

Subdivision de courbes sur les surfaces avec contrôle de la longueur d'arc

J. Estrada-Sarlabous¹, V. Hernández-Mederos¹, D. Martínez-Morera², L. Velho³

¹ICIMAF, Cuba

²UFAL, Brésil

³IMPA, Brésil

Résumé

Dans ce travail, nous présentons un nouveau schéma de subdivision de courbes non stationnaire et interpolant, adapté à la conception des courbes sur les surfaces. Nous montrons que le schéma converge et que la courbe de subdivision est continue. De plus, en commençant avec une certaine paramétrisation naturelle du polygone initial on obtient une courbe de subdivision paramétrisée par un multiple de la longueur d'arc.

Abstract

In this paper we present a new non-linear interpolatory curve subdivision scheme, suitable for designing curves on surfaces. We show that the scheme converges and the subdivision curve is continuous. Moreover, starting with a certain natural parametrization of the initial polygon, we obtain a subdivision curve parametrized by a multiple of the arc-length.

Mots clé : Courbe de subdivision, conception des courbes sur les surfaces, contrôle de la longueur d'arc

1. Introduction

Les courbes de subdivision sont très importantes pour plusieurs applications dans la science et l'ingénierie. Dans l'espace euclidien R^n , elles sont faciles à définir à partir d'un petit ensemble de points de contrôle. Le schéma de subdivision est un processus itératif qui converge, en quelques millisecondes, à la courbe limite. Dans ce cadre, existent de nombreuses références sur la convergence de ces schémas.

Compte tenu de leurs bonnes propriétés et les avantages de l'utilisation de ces courbes de subdivision, il est naturel de les étendre aux géométries non euclidiennes, comme les variétés de Riemann, les groupes de Lie ou les triangulations. Dans [PR95, CKL99, PH05] on peut trouver certaines de ces extensions.

Dans ce travail, nous proposons une méthode simple pour définir un schéma de courbes de subdivision sur des surfaces S , qui est facile à mettre en œuvre sur des triangulations.

Sous des restrictions faibles, la courbe limite du schéma proposé est une courbe continue sur S . La possibilité de obtenir des courbes de subdivision avec un degré plus haut de continuité n'a pas été explorée, puisque cela dépend aussi de la continuité des surfaces S .

Le schéma classique de 4 points [Dub86, DLG87] est l'un des premiers et le plus populaires schémas des courbes de subdivision interpolantes. Il s'agit d'un membre de la famille de schémas de subdivision du type Deslauriers-Dubuc [DD89], où les nouveaux points sont situés sur une courbe polynomiale qui interpole 4 sommets consécutifs du polygone de contrôle. Plus précisément, à partir d'un polygone initial $P^0 = \{P_i^0, i \in Z\}$ le schéma classique de 4 points est défini par les équations

$$P_{2i}^{j+1} = P_i^j, \quad P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(t_{2i+1}^{j+1}) \quad (1)$$

où $g_i^j(t)$ est la courbe polynomiale cubique qui interpole les points P_k^j aux valeurs uniformes des paramètres $t_k^j = k/2^j$ pour $k = i-1, i, i+1, i+2$, et $t_{2i+1}^{j+1} = (2i+1)/2^{j+1}$.

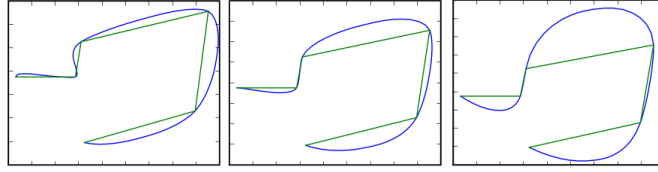


Figure 1: Des courbes limites des schémas de subdivision de 4 points (1) avec la paramétrisation initiale (2) : uniforme $\beta = 0$ (à gauche), centripète $\beta = 0.5$ (au milieu) et paramétrée par la longueur de la corde $\beta = 1$ (à droite)

Plusieurs auteurs [KS98, DFH09] ont remarqué que la courbe limite est très proche des arêtes longues et très loin des arêtes courtes, voir la figure 1, à gauche. Il s'agit d'un résultat de la paramétrisation uniforme : pour tous i le même temps est utilisée pour voyager entre deux points consécutifs P_i^0, P_{i+1}^0 du polygone initial, quelque soit leur distance. En d'autres termes, la courbe limite du schéma classique de 4 points est loin d'être paramétrée par la longueur d'arc.

Une possibilité d'aborder ce problème consiste à utiliser une paramétrisation non-uniforme du polygone initial P^0

$$t_{i+1}^0 = t_i^0 + \|P_{i+1}^0 - P_i^0\|^\beta. \quad (2)$$

Les valeurs des paramètres de l'étape $j+1$, sont calculés à partir des paramètres de l'étape précédente en tant que

$$t_{2i}^{j+1} = t_i^j, \quad t_{2i+1}^{j+1} = \frac{t_i^j + t_{i+1}^j}{2}. \quad (3)$$

Prenant cette idée un peu plus loin, dans [DFH09], une reparamétrisation est introduit dans chacune des étapes, défini par la équation

$$t_0^j = 0, \quad t_{i+1}^j = t_i^j + \|P_{i+1}^j - P_i^j\|^\beta. \quad (4)$$

Les points à l'étape $j+1$ sont donnés par $P_{2i}^{j+1} = P_i^j, P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j((t_i^j + t_{i+1}^j)/2)$, où $g_i^j(t)$ est la courbe polynomiale cubique que interpole les points (t_k^j, P_k^j) pour $k = i-1, i, i+1, i+2$. La courbe limite de ce schéma non-linéaire est lisse et, quand la paramétrisation centripète ($\beta = 0.5$) est utilisé, il est relativement proche au polygone initial et sa forme est agréable.

