

# Les cyclides de Dupin et l'espace des sphères

L. Druoton<sup>1,2</sup>, L. Garnier<sup>3</sup>, R. Langevin<sup>2</sup>, H. Marcellier<sup>1</sup> et R. Besnard<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CEA, DAM, Valduc, F-21120 Is Sur Tille

<sup>2</sup>IMB, faculté Mirande, 21000 Dijon

<sup>3</sup>LE2i, Université de Bourgogne, faculté Mirande, 21000 Dijon

---

## Résumé

*Les cyclides de Dupin sont aujourd'hui bien connues et de plus en plus utilisées pour effectuer des jointures 3D entre différentes primitives. Une cyclide de Dupin peut être définie comme l'enveloppe de deux familles de sphères à un paramètre. Ainsi, vient l'idée d'étudier ces familles dans l'espace des sphères. En effet dans cet espace, elles sont représentées très simplement par une conique particulière (cercle, hyperbole ou parabole). Pour utiliser cette représentation, il est nécessaire de déterminer les formules de passage de l'espace euclidien à l'espace des sphères et inversement. Le travail présenté dans cet article reprend les définitions et propriétés connues des cyclides de Dupin et de l'espace des sphères, présente les formules de passage d'un espace à l'autre et donne les équations représentant les cyclides de Dupin dans l'espace des sphères. Ainsi, nous établissons les relations entre les différents types de coniques représentant les cyclides de Dupin dans l'espace des sphères et les différents types de cyclides de Dupin. Enfin, nous présentons les résultats obtenus en application à des jointures entre surfaces particulières et plans.*

*Dupin cyclides are more used to blend 3D surfaces. A Dupin cyclide can be defined, in two different ways, as the envelope of a one-parameter family of spheres. Each family of spheres can be seen as a conic in the space of spheres. In this paper we present the space of spheres and the definitions and some properties of Dupin cyclides. We recall the formulae needed to get a parameterization or an equation of the cyclide from the data of the curve in the space of spheres. In particular the type of the conic determines the type of the cyclide. Finally we will use arcs of these conics to blend pieces of cyclides or join canal surfaces with planes or spheres.*

---

**Mots clé :** Cyclide de Dupin, enveloppe de sphères, espace des sphères, jointures

## 1 Introduction

Le travail présenté dans cet article est effectué dans le cadre d'une thèse sur la reconstruction 3D de surfaces déformables d'objets mesurés par capteurs 3D. Ces modèles de surfaces ont, du point de vue théorique, une géométrie particulière : ce sont des jointures  $G^1$  de morceaux de cyclides de Dupin, elles-mêmes surfaces canal particulières. Pour reconstruire ces surfaces, nous comptons utiliser les sphères définies par le squelette du nuage de points obtenu par numérisation (certaines sphères tangentes au nuage de points et centrées sur le squelette) et reconstruire la surface canal enveloppant ces sphères en les joignant par des carreaux de cyclides de Dupin qui peuvent être définies de deux manières comme enveloppe de sphères à un paramètre. Cette définition nous a aussi amenés à considérer une cyclide de Dupin dans l'espace des sphères où sa représentation sous

forme de coniques est très simple. Ainsi, grâce à cette étude, il sera possible d'étudier les caractéristiques et propriétés des cyclides et des jointures entre surfaces canal dans l'espace des sphères. Notons que les termes cyclide et CD4 seront utilisés dans cet article pour désigner une cyclide de Dupin quartique.

Les cyclides de Dupin ont été inventées par P. Dupin en 1822 [Dup22] et introduites en CAO par R. Martin en 1982 [Mar82]. Nombreux mathématiciens ont étudié leurs propriétés géométriques, citons entre autres G. Darboux [Dar87, Dar17], A. Forsyth [For12] et A. Cayley [Cay73]. Aujourd'hui, elles sont très largement utilisées pour effectuer des jointures 3D entre deux primitives, en se plaçant uniquement dans l'espace euclidien usuel [AD97a, AD97b, DMP93, Pra97, GFN04, Gar07].

L'espace des sphères a été introduit de différentes façons. Par exemple, M. Berger [Ber78, BG92] se place dans l'espace projectif des formes quadratiques sur l'espace affine euclidien, M. Paluszny [PB98] travaille dans un espace pro-

jectif de dimension 4 utilisant l'hypersphère de Moebius alors que U. Hertrich-Jeromin [HJ03], T. Cecil [Cec92], R. Langevin, J. O'Hara [LO05, LO08] et P. Walczak [LW08] utilisent une quadrique de dimension 4 de l'espace de Lorentz de dimension 5. Nous reprenons la construction de ces derniers où une cyclide de Dupin est représentée par deux coniques particulières : deux cercles, un cercle et une hyperbole ou un cercle et une parabole. Ces représentations permettent d'envisager des jointures dans l'espace des sphères entre deux morceaux de courbes représentant deux surfaces canal par un ou des arcs de coniques. De plus, ces arcs de coniques sont l'intersection d'une quadrique canonique que nous notons  $\Lambda^4$  et de 2-plans affines. Il sera ainsi possible d'étudier des propriétés de jointure 3D (principalement de continuité) en se plaçant dans la quadrique  $\Lambda^4$  où les calculs seront simplifiés par l'utilisation d'équations de degré 2 remplaçant les équations de cyclides de degré 4 dans l'espace euclidien de dimension 3.

Jusqu'à maintenant, la jointure entre deux primitives par une cyclide de Dupin se faisait dans l'espace 3D usuel après avoir déterminé un des deux plans de symétrie de cette dernière. Une méthode élégante consistait à construire des jointures  $G^1$  entre des courbes de Bézier dans ce plan de symétrie [GFN04]. Notre nouvelle méthode permet, en se plaçant dans l'espace des sphères, de réaliser le même type de travail mais en économisant la recherche du plan de symétrie en réalisant la jointure  $G^1$  entre deux courbes par une conique. De plus, nous faisons apparaître un degré de liberté sur le choix de la cyclide de jointure puisque nous n'imposons plus que les cercles principaux de la cyclide de Dupin soient dans le plan de symétrie de la scène.

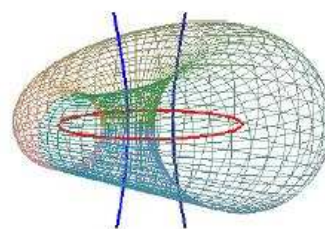
L'article est organisé comme suit : nous reprenons d'abord les définitions et propriétés des cyclides de Dupin dans l'espace euclidien de dimension 3 et nous retrouvons l'obtention de leurs équations implicite et paramétrique obtenues par Forsyth, [For12], utiles par la suite pour obtenir leurs représentations dans l'espace des sphères. Ensuite, nous introduisons l'espace des sphères et déterminons les formules de passage d'un espace à l'autre ainsi que la représentation d'une cyclide de Dupin dans cet espace. Nous expliquons ensuite comment déterminer les paramètres d'une cyclide de Dupin lorsqu'on connaît l'une des coniques la représentant dans l'espace des sphères, puis, nous donnons un exemple d'application de ces représentations en effectuant des jointures dans l'espace des sphères. Enfin, nous concluons et donnons nos perspectives de travail.

## 2 Les cyclides de Dupin

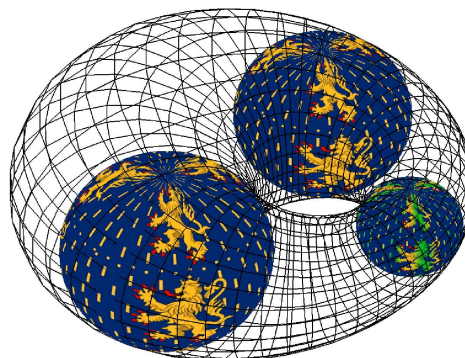
### 2.1 Définitions

Dans l'espace euclidien usuel, une cyclide de Dupin peut être définie de deux manières différentes comme l'enveloppe de sphères orientées dont les centres sont situés sur une conique et passant toutes par un point fixe (réel ou imaginaire) d'une seconde conique [For12, Dar87, Dar17]. Ces

sphères sont tangentes à l'enveloppe le long de cercles appelés cercles caractéristiques. Lorsqu'il s'agit d'une cyclide de Dupin de degré quatre, appelée cyclide de Dupin quartique, les coniques sont une ellipse et une hyperbole (figure 1). Ces dernières sont des anti-coniques, c'est-à-dire qu'elles sont situées dans deux plans orthogonaux et les foyers de l'une sont les sommets de l'autre. Dans le cas particulier où la CD4 est un tore, l'ellipse devient un cercle tandis que l'hyperbole dégénère en une droite double (nous ne considérons pas ce cas particulier dans cet article). Chacune des coniques est le lieu des centres des sphères d'une famille (figures 2 et 3). Ainsi, nous avons une double génération de la cyclide de Dupin grâce aux deux familles de sphères à un paramètre dont elle est l'enveloppe.



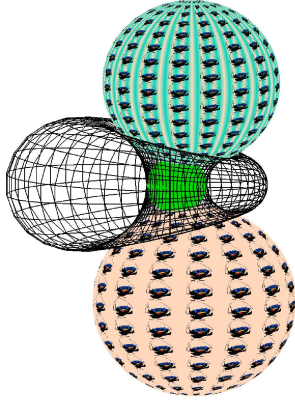
**Figure 1:** Une cyclide de Dupin de degré 4 et ses deux anti-coniques (une ellipse et une hyperbole)



**Figure 2:** Première famille de sphères centrées sur l'ellipse dont l'enveloppe est la cyclide de Dupin de la figure 1

### 2.2 Equations

Nous nous plaçons dans l'espace euclidien usuel de dimension trois, noté  $E^3$ . Nous allons montrer à nouveau qu'une CD4 dépend de trois paramètres réels  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ , non nuls, avec  $|a| > |c|$ . Il existe un repère dans lequel la cyclide de Dupin de paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  possède deux équations implicites équivalentes et une équation paramétrique simples. L'origine du repère est le centre commun des anti-coniques



**Figure 3:** Seconde famille de sphères centrées sur l'hyperbole dont l'enveloppe est la cyclide de Dupin de la figure 1

et les trois axes sont les axes des anti-coniques (un axe est commun aux deux coniques). La manipulation de formules algébriques nous amènera parfois à considérer des solutions dans  $\mathbb{C}^3$ . Nous dirons alors qu'il s'agit de points imaginaires.

