

# Géométrie des points d'inflexion et des singularités d'une cubique rationnelle

G. Albrecht\* et J.P. Bécar\*\* et X. Xiang†

\* ENSIAME, Laboratoire LAMAV–CGAO, FR–CNRS 2956,  
Université de Valenciennes et du Hainaut–Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes  
gudrun.albrecht@univ-valenciennes.fr

\*\* IUT, Laboratoire LAMAV–CGAO, FR–CNRS 2956,  
Université de Valenciennes et du Hainaut–Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes  
jpbecar@univ-valenciennes.fr

† Laboratoire LAMAV–CGAO, FR–CNRS 2956,  
Université de Valenciennes et du Hainaut–Cambrésis, Le Mont Houy, 59313 Valenciennes  
Xin.Xiang@univ-valenciennes.fr

---

## Résumé

*Cet article traite de la détermination des points d'inflexion et des points singuliers d'une cubique de Bézier rationnelle plane. Pour une telle courbe, considérée sous forme standard, le but est d'établir la distribution de ses points d'inflexion et de ses singularités en fonction non seulement des points de contrôle mais aussi des poids en fournissant une partition du quart de plan formé par les deux poids intérieurs.*

*This article deals with the issue of determining inflection points and singularities of a rational parametric planar cubic. Given such a curve in standard Bézier form, the distribution of its characteristic points is determined, not only depending on the position of the control points, but also depending on the variable two inner weights.*

---

**Mots clé :** Points d'inflexion; Singularités; Segments cubiques rationnels

## 1. Introduction

Vues leur simplicité d'une part et leur flexibilité d'autre part, les cubiques paramétrées polynomiales et rationnelles sont beaucoup utilisées en Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Pour bien contrôler leur forme, il est important de savoir localiser des points caractéristiques de ces courbes, comme les points d'inflexion et les singularités. Jusqu'à présent différents scénarios ont été étudiés:

En ce qui concerne les cubiques planes polynomiales, la détermination de leurs points d'inflexion et de leurs singularités fait l'objet des articles [SD89, Kim93, Wan81, MW80], où [SD89] et [Kim93] se basent sur la forme de Bézier/de Casteljau, tandis que [Wan81] et [MW80] partent de la représentation B–Spline.

En ce qui concerne les cubiques planes rationnelles, [Pat88] et [CS01] étudient le problème dans le contexte des

cubiques algébriques, tandis que [Sak97, Sak99] approchent le problème par la représentation de Hermite.

Les articles [MC92] et [LC97] décrivent des méthodes pour calculer les paramètres des points d'inflexion et des points de rebroussement pour des courbes 2D et 3D, polynomiales et rationnelles.

Le présent article reprend le travail de M. Sakai [Sak99], qui à partir de la forme de Hermite d'une cubique plane rationnelle présente la distribution des points d'inflexion, des points de rebroussement et des boucles en fonction des points de contrôle de sa représentation de Bézier. Notre but est d'étudier la distribution des points d'inflexion et des singularités d'une cubique rationnelle sous forme de Bézier non seulement en fonction de ses points de contrôle, mais aussi de ses poids. Nous donnons ainsi une correspondance entre les poids d'une cubique rationnelle de Bézier et son aspect en fonction de ses points caractéristiques. Habituellement, les logiciels de CAO ne permettent pas à l'utilisateur d'accéder aux poids. Une correspondance géométrique, telle que nous la présentons, pourra par la suite donner un moyen

intuitif à l'utilisateur pour changer la courbe en fonction des poids.

L'article est organisé comme suit. Dans la section 2, nous posons le problème et nous présentons le résultat principal de Sakai [Sak99] sur lequel nous nous basons par la suite. Dans la section 3, en supposant la cubique rationnelle de Bézier de points de contrôle  $\mathbf{p}_i$  et de poids  $\omega_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) donnée sous forme standard, i.e.,  $\omega_0 = \omega_3 = 1$ , nous étudions la distribution des points d'inflexion et des singularités en fonction des poids  $\omega_1, \omega_2$  et nous en déduisons une partition du plan  $(\omega_1, \omega_2)$ . Cette classification est illustrée par des exemples significatifs dans la section 4, et nous concluons en section 5.

## 2. Position du problème et résultat de M. Sakai

Soit une courbe cubique de Bézier rationnelle écrite sous la forme:

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 \omega_i \mathbf{p}_i B_i^3(t)}{\sum_{i=0}^3 \omega_i B_i^3(t)}; t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$\text{avec } B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i},$$

où les points de contrôle  $\mathbf{p}_i$ , non alignés, appartiennent à  $\mathbf{R}^2$  et les poids  $\omega_i$  sont tous positifs. Le problème est ici de déterminer la distribution des points d'inflexion et des singularités de la cubique (2.1). A cette fin nous rappelons ci-après l'approche et le résultat de M. Sakai [Sak99]. La représentation choisie pour la cubique est celle interpolant les données de Hermite, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{z}(1) = \mathbf{z}_1 = \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{z}'(0) &= \mathbf{z}'_0 = \frac{3\omega_1}{\omega_0} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \\ \mathbf{z}'(1) &= \mathbf{z}'_1 = \frac{3\omega_2}{\omega_3} (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

On obtient

$$\mathbf{z}(t) = \frac{\mathbf{z}_{num}(t)}{\mathbf{z}_{den}(t)}, \quad (2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{num}(t) &= \omega_0(1-t)^3 \mathbf{z}_0 + (1-t)^2 t (\omega_0 \mathbf{z}'_0 + 3\omega_1 \mathbf{z}_0) \\ &\quad + (1-t)t^2 (-\omega_3 \mathbf{z}'_1 + 3\omega_2 \mathbf{z}_1) + \omega_3 t^3 \mathbf{z}_1, \\ \mathbf{z}_{den}(t) &= \omega_0(1-t)^3 + 3\omega_1(1-t)^2 t + \\ &\quad 3\omega_2(1-t)t^2 + \omega_3 t^3, \end{aligned}$$

où  $\omega_i > 0$ , et  $\det(\mathbf{z}'_0, \mathbf{z}'_1) \neq 0$ . Étant donnés  $\mathbf{z}'_i, i = 0, 1$ , non colinéaires, le vecteur  $\Delta \mathbf{z} (= \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0)$  peut être représenté comme:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z} &= \lambda \mathbf{z}'_0 + \mu \mathbf{z}'_1 \quad (2.4) \\ \text{où } (\lambda, \mu) &= \frac{1}{\det(\mathbf{z}'_0, \mathbf{z}'_1)} (\det(\Delta \mathbf{z}, \mathbf{z}'_1), -\det(\Delta \mathbf{z}, \mathbf{z}'_0)). \end{aligned}$$

Nous nous intéressons à la distribution des points caractéristiques de la cubique rationnelle  $\mathbf{z}(t)$ , c'est-à-dire à la distribution des

- points d'inflexion, caractérisés par  $\det(\mathbf{z}'(t), \mathbf{z}''(t)) = 0$  pour  $0 < t < 1$ ,
- points d'auto-intersection ou points doubles, générant des boucles, caractérisés par  $\mathbf{z}(\alpha) = \mathbf{z}(\beta)$  pour  $0 < \alpha < \beta < 1$ ,
- points de rebroussement, caractérisés par  $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{0}$  pour  $0 < t < 1$ .

