begin{cases} (S|_{X_1}^\infty f)(x, y) &= f(x, y) + \frac{1}{6}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)) \\ (S|_{X_2}^\infty f)(x, y) &= f(x, y) \end{cases}$$

Nous supposons que le schéma de subdivision approximant/interpolant $S|_X$ converge uniformément à condition que $2^{-k}X, k \rightarrow \infty$ converge vers un sous-ensemble dense de \mathbb{R}^2 , ce qui garantit que si la fonction limite existe, alors elle est unique et nous définissons la fonction limite de ce schéma de subdivision sur la grille quad/triangle par :

$$(S|_X^\infty f) = \begin{cases} (S|_{X_1}^\infty f)(x, y), & x \leq 0 \\ (S|_{X_2}^\infty f)(x, y), & x > 0 \end{cases}$$

Les schémas de Catmull-Clark $S|_{X_1}$ et Butterfly $S|_{X_2}$ sont des schémas qui reproduisent de façon simple (resp. de façon exacte) les polynômes de degré au plus 3. Alors le schéma $S|_X$ qui unifie ces deux schémas de subdivision reproduit les polynômes de degré au plus 3, i.e :

$$\forall f \in \pi_3(\mathbb{R}^s), \quad S|_X Q|_X f = Q|_X \sigma f \iff S|_X^\infty Q|_X p = f, \tag{28}$$

avec

$$(Q|_X f) = \begin{cases} (Q|_{X_1} f)(x, y), & x \leq 0 \\ (Q|_{X_2} f)(x, y), & x > 0 \end{cases} \tag{29}$$

Pour un ensemble de points de contrôle $\{p_j, j = (\bar{j}_1, \bar{j}_2) \in$

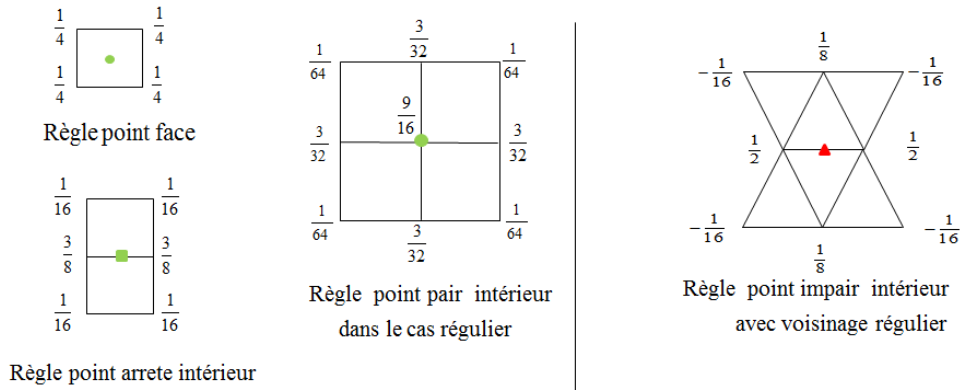


Figure 6: À gauche, les règles de subdivision du schéma de Catmull-Clark. À droite les règles du schéma Butterfly.

X }, $\tilde{j}_2 = \begin{cases} j_2 & j_1 \leq 0 \\ j_2 - \frac{1}{2}j_1 & j_1 > 0 \end{cases}$, $j_2 \in \mathbb{Z}$ nous définissons un ensemble de nouveaux points de contrôle $\{(Sp)_i, i = (i_1, \tilde{i}_2)\}$, $\tilde{i}_2 = \begin{cases} i_2 & i_1 \leq 0 \\ i_2 - \frac{1}{2}i_1 & i_1 > 0 \end{cases}$, $i_2 \in \mathbb{Z}$ sur la grille $\frac{1}{2}X$: par le schéma approximant de Catmull-Clark $(S_{|X_1}p)_i, i \in \frac{1}{2}X_1$ sur la moitié gauche de la grille ($i_1 \leq 0$),

$$(S_{|X_1}p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j} p_j \quad \text{pour } i_1 < 0, \quad (30)$$

et par le schéma de subdivision interpolant Butterfly $(S_{|X_2}p)_i$ sur la moitié droite de la grille ($i_1 > 0$),

$$(S_{|X_2}p)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^s} a_{i-2j} p_j \quad \text{pour } i_1 > 0. \quad (31)$$

Notre objectif est de trouver des règles de subdivision particulières sur la zone de raccord (sur l'axe y et au voisinage de cet axe) qui assurent le bon raccord de deux schémas de subdivision $S_{|X_1}$ et $S_{|X_2}$.

3.1. Les ensembles des nouveaux points dans la zone de raccord

Dans un premier temps, nous utilisons les équations (30) et (31) afin de déterminer les nouveaux points dans les deux moitiés de la grille (voir figure 7).

Les deux ensembles de nouveaux points issus de l'application des deux schémas sur les deux moitiés de la grille sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^- &= \{\dots, \{(S_{|X_1}p)_{-2, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_1}p)_{-1, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_1}p)_{0, \tilde{i}_2}\}\}, \\ \mathcal{X}^+ &= \{\{(S_{|X_2}p)_{1, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{2, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{3, \tilde{i}_2}\}, \dots\}. \end{aligned}$$

où $\{(S_{|X_1}p)_{0, \tilde{i}_2}\}$ représente l'ensemble des nouveaux points de bords du schéma de Catmull-Clark et $\{(S_{|X_2}p)_{1, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{2, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{3, \tilde{i}_2}\}$ représentent

les ensembles de nouveaux points de bords et de crêtes du schéma Butterfly. Afin de raccorder les deux schémas de subdivision $S_{|X_1}$ et $S_{|X_2}$, il est nécessaire que les règles qui déterminent les ensembles de nouveaux points $\{(S_{|X_1}p)_{0, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{1, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{2, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X_2}p)_{3, \tilde{i}_2}\}$ dépendent des sommets intérieurs. Par conséquent, nous supposons que :

$$\begin{cases} (S_{|X_1}p)_{0, \tilde{i}_2} &= 0 \\ (S_{|X_2}p)_{i_1, \tilde{i}_2} &= 0, i_1 = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Donc les ensembles des nouveaux points que nous devons déterminer dans la zone de raccord sont :

$$\mathcal{X}^0 = \{\{(S_{|X}p)_{0, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X}p)_{1, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X}p)_{2, \tilde{i}_2}\}, \{(S_{|X}p)_{3, \tilde{i}_2}\}\} \quad (32)$$

pour tout $\tilde{i}_2 \in \frac{1}{2}X$.