Pour obtenir les équations implicites d'une CD4, il suffit de calculer l'enveloppe des sphères la définissant, [For12]. Considérons :

- l'ellipse, dans le repère précédent, située dans le plan  $P_z : z = 0$  d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

- les sphères  $S_1(\theta)$  de centres :

$$\Omega_\theta(a \cos(\theta); b \sin(\theta); 0)$$

- le point fixe  $M(\alpha; 0; \beta)$  appartenant à l'hyperbole par lequel passent toutes les sphères  $S_1(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Le point  $M$  peut être réel ou imaginaire selon le type de la cyclide (table 5). L'équation de  $S_1(\theta)$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2(x - \alpha) a \cos \theta \\ - 2by \sin \theta - \alpha^2 - \beta^2 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

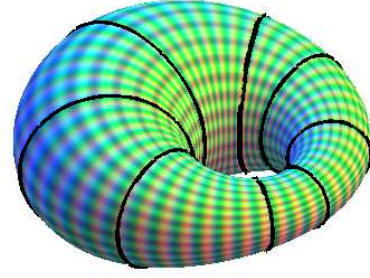
L'enveloppe de ces sphères est la réunion de cercles, les cercles caractéristiques de l'enveloppe, figure 4, obtenus par l'intersection des sphères  $S_1(\theta)$  avec les plans  $P_1(\theta)$  d'équation  $S'_1(\theta) = 0$  définis par :

$$P_1(\theta) : a(x - \alpha) \sin(\theta) - by \cos(\theta) = 0 \quad (3)$$

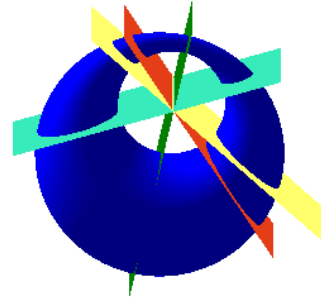
La famille de plans  $P_1(\theta)$  forme un faisceau, figure 5, dans lequel nous retrouvons le plan  $P_y$ . La droite commune à tous ces plans est la droite d'équation  $x = \frac{c\alpha}{a}$  et  $y = 0$ .

A partir des équations (2) et (3) et après quelques calculs, la cyclide de Dupin doit vérifier l'équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 = 4a^2(x - \alpha)^2 + 4b^2y^2 \quad (4)$$



**Figure 4:** Cercles caractéristiques d'une CD4 avec  $\theta$  constant



**Figure 5:** Faisceau de plans contenant les cercles caractéristiques d'une CD4 avec  $\theta$  constant

Pour déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ , nous devons considérer :

- l'hyperbole située dans le plan  $P_y : y = 0$  d'équation :

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

- les sphères  $S_2(\psi)$  de centres :

$$\Omega_\psi \left( \frac{c}{\cos(\psi)}; 0; \frac{b \sin(\psi)}{\cos(\psi)} \right)$$

avec  $\psi \in [0, 2\pi] \setminus \{ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \}$

- le point fixe  $M'(\gamma; \delta; 0)$  appartenant à l'ellipse par lequel passent toutes les sphères  $S_2(\psi)$ .

Une condition est à ajouter pour que les coniques soient deux anti-coniques :

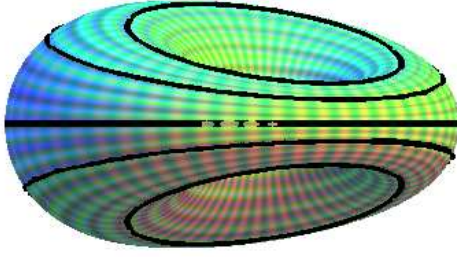
$$c^2 = a^2 - b^2$$

En déterminant les autres cercles caractéristiques, figure (6), sections des sphères  $S_2(\psi)$  par des plans  $P_2(\psi)$  d'équation  $S'_2(\psi) = 0$  donnés par :

$$P_2(\psi) : c(x - \gamma) \sin(\psi) - bz = 0 \quad (6)$$

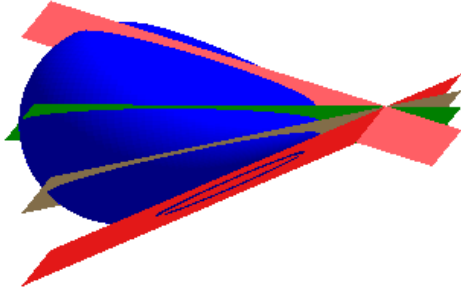
nous obtenons la seconde équation :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2 = 4c^2(x - \gamma)^2 + 4b^2z^2 \quad (7)$$



**Figure 6:** Cercles caractéristiques d'une CD4 avec  $\psi$  constant

Comme pour la première famille de sphères, les plans  $P_2(\psi)$  forment eux aussi un faisceau de plans contenant le plan  $P_z$ . La droite commune à tous ces plans est la droite d'équations  $x = \frac{a\mu}{c}$  et  $z = 0$ . Notons que pour  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ , les sphères, dont les centres sont rejetés à l'infini, sont les plans  $P_2(\psi)$ .



**Figure 7:** Faisceau de plans contenant les cercles caractéristiques d'une CD4 avec  $\psi$  constant

Pour que les deux équations (4) et (7) représentent la même CD4, il faut [For12] :

$$a^2\alpha = c^2\gamma$$

Le paramètre  $\mu$  est alors introduit :

$$\mu = \frac{\alpha a}{c} = \frac{\gamma c}{a}$$

ce qui permet d'obtenir deux équations implicites équivalentes d'une CD4 :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 - 4(ax - c\mu)^2 - 4b^2y^2 = 0 \quad (8)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 - 4(cx - a\mu)^2 + 4b^2z^2 = 0 \quad (9)$$

Il est possible de vérifier que les points fixes :

$$M_\varepsilon \left( \frac{\mu c}{a}; 0; \varepsilon \frac{b}{a} \sqrt{\mu^2 - a^2} \right)$$

et :

$$M'_\varepsilon \left( \frac{\mu a}{c}; \varepsilon \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - \mu^2}; 0 \right)$$

avec  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$  sont respectivement sur l'hyperbole et l'ellipse précédentes.

Remarquons, concernant les points  $M_\varepsilon$ , qu'il existe :

- un unique point double réel  $M_\varepsilon$  lorsque  $|a| = |\mu|$
- deux points  $M_\varepsilon$  imaginaires lorsque  $|a| > |\mu|$
- deux points  $M_\varepsilon$  réels lorsque  $|a| < |\mu|$

La même remarque est à faire concernant les points  $M'_\varepsilon$  avec les valeurs de  $|\mu|$  et  $|c|$ . Les différents types (réel ou imaginaire) et le nombre des points fixes vont déterminer le type et le nombre de points singuliers de la CD4 (voir table 5). Ainsi, un point fixe réel correspondra à un point singulier de la cyclide de Dupin. Lorsque ce dernier correspondra à la famille de sphères  $S_1(\theta)$  (resp.  $S_2(\psi)$ ), il sera contenu dans le plan  $P_z$  (resp.  $P_y$ ). Une classification différentielle et topologique des cyclides de Dupin, en fonction de leurs modes de génération par une inversion d'un tore, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution, est possible à partir du nombre et la disposition des points singuliers de ces dernières, [Gar07] :

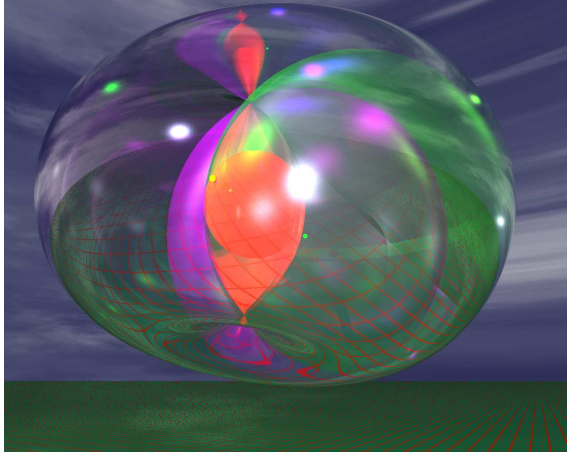
- Une cyclide de Dupin en anneau, CD4A : pas de point singulier (figure 8)
- Une cyclide de Dupin à croissant interne, CD4I : deux points singuliers situés dans  $P_y$  (figure 9 (a))
- Une cyclide de Dupin à croissant externe, CD4E : deux points singuliers situés dans  $P_z$  (figure 9 (b))
- Une cyclide de Dupin à croissant interne nul, CD4In : un seul point singulier dans  $P_y$  (figure 10 (a))
- Une cyclide de Dupin à croissant externe nul, CD4En : un seul point singulier dans  $P_z$  (figure 10 (b))



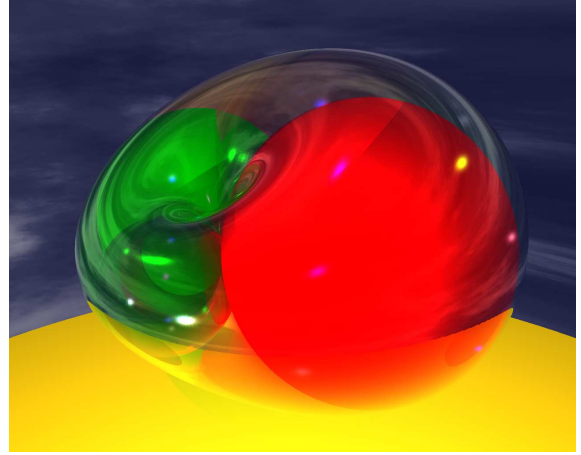
**Figure 8:** Cyclide de Dupin en anneau

Pour plus de détails sur l'obtention des deux équations implicites d'une CD4, le lecteur peut se reporter à [For12]. Remarquons que les cercles caractéristiques de l'enveloppe sont aussi les cercles de courbure de la CD4.

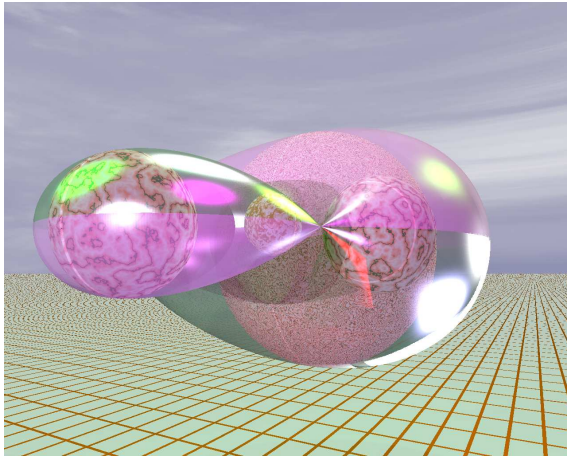




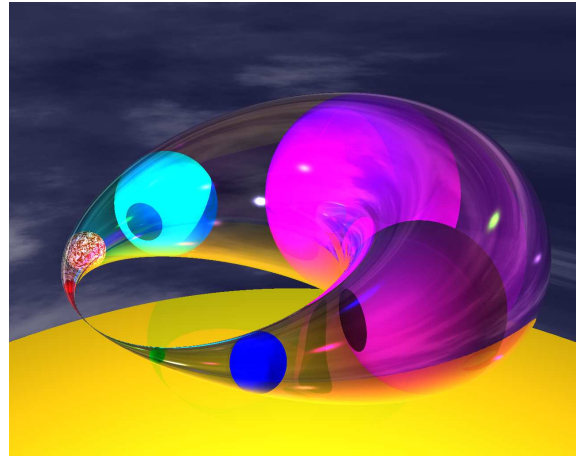
(a)



(a)



(b)



(b)

**Figure 9:** Cyclide de Dupin à croissant. (a) : interne. (b) : externe.

**Figure 10:** Cyclide de Dupin à croissant nul. (a) : interne. (b) : externe.

Grâce aux coordonnées des points  $M_\varepsilon$  et  $M'_\varepsilon$ , nous pouvons maintenant déterminer le rayon des sphères de chaque famille, le rayon de  $S_1(\theta)$  est :

$$r_1(\theta) = |\mu - c \cos(\theta)| \quad (10)$$

tandis que le rayon de  $S_2(\psi)$  est :

$$r_2(\psi) = \left| \mu - \frac{a}{\cos(\psi)} \right| \quad (11)$$

Pour obtenir l'équation paramétrique de la CD4, il suffit de considérer les points de cette dernière comme intersection de deux cercles caractéristiques avec  $\theta$  constant ou avec  $\psi$  constant. Ces cercles sont obtenus comme sections de  $S_i(t)$  par  $P_i(t)$  (équations (3) ou (6)) pour  $i \in \{1; 2\}$  et  $t \in [0, 2\pi]$ . L'équation paramétrique d'une CD4 est :

$$(\theta, \psi) \rightarrow \left( \begin{array}{l} \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{array} \right) \quad (12)$$

où  $(\theta, \psi) \in [0, 2\pi]^2$ .