Suivant la théorie des courbes planes (voir par exemple [Pat88]) nous appelons singularités ou points singuliers de  $\mathbf{z}(t)$  les points de rebroussement et les points d'auto-intersection aussi appelés boucles.

La distribution de ces points caractéristiques du segment de la cubique rationnelle (2.3) est donnée par le théorème ci-dessous, voir [Sak99].

### Théorème 2.1 (Sakai)

Soit  $\Delta \mathbf{z} = \lambda \mathbf{z}'_0 + \mu \mathbf{z}'_1$  avec  $\det(\mathbf{z}'_0, \mathbf{z}'_1) \neq 0$ .

La distribution des points d'inflexion et des singularités du segment (2.3) par rapport à  $(\lambda, \mu)$ , est donnée en figure 1 avec:

1.  $N_i, 0 \leq i \leq 2$ , représentent les régions pour lesquelles la cubique (2.3) possède  $i$  points d'inflexion et aucune singularité;
2. Pour les valeurs de  $(\lambda, \mu)$  situées sur la courbe  $C$  la cubique (2.3) possède un point de rebroussement et aucun point d'inflexion;
3.  $L$ , limitée par  $A, B, C$ , représente la région pour laquelle la cubique (2.3) possède une boucle et aucun point d'inflexion.

La région  $N_0$  contient les frontières  $A$  et  $B$ ;  $N_1$  contient les deux demi-droites:  $\lambda = \omega_0/(3\omega_1), \mu < \omega_3/(3\omega_2)$ , ainsi que  $\lambda < \omega_0/(3\omega_1), \mu = \omega_3/(3\omega_2)$ .

**Remarque:** Dans la figure 1, le plan est rapporté au repère  $(O; \mathbf{z}'_0, \mathbf{z}'_1)$ ,  $\lambda$  est donc représenté en abscisse tandis que  $\mu$  l'est en ordonnée. On a deux droites:

$$\lambda = \frac{\omega_0}{3\omega_1}, \mu = \frac{\omega_3}{3\omega_2}, \quad (2.5)$$

$A$  (l'arc de l'hyperbole):

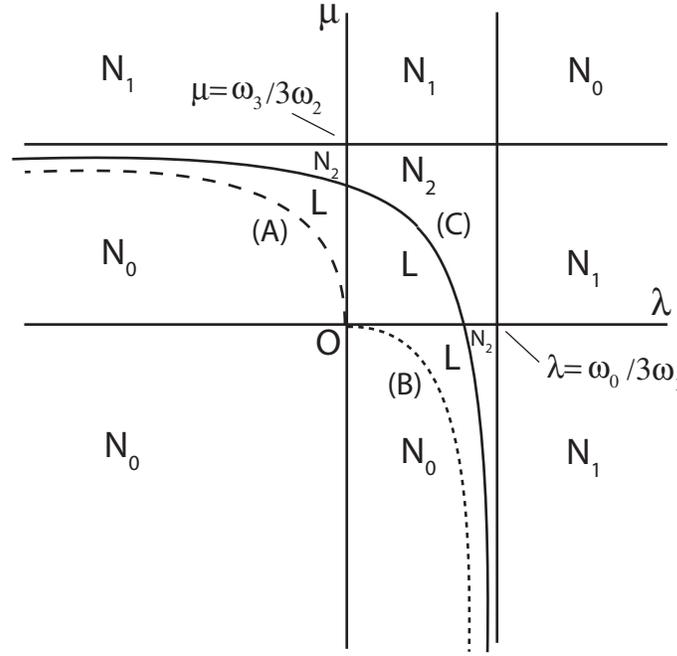
$$\omega_0 \mu^2 = \lambda(3\omega_2 \mu - \omega_3), \lambda < 0, \mu > 0, \quad (2.6)$$

$B$  (l'arc de l'hyperbole):

$$\omega_3 \lambda^2 = \mu(3\omega_1 \lambda - \omega_0), \lambda > 0, \mu < 0, \quad (2.7)$$

et  $C$  (la courbe paramétrée de paramètre  $\sigma$  est l'ensemble des points  $(\lambda(\sigma), \mu(\sigma))$  avec  $0 < \sigma < \infty$ ):

$$\begin{cases} \lambda(\sigma) = \frac{\omega_0(-\omega_0 \sigma^4 + 3\omega_2 \sigma^2 + 2\omega_3 \sigma)}{3(2\omega_0 \omega_2 \sigma^3 + (3\omega_1 \omega_2 + \omega_0 \omega_3) \sigma^2 + 2\omega_1 \omega_3 \sigma)}, \\ \mu(\sigma) = \frac{\omega_3(2\omega_0 \sigma^3 + 3\omega_1 \sigma^2 - \omega_3)}{3(2\omega_0 \omega_2 \sigma^3 + (3\omega_1 \omega_2 + \omega_0 \omega_3) \sigma^2 + 2\omega_1 \omega_3 \sigma)}. \end{cases} \quad (2.8)$$



**Figure 1:** La distribution des points d'inflexion et des singularités d'une cubique rationnelle d'après Théorème 2.1.

Cette courbe  $C(\lambda(\sigma), \mu(\sigma))$ ,  $0 < \sigma < \infty$  est une branche de la courbe algébrique  $k(\lambda, \mu) = 0$  limitée par  $\lambda < \omega_0/(3\omega_1)$ ,  $\mu < \omega_3/(3\omega_2)$  avec:

$$\begin{aligned} k(\lambda, \mu) = & 4\omega_3^2\omega_0(3\omega_2\mu - \omega_3)\lambda^3 \\ & + 4\omega_0^2\omega_3(3\omega_1\lambda - \omega_0)\mu^3 - 3(\omega_0\omega_3\lambda\mu)^2 \\ & + ((3\omega_1\lambda - \omega_0)(3\omega_2\mu - \omega_3))^2 \quad (2.9) \\ & - 6\omega_0\omega_3(3\omega_1\lambda - \omega_0)(3\omega_2\mu - \omega_3)\lambda\mu. \end{aligned}$$

La courbe  $C$  admet pour asymptotes les droites d'équations  $\lambda = \omega_0/(3\omega_1)$  et  $\mu = \omega_3/(3\omega_2)$ .