Dans la figure 1, nous montrons les courbes limites des schémas de subdivision de 4 points correspondants à différentes valeurs de β . Notez que le changement de la paramétrisation du polygone initial affecte la forme de la courbe limite.

Motivés par l'idée de obtenir un contrôle plus strict sur la géométrie des courbes limites par moyen d'un schéma de subdivision non-linéaire simple, dans [HEIM09] est présenté un schéma de subdivision non-linéaire, non-stationnaire et interpolant, dont la courbe limite est continue et paramétrée par un multiple de la longueur d'arc. Les

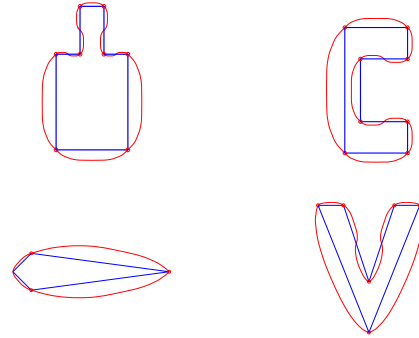


Figure 2: Après 6 itérations du schéma de subdivision [HEIM09].

polygones intermédiaires P^j sont fourni avec des paramétrisations non-uniformes reflètent la relation entre la longueur de l'arête $P_i^j P_{i+1}^j$ du polygone P^j , et la longueur du sous-polygone du P^{j+1} obtenue en appliquant le schéma de subdivision à $P_i^j P_{i+1}^j$.

Sur la base de ce résultat, il devient est naturel de tenter d'étendre ce schéma de subdivision à une surface S de la manière la plus intrinsèque possible, à savoir, en utilisant la géométrie de S .

Le problème de la conception des courbes sur les variétés lisses a été abordée dans plusieurs travaux [PR95, RLJ05, PH05], et aussi sur des triangulations [MCV07]. Dans les dernières années, certains cadres généraux pour étendre des schémas de subdivision linéaires sur les variétés lisses et discrets ont été définis [WP06, Wal06, WD05, MVC05].

Dans ce travail, nous prenons un autre chemin. Nous traduisons les idées géométriques de [HEIM09] à la géométrie de la variété. Ce faisant, nous sommes capables de prouver certaines propriétés des nouvelles courbes de subdivision, qui sont définies maintenant sur une variété, d'une manière

similaire à [HEIM09].

Selon le schéma de subdivision proposée dans le présent travail, les nouveaux points ne reposent pas nécessairement sur le courbe polynomial cubique (1). Au lieu de cela, nous prenons une paramétrisation t^0 du polygone initial P^0 , calculé à partir des longueurs d'arc ρ_i^0 des courbes géodésiques sur S joignant deux sommets consécutifs P_i^0 et P_{i+1}^0 , et nous contrôlons la longueur du j -ème polygone de subdivision P^j , de telle manière que, après k étapes de subdivision de l'arête $P_i^j P_{i+1}^j$ du polygone P^j , la longueur du polygone obtenu tend à être proportionnelle, avec le même facteur de proportionnalité pour tout i , à la longueur de l'intervalle paramétrique $t_{i+1}^j - t_i^j$ correspondant à la paramétrisation t^j associée à P^j . En plus, la courbe limite est continue et il est *environ* paramétrée par un multiple de la longueur d'arc.

Une borne supérieure pour la distance de Hausdorff entre la courbe limite et le polygone initial est obtenue. Le schéma de subdivision proposé est non-linéaire et nous étudions ses propriétés par le biais des techniques analytiques et géométriques qui sont spécifiques de ce type du schéma de subdivision.

2. Le schéma de subdivision

2.1. Définitions générales

Pour toute paire de points $Q_1, Q_2 \in S$ nous désignerons par $c_g(Q_1, Q_2)$ la *courbe géodésique* sur S avec le point initial Q_1 et le point final Q_2 (nous utilisons le terme *courbe géodésique* pour appeler la *courbe localement plus courte*, dans le cas d'une surface lisse S , et pour appeler la *courbe géodésique plus courte*, dans le cas d'une triangulation S , voir [MMP87]) et nous désignerons par $d_g(Q_1, Q_2)$ la longueur d'arc de $c_g(Q_1, Q_2)$.