Les différents types de CD4 cités ci dessus vont dépendre des valeurs respectives des paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ . Nous pouvons déterminer ces paramètres selon des cercles caractéristiques particuliers : ceux contenus dans les plans  $P_y$  et  $P_z$ . Ces cercles sont appelés cercles principaux. Ils sont les sections des sphères  $S_1(0)$  et  $S_1(\pi)$  par  $P_y$  et de  $S_2(0)$  et  $S_2(\pi)$

par  $P_z$  (figures 11, 12 et 13). Les rayons de ces cercles valent alors  $|\mu - c|$  et  $|\mu + c|$  dans  $P_y$  et  $|\mu - a|$  et  $|\mu + a|$  dans  $P_z$  (figures 14, 15, 16 et 17).

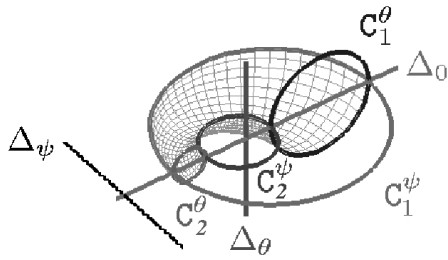


Figure 11: Cercles principaux d'une CD4A, cyclide en anneau

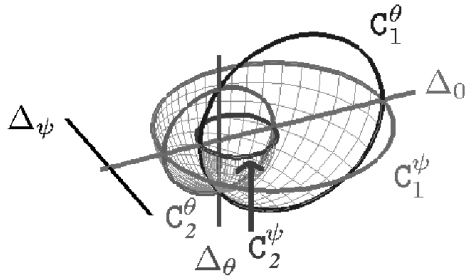


Figure 12: Cercles principaux d'une CD4I, cyclide à crois-sant interne

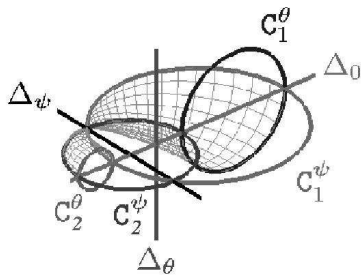


Figure 13: Cercles principaux d'une CD4E, cyclide à crois-sant externe

Notons  $C(O, r)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Dans la suite, nous considérons que les paramètres  $a, c$  et  $\mu$  sont strictement positifs. Connaissant le type de la CD4, il suffit alors de connaître deux des cercles principaux coplanaires de la CD4 afin d'en déterminer les paramètres [Gar07].

Notons  $C_1(O_1, r_1)$  et  $C_2(O_2, r_2)$  les deux cercles principaux de la CD4 dans le plan  $P_y$  ou dans le plan  $P_z$ . Les

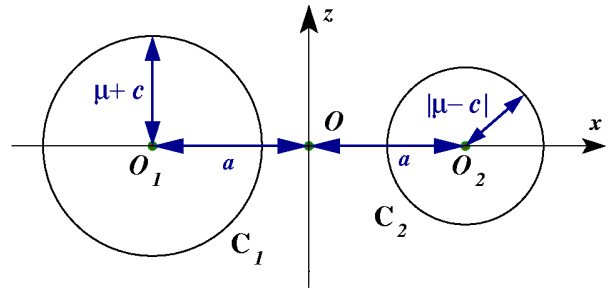


Figure 14: Cercles principaux d'une CD4A ou CD4E dans le plan  $P_z$

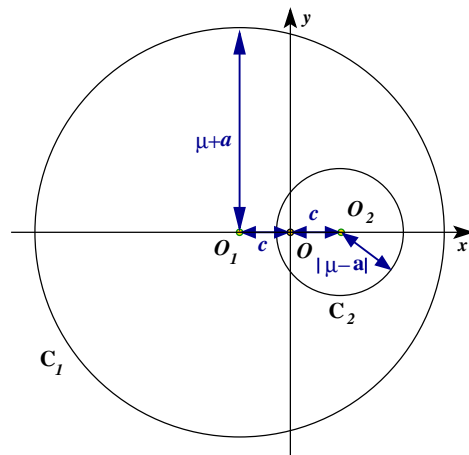


Figure 15: Cercles principaux d'une CD4A ou CD4I dans le plan  $P_z$

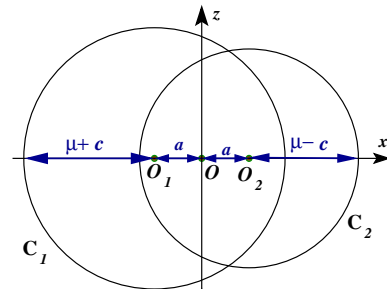
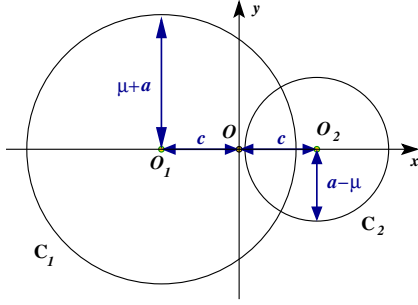


Figure 16: Cercles principaux d'une CD4I dans le plan  $P_y$

tableaux 1 et 2 donnent les valeurs des paramètres selon ces cercles.

La table 5 reprend de manière concise la relation entre les différentes valeurs des paramètres, les différents types de CD4, le nombre de points singuliers, le type et le nombre de points fixes de leur enveloppe.

Figure 17: Cercles principaux d'une CD4E dans le plan  $P_z$ 

type	$a$	$c$	$\mu$
CD4A ou CD4I	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{ r_1 - r_2 }{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$
CD4E	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	$\frac{ r_1 - r_2 }{2}$

Table 1: Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans  $P_y$ 

type	$a$	$c$	$\mu$
CD4A ou CD4E	$\frac{r_1 + r_2}{2}$	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{ r_1 - r_2 }{2}$
CD4I	$\frac{ r_1 - r_2 }{2}$	$\frac{O_1O_2}{2}$	$\frac{r_1 + r_2}{2}$

Table 2: Paramètres de la CD4 à partir des cercles principaux dans  $P_z$ 

### 3 L'espace des sphères

Rappelons qu'une cyclide de Dupin est l'enveloppe de deux familles de sphères à un paramètre. Il peut être alors intéressant de déterminer la représentation de ces surfaces canal particulières dans l'espace des sphères, où une surface canal est représentée par une courbe quelconque. Nous allons voir que, lorsqu'il s'agit d'une cyclide de Dupin, nous obtenons deux coniques particulières. Il est avantageux de considérer ces représentations car elles permettent de simplifier des équations de cyclides de degré 4 en équations de coniques de degré 2 et peuvent permettre la détermination de critères de jointure, particulièrement des critères de continuité, plus simplement que dans l'espace usuel.

#### 3.1 Introduction à l'espace des sphères

L'espace des sphères est décrit par une quadrique dans l'espace de Lorentz de dimension 5, noté  $L^5$ , d'origine  $O$ , [LW08]. Il s'agit de  $\mathbb{R}^5$  muni de la forme de Lorentz  $L$ , bilinéaire, symétrique, définie, telle que, pour

$M(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$  et  $N(y_0; y_1; y_2; y_3; y_4)$ , nous avons :

$$L(\vec{OM}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$L(\vec{OM}, \vec{ON}) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

La quadrique, de dimension 4, représentant l'espace des sphères est définie par :

$$\Lambda^4 = \{M \in L^5, L(\vec{OM}) = 1\} \quad (13)$$

Le cône de lumière, quant à lui, est défini par :

$$C_l = \{M \in L^5, L(\vec{OM}) = 0\} \quad (14)$$

Dans  $L^5$ , nous pouvons distinguer trois types de vecteurs et de plans, table 3.

type	vecteur $\vec{v}$	plan
espace	$L(\vec{v}) > 0$	tous les vecteurs sont de type espace
temps	$L(\vec{v}) < 0$	au moins un vecteur de type temps
lumière	$L(\vec{v}) = 0$	parallèle à un plan tangent au cône de lumière

Table 3: Différents types de vecteurs et de plans de  $L^5$ 

Notons que lorsque nous parlons d'orthogonalité dans  $\Lambda^4$ , il s'agit de l'orthogonalité relative à la forme de Lorentz et en particulier, tout vecteur lumière est orthogonal à lui-même.

#### 3.2 Construction de l'espace des sphères

R. Langevin et P. Walczak [LW08], après T. Cecil [Cec92] et U. Hertrich-Jeromin [HJ03] entre autres, se placent dans l'espace de Lorentz de dimension 5,  $\mathbb{R}^5$  muni de la forme quadratique  $L$ . L'espace euclidien peut alors être vu comme une section du cône de lumière par un hyperplan affine parallèle à un hyperplan tangent au cône de lumière (figure 18). Afin de choisir un tel plan, choisissons deux vecteurs lumières  $\vec{l}^s$  et  $\vec{l}$  et un point  $v_{l^s}$  appartenant à la droite engendrée par  $\vec{l}^s$  sur le cône de lumière. Prenons l'hyperplan  $P$  parallèle à l'orthogonal de  $\vec{l}$  et passant par  $v_{l^s}$ . La section du cône de lumière par  $P$ , notée  $H$ , est un paraboléoïde de dimension 3. La projection de  $H$  le long du vecteur  $\vec{l}$  est isométrique à  $H$  puisque  $\vec{l}$  est un vecteur lumière (qui annule la forme de Lorentz) et  $H$  est munie d'une métrique euclidienne, restriction de la forme de Lorentz à  $H$ . Nous pouvons donc conclure que le paraboléoïde  $H$  est isométrique à un espace euclidien de dimension trois et donc isométrique à  $E^3$  (figure 18).