Pour interpréter ce résultat pour la cubique sous forme de Bézier rationnelle (2.1), Sakai [Sak99] considère le point  $\mathbf{p}_1(u, v)$  dans le repère affine  $\{\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2\}$  si les points  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  ne sont pas alignés:

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = u(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2) + v(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2). \quad (2.10)$$

D'après les formules (2.4) et (2.2), nous obtenons la relation suivante entre les couples  $(u, v)$  et  $(\lambda, \mu)$ :

$$u = 1 - \frac{\omega_0}{3\omega_1\lambda}, \quad v = \frac{\omega_0}{3\omega_1\lambda} \left(1 - \frac{3\omega_2\mu}{\omega_3}\right). \quad (2.11)$$

En appliquant le théorème 2.1, la relation (2.11) donne donc la distribution des points d'inflexion et des singularités par rapport au repère  $\{\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2\}$  en fonction du point  $\mathbf{p}_1$ .

### 3. Partition du plan $(\omega_1, \omega_2)$ en fonction des points d'inflexion et des singularités de la cubique rationnelle

Comme nous avons vu en section 2, Sakai [Sak99] a donné la distribution des points d'inflexion et des singularités d'une cubique plane rationnelle de Bézier de points de contrôle  $\mathbf{p}_i$  et de poids positifs  $\omega_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , en considérant fixés les points non-alignés  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  ainsi que les poids  $\omega_i$ , seul le point  $\mathbf{p}_1$  est supposé variable.

Dans cette section nous nous intéressons à la distribution des points d'inflexion et des singularités de la cubique, formule (2.1), en fonction de ses poids. A cette fin nous considérons, sans perte de généralité (voir par exemple [Far93]), la cubique sous forme standard, c'est-à-dire  $\omega_0 = \omega_3 = 1$ . Le but est donc de partitionner le plan  $(\omega_1, \omega_2)$  (où  $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ ) en régions en fonction des points d'inflexion et des singularités de la cubique rationnelle. Pour cela nous utilisons les notations de Sakai [Sak99], introduites dans la section 2. D'après les formules (2.4) et (2.2) on a:

$$\lambda = m \frac{\omega_0}{3\omega_1}, \quad \mu = n \frac{\omega_3}{3\omega_2} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} m &= \frac{\det((\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0), (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2))}{\det((\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2))}, \\ n &= -\frac{\det((\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0), (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0))}{\det((\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2))}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces réels  $m$  et  $n$  représentent des rapports d'aires signées des triangles construits sur le polygone de contrôle.

$$m = \frac{\text{aire}(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3)}{\text{aire}(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_3)}, n = \frac{\text{aire}(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_3)}{\text{aire}(\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}'_3)} \text{ avec } \mathbf{p}'_3 \text{ tel que } \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 \text{ (voir figure 2).}$$

Afin de mettre en relation les coordonnées  $(u, v)$  du point  $\mathbf{p}_1$  par rapport au repère  $(\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$  et les quantités géométriques  $m$  et  $n$ , nous remplaçons  $\lambda$  et  $\mu$ , formule (3.1), dans les équations (2.11) et obtenons:

$$u = 1 - \frac{1}{m}, v = \frac{1}{m}(1 - n), m \neq 0. \quad (3.3)$$

Pour  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  non-alignés, nous pouvons identifier la position du point  $\mathbf{p}_1$  par rapport au repère  $(\mathbf{p}_2; \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$  en fonction de  $m$  et  $n$ . Les valeurs suivantes de  $m$  et  $n$  caractérisent la région (i) contenant  $\mathbf{p}_1$ , voir figure 3.

- (1)  $(m \geq 1 \text{ et } n \geq 1) \text{ ou } (m < 0 \text{ et } n \leq 0)$  (3.4)
- (2)  $m < 0 \text{ et } 0 < n < 1$
- (3)  $((m-1)(n-1) < 0 \text{ et } m \neq 0) \text{ ou } (m = 1 \text{ et } n < 1) \text{ ou } (m < 1 \text{ et } m \neq 0 \text{ et } n = 1)$
- (4)  $0 < m < 1 \text{ et } n < 0$
- (5)  $0 < m < 1 \text{ et } 0 < n < 1$
- (6)  $0 < m < 1 \text{ et } n = 0$

En remplaçant  $\lambda$  et  $\mu$ , formule (3.1), dans les équations des courbes  $A, B, C$  (voir (2.6), (2.7), (2.9)) nous obtenons respectivement les équations

$$A = 0, B = 0, \text{ et } C = 0,$$

où:

$$\begin{aligned} A &= \omega_1 n^2 - 3\omega_2^2 m(n-1), m < 0, 0 < n < 1, \\ B &= \omega_2 m^2 - 3\omega_1^2 n(m-1), 0 < m < 1, n < 0, \\ C &= \frac{4m^3(n-1)}{27\omega_1^3} + \frac{4(m-1)n^3}{27\omega_2^3} - \frac{m^2 n^2}{27\omega_1^2 \omega_2^2} \\ &\quad + (m-1)^2 (n-1)^2 - \frac{2mn(m-1)(n-1)}{3\omega_1 \omega_2}, \\ &m < 1, n < 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les régions  $N_i, i = 0, 1, 2$ , du théorème 2.1 s'écrivent en fonction de  $m$  et  $n$  comme suit:

$$\begin{aligned} N_0 & (m \geq 1, n \geq 1) \text{ ou } (A \leq 0, m < 0, 0 < n < 1) \\ & \text{ou } (B \leq 0, n < 0, 0 < m < 1) \text{ ou } (m < 0, n \leq 0) \\ N_1 & ((m-1)(n-1) < 0) \text{ ou } (m = 1, n < 1) \\ & \text{ou } (m < 1, n = 1) \\ N_2 & C < 0, m < 1, n < 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Comme nous nous intéressons à la distribution des points d'inflexion et des singularités en fonction des poids, nous

étudions à présent le rôle des poids en fonction de la position du point  $\mathbf{p}_1$  par rapport aux régions de la figure 3. En considérant le théorème 2.1, la partition (3.4) du plan de la cubique et les caractérisations (3.6), ainsi que les définitions (3.5) des quantités  $A, B, C$ , nous obtenons:

**Théorème 3.1** Lorsque les trois points de contrôle  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  ne sont pas alignés, nous avons:

