

# Paramétrisation optimale de coniques

I. Cattiaux-Huillard\* et G. Albrecht\*\* et V. Hernandez-Mederos†

\* ISTV, LAMAV (Equipe CGAO),  
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes  
Isabelle.cattiaux@univ-valenciennes.fr

\*\* ENSIAME, LAMAV (Equipe CGAO),  
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes  
gudrun.albrecht@univ-valenciennes.fr

† Instituto de Cibernética, Matemática y Física, ICIMAF. C.P. 10400. La Habana, Cuba  
vicky@icmf.inf.cu

---

## Résumé

*Le but de cet article est de proposer une méthode analytique pour déterminer la paramétrisation optimale d'une conique, i.e., d'une courbe rationnelle de degré deux, par rapport à l'abscisse curviligne au sens de la norme  $L_2$ . Nous nous basons sur une méthode de Farouki [Far97] et Jüttler [Jüt97], qui traitent le problème de la paramétrisation optimale de façon analytique dans le cas des courbes polynomiales, et suggèrent une procédure numérique dans le cas des courbes rationnelles.*

---

**Mots clé :** reparamétrisation, abscisse curviligne, paramétrisation normale, coniques

## 1. Introduction

Une courbe, lieu géométrique de points du plan  $P$  ou de l'espace tridimensionnel  $E$  peut être décrite de multiples façons : équations implicites, intrinsèques, intersection de surfaces, équations différentielles, image d'une autre courbe par un morphisme... Toutefois, le type de description le mieux adapté aux besoins de la CAO et de la CFAO est la "paramétrisation", c'est-à-dire une application  $f$  d'un intervalle  $U$  de  $\mathbb{R}$  dans  $P$  ou  $E$ . Dans ce domaine, on recherche en particulier des "paramétrisations propres", i.e. pour lesquelles à un point régulier de la courbe correspond une et une seule valeur de  $U$  [Sed86]. Toute courbe en admettant au moins une [Arc48], on en déduit une infinité par "changement de paramètre" ou "reparamétrisation" : soit  $f$  une paramétrisation de  $U$  dans  $P$  ou  $E$  d'une courbe  $C$ , et  $\phi$  un homéomorphisme d'un autre intervalle  $V$  de  $\mathbb{R}$  dans  $U$ , l'application  $g = f \circ \phi$  est aussi une paramétrisation propre de  $C$ .

Si l'aspect et les propriétés intrinsèques (tangentes, courbure, ...) d'une courbe ne changent pas lors d'une reparamétrisation, il n'en est pas de même de ses propriétés cinématiques. Considérant un échantillonnage de valeurs répar-

ties uniformément sur  $U$ , la répartition de leurs images sur la courbe variera d'une paramétrisation à l'autre. En termes cinématiques, c'est-à-dire en assimilant le paramètre à la variable temps, la trajectoire du point reste la même lors d'une reparamétrisation, mais le comportement de la vitesse, de l'accélération, etc... diffèrent. Mettre à profit cet aspect de la description des courbes pour obtenir des paramétrisations dont les propriétés cinématiques correspondent aux besoins des applications a motivé bon nombre d'articles ces dernières années.

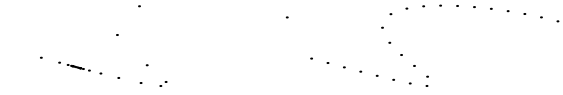
Il s'avère souvent nécessaire d'obtenir une paramétrisation aussi proche que possible de la "paramétrisation normale", c'est-à-dire de la paramétrisation par l'abscisse curviligne  $s$  déterminée par

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

La paramétrisation normale est donc  $g = f \circ s^{-1}$ , définie sur  $[0, L]$ , où  $L$  est la longueur de la courbe paramétrisée par  $f$  sur  $U$ . La norme de sa vitesse est égale à 1 en tout point de la courbe. Les images des valeurs  $\{u_i = i \frac{L}{n}, i = 0, \dots, n\}$  de  $[0, L]$  sont donc uniformément réparties sur la courbe (voir la figure 1).

Toutefois, cet idéal ne peut pas être atteint à l'aide de paramétrisations rationnelles sauf dans le cas des droites [FS91].

De nombreuses applications exigent une paramétrisation aussi proche que possible de la paramétrisation normale.