3.2. Méthode du calcul des nouveaux points

Après avoir repéré les différents ensembles de nouveaux points dans la zone de raccord, nous nous intéressons maintenant aux règles de subdivision qui définissent ces nouveaux points ainsi qu'à la méthode que nous allons utiliser pour le calcul de ces règles.

Pour calculer les règles de subdivision qui déterminent ces nouveaux points, nous utilisons la relation entre l'opérateur de subdivision approximant/interpolant $S_{|X}$ et l'opérateur quasi-interpolant $Q_{|X}$ associé à ce schéma de subdivision.

Nous avons vu dans la section 2 que les poids d'une règle de subdivision $(Pr)_\tau$ à un point d'indice τ peuvent être donnés comme étant solution du système d'équations (20). Dans le cas bi-uniforme l'opérateur quasi-interpolant $Q_{|X}$ est défini par deux opérateurs $Q_{|X_1}, Q_{|X_2}$ qui déterminent son évaluation le long de la grille X . Alors le support $\Lambda \subseteq X$ d'une

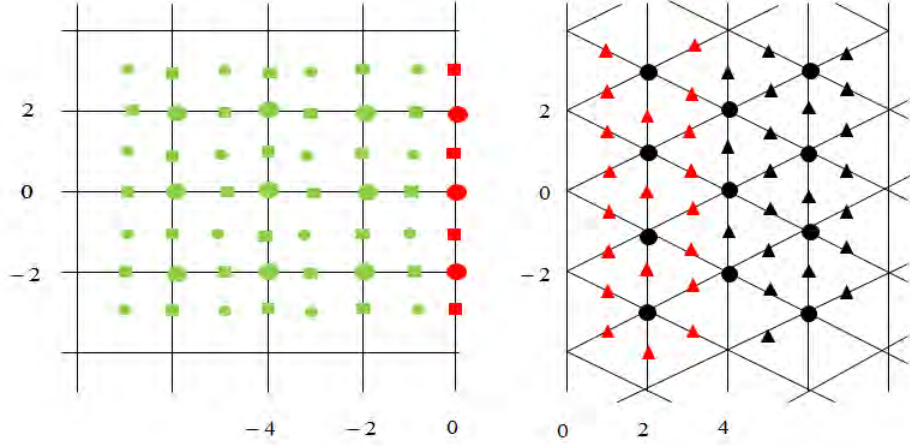


Figure 7: Visualisation graphique des nouveaux points. En vert, les nouveaux points générés par l'application du schéma de Catmull-Clark, en noir les nouveaux points générés par l'application du schéma Butterfly et en rouge les points à déterminer dans la zone de raccord.

règle de subdivision à un point d'indice τ dans la zone mixte implique les deux opérateurs quasi-interpolants, d'où la nécessité de décomposer le support en deux sous supports $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$.

Soit $(S_{|X}p)\tau, \tau \in \frac{1}{2}X$ une règle de subdivision en un point τ défini sur un support fini $\Lambda \subseteq X = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ par :

$$(S_{|X}p)\tau = b_1 p_{\tau_1} + \dots + b_n p_{\tau_n}. \quad (33)$$

Nous définissons l'ensemble des poids d'une règle de subdivision dans la zone mixte $\{(Pr)\tau\}$ sur le support $\Lambda \subseteq X = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ par :

$$\{(Pr)\tau\} = \{\{(Pr)\tau_{|\Lambda_1}\}, \{(Pr)\tau_{|\Lambda_2}\}\},$$

avec :

$$\begin{cases} \{(Pr)\tau_{|\Lambda_1}\} = \{b_\beta, \beta = 1, \dots, |\Lambda_1|\}, \\ \{(Pr)\tau_{|\Lambda_2}\} = \{b_\beta, \beta = |\Lambda_1| + 1, \dots, |\Lambda_2|\}, \end{cases} \quad (34)$$

Si $S_{|X}$ vérifie la relation (26) et pour tout $f(x, y) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq |\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq m$, nous aurons la relation suivante :

$$S_{|X}Q_{|X}f(x, y) = Q_{|X}\sigma f(x, y) = 2^{-|\alpha|}f(x, y). \quad (35)$$

À partir des équations (33) à (35), les poids $(Pr)\tau$ de la règle

de subdivision sont définis comme étant solutions de l'équation suivante :

$$\Sigma_{Q_{|X_1}(\Lambda)}(Pr)\tau = d_{Q_{|X}(\tau)}, \quad (36)$$

de sorte que :

1. $\Sigma_{Q_{|X}(\Lambda)} = [\Sigma_{Q_{|X_1}(\Lambda_1)} | \Sigma_{Q_{|X_2}(\Lambda_2)}]$ où $\Sigma_{Q_{|X_1}(\Lambda_1)}$ et $\Sigma_{Q_{|X_2}(\Lambda_2)}$ sont deux sous matrices de dimension $(C_{m+s}^s | \Lambda_1|)$ et $(C_{m+s}^s | \Lambda_2|)$ (respectivement) telles que :

$$\Sigma_{|k|j} = \begin{cases} Q_{|X_1}(x^{k_1} y^{k_2})(\tau_j) & \tau_j \in \Lambda_1, \\ Q_{|X_2}(x^{k_1} y^{k_2})(\tau_j) & \tau_j \in \Lambda_2, \end{cases} \quad (37)$$

2. $d_{Q_{|X}(\tau)} = \begin{cases} d_{Q_{|X_1}(\tau)} & \tau \leq 0 \\ d_{Q_{|X_2}(\tau)} & \tau > 0 \end{cases}$ est un vecteur-colonne de dimension C_{m+s}^s :

$$d_{|k|} = 2^{-|k|}Q(x^{k_1} y^{k_2})(\tau). \quad (38)$$

3.3. Le choix des supports

Comme nous venons de le voir, la définition et le calcul d'une règle de subdivision dépendent du choix du support Λ . Le choix des différents supports dans la zone de raccord donne des règles de subdivision différentes. Le choix des supports dans cette zone est purement arbitraire et il n'existe aucune règle précise qui nous impose des conditions sur le choix de ces supports. Néanmoins, il est conseillé de

choisir des petits supports de sorte que l'équation (36) admette une solution unique. Donc, nous pouvons construire plusieurs schémas qui unifient le schéma de Catmull-Clark et le schéma Butterfly sur un maillage quad/triangle. Dans la section 5, nous proposons un schéma de subdivision approximant/interpolant défini sur des supports bien choisis.