- (1) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve dans la région (1) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) ne possède aucun point d'inflexion ni de singularité (voir figure 4.(1)),
- (2) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve dans la région (2) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) admet (voir figure 4.(2))
  - deux points d'inflexion, si  $C < 0$ ,
  - ou
  - un point double, si  $C > 0$  et  $A > 0$ ,
  - ou
  - un point de rebroussement, si  $C = 0$ ,
  - ou
  - aucun point singulier et aucun point d'inflexion, si  $C > 0$  et  $A \leq 0$ ,
- (3) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve dans la région (3) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) admet un point d'inflexion pour tout couple  $(\omega_1 > 0, \omega_2 > 0)$ , (voir figure 4.(3)),
- (4) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve dans la région (4) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) admet (voir figure 4.(4))
  - deux points d'inflexion, si  $C < 0$ ,
  - ou
  - un point double, si  $C > 0$  et  $B > 0$ ,
  - ou
  - un point de rebroussement si  $C = 0$
  - ou
  - aucun point singulier et aucun point d'inflexion, si  $C > 0$  et  $B \leq 0$ ,
- (5) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve dans la région (5) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) admet (voir figure 4.(5))
  - deux points d'inflexion, si  $C < 0$ ,
  - ou
  - un point de rebroussement, si  $C = 0$ ,
  - ou
  - un point double, si  $C > 0$ ,
- (6) Si le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve sur la demi-droite (6), frontière entre les régions (4) et (5) (voir (3.4)), alors la courbe  $\mathbf{z}(t)$  de (2.1) admet (voir figure 4.(6))
  - deux points d'inflexion, si  $C < 0$ ,

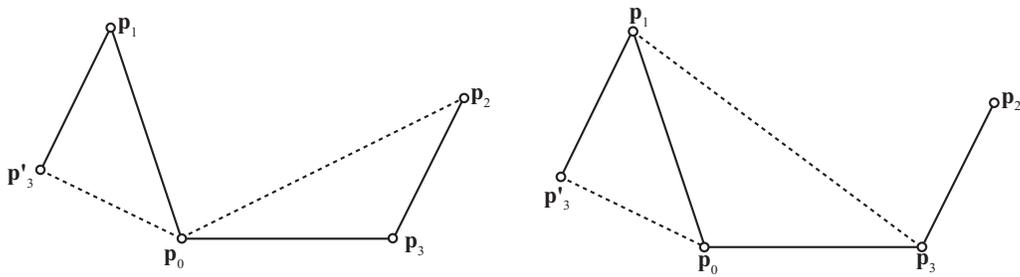


Figure 2: Incidence des coefficients  $m$  et  $n$

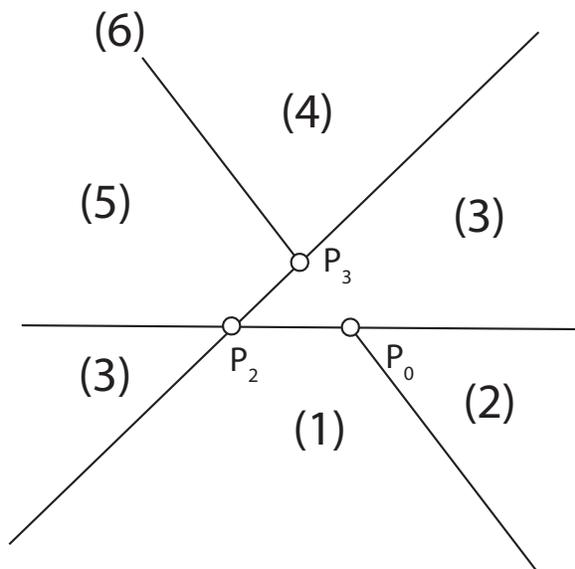


Figure 3: Partition du plan de la cubique d'après (3.4)

ou

- un point de rebroussement, si  $C = 0$ ,

ou

- un point double, si  $C > 0$ ,

Lorsque les trois points de contrôle  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  sont alignés, on se ramène aux situations précédentes (1), (3), (6) en échangeant les rôles des points  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ .

#### 4. Exemples numériques

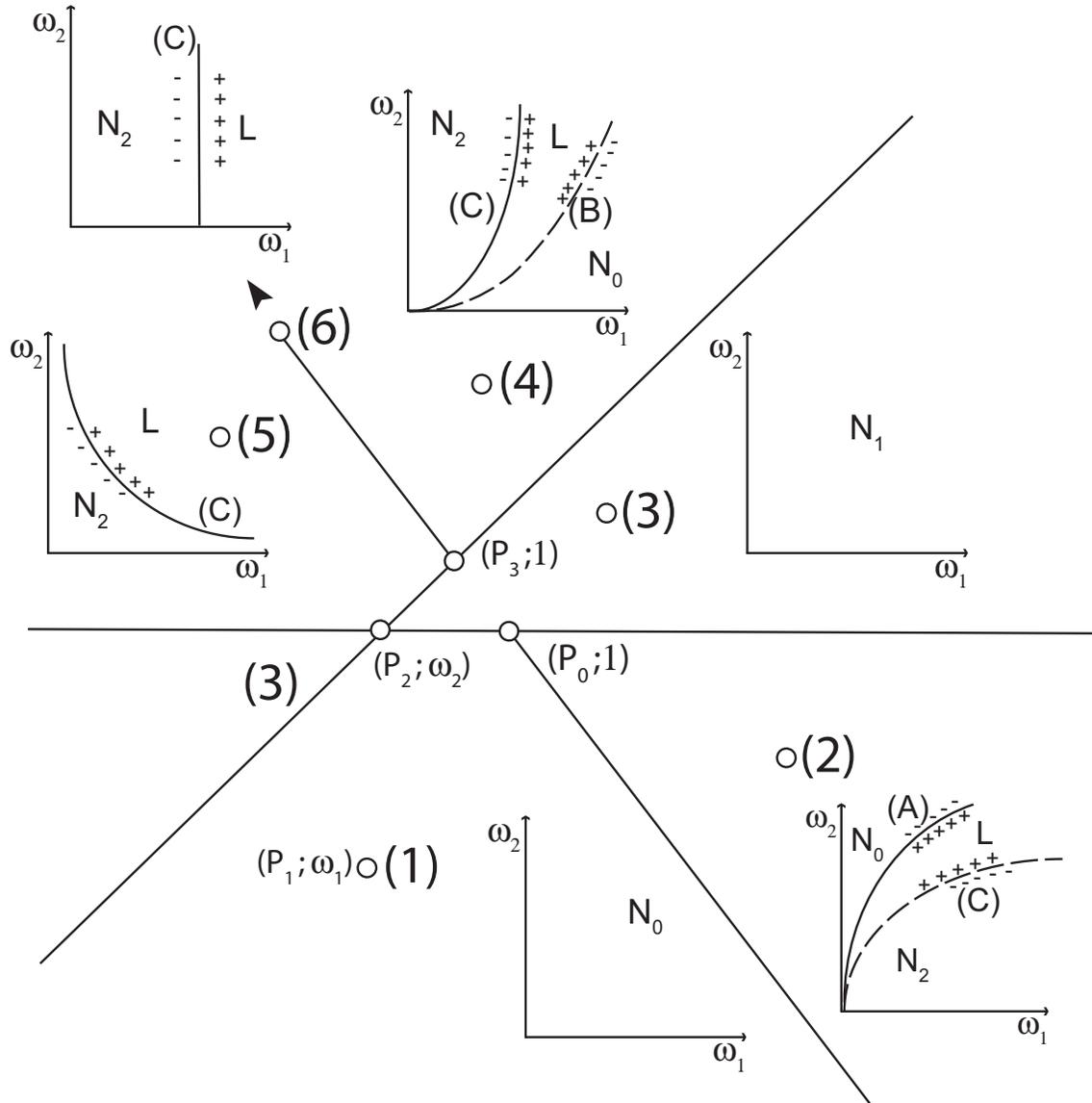
Nous présentons quelques exemples numériques pour illustrer les résultats du théorème 3.1. A chaque fois nous donnons les points de contrôle de la cubique rationnelle sous