**Figure 1:** Sur une même courbe, à gauche : une paramétrisation quelconque, à droite : la paramétrisation normale

L'utilité de la paramétrisation normale est évidente dès que l'on trace la courbe : quel que soit le format choisi (Bézier, NURBS...) la courbe n'est pas tracée point par point, mais approchée par une suite de segments (à l'aide d'algorithmes tels que de Casteljau, Cox-de Boor...). Avoir une paramétrisation quasi-normale permet d'optimiser le nombre de segments nécessaires, donc de minimiser le nombre d'itérations.

D'autre part, si la courbe est la trajectoire d'un objet en déplacement, qu'il s'agisse d'animation en images de synthèse, ou d'un outil réel usinant une pièce, la paramétrisation normale fournit une vitesse constante le long de la courbe : pour une discrétisation  $\{i \frac{L}{n}, i = 0 \dots n\}$  de l'intervalle  $[0, L]$ , on obtient des points régulièrement espacés sur la courbe. On peut donc, à partir de là, imposer la vitesse souhaitée en chaque point de  $C$  en utilisant une discrétisation  $\{\varphi(i \frac{L}{n}), i = 0 \dots n\}$  où  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $[0, L]$  dans lui-même.

La paramétrisation normale s'avère également intéressante lorsqu'il s'agit de comparer deux courbes (e.g. [Frit92]), par exemple pour raccorder deux faces le long d'une arête commune, le plus souvent non rectiligne. Une courbe admet une infinité de paramétrisations. Pour en comparer deux, il est donc nécessaire qu'elles se présentent sous une paramétrisation commune, "normalisée", ce qui est fournie par l'abscisse curviligne, puisque pour une trajectoire donnée, la paramétrisation normale est unique au sens de parcours près. On remarquera que lorsqu'il s'agit de courbes rationnelles, on travaille avec des approximations de la paramétrisation normale. Les paramétrisations de deux courbes identiques peuvent donc présenter de légères différences. Il est donc nécessaire de choisir un critère, une mesure, permettant de déterminer si on considère identiques les deux courbes comparées.

Aussi, la construction de surfaces à partir de courbes nécessite également d'en contrôler la vitesse de parcours. Une surface réglée construite à l'aide de droites joignant deux points courants sur deux courbes dépend beaucoup des paramétrisations choisies pour ces deux courbes. En général, il en va de même pour une surface "sweep", c'est-à-dire une surface engendrée par le balayage d'une courbe dite "profil" suivant une trajectoire appelée "directrice", voir par exemple [Blo88].

Déterminer la paramétrisation la plus proche possible

de l'abscisse curviligne est un problème d'optimisation. Comme l'ont décrit les auteurs de [CFMS01], il doit donc être formulé comme tel, et il est nécessaire de préciser ses différentes caractéristiques, c'est-à-dire :

- spécifier un ensemble  $F$  d'applications admissibles comme paramétrisation de la courbe  $C$  ;
- définir une métrique  $\|\cdot\|_p$  afin de mesurer la distance entre deux paramétrisations ;
- enfin, formuler un algorithme permettant de déterminer l'application  $\tilde{f}$  de  $F$  telle que, pour toute application  $f$  de  $F$ ,  $\|\tilde{f} - h\|_p \leq \|f - h\|_p$ , où  $h$  est la paramétrisation normale de la courbe.

Les paramétrisations admissibles peuvent aussi être définies sous forme de reparamétrisations, c'est-à-dire en fonction de changements de variable. Il s'agit dans ce cas de déterminer l'application  $\tilde{\varphi}$  d'un ensemble  $\Phi$  de fonctions homéomorphes, telle que, pour toute application  $\varphi$  de  $\Phi$ ,  $\|f \circ \tilde{\varphi} - f \circ s^{-1}\|_p \leq \|f \circ \varphi - f \circ s^{-1}\|_p$ , ou encore telle que  $\|\tilde{\varphi} - s^{-1}\|_p \leq \|\varphi - s^{-1}\|_p$  où  $f$  est la paramétrisation initiale de la courbe et  $s$  son abscisse curviligne.