Nous appellerons le *polygone géodésique*, P_g^0 , à la courbe sur S définie par morceaux avec des segments

$$c_g(P_i^0, P_{i+1}^0), i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Trois sommets consécutifs de P_g^0 sont *non-alignés* si,

$$c_g(P_i^0, P_{i+1}^0) \cup c_g(P_{i+1}^0, P_{i+2}^0) \neq c_g(P_i^0, P_{i+2}^0).$$

Soit P_g^0 un *polygone géodésique* avec des sommets sur une surface donnée S , où trois sommets consécutifs sont toujours non-alignés. Les équations donnant les nouvelles sommets à l'étape $j+1$ peuvent être écrit comme

$$P_{2i}^{j+1} = P_i^j, \quad P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(P_{i+1}^j, P_i^j, \alpha^j) \quad (5)$$

où P_{2i+1}^{j+1} est un point de S et les paramètres de contrôle $\alpha^j > 1$ satisfont à la condition

$$\alpha := \prod_j \alpha^j < \infty. \quad (6)$$

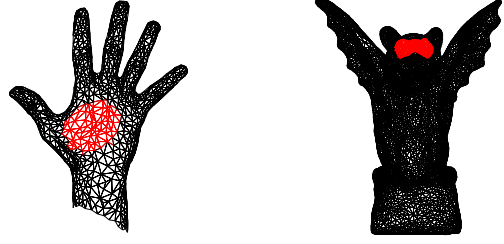


Figure 3: Des ellipses géodésiques.

En particulier, pour deux sommets consécutifs du polygone $P_g^k, P_{r+1}^k, P_r^k \in S$, nous noterons $d_g(P_r^k, P_{r+1}^k)$ par ρ_r^k . Le nouveau sommet $P_{2i+1}^{j+1} = g_i^j(P_{i+1}^j, P_i^j, \alpha^j)$ est calculé de telle manière que, pour un paramètre donnée $\alpha^j > 1$

$$\rho_{2i}^{j+1} + \rho_{2i+1}^{j+1} = \alpha^j \rho_i^j. \quad (7)$$

La condition (7) signifie que le nouveau point P_{2i+1}^{j+1} est dans l'ensemble

$$E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha) := \{Q \in S / d_g(Q, P_i^j) + d_g(Q, P_{i+1}^j) = \alpha^j \rho_i^j\}. \quad (8)$$

En raison de sa similitude avec la définition classique d'une ellipse, nous appellerons cet ensemble *ellipse géodésique* sur S de foyers P_i^j, P_{i+1}^j et d'excentricité $1/\alpha^j$. Par ailleurs, nous noterons l'ensemble des points à l'intérieur de $E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha)$ par $i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha))$, c'est à dire :

$$i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha)) := \{Q \in S / d_g(Q, P_i^j) + d_g(Q, P_{i+1}^j) < \alpha^j \rho_i^j\}. \quad (9)$$

En général nous allons étendre l'utilisation de la notation $E_g(Q_1, Q_2, \beta)$ et $i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))$ pour toute valeur du paramètre $\beta > 1$ et pour toute paire de points $Q_1, Q_2 \in S$.

2.2. Convergence

Pour étudier la convergence du schéma de subdivision, d'abord nous définissons les valeurs paramétriques correspondant à chaque sommet du polygone de subdivision P^j . Les valeurs des paramètres des points quelconques situés sur P^j sont calculées par interpolation linéaire des valeurs des paramètres des sommets voisins.

Pour la paramétrisation non-uniforme t^0 du polygone P^0 , on pose :

$$t_0^0 = 0, \quad t_{i+1}^0 = t_i^0 + \rho_i^0. \quad (10)$$

La paramétrisation t^{j+1} du polygone P^{j+1} est définie comme suit. Nous assignons $t_{2i}^{j+1} = t_i^j$ aux paramètres avec indices paires et aux paramètres avec indices impaires, t_{2i+1}^{j+1} ,

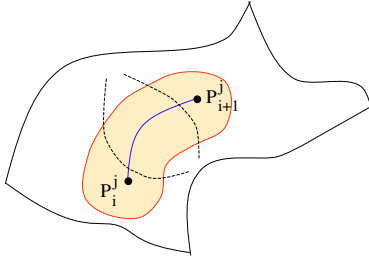


Figure 4: Condition suffisante de convergence.

nous assignons des valeurs dans $[t_i^j, t_{i+1}^j]$ de telle sorte que

$$\frac{t_{2i+1}^{j+1} - t_i^j}{\rho_{2i}^{j+1}} = \frac{t_{i+1}^j - t_{2i+1}^{j+1}}{\rho_{2i+1}^{j+1}}.$$

C'est à dire,

$$t_{2i}^{j+1} = t_i^j, \quad t_{2i+1}^{j+1} = \delta_i^j t_i^j + (1 - \delta_i^j) t_{i+1}^j \quad (11)$$

avec $\delta_i^j = \frac{\rho_{2i+1}^{j+1}}{\rho_{2i}^{j+1} + \rho_{2i+1}^{j+1}}$.

Théorème 1 Considérons le schéma de subdivision (5)-(7) avec la paramétrisation (10)-(11). Si les nouveaux points P_{2i+1}^{j+1} sont choisis de telle manière que, pour tous i, j

$$\rho_k^{j+1} \leq \Gamma \rho_i^j \text{ pour } k = 2i, 2i+1 \text{ avec } \Gamma < 1 \quad (12)$$

alors le schéma de subdivision converge et la courbe limite $c(t)$ est continue.