4. Analyse et comportement de la surface limite

Un schéma approximant/interpolant est défini en fonction de deux schémas de subdivision uniforme sur les deux moitiés de la grille dont on connaît déjà les continuités. Dans cette section, nous nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes de la continuité C^m du schéma approximant/interpolant $S|_X$ dans la zone mixte plus précisément sur l'axe y .

4.1. Les conditions nécessaires

Le procédé utilisé pour déterminer les conditions nécessaires de la C^m continuité d'une surface limite d'un schéma de subdivision approximant/interpolant est basé sur les théories de la reproduction des polynômes ainsi que sur les propriétés des valeurs propres de la matrice associée à ce schéma de subdivision. Pour cela, nous fixons une arête N sur l'axe y et nous définissons une matrice de subdivision M associée au schéma $S|_X$ de sorte qu'après un pas de subdivision la matrice M contienne tous les points de contrôle de la surface qui influencent l'arête N . Le schéma $S|_X$ reproduit les polynômes de degré au plus m , alors d'après la sous-section (2.4) les valeurs $\lambda_i = \{1, 2^{-1}, \dots, 2^{-m}\}$ sont les valeurs propres de la matrice de subdivision associées à ce schéma. De plus, si toutes les valeurs propres λ_j , différentes de $\{2^d, d = 0, \dots, m\}$, sont de modules strictement plus petits que 2^{-m} alors le schéma $S|_X$ est de continuité C^m sur l'axe y .

4.2. Les conditions suffisantes

Pour vérifier les conditions suffisantes de la C^m continuité d'un schéma de subdivision quasi-linéaire, nous allons utiliser le test du rayon spectral conjoint. Ce test a été adapté à des schémas quad/triangle par Levin-Levin [LL03] et utilisé ensuite, par Schaefer-Warren [SW05] et Jiang et al [JLZ09], pour prouver les conditions suffisantes de la continuité C^2 .

L'application de ce test aux schémas de subdivision approximant/interpolant passe par trois étapes :

1. La première étape consiste à définir deux matrices de subdivision M^1 et M^2 qui transforment une arête N située sur l'axe y en deux plus petites arêtes N_1 et N_2 . Après un pas de subdivision, les deux matrices M^1 et M^2 contiennent tous les points de contrôle de la surface qui influencent les deux arêtes N_1 et N_2 . Pour cela, nous définissons un ensemble de points L afin de définir les deux matrices M^1 et

M^2 . L'ensemble L représente un sous ensemble de points de contrôle de la grille initiale et il dépend des supports des règles de la subdivision considérée.

Soit $L \subseteq X$ défini par :

$$L = \{(i_1, j_1), \dots, (i_{|L|}, j_{|L|})\}.$$

Soient M^1 une matrice de subdivision prenant ses valeurs de L dans L après un pas de subdivision, et M^2 une matrice de subdivision prenant ses valeurs de L dans ζL , où ζ est l'opérateur de translation donné par : $\zeta L = \{(i, j+1) | (i, j) \in L\}$.

Pour tout $p = \delta_{(i_k, j_k), (i_l, j_l)} = \begin{cases} 1 & (i_k, j_k) = (i_l, j_l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la

matrice M^1 est définie par :

$$M^1 = (m_{l,k}^1)_{1 \leq l \leq |L|, 1 \leq k \leq |L|} = (S|_X \delta_{(i_k, j_k)})_{(i_l, j_l)},$$

et la matrice M^2 par :

$$M^2 = (m_{l,k}^2)_{1 \leq l \leq |L|, 1 \leq k \leq |L|} = (S|_X \delta_{(i_k, j_k)})_{(i_l, j_l+1)},$$

2. Ensuite, nous cherchons une matrice de passage V afin de diagonaliser les deux matrices de subdivision M^1 et M^2 . Le choix évident pour la construction de la matrice V est d'utiliser simplement tous les vecteurs propres de M^1 . Toutefois, cette approche peut être numériquement instable si la matrice est composée de petites valeurs propres. Pour éviter les problèmes d'instabilité, nous utilisons les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice M^1 . L'utilisation de ces vecteurs propres donne une matrice V telle que :

$$(M^1)' = V^{-1} M^1 V = \begin{pmatrix} \Upsilon & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

avec $\Upsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^m})$.

La matrice V est composée des vecteurs propres à droite de la matrice M^1 associés aux valeurs propres de Υ et complétée par le noyau de vecteurs propres à gauche de la matrice M^1 associés aux valeurs propres de Υ . Pour diagonaliser la matrice M^2 on utilise tout simplement la matrice V . L'utilisation de cette matrice donne :

$$(M^2)' = V^{-1} M^2 V = \begin{pmatrix} \Theta & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

où Θ est une matrice triangulaire supérieure qui a les mêmes valeurs que Υ sur sa diagonale.

3. Enfin, on utilise les matrices Y_0 et Y_1 pour calculer le rayon spectral conjoint,

$$\rho^{[j]}(Y_0, Y_1) = (\text{Max} \|Y_{\epsilon_j} Y_{\epsilon_{j-1}} \dots Y_{\epsilon_1}\|_{\infty})^{\frac{1}{j}}, \quad (41)$$

avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

A. Levin et D. Levin ont montré dans [LL03] que, s'il existe k tel que :

$$\rho^{[j]}(Y_0, Y_1) < \frac{1}{2^m}, \quad (42)$$

alors le schéma de subdivision est de continuité C^m sur l'axe de raccord y .

5. Un schéma approximant/interpolant quad/triangle

Le schéma de subdivision que nous allons présenter dans cette section est un schéma qui reproduit les polynômes de degré au plus 3. Mais d'après la sous-section (2.4), pour construire des schémas de continuité C^2 , nous pouvons nous contenter de la construction d'un schéma qui reproduit les polynômes de degré 2. Notons qu'il est possible de définir des schémas qui reproduisent les polynômes de degré 3, mais cela ne peut pas améliorer la continuité au-delà de C^2 .

5.1. Les règles de bords intérieurs (zone de raccord)

Il y a quatre ensembles de nouveaux points à déterminer dont trois ensembles au voisinage de l'axe y et un ensemble sur l'axe y (voir équation (32) ou figure 7). Pour la construction des règles de subdivision qui déterminent ces nouveaux points nous choisissons les supports donnés dans la figure 8.

Les règles de subdivision au voisinage de l'axe y

Les ensembles des nouveaux points au voisinage de l'axe y sont $\{(S|_X P)_{-3, \tilde{i}_2}\}$, $\{(S|_X P)_{-2, \tilde{i}_2}\}$ et $\{(S|_X P)_{-1, \tilde{i}_2}\}$.