La grande majorité des articles étudiant les problèmes de reparamétrisation sont construits sur ce schéma. Parmi les familles de paramétrisations dans lesquelles sera recherchée la solution, on peut citer par exemples les splines cubiques [Wev91], les splines quintiques, avec ou sans précisions de régularité aux noeuds ([WY93, WWBY99]), et les courbes (PH) dans [Far92]. Dans le cas où la nouvelle paramétrisation est définie par un changement de variable, on utilise le plus souvent des fonctions "homographiques" (fractions rationnelles dont le numérateur et le dénominateur sont de degré 1) dans [FN92, CM96, Far97, Jüt97], ou homographiques par morceaux ([CM96, TFF01, HMES03]) puisqu'elles présentent l'avantage de ne pas changer le degré de la paramétrisation. Il arrive aussi que l'on fasse appel à des changements de variable rationnels de degré plus élevé, notamment lorsque d'autres considérations que l'uniformité de la distribution des points entrent en ligne de compte, comme par exemple la régularité de la courbe en certains points [FC97, BS96].

Déterminer la paramétrisation optimale au sein de la famille choisie nécessitent l'utilisation d'un critère qui permette d'estimer la "distance" par rapport à la paramétrisation normale et qui varie selon les auteurs. Dans quelques travaux [Wev91, WY93, FC97], on compare les deux paramétrisations sur un ensemble discret de valeurs en utilisant  $\max_{i \in I} \|f(\tau_i) - h(\tau_i)\|$  où  $\{\tau_i, i \in I\}$  est un échantillon de valeurs de l'ensemble de définition de  $f$  et de  $h$ . [BS96] utilise la "déviante cordale", dans le cas d'un arc de longueur  $2\psi$  du cercle trigonométrique, c'est-à-dire la fonction

$$\Delta(t) = \sqrt{(\theta(t) - 2\psi t)^2 (1 + 4\psi^2)^{-1}}$$

où  $\theta(t)$  est la mesure de l'angle au centre entre le point de départ et le point de paramètre  $t$ .

On rencontre assez fréquemment (par exemple chez [Far97, Jüt97, CFMS01]) la norme  $L_2$  de la déviation de la vitesse

paramétrique par rapport à l'unité, i.e. dans le cas d'une courbe de longueur 1 définie sur  $[0, 1]$ . Ce critère se généralise facilement au cas d'une courbe de longueur  $L$  définie sur  $[0, 1]$  :

$$I = \int_0^1 (\|f'(u)\| - L)^2 du = \int_0^1 \|f'(u)\|^2 du - L^2 \quad (1)$$

ce qui revient à considérer

$$J = \int_0^1 \|f'(u)\|^2 du. \quad (2)$$

Chez [CM96], dans le cas de courbes de longueur  $L = 1$ , deux critères sont utilisés dont l'un fondé sur la norme  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$p = \|\|f'(t)\|^2 - 1\|_\infty$$

qui se rapproche de celui proposé en (1), et

$$q = \frac{\max_{i=2,\dots,n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|f'(t)\|^2 dt}{\min_{i=2,\dots,n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|f'(t)\|^2 dt}$$

où les  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  forment une subdivision uniforme de l'intervalle de paramétrisation (l'article semble comporter une coquille dans la définition de ces mesures).

Ce dernier critère est repris dans l'article [HMES03] qui utilise  $\frac{1}{q}$ , ainsi que la valeur définie en (1) et la norme infinie de l'erreur sur l'abscisse curviligne :

$$\|e_s^j\|_\infty = \|s^j - \tilde{s}\|_\infty$$

où  $\tilde{s} = (\tilde{s}_i)_{i=0,\dots,n}$  avec  $\tilde{s}_i = \frac{iL}{n}$ ,  $L$  étant la longueur de la courbe, et  $s^j = (s_i^j)_{i=0,\dots,n}$ , les  $s_i^j$  étant les valeurs obtenues à la  $j$ -ième itération de l'algorithme étudié. L'utilisation de ces différents critères a pour but de permettre la comparaison des résultats obtenus avec les résultats d'autres articles.

Le but de cet article est de présenter une méthode pour paramétrer de façon optimale les coniques. A cette fin, en section 2 nous rappelons une méthode de reparamétrisation de courbes polynomiales et rationnelles à l'aide de la norme  $L_2$  présentée par Farouki [Far97] et Jüttler [Jüt97]. En section 3 nous appliquons cette méthode aux courbes rationnelles de degré 2, c'est-à-dire aux coniques, en montrant les limites de la méthode de Farouki et Jüttler pour ensuite proposer une amélioration que nous illustrons par plusieurs exemples. Nous concluons en section 4.