Démonstration: Soit $P^j(t)$ le spline linéaire qui interpole des points (t_i^j, P_i^j) . Nous allons montrer que

$$\|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty$$

tend uniformément vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty &= \max_i \max_{t_i^j \leq t \leq t_{i+1}^j} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\| \\ &= \max_i \|P^j(t_{2i+1}^{j+1}) - P^{j+1}(t_{2i+1}^{j+1})\|. \end{aligned} \quad (13)$$

La fonction $P^j(t)$ est linéaire pour $t \in [t_i^j, t_{i+1}^j]$ et t_{2i+1}^{j+1} est donné par (11). Donc, on obtient,

$$P^j(t_{2i+1}^{j+1}) = \delta_i^j P_i^j + (1 - \delta_i^j) P_{i+1}^j. \quad (14)$$

En substituant (14) et la valeur de δ_i^j (11) dans (13), on obtient, rappelant que $P^{j+1}(t_{2i+1}^{j+1}) = P_{2i+1}^{j+1}$,

$$\begin{aligned} \|P^j - P^{j+1}\|_\infty &= \max_i \|P_{2i+1}^{j+1} - (\delta_i^j P_i^j + (1 - \delta_i^j) P_{i+1}^j)\| \\ &= \max_i \|\delta_i^j (P_{2i+1}^{j+1} - P_i^j) + (1 - \delta_i^j) (P_{2i+1}^{j+1} - P_{i+1}^j)\| \\ &\leq \max_i \{\delta_i^j \|P_{2i+1}^{j+1} - P_i^j\| + (1 - \delta_i^j) \|P_{2i+1}^{j+1} - P_{i+1}^j\|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_i \{\delta_i^j \rho_{2i}^{j+1} + (1 - \delta_i^j) \rho_{2i+1}^{j+1}\} \\ &\leq 2 \max_i \left\{ \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\alpha^j \rho_i^j} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

car $P_r^k = P_{2r}^{k+1}$ et, $\|P_{r+1}^k - P_r^k\|$, la distance euclidienne de P_r^k à P_{r+1}^k , est plus petite que la distance géodésique (sur S) ρ_r^k de P_r^k à P_{r+1}^k .

En utilisant (7) et l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique, on obtient

$$2 \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\alpha^j \rho_i^j} = 2 \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} \rho_{2i}^{j+1}}{\rho_{2i+1}^{j+1} + \rho_{2i}^{j+1}} \leq \frac{\rho_{2i+1}^{j+1} + \rho_{2i}^{j+1}}{2} = \frac{\alpha^j \rho_i^j}{2}.$$

Par conséquent, à partir de (15) on obtient,

$$\|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty \leq \frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^j\}.$$

En supposant (12), on obtient

$$\begin{aligned} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty &\leq \Gamma \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^{j-1}\} \right) \\ &\leq \Gamma^2 \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^{j-2}\} \right) \leq \dots \leq \Gamma^j \left(\frac{\alpha^j}{2} \max_i \{\rho_i^0\} \right). \end{aligned}$$

Remarquons que $\Gamma < 1$ et que (12) implique $\alpha^j \leq 2$, donc en passant à la limite, on obtient,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P^j(t) - P^{j+1}(t)\|_\infty = 0.$$

La dernière expression signifie que la séquence $\{P^j(t)\}$ est une suite de Cauchy en la norme sup et par conséquent, c'est convergent. Donc, la fonction limite $c(t)$ est continue. \square

Observation 1 Notez que (12) est une condition suffisante, mais ce n'est pas une condition nécessaire. En particulier, si l'hypothèse est vérifiée seulement après une certaine étape j_0 , le schéma reste convergent vers une courbe continue, comme on peut constater en appliquant la même démonstration au polygone P^{j_0} .

3. Propriétés de la courbe limite

3.1. Distance de la courbe de subdivision au polygone

Dans cette section, une borne pour la distance de Hausdorff entre la courbe limite et le polygone initial P^0 est obtenue.

Lemma 1 Les sommets P_k^j , obtenus après de la j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$, appartient à l'ensemble

$$i(E_g(P_i^0, P_{i+1}^0), (\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1})) \quad (16)$$

i.e., les sommets P_k^j sont à l'intérieur de l'ellipse géodésique de foyers P_i^0, P_{i+1}^0 et d'excentricité $(\alpha^0 \alpha^1 \dots \alpha^{j-1})^{-1}$.

Démonstration: Nous avons $P_i^0 = P_{2^j i}^j$ et $P_{i+1}^0 = P_{2^j(i+1)}^j$. Les sommets obtenus après de la j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ sont P_k^j , pour $k = 2^j i, \dots, 2^j(i+1)$ et on a :

$$\begin{aligned} d_g(P_i^0, P_k^j) + d_g(P_k^j, P_{i+1}^0) &= d_g(P_{2^j i}^j, P_k^j) + d_g(P_k^j, P_{2^j(i+1)}^j) \\ &\leq \sum_{l=2^j i}^{k-1} \rho_l^j + \sum_{l=k}^{2^j(i+1)-1} \rho_l^j \\ &= \sum_{l=2^j i}^{2^j(i+1)-1} \rho_l^j \\ &= \alpha^{j-1} \sum_{l=2^{j-1} i}^{2^{j-1}(i+1)-1} \rho_l^{j-1} \\ &\dots \\ &= \alpha^{j-1} \alpha^{j-2} \dots \alpha^0 \rho_i^0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la somme des distances géodésiques de P_k^j à P_l^0 , $l = i, i+1$ est inférieur ou égal à $\alpha^{j-1} \alpha^{j-2} \dots \alpha^0$ fois la distance géodésique, ρ_i^0 , de P_i^0 à P_{i+1}^0 . \square