forme standard, et en appliquant le théorème 3.1, nous illustrons la distribution des points d'inflexion et des singularités en fonction des poids  $(\omega_1, \omega_2)$ . Pour des valeurs fixes de  $(\omega_1, \omega_2)$  nous affichons la courbe ainsi que sa distribution de courbure, en sachant que la courbure s'annule en un point d'inflexion. Suivant la pratique courante en CAO l'affichage de la courbure sert à mieux comprendre la forme de la courbe  $\mathbf{z}(t)$ . Parfois certains phénomènes sur la courbe, comme par exemple l'existence de points d'inflexion (voir exemple 5) ou la quasi-annulation de la courbure (voir exemple 2) deviennent évidents seulement en observant la courbure.

**Exemple 1.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0), \mathbf{p}_1 = (0.5, -0.5), \mathbf{p}_2 = (0, 0), \mathbf{p}_3 = (0, 1),$$

$$(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, 1, 2, 1).$$



**Figure 4:** Illustration du Théorème 3.1: pour chaque région de (3.4) le plan ( $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ ) est partitionné en fonction des singularités et des points d'inflexion de la cubique rationnelle (2.1). Les signes “+” et “-” indiquent les signes des quantités  $A, B, C$  de (3.5) de part et d'autre des courbes  $A = 0, B = 0, C = 0$ .

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (1) (cas 1 du Théorème 3.1). La figure 5 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

**Exemple 2.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1,0), \mathbf{p}_1 = (5,-1), \mathbf{p}_2 = (0,0), \mathbf{p}_3 = (0,1),$$

$$(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, \frac{1}{5}, 2, 1).$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (2) (cas 2 du Théorème 3.1). La figure 6 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son

polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

**Exemple 3.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0), \mathbf{p}_1 = (1.5, 1), \mathbf{p}_2 = (0, 0), \mathbf{p}_3 = (0, 1), \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, 2, 1, 1).$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (3) (cas 3 du Théorème 3.1). La figure 7 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

**Exemple 4.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0), \mathbf{p}_1 = (-1, 3), \mathbf{p}_2 = (0, 0), \mathbf{p}_3 = (0, 1), \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, 0.5, 1.5, 1).$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (4) (cas 4 du Théorème 3.1). La figure 8 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

**Exemple 5.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0), \mathbf{p}_1 = (-1, 1), \mathbf{p}_2 = (0, 1), \mathbf{p}_3 = (-2, 0), \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1).$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (5) (cas 5 du Théorème 3.1). La figure 9 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

**Exemple 6.** On choisit:

$$\mathbf{p}_0 = (1, 0), \mathbf{p}_1 = (-1, 2), \mathbf{p}_2 = (0, 0), \mathbf{p}_3 = (0, 1), \\ (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, 2, 1, 1).$$

Le point  $\mathbf{p}_1$  se trouve donc dans la région (6) (cas 6 du Théorème 3.1). La figure 10 montre la courbe  $\mathbf{z}(t)$  avec son polygone de contrôle et la partition du plan d'après (3.4) (voir Figure 3), sa courbure  $\kappa(t)$ , ainsi que la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$ .

## 5. Conclusions

Sur la base des résultats de M. Sakai [Sak99] nous avons donné, pour une cubique plane rationnelle sous forme de Bézier standard, une classification des polygones de contrôle en fonction du triangle  $\triangle \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$  (figures 3 et 4). Pour chaque région identifiée par rapport à ce triangle, nous avons déterminé le placement géométrique des singularités et des points d'inflexion de la cubique de Bézier rationnelle par rapport aux poids  $\omega_1, \omega_2$ , quand les points de contrôle  $\mathbf{p}_i, 0 \leq i \leq 3$  sont fixés.

Cette étude donne des critères pour placer les points de contrôle et pour choisir les poids afin de générer une courbe d'une certaine forme souhaitée. Il est possible d'éviter des points caractéristiques comme des points d'inflexion, des

points de rebroussement ou des boucles, mais aussi de générer de tels points en fonction de l'application traitée.

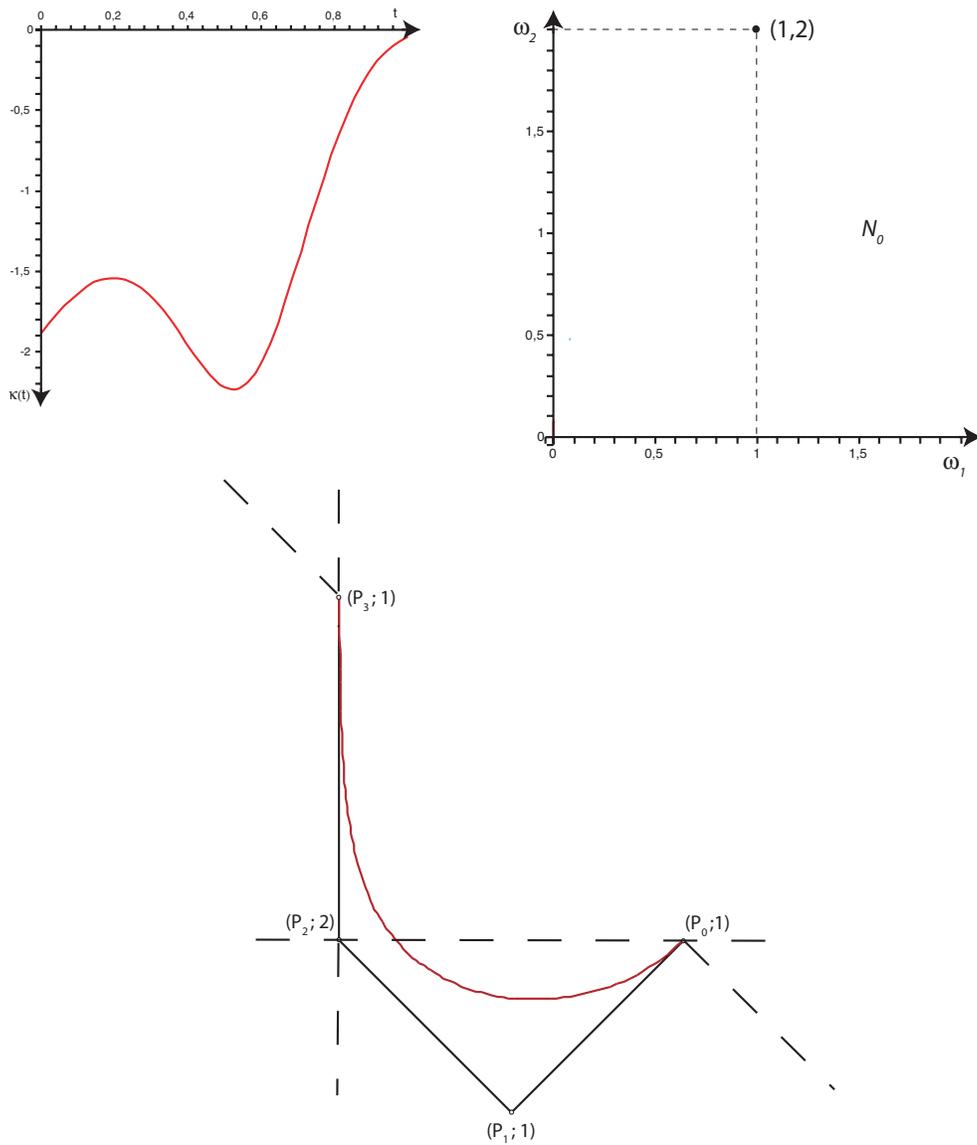
Sur la base de ces résultats théoriques nous envisageons une implémentation à l'aide d'un rendu haptique afin de guider l'utilisateur dans la génération de courbes.