## 2. Reparamétrisation à l'aide de la norme $L_2$

Dans [Far97], R.T. Farouki propose une paramétrisation optimale selon la norme  $L_2$ , à l'aide de la mesure de la déviation de la vitesse paramétrique par rapport à l'unité (correspondant à la paramétrisation normale) définie en (1) et (2) pour  $L = 1$ . L'auteur utilise le changement de variable homographique de la forme

$$t = \varphi(u) = \frac{(1-\alpha)u}{\alpha(1-u) + (1-\alpha)u} \quad (3)$$

avec  $0 < \alpha < 1$ . Il montre que déterminer le changement de variable homographique optimal pour des courbes de paramétrisations  $f$  polynomiales (ou rationnelles) de degré  $n$ , données sous forme de courbes de Bézier, revient à déterminer la racine d'une équation quadratique. Ce travail est simplifié par celui de Jüttler dans [Jüt97] qui précise cette équation sous la forme

$$P B_0^2(\alpha) + Q B_2^2(\alpha) = 0 \quad (4)$$

avec

$$P = \int_0^1 -B_0^2(t) \|f'(t)\|^2 dt, \quad (5)$$

et

$$Q = \int_0^1 B_2^2(t) \|f'(t)\|^2 dt, \quad (6)$$

où  $B_i^2(t) = \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i$ ,  $i = 0, 1, 2$  sont les polynômes de Bernstein de degré 2. Jüttler [Jüt97] explicite  $P$  et  $Q$  en fonction des points de contrôle de la courbe, uniquement dans le cas où la paramétrisation est polynomiale.

Pour  $\alpha$  on obtient donc

$$\alpha = \frac{\sqrt{-P}}{\sqrt{-P} + \sqrt{Q}}$$

en considérant  $0 < \alpha < 1$ . On en déduit

$$\alpha = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta}{P}}\right)^{-1} \quad (7)$$

où  $\Delta = P + Q$ .

Tandis que la méthode de Farouki [Far97] et de Jüttler [Jüt97] permet une solution analytique dans le cas des courbes polynomiales, l'utilisation de procédures numériques est suggérée par ces auteurs dans le cas de courbes rationnelles, sans qu'ils en précisent des détails.

## 3. Solution optimale pour une paramétrisation rationnelle quadratique

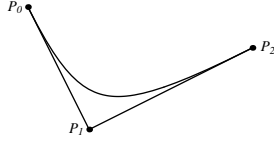
Intéressons-nous maintenant aux coniques, courbes particulièrement importantes en mécanique et architecture, où l'on trouve souvent des formes ayant des ellipses, hyperboles ou paraboles comme profil. Considérons donc une conique  $C$  munie d'une paramétrisation rationnelle quadratique, notée sous forme de Bézier (voir par exemple [Far93]) :

$$f(t) = \frac{\omega_0 B_0^2(t) P_0 + \omega_1 B_1^2(t) P_1 + \omega_2 B_2^2(t) P_2}{\omega_0 B_0^2(t) + \omega_1 B_1^2(t) + \omega_2 B_2^2(t)}, \quad t \in [0, 1]$$

où  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , pondérés respectivement des masses  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , forment le polygone de contrôle de la courbe (cf fig 2).

La nouvelle paramétrisation  $f \circ \varphi$  (où  $\varphi$  est la fonction définie en (3)) admet les mêmes points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , mais munis cette fois respectivement des poids

$$\tilde{\omega}_0 = \delta^2 \omega_0, \quad \tilde{\omega}_1 = \delta \omega_1, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2.$$



**Figure 2:** Arc d'hyperbole et son polygone de contrôle

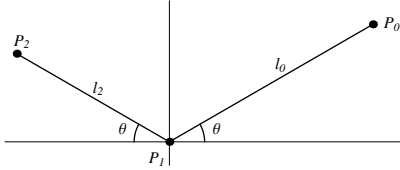
avec  $\delta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ , d'où

$$\tilde{\omega}_0 = \left(1 - \frac{\Delta}{P}\right)^{-1}, \quad \tilde{\omega}_1 = \left(1 - \frac{\Delta}{P}\right)^{-\frac{1}{2}} \omega_1, \quad \tilde{\omega}_2 = 1,$$

en supposant sans perte de généralité  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ .

Toutefois, dans le cas d'une courbe quadratique, le calcul de ces coefficients nécessite l'intégration formelle d'une fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont de degré 8, ce qui n'est pas aisé, même avec l'aide d'un logiciel de calcul formel. Même dans le cas de courbes rationnelles de degré aussi bas que deux on semble donc être obligé d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir la paramétrisation optimale, comme suggéré dans [Far97, Jüt97]. Il est pourtant possible d'obtenir une solution analytique assez simple si l'on choisit le repère de façon appropriée.

Considérons donc le repère dont l'origine est le point  $P_1$  et tel que l'axe des ordonnées soit la bissectrice de l'angle  $(\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2})$  (cf fig 3).



**Figure 3:** Les éléments caractérisant le polygone de contrôle de la conique dans le repère idoine

En notant  $\theta$  l'angle entre l'axe des abscisses et la droite  $(P_1P_0)$ ,  $l_0$  et  $l_2$  les distances respectives entre  $P_1$  et  $P_0$  et entre  $P_1$  et  $P_2$ , les coordonnées des points de contrôle sont alors

$$P_0 = (l_0 \cos \theta, l_0 \sin \theta), \quad P_1 = (0, 0), \\ P_2 = (-l_2 \cos \theta, l_2 \sin \theta).$$

Les coordonnées du point  $f(t)$  sont alors :

$$f(t) = \left( \frac{(l_0(1-t)^2 - l_2t^2) \cos \theta}{(1-t)^2 + 2\omega_1 t(1-t) + t^2}, \right. \\ \left. \frac{(l_0(1-t)^2 + l_2t^2) \sin \theta}{(1-t)^2 + 2\omega_1 t(1-t) + t^2} \right)$$

Et les coefficients  $P$  et  $\Delta$  s'écrivent

$$P = \frac{1}{12(\omega_1^2 - 1)^2} \cdot \\ \left( \frac{6\rho(l_0, l_2)}{\sqrt{1 - \omega_1^2}} \arctan \sqrt{\frac{\omega_1 - 1}{\omega_1 + 1}} - \omega_1 \lambda(l_0, l_2) \right) \\ \Delta = -\frac{2}{3}(l_0^2 - l_2^2)\omega_1$$

où

$$\rho(l_0, l_2) = l_0^2 + l_2^2 + 2l_0l_2(1 - 2\omega_1^2) \cos 2\theta \\ \lambda(l_0, l_2) = l_0^2(3 - 14\omega_1^2 + 8\omega_1^4) + l_2^2(-5 + 2\omega_1^2) \\ + 2l_0l_2(-1 + 4\omega_1^2) \cos 2\theta$$

donc,

$$\delta = \left( \frac{-6\rho(l_0, l_2)}{\sqrt{1 + \omega_1^2}} \arctan \sqrt{\frac{\omega_1 - 1}{\omega_1 + 1}} - \omega_1 \lambda(l_0, l_2) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ \left( \frac{6\rho(l_0, l_2)}{\sqrt{1 - \omega_1^2}} \arctan \sqrt{\frac{\omega_1 - 1}{\omega_1 + 1}} - \omega_1 \lambda(l_2, l_0) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

On peut facilement l'exprimer en fonction de  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  puisque,

$$l_0 = \|\overrightarrow{P_1P_0}\| \quad l_2 = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|,$$

et quelques considérations géométriques élémentaires nous permettent d'écrire

$$\cos 2\theta = \frac{-\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}{l_0l_2}.$$

(où  $\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$  désigne le produit scalaire de ces deux vecteurs). On peut choisir d'exprimer  $\rho$  et  $\lambda$  directement en fonction de  $\gamma = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$  :

$$\rho(l_0, l_2) = l_0^2 + l_2^2 - 2\gamma(1 - 2\omega_1^2) \\ \lambda(l_0, l_2) = l_0^2(3 - 14\omega_1^2 + 8\omega_1^4) + l_2^2(-5 + 2\omega_1^2) \\ + 2\gamma(1 - 4\omega_1^2)$$

On remarque que lorsque  $l_0 = l_2$ , on a  $\Delta = 0$ . Le résultat optimal est donc fourni par la représentation normalisée de la courbe, avec  $\omega_0 = \omega_2 = 1$ , i.e. par  $f(t)$ .