En utilisant le Lemme 1, nous obtenons une borne supérieure de la distance de Hausdorff d_H entre le segment de la courbe limite $\{c(t), t \in [t_i^j, t_{i+1}^j]\}$ et l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$.

Théorème 2 Soit $c(t)$ la courbe limite du schéma de subdivision (5). Supposons que $\alpha = \prod_{j=0}^{\infty} \alpha^j$ est finie. Alors,

$$d_H(\{c(t), t \in [t_i^0, t_{i+1}^0]\}, P_i^0 P_{i+1}^0) \leq \frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2} \quad (17)$$

$$\text{avec } \omega := \frac{\alpha \rho_i^0}{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\|}.$$

Démonstration: Selon Lemme 1, nous savons que tous les points obtenus à la j -ième subdivision de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ sont contenues dans l'ensemble donné par (16).

Soit Q un point sur le segment de courbe $c([t_i^0, t_{i+1}^0])$, et notons par Π_Q le plan engendré par Q , P_i^0 et P_{i+1}^0 . Comme la distance euclidienne est plus petit que la distance géodésique, alors Q est à l'intérieur de l'ellipse *euclidienne* de foyers P_i^0, P_{i+1}^0 et d'excentricité $1/\omega$, définie par

$$E_Q := \{ R \in \Pi_Q / \|R - P_i^0\| + \|R - P_{i+1}^0\| = \omega \|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \}$$

$$\text{avec } \omega := \frac{\alpha \rho_i^0}{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\|}.$$

Observez que la longueur de l'axe demi-minor de l'ellipse *euclidienne* E_Q est $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2}$, tandis que la distance euclidienne de chaque foyer à le point le plus proche d'intersection entre le demi-grand axe de E_Q et l'ellipse euclidienne E_Q est $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| (\omega - 1)}{2}$.

Puisque $\omega \geq 1$, la première distance est plus grande que la seconde distance. Par conséquent, la distance de Hausdorff

de l'arête $P_i^0 P_{i+1}^0$ à la section de la courbe limite $c([t_i^0, t_{i+1}^0])$ est majoré par $\frac{\|P_{i+1}^0 - P_i^0\| \sqrt{\omega^2 - 1}}{2}$. \square

3.2. Paramétrisation

Nous prouvons dans cette section des propriétés du schéma de subdivision, lorsque t^0 est la paramétrisation défini en (10).

Théorème 3 Prenons le schéma de subdivision (5)-(7) avec la paramétrisation (10)-(11) et supposons que les conditions (6) et (12) sont vérifiés.

Notons par $l^j(P_0^j, P^j(t))$ la longueur, entre les points P_0^j et $P^j(t)$, de la courbe de subdivision de l'étape j . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe j_0 , tel que

$$|l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| < \varepsilon$$

est vérifié, pour tous les $k > 0$, où $R(k) := \prod_{j \geq k} \alpha^j$.

Démonstration: Supposons que $t_i^{j_0} < t \leq t_{i+1}^{j_0}$. Alors, il n'est pas difficile de montrer que en utilisant la récurrence (7) on obtient

$$l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t_i^{j_0})) = \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t_i^{j_0}.$$

Par conséquent, l'égalité

$$\begin{aligned} &|l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| \\ &= |l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}(t_i^{j_0}), P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} (t - t_i^{j_0})| \quad (18) \end{aligned}$$

est vérifié pour $t_i^{j_0} < t \leq t_{i+1}^{j_0}$.

Soit $s_i^{j_0+k}$ la somme des distances géodésiques entre deux sommets consécutifs du sous polygone P^{j_0+k} qui est obtenue après k étapes de subdivision de l'arête $P_i^{j_0} P_{i+1}^{j_0}$ de P^{j_0} . Évidemment, on peut vérifier

$$l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}(t_i^{j_0}), P^{j_0+k}(t)) \leq s_i^{j_0+k} \quad (19)$$

D'autre part, si nous prenons P^{j_0} comme polygone initial et t^{j_0} comme paramétrisation initiale, nous obtenons la même courbe limite comme lorsque l'on prend P^0 comme polygone initial et t^0 comme paramétrisation initial, donc après un argument semblable à celui utilisé dans le Lemme 1, on obtiene que $s_i^{j_0+k}$ a la borne supérieure

$$s_i^{j_0+k} \leq \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} P_i^{j_0}. \quad (20)$$

Par conséquent, avec la substitution de (19) et (20) dans (18), on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} & |l^{j_0+k}(P_0^{j_0+k}, P^{j_0+k}(t)) - \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} t| \\ & \leq \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} (\rho_i^{j_0} - (t - t_i^{j_0})) \\ & < \frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} \rho_i^{j_0}. \end{aligned}$$