Afin de déterminer les nouveaux points de ces ensembles, nous définissons un ensemble de points de contrôle p_{j_1, \tilde{j}_2} , $(j_1, \tilde{j}_2) \in X$, sur une zone régulière de la grille triangulaire et nous prenons les supports donnés dans la figure 8. Les règles de subdivision qui déterminent les ensembles de nouveaux points au voisinage de l'axe y sont données par :

- Règles points arêtes $(S|_X P)_{-3, 2\tilde{i}_2+2}$ (figure 8a) :

$$(S|_X P)_{-3, 2\tilde{i}_2+2} = (S|_X P)_{3, 2i_2+\frac{1}{2}} = b_{00}p_{0, i_2} + b_{01}p_{1, i_2+\frac{3}{2}} + b_{02}p_{1, i_2+\frac{3}{2}} + b_{03}p_{1, i_2-\frac{1}{2}} + b_{04}p_{2, i_2+1} + b_{05}p_{2, i_2} + b_{06}p_{2, i_2-1} + b_{07}p_{3, i_2+\frac{1}{2}}. \quad (43)$$

- Règles points arêtes $(S|_X P)_{-2, 2\tilde{i}_2+1}$ (figure 8b) :

$$(S|_X P)_{2, 2\tilde{i}_2+1} = (S|_X P)_{2, 2i_2} = b_{11}p_{0, i_2+1} + b_{12}p_{0, i_2} + b_{13}p_{0, i_2-1} + b_{14}p_{1, i_2+\frac{1}{2}} + b_{15}p_{1, i_2-\frac{1}{2}} + b_{16}p_{2, i_2+1} + b_{17}p_{2, i_2} + a_{18}p_{2, i_2-1}. \quad (44)$$

- Règles points arêtes $(S|_X P)_{-1, 2\tilde{i}_2+1}$ (figure 8c) :

$$(S|_X P)_{-1, 2\tilde{i}_2+1} = (S|_X P)_{1, 2i_2+\frac{1}{2}} = b_{21}p_{0, i_2+1} + b_{22}p_{0, i_2} + b_{23}p_{0, i_2-1} + b_{24}p_{1, i_2+\frac{3}{2}} + b_{25}p_{1, i_2+\frac{1}{2}} + b_{26}p_{1, i_2-\frac{1}{2}} + b_{27}p_{2, i_2}. \quad (45)$$

Les règles sur l'axe y

Pour construire l'ensemble des nouveaux points sur l'axe y , nous définissons un ensemble de points de contrôle

$p_{(j_1, \tilde{j}_2)}$, $\tilde{j}_2 = \begin{cases} j_2 - \frac{1}{2}j_1 & j_1 > 0 \\ j_2 & j_1 \leq 0 \end{cases}$ $j_2 \in \mathbb{Z}$, $j_1 \in \llbracket -1, 1 \rrbracket$ sur une zone quad/triangle régulière (valence=5). L'ensemble des nouveaux points de contrôle $\{(S|_X P)_{0, \tilde{i}_2}\}$ est déterminé par les deux règles suivantes :

- Règles points pairs $(S|_X P)_{0, 2\tilde{i}_2}$ (figure 8d) :

$$(S|_X P)_{0, 2\tilde{i}_2} = (S|_X P)_{0, 2i_2} = b_{31}p_{-1, i_2+1} + b_{32}p_{-1, i_2} + b_{33}p_{-1, i_2-1} + b_{34}p_{0, i_2+1} + b_{35}p_{0, i_2} + b_{36}p_{0, i_2-1} + b_{37}p_{1, i_2+\frac{1}{2}} + b_{38}p_{1, i_2-\frac{1}{2}}. \quad (46)$$

- Règles points arêtes $(S|_X P)_{(0, 2\tilde{i}_2+1)}$ (figure 8e) :

$$(S|_X P)_{0, 2\tilde{i}_2+1} = (S|_X P)_{0, 2i_2+1} = b_{41}p_{-1, i_2+1} + b_{42}p_{0, i_2} + b_{43}p_{0, i_2+1} + b_{44}p_{0, i_2} + b_{45}p_{1, i_2+\frac{3}{2}} + b_{46}p_{1, i_2+\frac{1}{2}} + b_{47}p_{1, i_2-\frac{1}{2}}. \quad (47)$$

Les équations (43) à (47) représentent les règles de subdivision particulières dans la zone mixte (sur l'axe y et au voisinage de cet axe). Les poids de ces règles de subdivision sont donnés à partir de l'équation (36) de sorte que la condition $S|_X Q|_X = Q|_X \sigma$ soit satisfaite sur l'espace des polynômes $\pi_2(\mathbb{R}^2)$. Les poids de ces règles de subdivision sont donnés dans la figure 9.

Exemple 3

Dans cet exemple, nous montrons comment trouver les poids $b_{3\beta}$, $\beta \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ de la règle de subdivision donnée par l'équation (46). Pour plus de simplicité et en raison de l'invariance des indices sur l'axe y , nous avons seulement besoin de calculer les poids de cette règle pour $(i_1, i_2) = (0, 0)$. Pour trouver les poids de la règle de subdivision, on fixe un support fini :

$$\Lambda = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1), (0, 0), (0, -1), (1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})\},$$

défini sur la grille X (figure 8d). On obtient alors :

$$(46) \Leftrightarrow Sp_{0,0} = b_{31}p_{-1,1} + b_{32}p_{-1,0} + a_{33}p_{-1,-1} + b_{34}p_{0,1} + b_{35}p_{0,0} + b_{36}p_{0,-1} + b_{37}p_{1,\frac{1}{2}} + b_{38}p_{1,-\frac{1}{2}}, \quad (48)$$