Dans le paragraphe suivant, cette représentation nous permet de déterminer les formules de passage des sphères orientées de  $E^3$  à  $\Lambda^4$  et inversement.

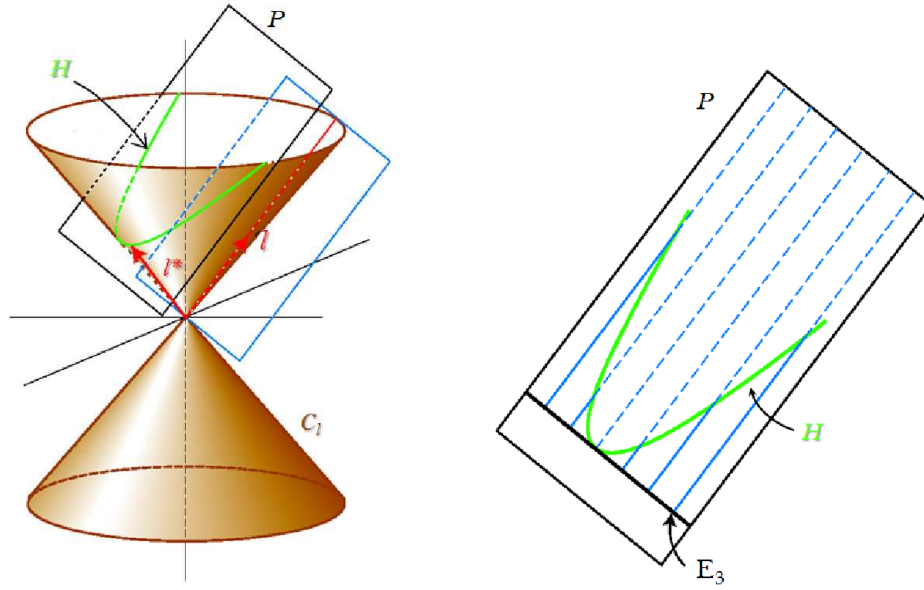


Figure 18: Construction du paraboloïde  $H$ , obtenu comme section du cône de lumière  $C_l$ , isométrique à  $E^3$

### 3.3 Formule de passage entre $\Lambda^4$ et les sphères orientées de $E^3$

A la sphère de centre  $\Omega(a;b;c)$  et de rayon  $r$ , nous associons les deux sphères orientées  $(a;b;c;r)$  et  $(a;b;c;-r)$  : dans le premier cas (resp. le second), le sens du vecteur normal à la sphère en un point  $M$  est contraire (resp. identique) à celui de  $\vec{\Omega M}$ . A noter que les plans de  $E^3$  sont aussi considérés comme des sphères de rayons infinis et de centres situés à l'infini. A chaque sphère orientée  $\Sigma$  de  $E^3$  correspond un point  $\sigma$  de  $\Lambda^4$ . Nous allons construire une bijection entre les deux espaces, grâce à l'isométrie décrite ci-dessus. Pour cela, partons des vecteurs lumières  $\vec{l}(1;0;0;1)$  et  $\vec{l}^*(1;0;0;1;0)$  et prenons  $P$  l'hyperplan parallèle à  $\vec{l}^\perp$  d'équation  $x_0 - x_4 = 1$  passant par le point  $v_{l^*}(1;0;0;1;0)$ .

Le paraboloïde  $H$ , intersection du cône de lumière avec  $P$ , est de dimension 3. La restriction au paraboloïde  $H$  de la forme quadratique  $L$  est une métrique euclidienne. La projection de  $H$  sur l'espace  $(x_1, x_2, x_3)$  est isométrique à  $E^3$ . Nous faisons alors correspondre à  $m(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $H$  le point  $X(x_1; x_2; x_3)$  de  $E^3$ . Le paraboloïde  $H$  est alors défini par le système :

$$\begin{cases} f_1(m) = x_0 - x_4 - 1 = 0 \\ f_2(m) = x_0 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) = 0 \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$m \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1) \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Considérons la sphère  $\Sigma$  de  $E^3$  de centre  $\Omega(a;b;c)$  et de rayon  $r$ . Une sphère étant totalement déterminée par un point, son vecteur normal unitaire en ce point et sa courbure, considérons un point  $M$  sur  $\Sigma$  ainsi que le vecteur  $\vec{N}$  unitaire normal à  $\Sigma$  en  $M$ . Si  $\sigma$  est le point correspondant à  $\Sigma$  dans  $\Lambda^4$ ,  $m$  le point correspondant à  $M$  dans  $H$ ,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à  $H$  en  $m$  correspondant à  $\vec{N}$  et  $k$  la courbure de  $\Sigma$  en  $M$  alors nous avons [Cec92, LW08] :

$$\sigma = km + \vec{n} \quad (15)$$

Prenons par exemple le pôle nord  $M(a;b;c+r)$  de  $\Sigma$  et  $\vec{N}(0;0;-1)$  le vecteur normal à  $\Sigma$  en  $M$ , nous avons :



$$m \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + (c+r)^2 + 1) \\ a \\ b \\ c+r \\ \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + (c+r)^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Nous savons que la courbure de la sphère de rayon  $r$  vaut  $k = \frac{1}{r}$ . Il ne reste plus qu'à déterminer le vecteur :

$$\vec{n}(\lambda; 0; 0; -1; \rho)$$

tel qu'il soit normal à  $H$  en  $m$ . Soit  $T_m(H)$  le plan tangent à  $H$  en  $m$ ,  $T_m(H)$  est engendré par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} = \overline{\nabla f_1(m)} = (1; 0; 0; 0; 1)$$

$$\vec{v} = \overline{\nabla f_2(m)} = (1; a; b; c+r; 0)$$

Ces vecteurs forment une base de l'espace tangent  $T_m(H)$ .  $\vec{n}$  est normal à  $T_m(H)$ . En résolvant le système :

$$\begin{cases} L(\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ L(\vec{v}, \vec{n}) = 0 \end{cases}$$

nous obtenons le vecteur :

$$\vec{n}(-(c+r); 0; 0; -1; -(c+r))$$

Ainsi, à partir de la formule (15), nous donnons la correspondance entre le point  $\sigma$  et la sphère  $\Sigma$  :

$$\sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 + 1) \\ \frac{a}{r} \\ \frac{b}{r} \\ \frac{c}{r} \\ \frac{1}{2r} (a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - 1) \end{pmatrix}$$

Notons qu'à une sphère non orientée de  $E^3$  correspond deux points de  $\Lambda^4$ , symétriques par rapport à  $O$ .

De plus, le lecteur peut aisément vérifier que  $L(\vec{O}\vec{\sigma}) = 1$ . Nous pouvons montrer que la formule obtenue ne dépend pas du choix du point  $M$  sur la sphère  $\Sigma$ . De la même manière, prenons un plan  $Q$  d'équation  $ax + by + cz = d$  de  $E^3$ . Le fait que  $k = 0$  implique que  $\sigma = \vec{n}$ . En tout point  $M(x_0; y_0; z_0)$  de  $Q$ , le vecteur normal est  $\vec{N}(a; b; c)$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  soient choisies de telle façon que  $\vec{N}$  soit unitaire. Nous avons  $\vec{n}(\lambda; a; b; c; \rho)$ . Comme précédemment, au point  $M$  correspond le point  $m$ . Le plan tangent  $T_m(H)$  est

engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}(1; x_0; y_0; z_0; 0)$ . En résolvant le système :

$$\begin{cases} L(\vec{u}, \vec{n}) = 0 \\ L(\vec{v}, \vec{n}) = 0 \end{cases}$$

nous obtenons alors le vecteur unitaire :

$$\vec{n}(d; a; b; c; d)$$

Nous pouvons montrer qu'inversement, un point  $\sigma(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$  de  $\Lambda^4$ , tel que  $x_0 \neq x_4$  correspond à une sphère  $\Sigma$  de  $E^3$  dont le centre a pour coordonnées :

$$\left( \frac{x_1}{x_0 - x_4}; \frac{x_2}{x_0 - x_4}; \frac{x_3}{x_0 - x_4} \right)$$

et dont le rayon est :

$$\frac{1}{x_0 - x_4}$$

Un point  $\rho(x_0; x_1; x_2; x_3; x_0)$  de  $\Lambda^4$  correspond à un plan  $Q$  de  $E^3$  d'équation :

$$x_1x + x_2y + x_3z = x_0$$

Des formules analogues, sans tenir compte de l'orientation des sphères, ont été établies par M. Paluszny [PB98] en travaillant dans un espace projectif  $RP_4$ .

### 3.4 Représentation des cyclides de Dupin dans $\Lambda^4$

Nous avons vu qu'une CD4 est l'enveloppe d'une famille de sphères à un paramètre de deux manières différentes. Il lui correspond donc deux courbes dans l'espace des sphères  $\Lambda^4$ . R. Langevin et P. Walczak [LW08] ont montré qu'une CD4 peut être représentée par deux coniques dans  $\Lambda^4$  qui sont soit un cercle, soit une hyperbole, soit une parabole. Chaque conique, définie par une des deux familles de sphères dont la CD4 est l'enveloppe, correspond à l'intersection de la quadrique  $\Lambda^4$  avec un 2-plan affine. Nous avons alors déterminé le type de la conique  $\Gamma$ , section de  $\Lambda^4$  par un plan  $P$ , selon le type de  $P$ , table 4. La démonstration consiste à calculer la forme de Lorentz d'un vecteur  $\vec{OM}$ , tel que  $M$  appartienne à  $P$  :

$$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

où  $M_1 \in P$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant deux vecteurs orthogonaux qui engendrent  $P$ . En déterminant la section de  $\Lambda^4$  par  $P$ , nous

type du plan P	type de la conique $\Gamma$
espace	cercle
temps	hyperbole
lumière	parabole ou 2 droites parallèles (si $O \in P$ )

Table 4: Type de la conique  $\Gamma$  selon le type de  $P$

obtenons alors l'équation cartésienne d'une conique en fonction des coordonnées  $\alpha$  et  $\beta$  dans le repère  $(M_1, \vec{u}, \vec{v})$ , de la forme :

$$\alpha^2 L(\vec{u}) + \beta^2 L(\vec{v}) + 2\alpha L(\overrightarrow{OM_1}, \vec{u}) + 2\beta L(\overrightarrow{OM_1}, \vec{v}) + L(\overrightarrow{OM_1}) - 1 = 0 \quad (16)$$

Les rôles de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant symétriques, fixons  $\vec{u}$  comme étant vecteur de type espace. Nous obtenons les trois types de coniques précitées selon que  $\vec{v}$  est de type espace, de type temps ou de type lumière (table 3).