Il est important de noter que ces formules ne sont valables que dans le cas d'une courbe "strictement" rationnelle, pour  $\omega_1 \neq 1$ , et non lorsque la représentation est polynomiale ( $\omega_1 = 1$ ), ce qui correspond à un arc de parabole. Dans ce cas, les formules de Jüttler [Jüt97] nous permettent d'obtenir la valeur de  $\delta$  :

$$\delta = \sqrt{\frac{6l_0^2 + l_2^2 + 3l_0l_2 \cos 2\theta}{l_0^2 + 6l_2^2 + 3l_0l_2 \cos 2\theta}}.$$

Illustrons ces résultats par des exemples numériques.

Nous estimerons la qualité des résultats à l'aide d'une variante du coefficient  $J$  (cf (2)). Plus celui-ci est proche du carré de la longueur d'arc de la courbe, c'est-à-dire de

$$L^2 = \left( \int_0^1 \|f'(u)\| du \right)^2$$

plus le résultat est proche de 1 lorsque la paramétrisation est proche de la paramétrisation normale, quelle que soit la longueur de la courbe considérée.

$$\tilde{J} = \frac{J}{L^2} = \frac{1}{L^2} \int_0^1 \|f'(u)\|^2 du \quad (9)$$

qui présente l'avantage de se rapprocher de 1 lorsque la paramétrisation est proche de la paramétrisation normale, quelle que soit la longueur de la courbe considérée.

Dans les tableaux suivants,  $l_0$ ,  $l_2$ ,  $\theta$  et  $\omega_1$  sont les valeurs définies précédemment, caractérisant la courbe. Nous pouvons choisir systématiquement  $l_0 = 1$  sans perte de généralité.  $\tilde{J}$  désigne la valeur définie en (9) avant optimisation, tandis que  $\tilde{J}_{opt}$  désigne la même valeur, après optimisation de la paramétrisation. Enfin  $\delta$  est la valeur numérique de ce coefficient qui fournit la paramétrisation optimisée, calculée à l'aide de la formule (8).

Puisque pour  $0 < \omega_1 < 1$ , la conique représentée est une ellipse, et pour  $1 < \omega_1$ , une hyperbole, les cas 1 à 4, 7 à 10 et 13 à 16 représentent des ellipses, tandis que les autres sont des hyperboles.

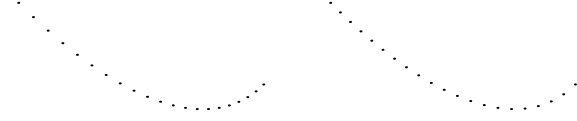
cas	$\omega_1$	$\tilde{J}$	$\delta$	$\tilde{J}_{opt}$
1	0,1	1,318	0,95	1,317
2	0,3	1,15	0,84	1,14
3	0,5	1,075	0,76	1,050
4	0,9	1,064	0,65	1,001
5	2	1,33	0,55	1,16
6	10	4,20	0,50	3,40

**Figure 4:** Résultats de la reparamétrisation pour  $l_2 = 2$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , pour différentes valeurs du poids  $\omega_1$

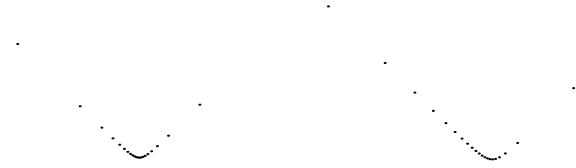


**Figure 5:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 0.3$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (cas 2) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation

En analysant ces exemples, nous constatons que lorsque la valeur de  $\omega_1$  est proche de 1, c'est-à-dire environ entre 0,5 et 1,5, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants. Par contre, lorsque  $\omega_1$  se rapproche de 0, on remarque que les points se rassemblent aux extrémités de la courbe, tandis que lorsque  $\omega_1$  croît, ils se regroupent dans le voisinage de  $P_1$ . Dans ces deux cas, la distribution initiale est mauvaise, et la distribution optimale, selon le critère utilisé, ne l'améliore



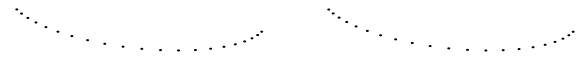
**Figure 6:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 0.9$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (cas 4) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation



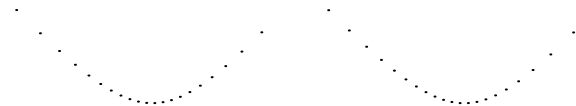
**Figure 7:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 10$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (cas 6) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation

cas	$\omega_1$	$\tilde{J}$	$\delta$	$\tilde{J}_{opt}$
7	0,1	1,311	0,98	1,311
8	0,3	1,125	0,95	1,124
9	0,5	1,038	0,92	1,036
10	0,9	1,008	0,88	1,003
11	2	1,23	0,85	1,22
12	10	4,83	0,83	3,77

**Figure 8:** Résultats de la reparamétrisation pour  $l_2 = 1.2$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , pour différentes valeurs du poids  $\omega_1$



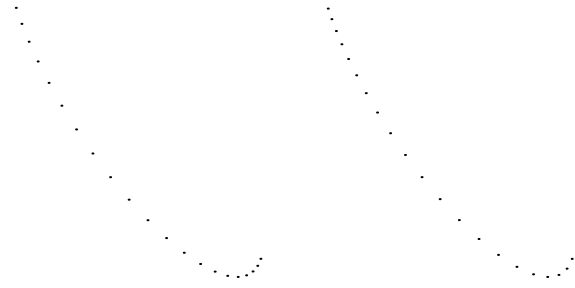
**Figure 9:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 1.2$ ,  $\omega_1 = 0.3$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (cas 8) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation



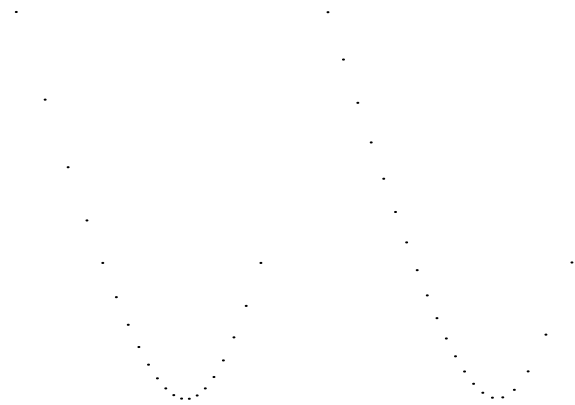
**Figure 10:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 1.2$ ,  $\omega_1 = 3$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (cas 11) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation

cas	$\omega_1$	$\tilde{J}$	$\delta$	$\tilde{J}_{opt}$
13	0,1	1,308	0,86	1,301
14	0,3	1,16	0,66	1,11
15	0,5	1,14	0,57	1,03
16	0,9	1,21	0,51	1,04
17	2	1,58	0,49	1,31
18	10	4,50	0,50	3,64

**Figure 11:** Résultats de la reparamétrisation pour  $l_2 = 2$  et  $\theta = \frac{2\pi}{5}$ , pour différentes valeurs du poids  $\omega_1$



**Figure 12:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 0.3$  et  $\theta = \frac{2\pi}{5}$  (cas 14) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation



**Figure 13:** Distribution pour  $l_0 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $\omega_1 = 0.9$  et  $\theta = \frac{2\pi}{5}$  (cas 17) avant (à gauche) et après (à droite) optimisation

que peu. Nous proposons dans la conclusion quelques pistes à suivre pour remédier à ce problème.

#### 4. Conclusion

Après avoir présenté l'existant concernant les reparamétrisations de courbes en mettant l'accent sur les domaines d'application et les critères d'optimalité, nous nous sommes attachées dans cet article à déterminer la paramétrisation optimale d'une conique, c'est-à-dire d'une courbe rationnelle de degré deux. Nous nous sommes basées sur des travaux de Farouki [Far97] et de Jüttler [Jüt97], utilisant comme critère la norme  $L_2$ , qui suggèrent finalement de se contenter d'un procédé numérique pour la détermination de la paramétrisation optimale d'une courbe rationnelle. Néanmoins, dans le cas particulier des coniques, nous avons pu compléter ces résultats en proposant une solution analytique fournissant la paramétrisation optimale. Cette méthode est illustrée par plusieurs exemples.

Toutefois, puisque la paramétrisation obtenue à l'aide d'un changement de variable homographique simple n'est pas toujours suffisamment proche de la paramétrisation nor-

male sur l'ensemble de l'arc de conique, nous envisageons par la suite d'étudier l'utilisation de changements de variable homographiques par morceaux, tels qu'ils sont présentés dans [CFMS01], par exemple.