## 6. Remerciements

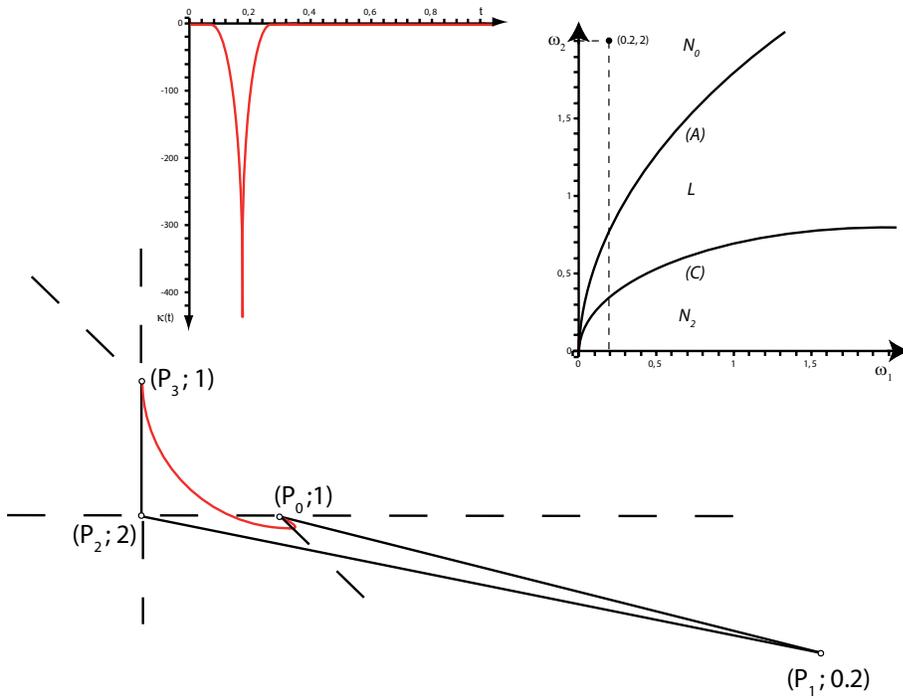
Nous tenons à remercier les rapporteurs de l'attention qu'ils ont portée à notre article, nous permettant ainsi d'améliorer considérablement sa forme et sa lisibilité.

**Références**

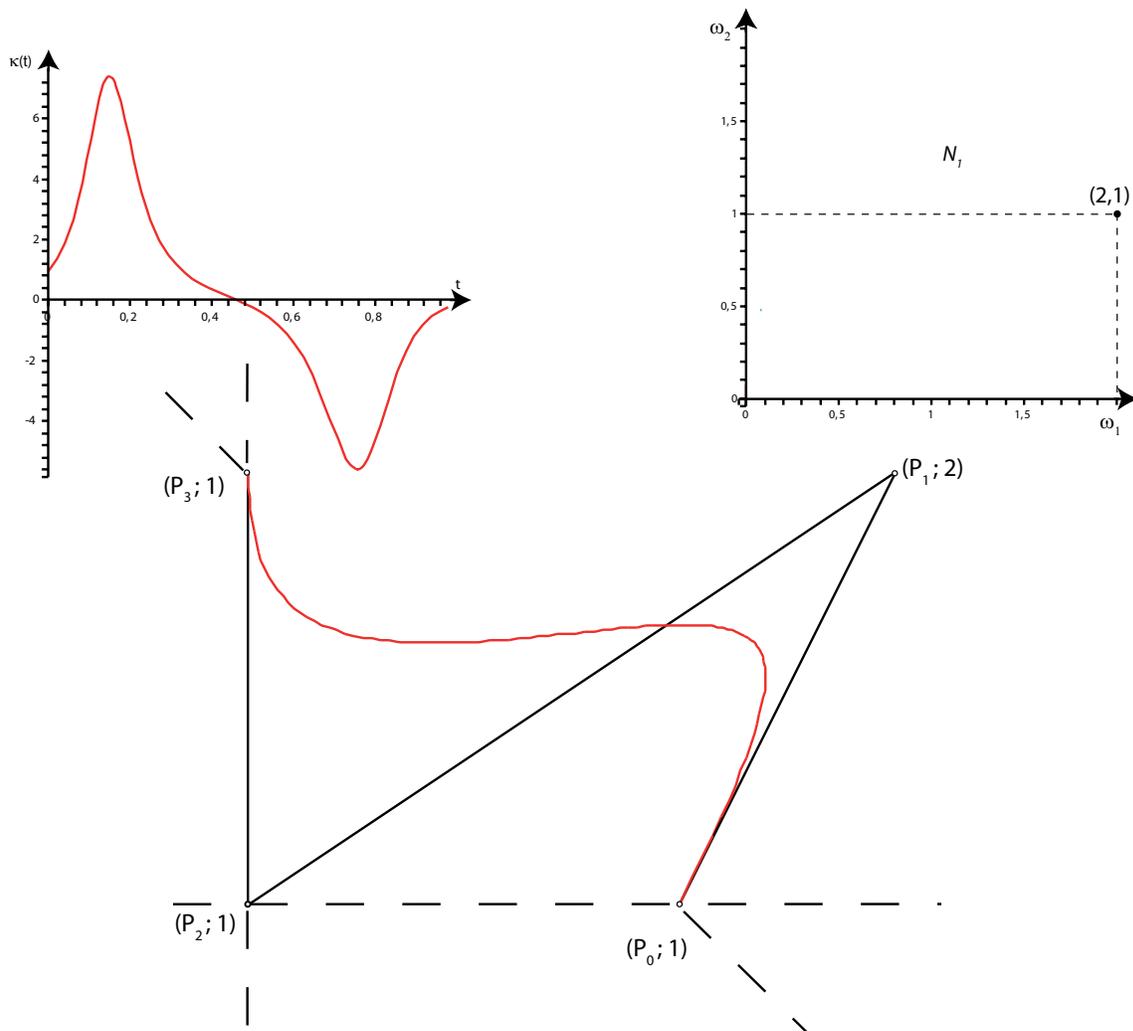
- [CS01] CHIONH E., SEDERBERG T.: On the minors of the implicitization bézout matrix for a rational plane curve. *Comput. Aided Geom. Design. Vol. 18* (2001), 21–36.
- [Far93] FARIN G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, Boston, 1993.
- [Kim93] KIM D.: Hodograph approach to geometric characterization of parametric cubic curves. *Comput. Aided Design. Vol. 25*, Num. 10 (1993), 644–654.
- [LC97] LI Y., CRIPPS R.: Identification of inflection points and cusps on rational curves. *Comput. Aided Geom. Design. Vol. 14* (1997), 491–497.
- [MC92] MANOCHA D., CANNY J.: Detecting cusps and inflection points in curves. *Comput. Aided Geom. Design. Vol. 9* (1992), 1–24.
- [MW80] MEEK D., WALTON D.: Shape determination of planar uniform cubic b-spline segments. *Comput. Aided Design. Vol. 22* (1980), 434–441.
- [Pat88] PATTERSON R.: Parametric cubics as algebraic curves. *Comput. Aided Geom. Design. Vol. 5* (1988), 139–159.
- [Sak97] SAKAI M.: Inflections and singularity on parametric rational cubic curves. *Numerische Mathematik. Vol. 76* (1997), 403–417.
- [Sak99] SAKAI M.: Inflection points and singularities on planar rational cubic curve segments. *Comput. Aided Geom. Design. Vol. 16* (1999), 149–156.
- [SD89] STONE M., DEROSE T.: A geometric characterization of parametric cubic curves. *ACM Trans. Graph.. Vol. 8*, Num. 3 (1989), 147–163.
- [Wan81] WANG C.: Shape classification of the parametric cubic curve and parametric b-spline curve. *Comput. Aided Design. Vol. 13* (1981), 199–206.