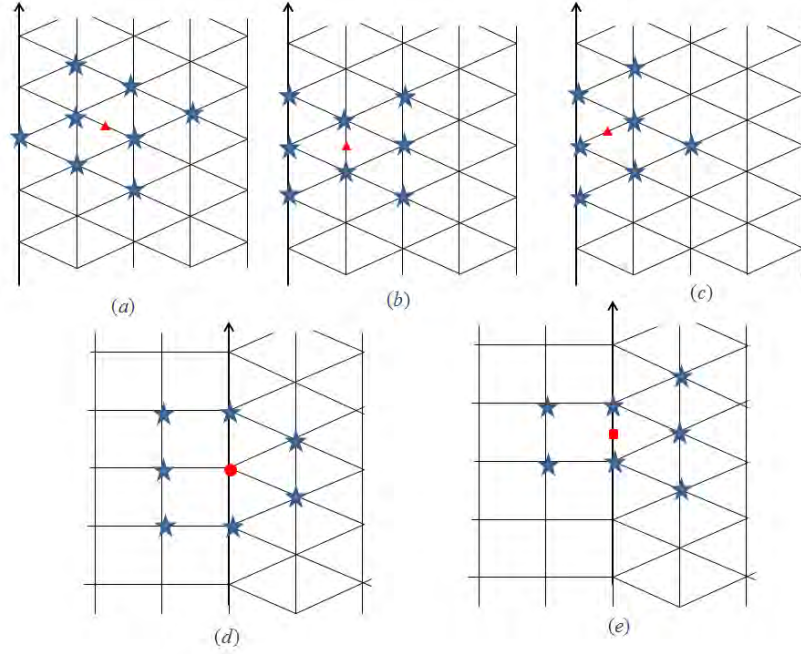


Figure 8: Les supports des règles de subdivision particulières sur l'axe $y(i_1 = 0)$ et au voisinage de cet axe $y(i_1 > 0)$ où les \star matérialisent le support et les \square, \circ et \triangleright sont les points à calculer.

À partir de l'équation (36), les poids $b_{3\beta}, \beta \in \llbracket 1, 8 \rrbracket$ sont donnés par l'équation suivante :

$$\Sigma_{Q_{|x}(\Lambda)} = [\Sigma_{Q_{|x_1}(\Lambda_1)} | \Sigma_{Q_{|x_2}(\Lambda_2)}] (Pr)_{0,0} = d_{Q_{|x}}(0,0), \quad (49)$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1), (0, 0), (0, -1)\} \\ \Lambda_2 = \{(1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Q_{|x_1} f = f - \frac{1}{6} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f) & x \leq 0 \\ Q_{|x_2} f = f & x > 0 \end{cases}$$

pour tout $f \in \pi_2(\mathbb{R}^2)$.

Les poids $b_{3\beta}$ sont donnés par le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \\ b_{25} \\ b_{26} \\ b_{27} \\ b_{28} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons voir que, étant donné ce système d'équations, il existe un nombre infini de solutions. Pour des considérations de symétrie, nous supposons que : $b_{31} = b_{33}$, $b_{32} = b_{34} = b_{36}$, $b_{37} = b_{38}$, alors la solution du système d'équations est donnée par : $b_{3\beta} = (\frac{3}{224}, \frac{9}{112}, \frac{3}{224}, \frac{9}{112}, \frac{5}{8}, \frac{9}{112}, \frac{3}{56}, \frac{3}{56})$. En utilisant la même méthode pour les équations (43) à (45) et (47), nous aurons les règles de subdivision données dans la figure 9.

5.2. Règles de bords et de crêtes

Des modifications de la plupart des schémas de subdivision ont été proposées pour tenir compte des bords de la surface, dont on ne souhaite pas que leur raffinement dépende des sommets intérieurs de la surface pour pouvoir coller des morceaux de surfaces sans risque de trou au cours

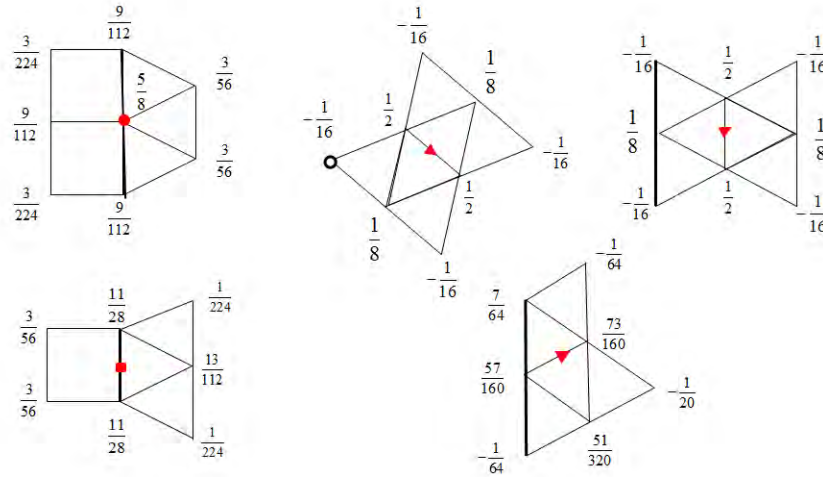


Figure 9: Les règles de subdivision dans la zone de raccord.

de la subdivision. Par conséquent, les règles des schémas de subdivision B-spline cubique et 4-points peuvent être utilisés (respectivement) comme les règles de bords pour les schémas de Catmull-Clark et Butterfly. Dans cette section, nous construisons un schéma de subdivision approximant/interpolant univarié, qui coïncide avec le schéma approximant B-spline cubique et le schéma interpolant 4 points sur un intervalle $[-r, r]$. Pour un ensemble de points de contrôles $\{p_j, j \in [-r, r]\}$, nous définissons un ensemble de nouveaux points de contrôle $\{(Sp)_i\}$ sur l'intervalle $[-r, r]$ par le schéma B-spline cubique pour $i \leq 0$, et par le schéma interpolant 4-points pour $i > 0$. L'opérateur quasi-interpolant Q sur le support $[-r, r]$ est donné par :

$$Qf(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) & x \leq 0 \\ f(x) & x > 0 \end{cases} \quad (50)$$

Compte tenu du choix de l'opérateur quasi-interpolant Q , les règles de subdivision sur le support $[-r, r]$, sont trouvées à partir de l'équation (36) pour $m = 2$ (figure 10).

Le support trop large du schéma de subdivision que nous avons proposé dans cet article nous impose la définition de règles de crêtes supplémentaires. Un certain nombre de cas doivent être considérés de façon séparée, voir figure 11.