Nous souhaitons également étudier d'autres critères d'optimalité afin de remédier aux différents types de problèmes que peut rencontrer l'utilisateur et de proposer non seulement des paramétrisations proches de la paramétrisation normale, mais également des paramétrisations répondant à des critères reposant sur d'autres propriétés de la courbe, tel que la courbure. Ce dernier critère ("bending energy") permet en effet d'obtenir un échantillonnage de points plus dense au voisinage d'un maximum de courbure, résultat qui ne serait pas obtenu avec un critère ne reposant que sur la longueur d'arc. En fonction de l'application, l'utilisateur peut souhaiter obtenir ce type de répartition de points, ou un intermédiaire entre celle-ci et une répartition fondée sur le critère de l'abscisse curviligne. L'article [HMES03] propose déjà un algorithme permettant d'obtenir un tel résultat, donnant en outre à l'utilisateur la possibilité de choisir dans quelle mesure chacun de ces deux critères participe à la répartition finale.

#### 5. Remerciements

Nous tenons à remercier les rapporteurs de l'attention qu'ils ont portée à notre article, nous permettant ainsi d'améliorer considérablement sa lisibilité et sa pertinence.

## Références

- [Arc48] ARCHBOLD J. : *Introduction to the Algebraic Geometry of a Plane*. London, E. Arnold & Co., 1948.
- [Blo88] BLOOMENTHAL M. : *Approximation of sweep surfaces by tensor product B-splines*. Tech. Rep. UUCS-88-008, Department of Computer Science, University of Utah, août 1988.
- [BS96] BLANC C., SCHLICK C. : Accurate parametrization of conics by NURBS. *IEEE Computer Graphics and Applications*. Vol. 16 (1996), 64–71.
- [CFMS01] COSTANTINI P., FAROUKI R., MANNI C., SESTINI A. : Computation of optimal composite reparameterizations. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 18 (2001), 875–897.
- [CM96] CASCIOLA G., MORIGI S. : Reparametrization of NURBS curves. *International Journal of Shape Modeling*. Vol. 2 (1996), 103–116.
- [Far92] FAROUKI R. : Pythagorean-hodograph curves in practical use. In *Geometry processing for design and Manufacturing* (Philadelphia, 1992), Barnhill R., (Ed.), SIAM, pp. 3–33.
- [Far93] FARIN G. : *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, Boston, 1993.
- [Far97] FAROUKI R. T. : Optimal parameterizations. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14 (1997), 153–168.
- [FC97] FIOROT J., CATTIAUX I. : Uniform point-distribution on a circle. In *Curves in Surfaces with application in CAGD* (Nashville, TN, 1997), A. Le Méhauté C. R., Schumaker L., (Eds.), Vanderbilt University Press, pp. 103–110.
- [FN92] FRITSCH F., NIELSON G. : On the problem of determining the distance between parametric curves. In *Curves and Surface Design* (1992), SIAM, H. Hagen, pp. 123–141.
- [FS91] FAROUKI R., SAKKALIS T. : Real rational curves are not "unit speed". *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 8 (1991), 151–157.
- [HMES03] HERNÁNDEZ-MEDEROS V., ESTRADA-SARLABOUS J. : Sampling points on regular parametric curves with control of their distribution. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 20 (2003), 363–382.
- [Jüt97] JÜTTLER B. : A vegetarian approach to optimal parameterizations. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14 (1997), 887–890.
- [Sed86] SEDERBERG T. : Improperly parametrized rational curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 3 (1986), 67–75.
- [TFF01] TSAI Y.-F., FAROUKI R., FELDMAN B. : Performance analysis of CNC interpolators for time-dependent feedrates along PH-curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 18 (2001), 245–265.
- [Wev91] WEVER U. : Optimal parameterization for cubic splines. *Computer-Aided Design*. Vol. 23 (1991), 641–644.
- [WWBY99] WANG F., WRIGHT P., BARSKY B., YANG D. : Approximately arc-length parameterized  $C^3$  quintic interpolatory splines. *ASME Journal of Mechanical Design*. Vol. 121 (1999), 430–439.
- [WY93] WANG F.-C., YANG D. C. H. : Nearly arc-length parameterized quintic-spline interpolation for precision machining. *Computer-Aided Design*. Vol. 25 (1993), 281–288.