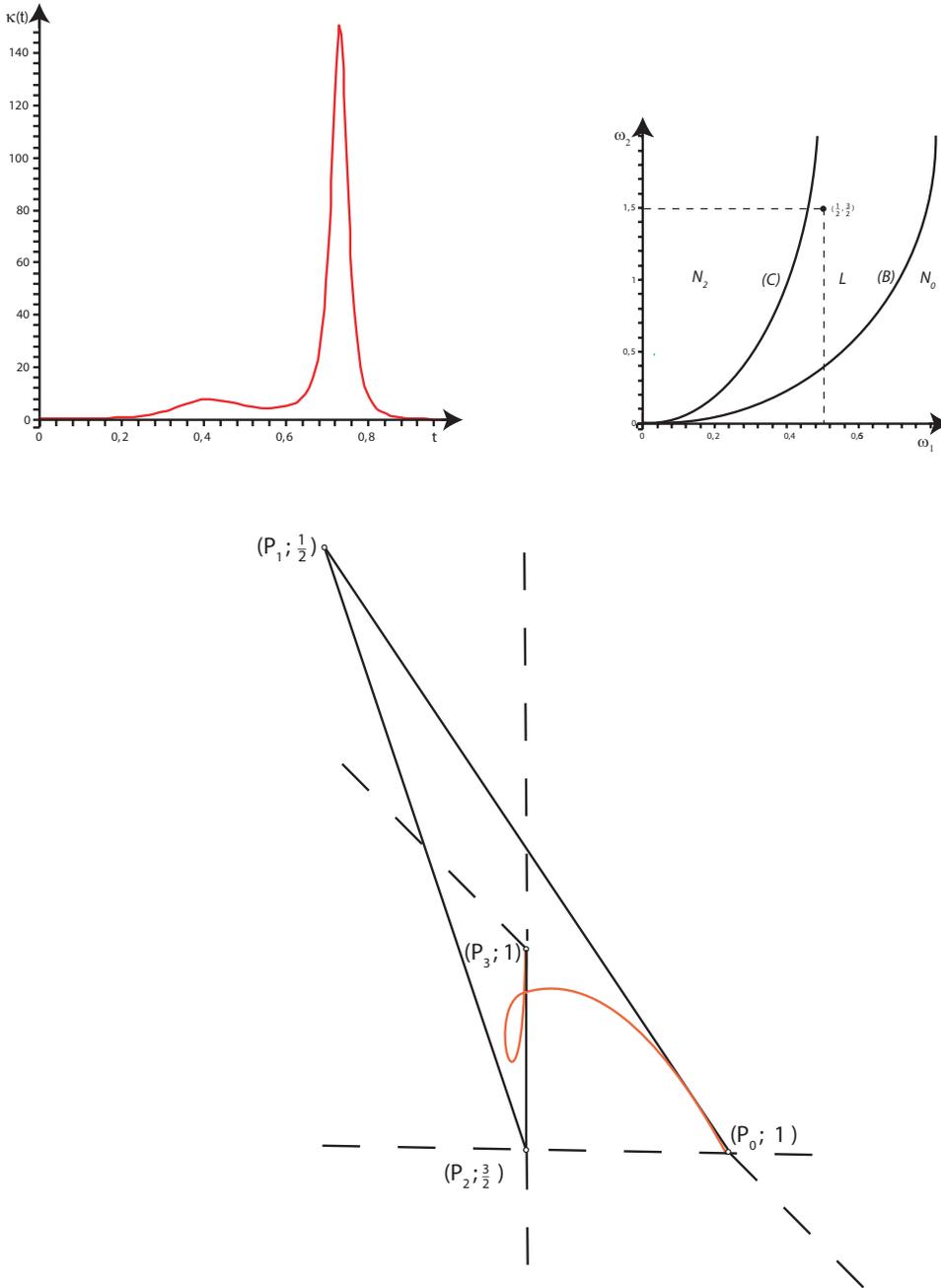
**Figure 5:** Illustration de l'exemple 1: la cubique de Bézier rationnelle  $\mathbf{z}(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).