### 3.4.1 Détermination des deux types de coniques représentant une CD4 dans $\Lambda^4$

Prenons la cyclide de Dupin, centrée à l'origine, de paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  et la famille de sphères orientées  $S_1(\theta)$  centrées sur l'ellipse (équation (1)) de rayon  $r_1(\theta)$ <sup>†</sup>,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , formule (10). Les points  $\sigma_1(\theta)$  de la conique  $\Gamma_\theta$  correspondant dans  $\Lambda^4$  sont de la forme :

$$\sigma_1(\theta) \begin{pmatrix} \frac{b^2 - \mu^2 + 2c\mu \cos(\theta) + 1}{2r_1(\theta)} \\ \frac{a \cos(\theta)}{r_1(\theta)} \\ \frac{b \sin(\theta)}{r_1(\theta)} \\ 0 \\ \frac{b^2 - \mu^2 + 2c\mu \cos(\theta) - 1}{2r_1(\theta)} \end{pmatrix}$$

Considérons trois points, par exemple  $A = \sigma_1(\frac{\pi}{2})$ ,  $B = \sigma_1(\frac{-\pi}{2})$  et  $C = \sigma_1(\pi)$  et déterminons  $P$  grâce à ces trois points. Soit  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} \in \vec{P}$  tel que  $L(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ . Le plan  $P$  est engendré par les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Après calculs, nous obtenons :

$$L(\vec{u}) = \frac{2b^2}{(\mu + c)\mu} \quad (17)$$

et :

$$L(\vec{v}) = \frac{2b^2(\mu - c)}{c^2\mu} \quad (18)$$

$\vec{u}$  est de type espace tandis que le type de  $\vec{v}$  dépend des valeurs respectives de  $\mu$  et  $c$ .  $\Gamma_\theta$  sera donc un cercle lorsque la CD4 sera une CD4A, CD4I ou CD4In, une hyperbole lorsque la CD4 sera une CD4E et une parabole lorsque la CD4 sera une CD4En (table 5).

<sup>†</sup>. Il suffit d'oter les valeurs absolues de la formule (10)

Les points  $\sigma_2(\psi)$  de la conique  $\Gamma_\psi$  correspondant à la seconde famille de sphères orientées  $S_2(\psi)$  centrées sur l'hyperbole (équation (5)) de rayon  $r_2(\psi)$ <sup>‡</sup>, formule (11), sont, quant à eux, de la forme :

$$\sigma_2(\psi) \begin{pmatrix} \frac{1}{2r_2(\psi)} \left( -b^2 - \mu^2 + \frac{2a\mu}{\cos(\psi)} + 1 \right) \\ \frac{c}{r_2(\psi) \cos(\psi)} \\ 0 \\ \frac{b \sin(\psi)}{r_2(\psi) \cos(\psi)} \\ \frac{1}{2r_2(\psi)} \left( -b^2 - \mu^2 + \frac{2a\mu}{\cos(\psi)} - 1 \right) \end{pmatrix}$$

pour  $\psi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . Si  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ , les sphères correspondantes sont les plans  $P_2(\psi)$  (équation (6)) et, dans ce cas, nous avons :

$$\sigma_2(\psi) \left( \mu; \frac{c}{a}; 0; \pm \frac{b}{a}; \mu \right)$$

De même que pour la première famille, nous pouvons déterminer deux vecteurs orthogonaux  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$  engendrant le plan  $P$  contenant  $\Gamma_\psi$  en partant de trois points particuliers de  $\Gamma_\psi$  :  $\sigma_2(\frac{\pi}{2})$ ,  $\sigma_2(\frac{-\pi}{2})$  et  $\sigma_2(\pi)$ . Nous obtenons alors  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$  tels que :

$$L(\vec{s}) = \frac{2b^2}{(\mu + a)a} \quad (19)$$

et :

$$L(\vec{t}) = \frac{2b^2(a - \mu)}{\mu^2 a} \quad (20)$$

$\vec{s}$  est de type espace tandis que le type de  $\vec{t}$  dépend des valeurs respectives de  $a$  et  $\mu$ .  $\Gamma_\psi$  sera un cercle lorsque la CD4 sera une CD4A, CD4E et CD4En, une hyperbole lorsque la CD4 sera une CD4I et une parabole lorsque la CD4 sera une CD4In (table 5).

Nous pouvons remarquer que le cercle correspond aux familles de sphères sans point fixe réel, que l'hyperbole correspond aux familles de sphères ayant deux points fixes réels et que la parabole correspond aux familles de sphères ayant un seul point fixe réel. Ces points fixes sont, en fait, des sphères réduites à un point et donc les points singuliers de la cyclide. Dans l'espace des sphères, ils correspondent aux points à l'infini (directions lumières).

De plus, lorsque nous connaissons l'une des deux familles de sphères, nous savons déterminer l'enveloppe. Nous pouvons donc déterminer la seconde famille de sphères à partir de la première. Il en est de même dans  $\Lambda^4$ , lorsqu'une des

<sup>‡</sup>. Il suffit d'oter les valeurs absolues de la formule (11)

coniques représentant une CD4 est connue, il est possible de déterminer l'autre. En effet, notons  $\Gamma_1$  la conique représentant une CD4 dans  $\Lambda^4$  et  $P_1$  le plan affine contenant  $\Gamma_1$ . Soit  $M_1$  tel que la droite  $(OM_1)$  soit orthogonale à  $P_1$ . Notons  $P_2$  le plan contenant la seconde conique  $\Gamma_2$  représentant la CD4 dans  $\Lambda^4$ , figure 19.  $P_2$  est orthogonal à l'hyperplan engendré par  $P_1$  et  $\overrightarrow{OM_1}$ ,  $P_2$  contient le point  $M_2$  de  $(OM_1)$  et nous avons  $L(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = 1$ , [LW08]. Ainsi  $P_2$  est totalement déterminé et  $\Gamma_2$  est la section de  $\Lambda^4$  par  $P_2$ . Dans la figure 19, nous coupons la variété de dimension 4,  $\Lambda^4$  par deux 2-plans. C'est pourquoi, les cercles d'intersection sont représentés disjoints du contour apparent de  $\Lambda^4$ .

### 3.4.2 Détermination des paramètres d'une cyclide à partir des coniques de $\Lambda^4$

Supposons connue l'une des deux coniques  $\Gamma_\theta$  ou  $\Gamma_\psi$  et notons-la  $\Gamma_1$ . La seconde, notée  $\Gamma_2$ , est complètement déterminée par la connaissance de  $\Gamma_1$ . Le type des coniques détermine le nombre de points singuliers mais ne permettent pas de déterminer le type de la CD4 : il est nécessaire de connaître la conique contenant les points correspondant aux plans  $P_2(\psi)$  §,  $\psi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ , et identifier  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  avec  $\Gamma_\theta$  et  $\Gamma_\psi$ . Ainsi, nous pouvons déterminer le type de la CD4 (table 5). Dans le cas où la CD4 est une CD4A, CD4I, CD4In ou CD4En, il suffit de déterminer les deux points de  $\Gamma_\theta$  correspondants aux deux sphères centrées sur l'ellipse génératrice de rayons maximal et minimal pour obtenir les deux cercles principaux de la CD4 dans  $P_y$  (figures 11 et 12). Dans le cas où la CD4 est une CD4E, il suffit de déterminer les points correspondants à la sphère de rayon maximal sur chacune des branches de l'hyperbole  $\Gamma_\theta$  (figure 13). Enfin, il reste à calculer les paramètres de la CD4 selon son type et ses deux cercles principaux dans  $P_y$  (table 1). L'algorithme 1 résume la méthode.

### 3.5 Application aux algorithmes de jointure par des cyclides de Dupin

Druoton et al. donnent un algorithme de jointure entre deux sphères par des cyclides de Dupin considérant trois sphères orientées de la même famille dont la cyclide est l'enveloppe, [DGLS10]. Le premier exemple ci-après utilise le passage dans l'espace des sphères pour effectuer le même travail. Nous pouvons aussi généraliser cette méthode en effectuant une jointure par une CD4 entre une sphère  $S_0$  d'une surface canal  $Surf_0$  et un plan  $P_0$ , jointure imposée par un cercle de courbure  $C_0$  de la surface canal sur  $S_0$  (lorsque la jointure est possible). On considère que la sphère  $S_0$  et le plan  $P_0$  appartiennent à une des familles de sphères dont la CD4 est l'enveloppe et que  $C_0$  est un cercle de courbure de la CD4. Bien évidemment, puisque  $P_0$  est un plan, il s'agira de la famille de sphères  $S_2(\psi)$ , mais nous aimerions plus tard

§. points de  $\Lambda^4$  tels que  $x_0 = x_4$

---

**Algorithme 1** Détermination des paramètres d'une CD4 connue par l'une des deux coniques de  $\Lambda^4$  correspondante à une des deux familles de sphères dont elle est l'enveloppe