Rappelons que (6) implique que $R(j_0+k) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 1$. D'autre part, si nous choisissons j_0 assez grand, de telle sorte que les inégalités

$$\frac{R(j_0)}{R(j_0+k)} < 2 \text{ et } \max_i \{\rho_i^{j_0}\} < \varepsilon/2$$

sont vérifiés, on obtient le résultat désiré. \square

Observation 2 Le résultat ci-dessus signifie que, pour suffisamment grand j , le spline $P^j(t)$ qui interpole des points (t_i^j, P_i^j) est environ paramétrée par un multiple de la longueur d'arc. En plus, soit $c(t)$ la courbe limite et supposons que les conditions (6) et (12) sont vérifiés. Si nous notons par $L(0, t)$ la longueur d'arc de la section de $c(t)$ entre les points $c(0) = P_0^0$ et $c(t)$, on obtient que $L(0, t) \simeq R(j_0) t$ est vérifié. Par conséquent, $c(t)$ est environ paramétré par un multiple de la longueur de l'arc.

4. Choix des paramètres et du nouveau point

D'abord, la suite des paramètres α^j n'est caractérisé que par : $\alpha^j > 1$ et le fait que le produit des α^j soit fini. Ces conditions sur les α^j sont suffisantes pour prouver les propriétés des courbes limites (continuité, distance de Hausdorff au polygone de contrôle et paramétrisation par la longueur d'arc).

Soit $\{P_i^0, i = 0, \dots, n\}$ une suite des points sur une surface connexe S , et soit d_H^0 une borne inférieure de la distance de Hausdorff entre la frontière ∂S de la surface S et le polygone P^0 avec des arêtes $P_i^0 P_{i+1}^0, i = 0, \dots, n-1$.

4.1. Choix des paramètres α^j

Pour donner une suggestion pour choisir les α^j et aussi une définition constructive du schéma de subdivision, nous supposons que le polygone initial P^0 et son polygone géodésique associé P_g^0 remplissent les conditions suivantes :

1. $d_H^0 > 0$
2. Trois sommets consécutifs de P_g^0 sont toujours *non-alignés*

Supposons aussi que nous avons choisi un paramètre $\alpha > 1$ suffisamment petit, tel que pour tous les indices i , l'ellipses géodésiques sur S , $E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \alpha)$, sont des

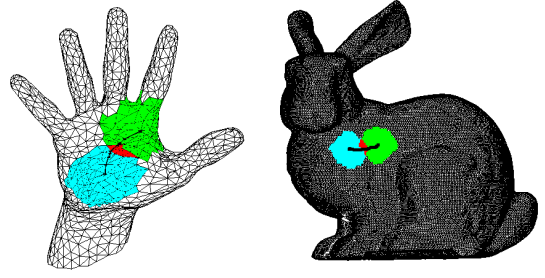


Figure 5: Ensembles $B^r := \{R \in S / d_g(R, P_i^0) \leq \beta \rho_i^0/2\}$ (bleu), $B^l := \{R \in S / d_g(R, P_{i+1}^0) \leq \beta \rho_i^0/2\}$ (vert) et $B^r \cap B^l$ (rouge).

courbes connexes qui ne coupent pas la frontière de S , ∂S . Cette dernière condition est satisfaite, par exemple, si

$$1 < \alpha \leq \min_i \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2d_H^0}{\rho_i^0} \right)^2} \right\}.$$

Après Théorème 2, avec cet choix pour α on a que pour tous les paramètres β qui satisfont à la condition $\alpha > \beta > 1$, l'ellipse géodésique $E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \beta)$ est une courbe non vide et connexe qui ne coupe pas ∂S . Par ailleurs, existent deux points sur $E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \beta)$, de telle sorte que l'équations suivantes sont remplies (voir Figure(5)) :

$$d_g(R, P_i^0) = d_g(R, P_{i+1}^0) = \beta \rho_i^0/2. \quad (21)$$

Soit α^0 un paramètre choisi de telle sorte que

$$\min \{ 2, \alpha \} > \alpha^0 > 1$$

donc la suite des paramètres définie par

$$\alpha^j = e^{\frac{K}{\sigma^j}}, \quad j \geq 0 \quad (22)$$

avec $\sigma = \frac{\ln(\alpha)}{\ln(\alpha) - \ln(\alpha^0)}$ et $K = \ln(\alpha^0)$ a las propriétés suivantes :

$$\alpha^j > 1, \quad \alpha^j > \alpha^{j+1}, \quad \alpha = \prod_{j \geq 0} \alpha^j.$$

Remarquez que la valeur du paramètre α donne une idée du facteur de grossissement de la longueur d'arc du polygone initial par rapport à la longueur d'arc de la courbe limite. Par conséquent, α n'est pas censé être très grand.

D'autre part, la borne supérieure $\alpha^j < 2$ était déjà pris au Théorème 1. On peut ramplir cette borne en supposant α^j donné par (22) avec $1 < \alpha^0 < 2$.