5.3. Résultat

Le schéma de subdivision présenté dans cette partie est de continuité C^2 dans la zone de raccord (sur l'axe y). En effet,

pour

$$L = \{(i, j + \frac{1}{2}i), i = -2, -1, -4 \leq j \leq 4\} \cup$$

$$\{(i, j), 0 \leq i \leq 2, -4 \leq j \leq 4\},$$

et pour tout :

$$\begin{cases} \mathcal{M}^1 : L \rightarrow L \\ \mathcal{M}^2 : L \rightarrow \zeta L \end{cases},$$

il existe une matrice V telle que les deux conditions (39) et (40) sont satisfaites, i.e :

$$\begin{cases} (\mathcal{M}^1)' = V^{-1} \mathcal{M}^1 V = \begin{pmatrix} \Upsilon & C_0 \\ 0 & Y_0 \end{pmatrix} \\ (\mathcal{M}^2)' = V^{-1} \mathcal{M}^2 V = \begin{pmatrix} \Theta & C_1 \\ 0 & Y_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

où $\Upsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et Θ est une matrice triangulaire supérieure qui a les mêmes valeurs que Υ sur sa diagonale :

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0.16 & 0.19 & -0.06 & 0.05 & -0.05 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.19 & 0.09 & -0.19 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.16 & 0.16 & -0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Appliquons le test du rayon spectral conjoint (équation (41)) aux deux matrices Y_0 et Y_1 . Nous constatons qu'il existe $k = 14$, tel que : $\rho^{[14]}(Y_0, Y_1) = \frac{411}{1654} < \frac{1}{4}$, d'où les

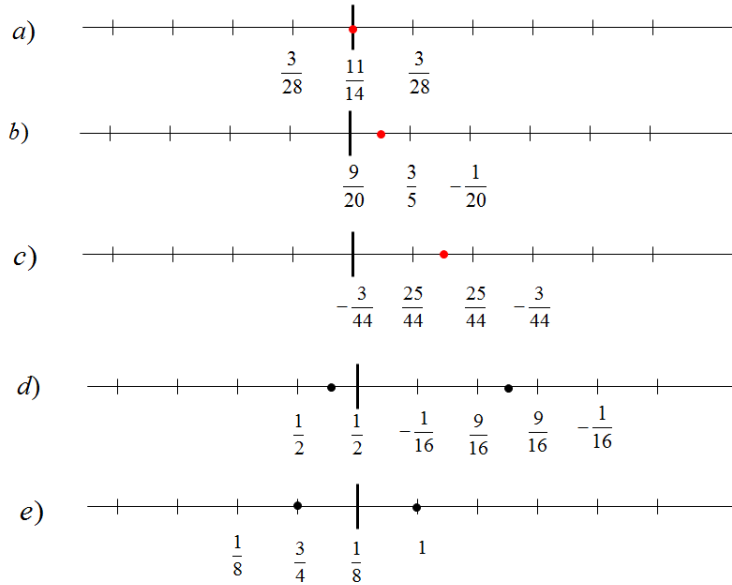


Figure 10: Les règles de bords extérieurs du schéma quad/triangle approximant/interpolant : (a) sommet de bord pair au point d'origine. (b) et (c) sommets des arêtes impaires au voisinage du point d'origine. (d) et (e) sommets des arêtes paires et impaires pour B-spline cubique à gauche et Butterfly à droite.

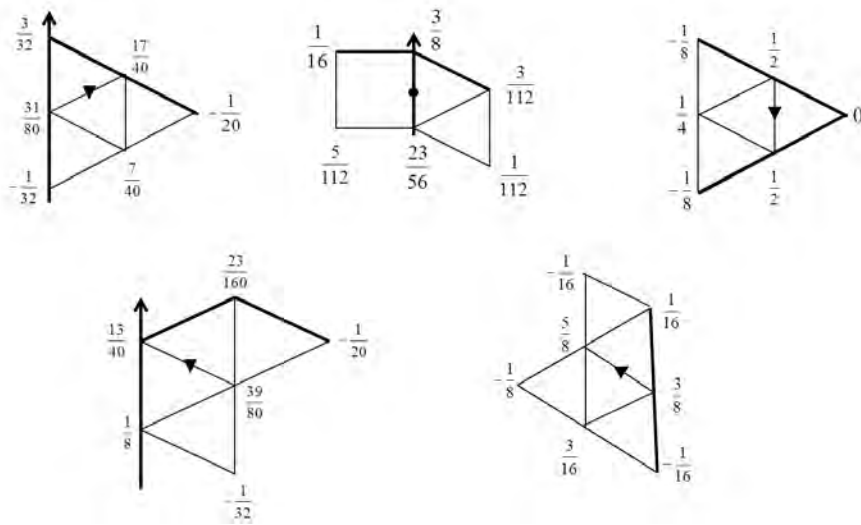


Figure 11: Les règles de crêtes du schéma quad/triangle approximant-interpolant.

conditions suffisantes de la continuité C^2 (condition (42)). Notre schéma de subdivision approximant/interpolant reproduit des polynômes de degré deux, et les six valeurs propres dominantes sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ d'où les conditions nécessaires. Nous concluons donc que notre schéma quad/triangle est C^2 sur l'axe de raccord.

Le schéma proposé dans cet exemple est stationnaire et

facile à mettre en œuvre. Nous utilisons un grand nombre de règles de subdivision sur les bords mais leur support est compact.

La figure 13 représente une comparaison entre le schéma de subdivision Butterfly, le schéma de subdivision de Catmull-Clark et notre schéma de subdivision.

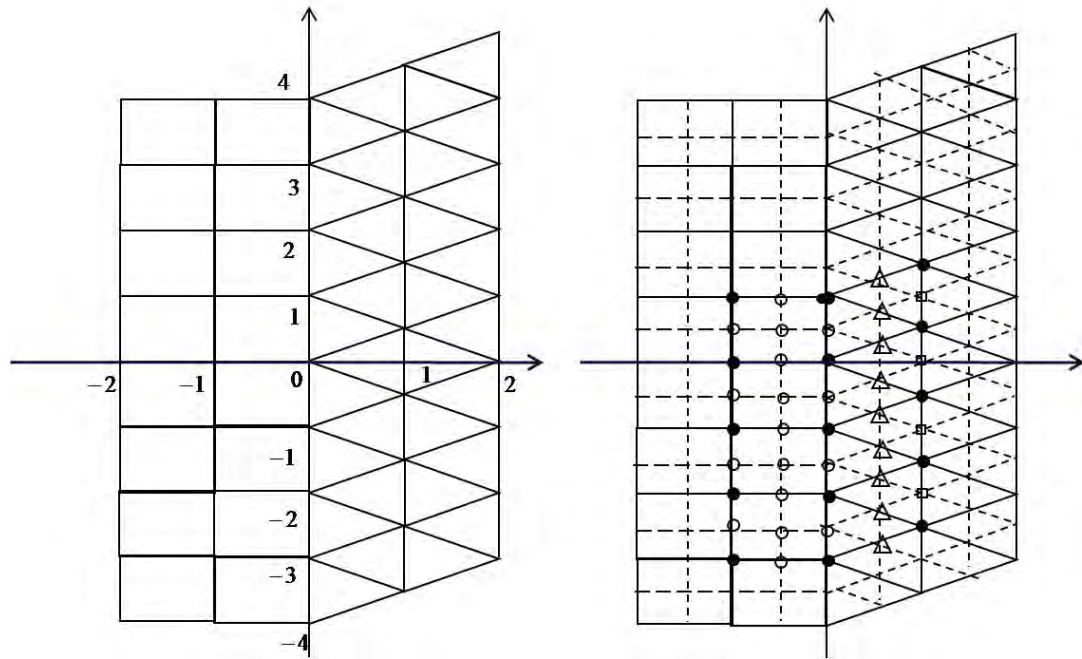


Figure 12: À gauche : la grille quad/triangle qui représente l'ensemble de point L . À droite la grille après un pas de subdivision : les symboles (\circ , \bullet , \triangleleft , \square) représentent les 45 points de contrôle de la matrice A