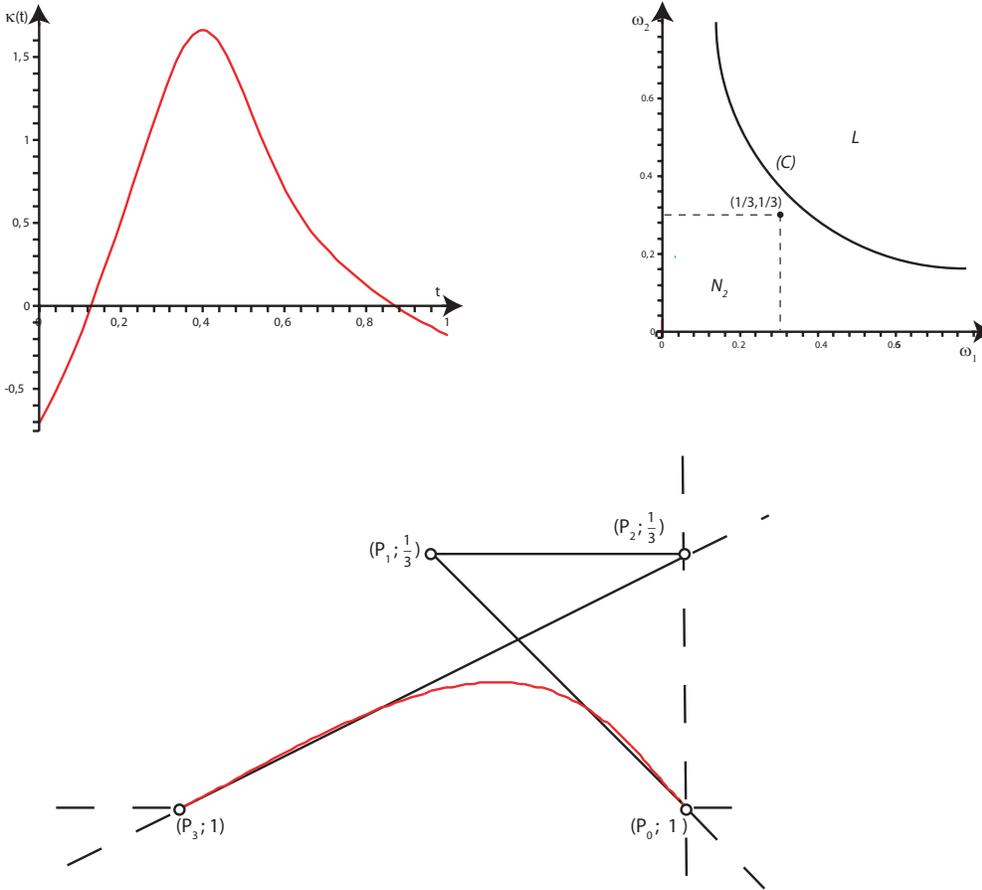
**Figure 6:** Illustration de l'exemple 2: la cubique de Bézier rationnelle  $z(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).



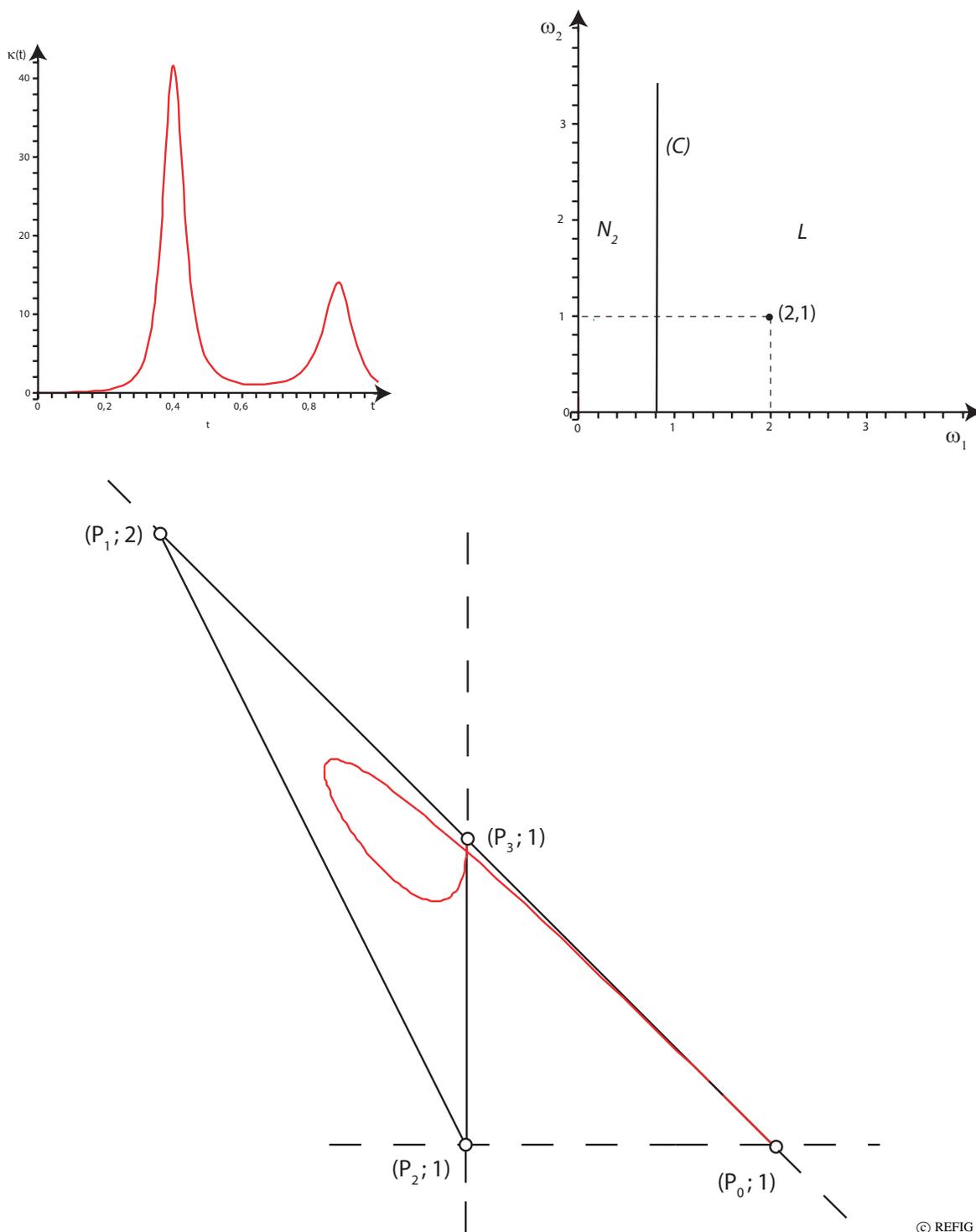
**Figure 7:** Illustration de l'exemple 3: la cubique de Bézier rationnelle  $\mathbf{z}(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).



**Figure 8:** Illustration de l'exemple 4: la cubique de Bézier rationnelle  $\mathbf{z}(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).



**Figure 9:** Illustration de l'exemple 5: la cubique de Bézier rationnelle  $\mathbf{z}(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).



**Figure 10:** Illustration de l'exemple 6: la cubique de Bézier rationnelle  $\mathbf{z}(t)$  (en bas), sa courbure (en haut à gauche), et la position du couple  $(\omega_1, \omega_2)$  (en haut à droite).