4.2. Choix du nouveau point P_{2i+1}^{j+1} dans l'ensemble E_g

Un fois les α^j déterminés après les conditions expliqués dans la sous section précédente, un schéma de subdivision

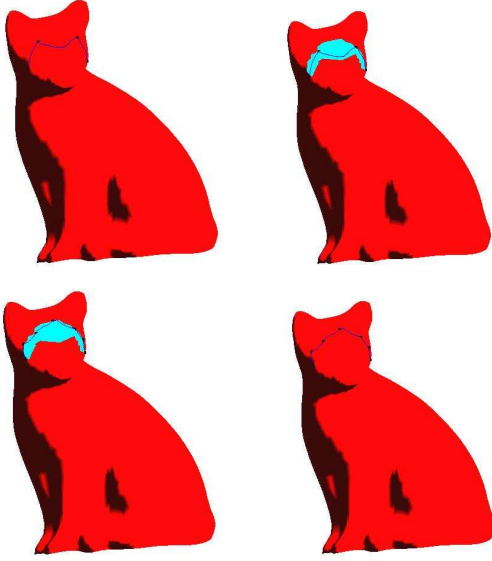


Figure 6: De gauche à droite. Première ligne : polygone géodésique initial P_g^0 , $i(E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \alpha^0))$. Deuxième ligne : choix des points P_i^1 , polygone géodésique P_g^1 .

(inspiré dans l'idée de la version classique du schéma de subdivision de 4 points) peut être défini comme suit.

Pour $Q_1, Q_2 \in S$, soit $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$ l'extension de la courbe $c_g(Q_1, Q_2)$ avec courbes géodésiques les plus droites (nous utilisons le terme courbe *courbe géodésique la plus droite* pour appeler la solution du problème de valeurs initiales dans le cas d'une surface lisse S , dans le cas d'une triangulation S , voir [MMP87], [PS99]). Alors, $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$ définit, par chaque voisinage $V \subset S$ suffisamment petite de $c_g(Q_1, Q_2)$, une partition de V donné par

$$V = V^r \cup V^0 \cup V^l$$

où V^r consiste des points de V strictement à la droite de $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$, V^l consiste des points de V strictement à la gauche de $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$ et V^0 consiste des points de V qui appartiennent à $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$.

Si $\beta > 1$ est si proche de 1, que $E_g(Q_1, Q_2, \beta)$ est une courbe connexe qui ne coupe pas la frontière de S , ∂S , donc la courbe $\tilde{c}_g(Q_1, Q_2)$ définit, d'une façon semblable comme au-dessus, une partition de $i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))$ donné par

$$i(E_g(Q_1, Q_2, \beta)) = i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))^r \cup i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))^0 \cup i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))^l.$$

Soient $P_{i-1}^j, P_i^j, P_{i+1}^j, P_{i+2}^j$ quatre sommets consécutifs d'un polygone (de subdivision) géodésique sur S , P_g^j , où trois de ces sommets sont toujours *non-alignés*, nous appellerons l'arête $c_g(P_i^j, P_{i+1}^j)$ du P_g^j *convexe* si les deux

courbes $c_g(P_{i-1}^j, P_i^j)$ et $c_g(P_{i+1}^j, P_{i+2}^j)$ ont intersection non vide exactement avec un des ensembles $i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))^r$ ou $i(E_g(Q_1, Q_2, \beta))^l$ (ces deux cas exclusif), et *non-convexe* dans le cas contraire.

Dans le cas *convexe*, soit $k \in \{r, l\}$ l'indice tel que

$$c_g(P_{i-1}^j, P_i^j) \cap i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, 1 + \epsilon))^k = \emptyset$$

est vérifiée, pour $\epsilon > 0$ très petit, alors le nouveau point P_{2i+1}^{j+1} est le point R sur la frontière de $i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha^j))^k$ avec :

$$d_g(R, P_i^j) = \alpha^j \rho_i^j / 2$$

Dans le cas *non-convexe*, soit \hat{c}_g la courbe géodésique avec la plus grande longueur d'arc entre $c_g(P_{i-1}^j, P_i^j)$ et $c_g(P_{i+1}^j, P_{i+2}^j)$. Si $k \in \{r, l\}$ est l'indice tel que

$$\hat{c}_g \cap i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, 1 + \epsilon))^k = \emptyset$$

est vérifiée, pour $\epsilon > 0$ très petit, alors le nouveau point P_{2i+1}^{j+1} est le point R sur la frontière de $i(E_g(P_i^j, P_{i+1}^j, \alpha^j))^k$ avec :

$$d_g(R, P_i^j) = \alpha^j \rho_i^j / 2$$

Dans la Figure (6) nous montrons les premières étapes du schéma de subdivision sur une triangulation : le *polygone géodésique initial* P_g^0 , des ensembles $i(E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \alpha^0))$, le choix des points P_i^1 sur $E_g(P_i^0, P_{i+1}^0, \alpha^0)$ et le *polygone géodésique* P_g^1 .

Soit $\Gamma = \alpha^0 / 2$, donc pour $j > 0$ on a :

$$d_g(P_{2i+1}^{j+1}, P_i^j) = d_g(P_{2i+1}^{j+1}, P_{i+1}^j) = \alpha^j \rho_i^j / 2 < \alpha^0 \rho_i^j / 2 = \Gamma \rho_i^j$$

avec $\Gamma = \alpha^0 / 2 < 1$. Après Théorème 1, cet schéma de subdivision converge et la courbe limite est continue.