La figure 14 représente les surfaces créées à l'aide de l'application du schéma approximant/interpolant quad/triangle qui unifie le schéma de Catmull-Clark et le schéma Butterfly. Les images qui présentent les lignes de réflexion dans les figures 13 et 14 montrent la bonne qualité de la courbure des surfaces générées par ce schéma de subdivision le long de la frontière quad/triangle. Rappelons ici que les lignes de réflexion sont basées sur la réflexion de lumière sur la surface par rapport à un observateur et permettent de détecter les irrégularités géométriques de la surface. Dans les deux dernières lignes de la figure 14, nous distinguons clairement toutes les caractéristiques des deux types de surface générées par le schéma interpolant Butterfly d'un côté et le schéma approximant de Catmull-Clark de l'autre. En effet, dans la zone d'application du schéma de subdivision Butterfly (zone en jaune) la surface limite passe par les points de contrôles initiaux et la continuité de la surface limite dans cette zone est C^1 . Dans la zone d'application du schéma de Catmull-Clark (zone en bleu) la surface limite est de bien meilleure qualité, de continuité C^2 , mais cette surface ne passe pas par les points de contrôles initiaux. Les deux schémas de Catmull-Clark et Butterfly sont raccordés par un ensemble de règles de subdivision qui forment un schéma approximant de continuité C^2 .

6. Conclusion

Le schéma présenté dans cet article est C^2 partout sauf au voisinage des points extraordinaires et les points ordinaires de Butterfly où notre schéma est C^1 . La méthode que nous avons utilisé pour trouver les règles de notre schéma de subdivision est basée sur les propriétés de la reproduction des polynômes. Dans les zones où le maillage est régulier l'opérateur de subdivision S^∞ reproduit les polynômes de degré m , et ainsi on connaît l'équation et la continuité de la surface limite. Dans les zones où le maillage est irrégulier, les règles de subdivision ne permettent pas de trouver l'équation reproduite par S^∞ . Il faut donc proposer des règles qui permettent d'optimiser le comportement de la surface limite dans le cas irrégulier. Dans l'avenir nous avons l'intention de trouver un masque général (de valence quelconque), et une preuve formelle de la continuité. Nous sommes ainsi à la recherche d'un schéma de subdivision qui unifie un schéma approximant défini sur des maillages triangulaires et un schéma interpolant défini sur des maillages quadrilatéraux.

Dans cet article, nous avons proposé un schéma de subdivision qui unifie un schéma approximant défini sur un maillage quadrilatéral et un schéma interpolant défini sur un maillage triangulaire. Par la suite, nous avons l'intention de généraliser cette méthode à d'autres schémas de subdivision ainsi qu'à d'autres maillages mixtes. Autrement dit, dans les travaux futurs nous nous intéresserons à la construction et à la généralisation de ces types de schémas de subdivi-

vision (approximants/interpolants) sur des maillages mixtes (quad/quad, quad/triangle, triangle/quad, triangle/triangle) dans le cas des deux types de maillages (régulier et irrégulier).

Références

- [BS88] BALL A. A., STORRY D. J. T. : Conditions for tangent plane continuity over recursively generated b-spline surfaces. *ACM Transactions on Graphics*. Vol. 7(2) (1988), 83–102.
- [CC78] CATMULL E., CLARK J. : Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological surfaces. *Computer Aided Design* (1978).
- [CDM91] CAVARETTA A. S., DAHMEN W., MICHELLI C. A. : Stationary subdivision. *Memoirs of the American Mathematical Society* (1991).
- [DGL90] DYN N., GREGORY J. A., LEVIN D. : A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics* (1990), 160–169.
- [DS78] DOO D., SABIN M. : Behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design* (1978), 356–360.
- [JLZ09] JIANG Q., LI B., ZHU W. : Interpolatory quad/triangle subdivision schemes for surface design. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 26, Num. 8 (2009), 904–922.
- [JMO06] JAMSHIDI J., MILEHAM A., OWEN G. : Dimensional tolerance approximation for reverse engineering applications. *Proceedings of the 9th International Design Conference DESIGN 2006 Cavtat, Dubrovnik, Croatia, editor D. Marjanovic*. Vol. 15(1) (2006), 855–862.
- [Kob96] KOBBELT L. : Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology. *Computer Graphics Forum*. Vol. 5(3) (1996), 409–420.
- [Lev00] LEVIN A. : Combined subdivision schemes. *PhD thesis, Tel-Aviv University* (2000).
- [Lev03] LEVIN A. : Polynomial generation and quasi-interpolation in stationary nonuniform subdivision. *Computer Aided Geometric Design* (2003), 41–60.
- [LL03] LEVIN A., LEVIN D. : Analysis of quasi-uniform subdivision. *Applied and Computational Harmonic Analysis* (2003).
- [Loo87] LOOP C. : Smooth subdivision surfaces based on triangles. *M.S. thesis, university of Utah* (1987).
- [SL03] STAM J., LOOP C. : quad/triangle subdivision. *Computer Graphics* (2003).
- [SRML09] SUN X., ROSIN P. L., MARTIN R., LANGBEIN F. : Noise analysis and synthesis for 3d laser depth scanners. *Graphical Models*. Vol. 71(2) (2009), 34–48.
- [SW05] SCHAEFER S., WARREN J. : On c^2 subdivision for triangle/quad meshes. *Transaction on Graphics*. Vol. 24 (2005), 28–36.
- [TOdSG*99] THOMPSON W., OWEN J. C., DE ST. GERMAIN H. J., STARK S. R., HENDERSON T. C. : Feature-based reverse engineering of mechanical parts. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. Vol. 15(1) (1999), 57–66.
- [ZSS96] ZORIN D., SCHRÖDER P., SWELDENS W. : Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. In *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques ACM Press* (1996), 189–192.