---

**Entrée :** Une conique  $\Gamma_1$  de  $\Lambda^4$  décrivant la CD4

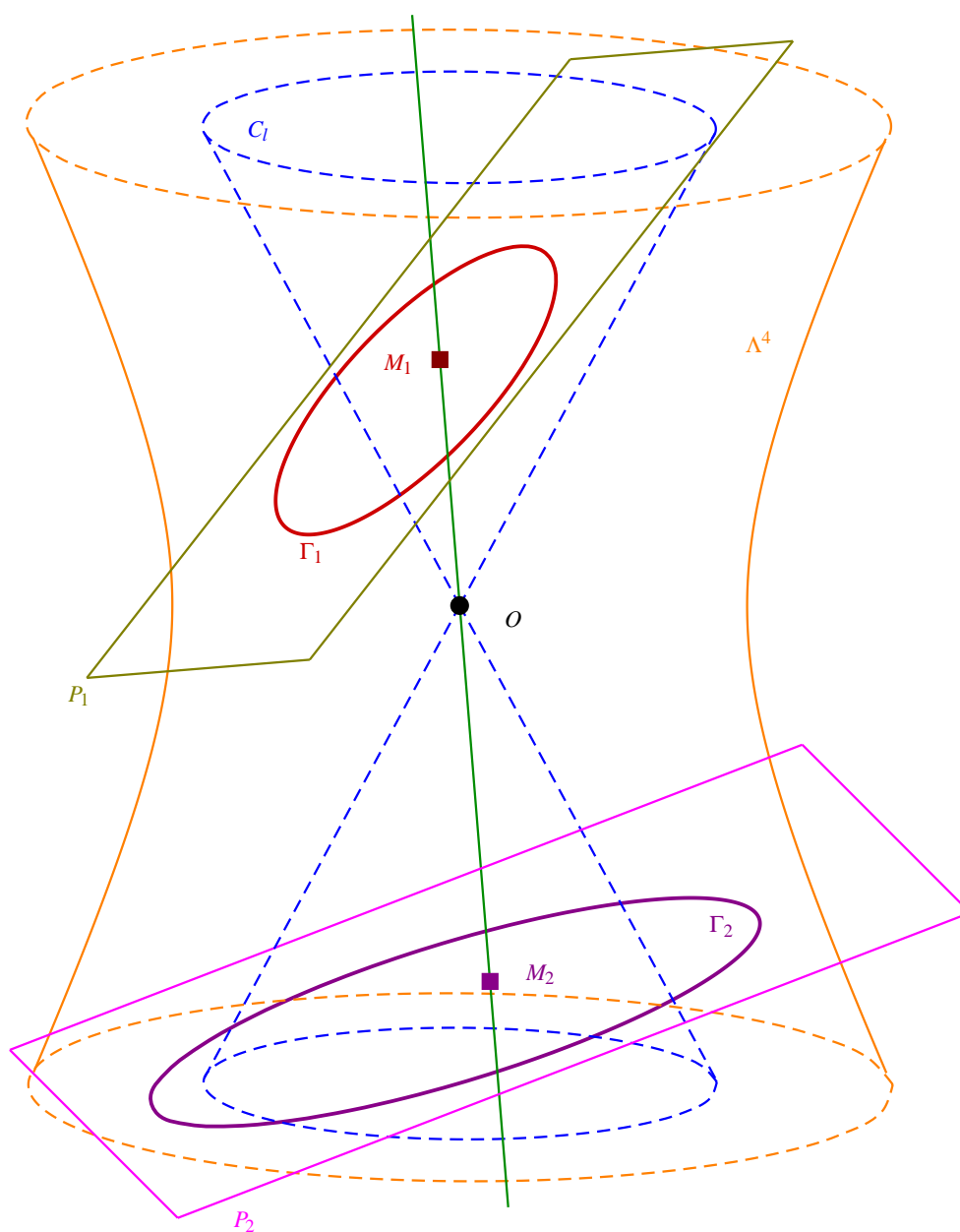
1. Détermination de  $\Gamma_2$ , seconde conique décrivant la CD4, selon  $\Gamma_1$
2. Identification de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  avec  $\Gamma_\theta$  et  $\Gamma_\psi$  :
  - si  $P_2(\psi) \in \Gamma_1$ ,  $\psi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\Gamma_\psi = \Gamma_1$  et  $\Gamma_\theta = \Gamma_2$
  - sinon,  $\Gamma_\psi = \Gamma_2$  et  $\Gamma_\theta = \Gamma_1$
3. Détermination du type de la CD4 selon  $\Gamma_\theta$  et  $\Gamma_\psi$  (table 5)
4. Détermination des cercles principaux dans  $P_y$ , selon le type de la CD4
5. Calcul des paramètres de la CD4 selon les cercles principaux dans  $P_y$  (table 1)

**Sortie :** Les paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  de la CD4 représentée dans  $\Lambda^4$  par  $\Gamma_1$

---

joindre deux surfaces canal par un ou plusieurs morceaux de cyclides de Dupin. La jointure, dans ce cas, sera effectuée entre deux sphères auxquelles nous ajoutons la contrainte du cercle de jointure sur l'une d'elle et nous ne saurons pas à quelle famille ces sphères appartiendront. Il sera donc nécessaire d'effectuer le point 2 de l'algorithme 1, ce qui n'est pas le cas dans les deux derniers exemples.

Il est aussi nécessaire de détailler quelques points sur la méthode de jointure développée ici mais qui ne seront pas détaillés dans les exemples suivants. La jointure finale est obtenue en ne conservant qu'une partie de la cyclide déterminée par l'algorithme 1. A partir des points correspondants aux sphères principales (sphères contenant les cercles principaux) déterminées précédemment, nous pouvons paramétrer la conique représentant la famille de sphères contenant celles à joindre. Cette paramétrisation est la paramétrisation naturelle utilisée dans les formules du paragraphe 2.2 pour décrire une cyclide de Dupin en tant que famille de sphères à un paramètre. Ainsi, il suffit de considérer la conique passant par les points correspondants aux sphères à joindre et de ne sélectionner que la partie utile à la jointure, c'est-à-dire, la partie située entre deux points et passant par le troisième dans le cas d'une jointure imposée par trois sphères ou la partie située entre deux points et imposée par le sens du vecteur tangent (représentant le cercle caractéristique de la cyclide de Dupin de jointure) dans le cas d'une jointure imposée par un cercle de jointure. Dans  $E^3$ , cela revient à restreindre l'un des deux paramètres  $\theta$  ou  $\psi$  à un intervalle fermé contenu dans  $[0, 2\pi]$ . De plus, une fois les paramètres de la cyclide de Dupin de jointure et la partie utile déterminée, nous devons enfin déterminer les rotations et translations à effectuer pour placer la jointure dans le bon repère. Ces transformations sont calculées à partir du repère de la



**Figure 19:** Représentations d'une cyclide de Dupin dans l'espace des sphères

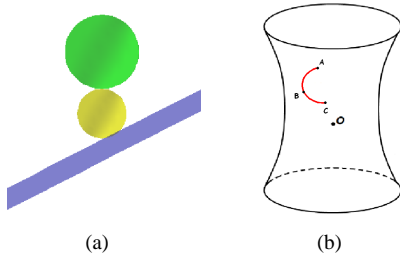
cyclide de Dupin, totalement déterminé par les sphères principales (centre et axes de symétrie).

### 3.5.1 Jointure entre deux sphères, imposée par une troisième

Dans le reste de l'article, le terme sphère pourra désigner une sphère ou un plan. Les trois sphères sont considérées de la même famille de sphères dont la cyclide est l'enveloppe. Pour effectuer la jointure entre deux d'entre elles, il suffit de déterminer la partie de la conique dans  $\Lambda^4$  qui joint les deux points correspondants. Cette conique est déterminée par la section de  $\Lambda^4$  par le plan contenant les trois points correspondants aux trois sphères. Ensuite, il reste à déterminer le type de la CD4 et ses paramètres en utilisant l'algorithme 1.

#### Exemple de jointure entre une sphère et un plan

Nous cherchons à joindre la sphère  $S_0$  de centre  $\Omega_0(0;0;5)$  et de rayon  $r_0 = 3$  avec le plan  $P_0$  d'équation  $z = \frac{1}{2}x - 3$ . Cette jointure est imposée par la sphère  $S_1$  de centre  $\Omega_1(0;0;0)$  et de rayon  $r_1 = 2$  dans le sens où la cyclide de jointure devra aussi être tangente à  $S_1$  (figure 20).



**Figure 20:** (a) Les deux sphères ainsi que le plan à joindre. (b) Les représentations des trois sphères et du morceau de cyclide effectuant la jointure dans l'espace des sphères.

Les points correspondants à  $S_0$ ,  $S_1$  et  $P_0$  dans  $\Lambda^4$  sont respectivement les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de coordonnées :

$$A \left( \frac{17}{6}; 0; 0; \frac{5}{3}; \frac{5}{2} \right)$$

$$B \left( \frac{-3}{4}; 0; 0; 0; \frac{-5}{2} \right)$$

$$C \left( \frac{6\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}; 0; \frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{6\sqrt{5}}{5} \right)$$

Nous obtenons le plan  $P_1$  contenant  $A$ ,  $B$  et  $C$ , engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de composantes approchées :

$$\vec{u} (-1, 79; 0; 0; -0, 83; -1, 87)$$

$$\vec{v} (1, 22; 0, 21; 0; -0, 61; 1, 43)$$

avec  $L(\vec{u}) = L(\vec{v}) = 1$ .

$P_1$  est engendré par deux vecteurs de type espace. La conique, section de  $\Lambda^4$  par  $P_1$  sera donc un cercle, noté  $C_1$ . En déterminant l'autre conique, nous obtenons un deuxième cercle de  $\Lambda^4$ ,  $C_2$ , contenu dans le plan  $P_2$  engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$  de composantes approchées :

$$\vec{s} (0, 04; 0, 15; -0, 99; 0, 03; 0, 02)$$

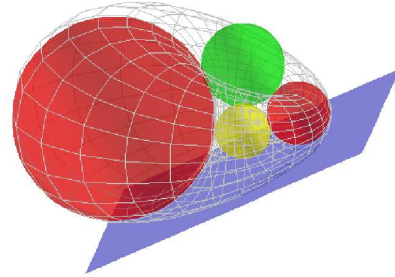
$$\vec{t} (0, 25; 0, 99; 0, 03; 2, 14)$$

avec  $L(\vec{s}) = L(\vec{t}) = 1$ .

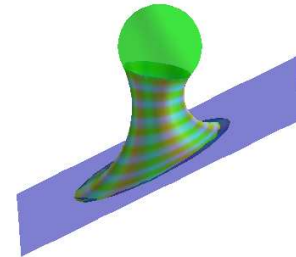
La CD4 de jointure est une CD4A. Après quelques calculs, le cercle  $C_1$  correspond à  $\Gamma_\psi$  et  $C_2$  à  $\Gamma_\theta$ . En calculant les rayons minimal et maximal des sphères correspondantes aux points de  $C_2$ , nous obtenons les deux sphères principales nous permettant ainsi de déterminer les paramètres de la CD4A de jointure (figure 21) :

$$a \simeq 6,67, c \simeq 2,52 \text{ et } \mu \simeq 4,80$$

Nous obtenons la jointure illustrée en figure 22.



**Figure 21:** Les deux sphères principales et la CD4A de jointure



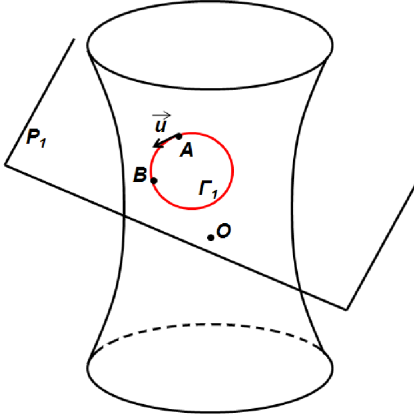
**Figure 22:** La jointure réalisée entre la sphère et le plan par une partie de la CD4A précédente

### 3.5.2 Jointure entre une surface canal et un plan par une CD4

De la même manière que dans la partie précédente, nous allons déterminer les coniques représentant la CD4 dans



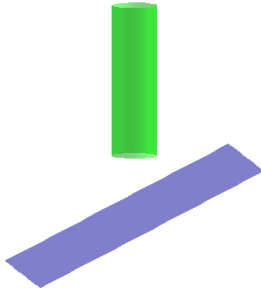
l'espace des sphères joignant la sphère  $S_0$  de la surface canal  $Surf_0$  le long du cercle caractéristique  $C_0$  et le plan  $P_0$ . La jointure est imposée par  $C_0$ . Dans  $\Lambda^4$ , cela revient à imposer le vecteur tangent à la courbe représentant la surface canal au point de jointure. Ainsi, le plan contenant  $\Gamma_1$ , conique représentant la CD4, est déterminé par deux points et un vecteur (figure 23).