5. Conclusions

Nous avons présenté un nouveau schéma de subdivision interpolant avec contrôle sur la longueur de l'arc de la courbe limite, adapté pour la conception de courbes sur les surfaces.

La paramétrisation n'est pas uniforme, mais il est possible de calculer (avec un montant de calcul faible) une séquence de m points approximativement sur la courbe de subdivision ayant une distribution environ uniforme de la longueur l'arc. Même lorsque ces points ne sont pas exactement sur la courbe de subdivision, on a une borne pour leur distance à la courbe limite, qui nous permet de leur estimer leur erreur.

La formulation du schéma général est présentée pour des variétés de dimension deux. Dans le cas particulier des surfaces triangulées, les résultats obtenus dans [MCV07, MVC08] rendent possible d'obtenir des implementations efficaces, qui devraient être examinées en détail dans un prochain travail.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Nayla López et Orlenys López pour leur mise en œuvre du schéma de subdivision sur les triangulations et les images correspondantes. J. Estrada Sarlabous et V. Hernández-Mederos ont été soutenus par le projet PNCB 0409 du CITMA/ Cuba. Ils reconnaissent aussi le soutien de TWAS/ UNESCO/ CNPq et de Visgraf-IMP/ Brésil dans le cadre des TWAS/ UNESCO/ CNPq-Brésil Associateships Réf. 3240173676 et Réf. 3240173677, respectivement.

Les auteurs sont très reconnaissants aux juges anonymes pour leurs très utiles suggestions et critiques.

Références

- [CKL99] CROUCH P., KUN G., LEITE F. S. : The de Casteljau algorithm on Lie groups and spheres. *Journal of Dynamical and Control Systems*. Vol. 5, Num. 3 (July 1999), 397–429.
- [DD89] DESLAURIERS G., DUBUC S. : Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*. Vol. 5, Num. 1 (1989), 49–68.
- [DFH09] DYN N., FLOATER M., HORMANN K. : Four point curve subdivision based on iterated chordal and centripetal parameterizations. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 26 (2009), 279–286.
- [DLG87] DYN N., LEVIN D., GREGORY J. A. : A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 4 (1987), 257–268.
- [Dub86] DUBUC S. : Interpolation through an iterative scheme. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 114 (1986), 185–204.
- [HEIM09] HERNANDEZ V., ESTRADA J., IVRISIMTZIS I., MORALES S. : Curve subdivision with arc-length control. *Computing*. Vol. 86 (2009), 151–169.
- [KS98] KOBBELT L., SCHRÖDER P. : A multiresolution framework for variational subdivision. *ACM Trans. on Graph.* Vol. 17, Num. 4 (1998), 209–237.
- [MCV07] MARTÍNEZ D., CARVALHO P. C., VELHO L. : Geodesic Bézier curves : A tool for modeling on triangulations. In *Proceedings of SIBGRAPI 2007. XX Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing* (2007), IEEE Computer Society, pp. 71–78.
- [MMP87] MITCHELL J. S. B., MOUNT D. M., PAPADIMITRIOU C. H. : The discrete geodesic problem. *SIAM J. COMPUT.* Vol. 16 (1987), 647–668.
- [MVC05] MARTÍNEZ D., VELHO L., CARVALHO P. C. : Computing geodesics on triangular meshes. *Computer and Graphics*. Vol. 29, Num. 5 (October 2005), 667–675.
- [MVC08] MARTÍNEZ D., VELHO L., CARVALHO P. C. : Subdivision curves on surfaces and applications. In *Proceedings of CIARP 2008* (2008), Springer LNCS 5197, pp. 405–412.
- [PH05] POTTSMANN H., HOFER M. : A variational approach to spline curves on surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 22, Num. 7 (October 2005), 693–709.
- [PR95] PARK F. C., RAVANI B. : Bezier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematic applications. *ASME Journal of Mechanical Design*. Vol. 117 (1995), 36–40.
- [PS99] POLTHIER K., SCHMIES M. : Geodesic flow on polyhedral surfaces. In *Data Visualization, Proceedings of Eurographics Workshop on Scientific Visualization* (Vienna, 1999), Springer Verlag.
- [RLJ05] RODRIGUEZ R. C., LEITE F. S., JACUBIAK J. : A new geometric algorithm to generate smooth interpolating curves on riemannian manifolds. *LMS Journal of Computation and Mathematics*. Vol. 8 (2005), 251–266.
- [Wal06] WALLNER J. : Smoothness analysis of subdivision schemes by proximity. *Constr. Approx.* Vol. 24, Num. 3 (2006), 289–318.
- [WD05] WALLNER J., DYN N. : Convergence and C^1 analysis of subdivision schemes on manifolds by proximity. *Comput. Aided Geom. Design*. Vol. 22, Num. 7 (2005), 593–622.
- [WP06] WALLNER J., POTTSMANN. H. : Intrinsic subdivision with smooth limits for graphics and animation. *ACM Trans. Graphics*. Vol. 25, Num. 2 (2006), 356–374.