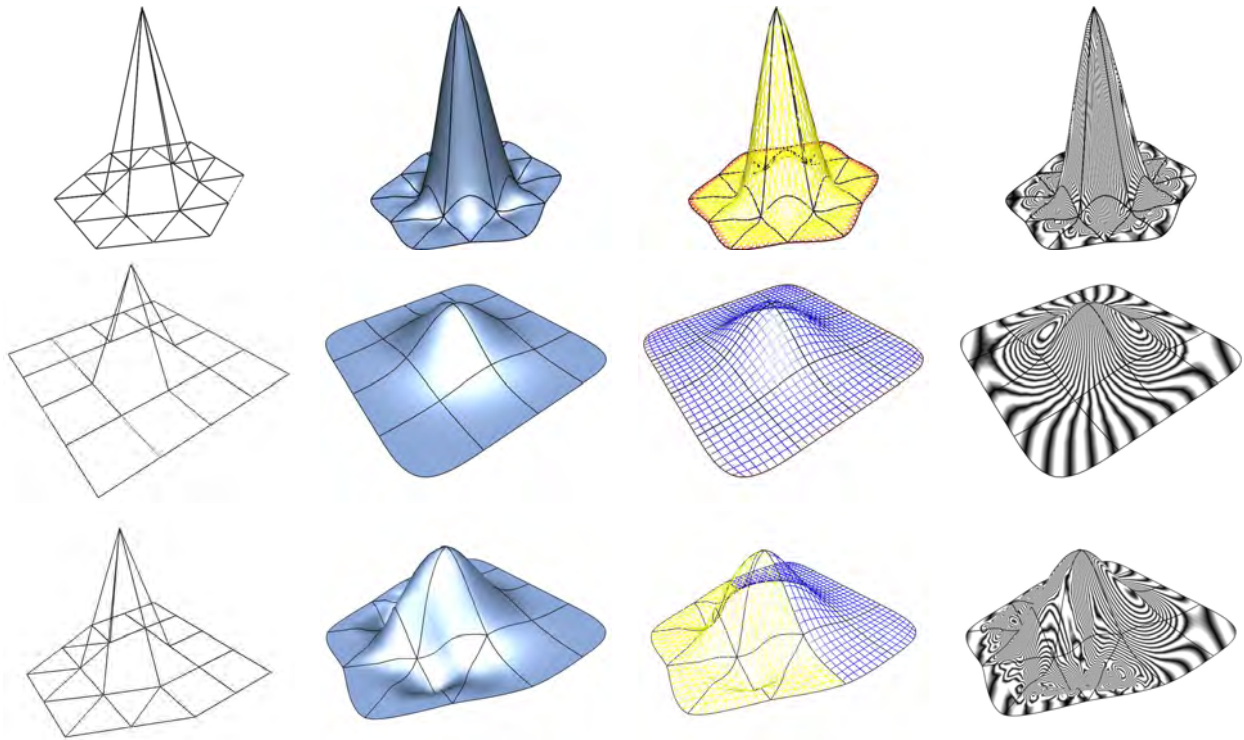


Figure 13: Comparaison entre le schéma Butterfly (en haut), schéma de Catmull-Clark (au centre) et notre schéma (en bas). De gauche à droite : les mailles de contrôle, les surfaces limites, des mailles de couleur (jaune pour les triangles, bleu pour quads), et les lignes de réflexion.

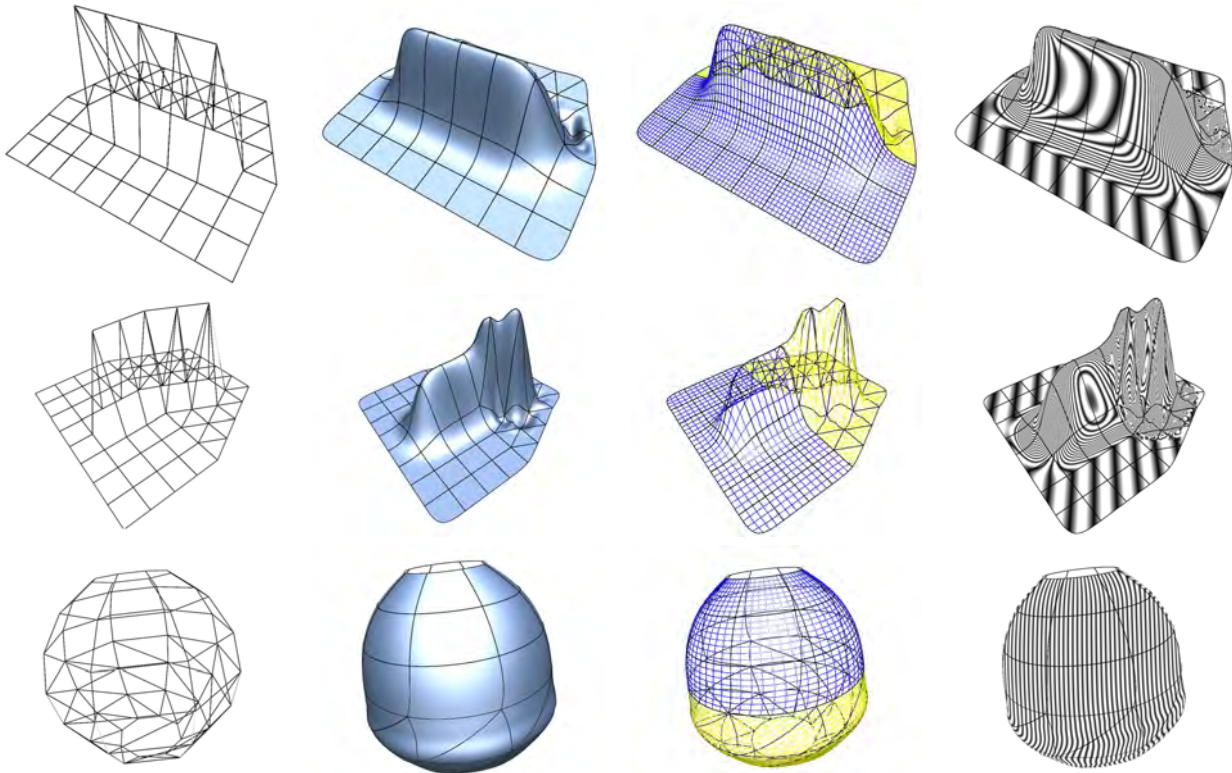


Figure 14: Différentes surfaces générées par l'application de notre schéma.