**Figure 23:** représentation d'une CD4 dans  $\Lambda^4$  par une conique déterminée par deux points et un vecteur

#### Exemple de jointure entre un cylindre de révolution et un plan

Nous cherchons à joindre un plan  $P_0$  avec un cylindre de révolution  $Cyl_0$  le long d'un cercle de courbure  $C_0$  appartenant à la sphère  $S_0$  du cylindre (figure 24).  $P_0$  a pour équation



**Figure 24:** Le cylindre de révolution et le plan à joindre

tion  $z = \frac{1}{2}x - 3$ . Le cylindre  $Cyl_0$  a pour axe  $(Oz)$  et pour rayon  $r_0 = 3$  et  $S_0$  a pour centre  $\Omega_0(0; 0; 5)$  et pour rayon  $r_0$ . Les points correspondants à  $S_0$  et  $P_0$  dans  $\Lambda^4$  sont respectivement les points A et B :

$$A \left( \frac{17}{6}; 0; 0; \frac{5}{3}; \frac{5}{2} \right)$$

$$B \left( \frac{6\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}; 0; \frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{6\sqrt{5}}{5} \right)$$

Le vecteur  $\vec{u}$ , tangent à la courbe représentant les sphères intérieures au cylindre dans  $\Lambda^4$  en A est obtenu en dérivant l'équation de cette dernière au point A :

$$\vec{u}(5; 0; 0; 1; 5)$$

Le plan  $P_1$  est engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  :

$$\vec{v}(1, 76; 0, 18; 0, 00; -0, 68; 1, 90)$$

et  $L(\vec{u}) = L(\vec{v}) = 1$ .

$P_1$  est de type espace, la conique sera donc un cercle  $C_1$ . En déterminant l'autre conique, nous obtenons un autre cercle  $C_2$ , contenu dans le plan  $P_2$  engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$ , de composantes approchées :

$$\vec{s}(0, 34; 0, 31; -0, 95; 0, 09; 0, 32)$$

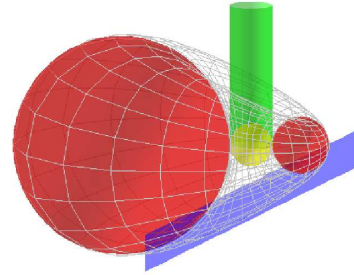
$$\vec{t}(1, 06; 0, 97; 0, 30; 0, 30; 1, 00)$$

avec  $L(\vec{s}) = L(\vec{t}) = 1$ .

La CD4 de jointure est une CD4A. De la même manière que dans l'exemple précédent, nous déterminons les paramètres de la CD4A en utilisant l'algorithme 1, figure 25 :

$$a \simeq 12, 69, c \simeq 5, 68 \text{ et } \mu \simeq 9, 69$$

Nous obtenons la jointure illustrée en figure 26.



**Figure 25:** Les deux sphères principales et la CD4A de jointure

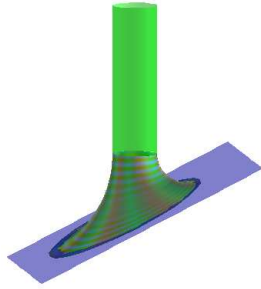
#### Exemple de jointure entre une cyclide de Dupin et un plan

Nous cherchons à joindre une cyclide de Dupin notée  $Cycl_0$  de paramètres  $a_0 = 6$ ,  $c_0 = 2$ ,  $\mu_0 = 4$ , de centre de coordonnées  $(10; 10; 0)$ , enveloppe des sphères  $S_1(\theta)$  de centres

$$\Omega_1(\theta)(a_0 \cos(\theta) + 10; b_0 \sin(\theta) + 10; 0)$$

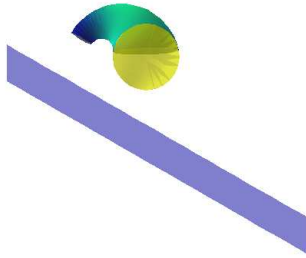
et de rayon

$$r_1(\theta) = \mu_0 - c_0 \cos(\theta)$$



**Figure 26:** La jointure réalisée entre le cylindre et le plan avec une partie de la CD4A précédente

pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ , et le plan  $P_0$  d'équation  $y = 1$ . La jointure sera effectuée le long du cercle caractéristique  $C_0$  de  $Cycl_0$  appartenant à la sphère  $S_0 = S_1 \left( \frac{5\pi}{6} \right)$ , de centre  $\Omega_0 = \Omega_1 \left( \frac{5\pi}{6} \right)$  et de rayon  $r_0 = r_1 \left( \frac{5\pi}{6} \right)$ , figure 27.



**Figure 27:** La cyclide de Dupin et le plan à joindre

Les points correspondants à  $S_0$  et  $P_0$  dans  $\Lambda^4$  sont respectivement les points  $A$  et  $B$  :

$$A(-13, 59; -0, 84; -2, 24; 0, 00; -13, 41)$$

$$B(0; 0; 1; 0; 0)$$

Le vecteur  $\vec{u}$ , tangent à la courbe représentant les sphères intérieures de la cyclide  $Cycl_0$  dans  $\Lambda^4$  en  $A$  est :

$$\vec{u}(-17, 07; -0, 68; -1, 26; 0, 00; -17, 04)$$

Le plan  $P_1$  est engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  :

$$\vec{v}(-3, 58; -0, 00; 0, 74; 0, 00; -3, 66)$$

et  $L(\vec{u}) = L(\vec{v}) = 1$ .

$P_1$  est de type espace, la conique sera donc un cercle  $C_1$ . En déterminant l'autre conique, nous obtenons un autre cercle  $C_2$ , contenu dans le plan  $P_2$  engendré par les vecteurs orthogonaux  $\vec{s}$  et  $\vec{t}$  :

$$\vec{s}(-1, 98; -0, 98; 0, 00; 0, 42; -1, 94)$$

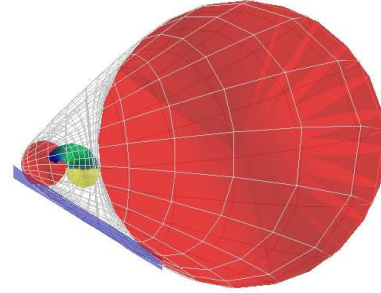
$$\vec{t}(0, 92; 0, 46; 0, 00; 0, 91; 0, 91)$$

avec  $L(\vec{s}) = L(\vec{t}) = 1$ .

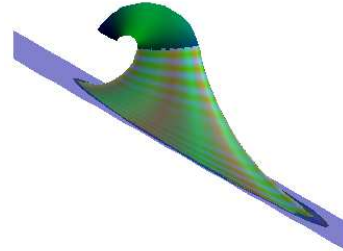
La CD4 de jointure est une CD4A. De la même manière que les exemples précédents, nous déterminons les paramètres de la CD4A en utilisant l'algorithme 1, figure 28 :

$$a \simeq 33, 98, c \simeq 20, 72 \text{ et } \mu \simeq 28, 58$$

Notons que les rôles des plans de symétrie de la CD4  $Cycl_0$  et de la CD4 de jointure sont inversés. Nous obtenons la jointure illustrée en figure 29.



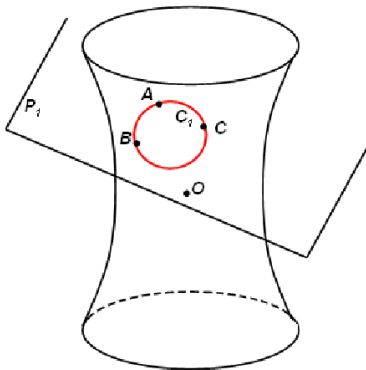
**Figure 28:** Les deux sphères principales et la CD4A de jointure



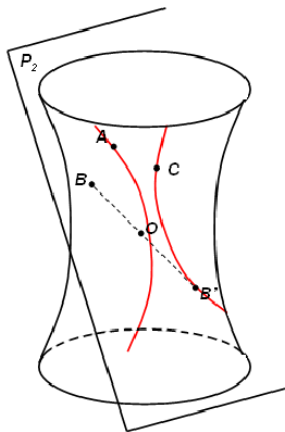
**Figure 29:** La jointure réalisée entre la cyclide de Dupin  $Cycl_0$  et le plan avec une partie de la CD4A précédente

Nous pouvons remarquer que les orientations respectives des sphères jouent un rôle important dans le type de jointure car elles déterminent le type de la conique dans  $\Lambda^4$  et donc le type de la CD4 de jointure. En effet, considérons la CD4 représentée par le cercle  $C_1$  de  $P_1$ , illustré en figure 30, passant par les trois points  $A, B$  et  $C$ , représentant trois sphères orientées  $S_A, S_B$  et  $S_C$  de  $E^3$ , figure 31(a). Soit  $S'_B$  la sphère de même centre, de même rayon mais d'orientation inverse que  $S_B$  et  $B'$  le point correspondant dans  $\Lambda^4$ . Nous savons que  $B' \in (OB)$  [LW08] ( $B'$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $O$ ). La CD4 joignant les trois sphères orientées  $S_A, S'_B$  et  $S_C$ , figure 31(b), est représentée par la section de  $\Lambda^4$  par le plan  $P_2$ , engendré par  $A, B'$  et  $C$ . La conique obtenue peut être une parabole, un autre cercle ou encore une hyperbole

comme illustrée en figure 32. Cette section dépend du type du plan et donc de  $B'$ .



**Figure 30:** Représentation d'une CD4 dans  $\Lambda^4$  par un cercle déterminé par trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , représentant trois sphères orientées d'une même famille

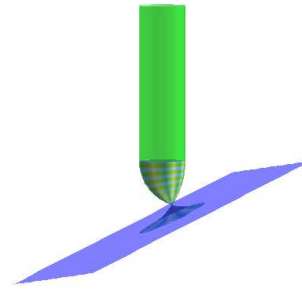


**Figure 32:** Illustration de l'influence de l'orientation d'une des sphères orientées déterminant la CD4 dans  $\Lambda^4$ . La conique devient une hyperbole définie par  $A$ ,  $B'$  et  $C$  au lieu du cercle de la figure 30 défini par  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

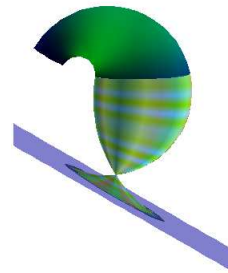
Pour illustrer, nous avons changé l'orientation des sphères  $S_0$  dans les deux derniers exemples, nous obtenons une jointure par une CD4I au lieu d'une CD4A, figures 33 et 34.

#### 4 Conclusion et perspectives

Depuis le 19ème siècle, les cyclides de Dupin, comme surfaces de  $\mathbb{R}^3$  ou comme enveloppe de sphères ont suscité

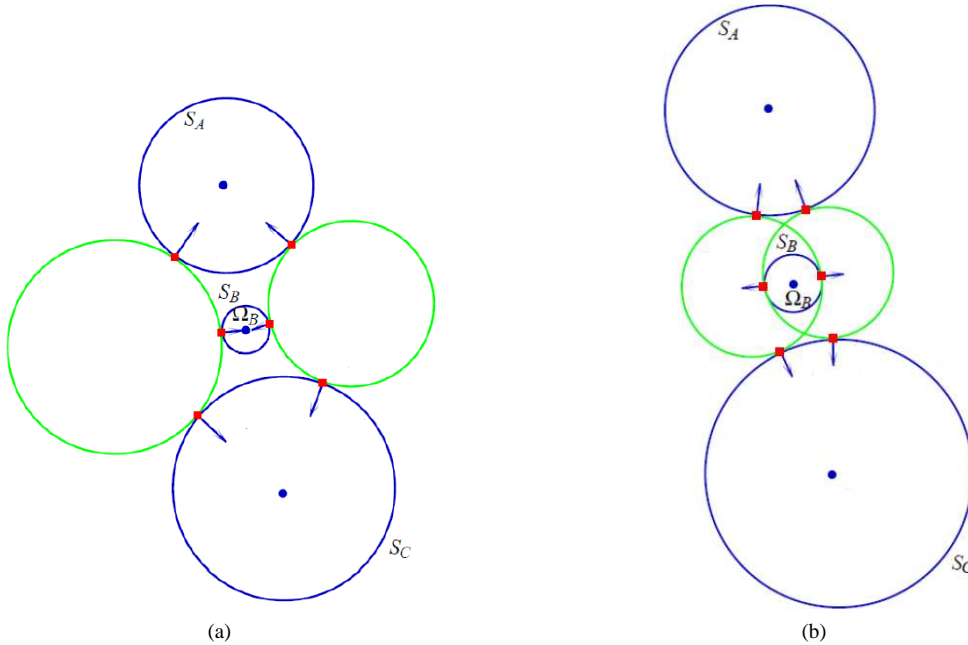


**Figure 33:** Jointure entre le cylindre de révolution et le plan par une CD4I



**Figure 34:** Jointure entre la CD4A et le plan par une CD4I

l'intérêt des mathématiciens. Elles sont de plus en plus utilisées pour effectuer des jointures. Le travail connu à ce sujet ne considère que la représentation en 3D des cyclides de Dupin. Nous les voyons comme des enveloppes de sphères à un paramètre de deux manières différentes et nous les étudions dans l'espace des sphères. Leurs représentations dans cet espace est connue sous forme de coniques particulières, sections d'une quadrique par des plans affines. Nous donnons ici les formules explicites permettant la correspondance entre les sphères de  $\mathbb{R}^3$  et les points de l'espace des sphères et particulièrement les sphères définissant une cyclide de Dupin et la conique correspondante dans l'espace des sphères. Cette étude nous a amené à déterminer trois différents types de coniques représentant une famille de sphères d'une cyclide, types qui dépendent de la nature du plan (espace, lumière ou temps) qui la contient dans l'espace des sphères et du nombre de points singuliers de la cyclide sur cette famille. Après avoir mis en relation ces différentes caractéristiques, nous les utilisons pour effectuer des jointures entre surfaces canal et plans, jointures imposées par une sphère ou un cercle de jointure. Dans l'espace des sphères, cela revient à déterminer une section d'une quadrique par un plan lui même déterminé par trois points ou deux points et un vecteur, et de ne conserver que la partie située entre les deux points correspondants aux sphères de jointure, partie contenant le troisième point ou imposée par le sens du



**Figure 31:** (a) : Coupe de la CD4, enveloppe de la famille contenant les sphères  $S_A$ ,  $S_B$  et  $S_C$ , dans  $E^3$ . (b) : Illustration du changement d'orientation de la sphère  $S_B$  sur la CD4 enveloppe dans  $E^3$ . Dans la figure (a), les vecteurs normaux de la sphère  $S_B$  sont dirigés vers le centre  $\Omega_B$  alors que dans la figure (b), ils sont de sens inverse. Ce changement d'orientation transforme la CD4A en CD4I.

vecteur tangent. Des jointures 3D assez complexes sont alors rendues beaucoup plus simples en utilisant cette méthode.

Nous projetons d'effectuer prochainement des jointures de ce type entre deux surfaces canal quelconques, ce qui reviendra à effectuer des jointures entre les deux sphères extrêmes de chacune des surfaces canal, imposées par deux cercles de jointure. Ces cercles étant quelconques, en général, la jointure ne pourra pas s'effectuer avec une seule cyclide puisque deux points et deux vecteurs définissent, en général, un espace de dimension trois. Nous chercherons à utiliser deux jointures simples en utilisant une sphère intermédiaire. Le point auquel il faudra faire attention, dans ce cas, sera la disposition respective des deux jointures simples si nous voulons une jointure finale G1 (singularité de la jointure finale si les deux jointures simples se chevauchent).

Enfin, nous aimerions étudier la construction itérative des cercles caractéristiques d'une jointure par une cyclide de Dupin par la modélisation itérative de l'arc de conique de l'espace des sphères correspondant. Il faudra déterminer une méthode itérative de construction d'arcs d'hyperboles puisque la méthode est déjà connue lorsqu'il s'agit de cercles et de paraboles. Cependant, dans le cas où les sphères seront sur deux branches distinctes de l'hyperbole, nous pourrions être obligés d'utiliser le formalisme des points massiques définis par M. Fiorot [FJ89, FJ92]. Nous avons remarqué que les coniques dont nous parlons ici sont en fait toutes des "cer-

cles" pour la forme de Lorentz et nous aimerions généraliser la construction itérative de cercles (en utilisant les courbes de Bézier et les algorithmes de type de Casteljau) aux "cercles Lorentz". Ainsi, il restera à déterminer chaque cercle caractéristique grâce à un point de la conique et du vecteur tangent en ce point. Cette construction itérative permettra de visualiser directement les résultats lors de jointures par des cyclides de Dupin. En effet, les cercles caractéristiques affichés finalement seront déjà dans le bon repère et sur la partie utile de la jointure. Nous n'aurons plus à déterminer la partie utile ni les transformations pour placer la jointure dans le bon repère et nous n'aurons plus besoin de connaître ni calculer les paramètres de la cyclide de jointure.

### Remerciements

Les auteurs remercient vivement les relecteurs de R.E.F.I.G pour leurs remarques avisées qui ont permis d'améliorer la qualité de cet article.

### Références

- [AD97a] ALLEN S., DUTTA D. : Cyclides in pure blending I. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 1 (1997), 51–75. ISSN 0167-8396.

- [AD97b] ALLEN S., DUTTA D. : Cyclides in pure blending II. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 1 (1997), 77–102. ISSN 0167-8396.
- [Ber78] BERGER M. : *Géométrie 2*, 2ème ed., vol. 5. Cedic-Nathan, 1978.
- [BG92] BERGER M., GOSTIAUX B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. PUF, avril 1992.
- [Cay73] CAYLEY A. : On the cyclide. *Quartely Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 12 (1873), 148–165.
- [Cec92] CECIL T. : *Lie sphere geometry*. Universitext, 1992.
- [Dar87] DARBOUX G. : *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, vol. 1. Gauthier-Villars, 1887.
- [Dar17] DARBOUX G. : *Principes de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [DGLS10] DRUOTON L., GARNIER L., LANGEVIN R., SULPICE F. : Jointure entre deux sphères par des cyclides de Dupin. *GTMG2010* (2010).
- [DMP93] DUTTA D., MARTIN R. R., PRATT M. J. : Cyclides in surface and solid modeling. *IEEE Computer Graphics and Applications*. Vol. 13, Num. 1 (janvier 1993), 53–59.
- [Dup22] DUPIN C. P. : *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc.* Bachelier, Paris, 1822.
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, vol. RMA 24. Masson, 1992.
- [For12] FORSYTH A. R. : *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.
- [Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [GFN04] GARNIER L., FOUFOU S., NEVEU M. : Blending of surfaces of revolution and planes by dupin cyclides. In *Geometric Modeling and Computing [Proc. book of the 8th SIAM Conference on Geometric Design and Computing, Seattle, USA, Nov. 2003]* (Nashville, USA, 2004), Nashboro Press.
- [HJ03] HERTRICH-JEROMIN U. : Introduction to Möbius differential geometry. *London Mat. Soc. Lecture note, Cambridge University Press*. Vol. xii (2003), 300.
- [LO05] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformally invariant energies of knots. *J. Institut Math. Jussieu*. Vol. 4 (2005), 219–280.
- [LO08] LANGEVIN R., O'HARA J. : Conformal arc-length via osculating circles. *Rapport de recherche IMB*. Vol. 531 (janv 2008).
- [LW08] LANGEVIN R., WALCZAK P. : Conformal geometry of foliations. *Geom Dedicata*. Vol. 132, Num. 5 (2008), 135–178.
- [Mar82] MARTIN R. R. : *Principal patches for computational geometry*. PhD thesis, Engineering Department, Cambridge University, 1982.
- [PB98] PALUSZNY M., BOEHM W. : General cyclides. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 15, Num. 7 (1998), 699–710.
- [Pra97] PRATT M. J. : Quartic supercyclides I : Basic theory. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 7 (1997), 671–692.



## A Annexe : Récapitulatif des propriétés des cyclides de Dupin

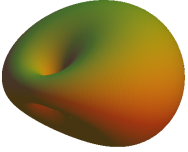
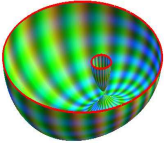
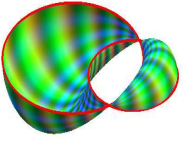
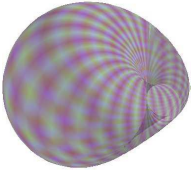
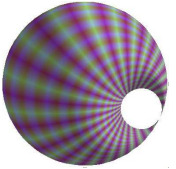
Dénomination, notation	Coniques des centres des familles de sphères génératrices	Points fixes	Coniques correspondantes dans $\Lambda^4$	Relation entre les paramètres	Points singuliers de la CD4	Illustrations
Cyclide en anneau (CD4A)	Ellipse	2 points imaginaires	Cercle	$ \mu  >  c $	0	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Cercle	$ a  >  \mu $		
Cyclide à crois-sant interne (CD4I)	Ellipse	2 points imaginaires	Cercle	$ \mu  >  c $	2	
	Hyperbole	2 points réels	Hyperbole	$ \mu  >  a $		
Cyclide à crois-sant externe (CD4E)	Ellipse	2 points réels	Hyperbole	$ c  >  \mu $	2	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Cercle	$ a  >  \mu $		
Cyclide à crois-sant interne nul (CD4In)	Ellipse	2 points imaginaires	Cercle	$ \mu  >  c $	1	
	Hyperbole	1 point double réel	Parabole	$ a  =  \mu $		
Cyclide à crois-sant externe nul (CD4En)	Ellipse	1 point double réel	Parabole	$ \mu  =  c $	1	
	Hyperbole	2 points imaginaires	Cercle	$ a  >  \mu $		

Table 5: Classification des différents types de cyclides de Dupin quartiques