

Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. affines non stationnaires

Lionel GARNIER

LE2i, UMR CNRS 5158, Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France
lgarnier@u-bourgogne.fr

Résumé

Dans la seconde moitié du XXe siècle, P. Bézier a inventé des courbes permettant de décrire des arcs de coniques en considérant trois points pondérés. R. Goldman a montré l'auto-similarité des courbes de Bézier. Quant à lui, P. De Casteljau a proposé un algorithme permettant de créer ces courbes en utilisant un I.F.S., soit en restant dans l'espace affine dans le cas de la parabole, soit en travaillant dans la fermeture projective du plan affine dans le cas des coniques à centre. Cette dernière méthode induit quelques problèmes aussi bien du point de vue de la modélisation (en géométrie projective, il n'y a pas de distinction entre une parabole et une conique à centre) que du point de vue de la construction (nous ne pouvons pas rester dans l'espace affine). Dans cet article, dans un premier temps, nous déterminons les éléments caractéristiques, en n'utilisant que des critères purement géométriques, d'une conique propre (parabole, ellipse, hyperbole) définie par trois points pondérés qui peuvent être les points de contrôle d'une courbe de Bézier quadratique sous forme quasi standard. Dans un second temps, nous proposons des algorithmes permettant de représenter un arc de conique à centre en construisant, dans le plan affine euclidien, un I.F.S. affine non stationnaire. Tous ces algorithmes s'appuient sur les propriétés barycentriques des courbes de Bézier et sur les propriétés géométriques des coniques propres. A chaque étape, le point construit appartient à une médiane du triangle ce qui permet une répartition uniforme des points construits et nous transformons ce triangle en deux triangles. Dans tous les cas, nous construisons un polygone dont les sommets sont les points de la conique limite et un polygone dont les côtés sont les tangentes réelles à la conique limite aux sommets du polygone précédent. Notre méthode présente l'avantage de rester dans l'espace affine et de n'utiliser que des concepts géométriques c'est-à-dire que, si le poids du point intermédiaire est constructible, les constructions issues de nos algorithmes peuvent être réalisées à la règle et au compas et nous pouvons alors utiliser un logiciel de géométrie dynamique (comme Kig) ce qui permet d'apporter une dimension pédagogique et sans calculs à la construction itérative d'arcs de coniques propres. De plus, nos méthodes permettent d'utiliser les règles de déductions basées sur des théorèmes afin de déterminer certaines propriétés géométriques.

Mots clefs : I.F.S, Cercle, ellipse, parabole, hyperbole, courbes de Bézier de degré 2

In the second half of the XXe century, P. Bézier defined curves which represent circle arcs using three weighted points. P. de Casteljau gave an algorithm which can modelize these curves using a linear I.F.S. In this article, after determining characteristic elements of proper conic (parabola, ellipse, hyperbola), we give algorithms, based on rational quadratic Bézier curves and properties of central conics, whose can modelize ellipses and hyperbolas. At each step, the constructed point belongs to a median of the control polyhedron. We construct, in the affine plane, non-stationary projectif I.F.S. using euclidien properties of conics. We compute two polygons : the vertices of the first polygon belong to the limit conic. The edges of the second polygon are the tangent to the conic at the vertice of the first polygon. Moreover, if the weight is constructible, the constructions stemming from our algorithms could be made with just ruler straightline and compass. So, these algorithms permit a approach teaching and learning without calculus. Moreover, geometrical properties can be deducted by a soft of dynamical geometry as Kig.

Keywords : I.F.S, Circle, ellipse, parabola, hyperbola, quadratic Bézier curves

1 Introduction

Dans les années 60, deux personnes ont défini les mêmes outils afin de résoudre leurs problèmes de modélisation en CFAO dans leurs industries respectives : Pierre Bézier [Béz86] chez Renault et Paul De Casteljaou [Cas85] chez Citroën. L'idée est de réaliser une construction virtuelle de l'objet (en l'occurrence des voitures) en utilisant des ordinateurs plutôt que des moules. Ce procédé permet alors de diminuer les coûts de productions et un gain de temps devient possible si la modélisation a été bien pensée. Ces courbes s'appuient sur les polynômes de Bernstein. Lorsque ces derniers sont de degré 2, le modèle polynômial de ces courbes permet de modéliser un arc de parabole tandis que le modèle rationnel permet d'obtenir les autres coniques propres, c'est-à-dire le cercle, l'ellipse et l'hyperbole [Gar07, DP98, Far99, FJ89, FJ92].

Le flocon de Koch est l'une des premières courbes fractales à avoir été décrite et apparaît en 1906. R. Goldman a montré, en 2004, la nature fractale des courbes de Bézier [Gol04], c'est-à-dire leurs auto-similarités, en s'appuyant sur les travaux de M. Barnsley [Bar88] et en particulier sur les notions d'attracteurs et des procédés d'itérations. Plus de détails sur les fractales et la modélisation par I.F.S. sont disponibles dans [Tos96, Gen92, Zai98, GTN06].

En utilisant une courbe de Bézier quadratique (polynomiale ou rationnelle) sous forme quasi standard [Gar07], nous pouvons construire facilement l'arc de conique souhaité [Far99, Gar07] d'une conique donnée. Notre idée consiste à construire, de façon itérative les points d'un arc de conique à centre. Pour ce faire, nous développons des algorithmes permettant de construire, dans le plan affine euclidien, un I.F.S. affine non stationnaire †. De plus, nous n'évaluons jamais les polynômes de Bernstein et n'avons pas besoin de l'équation paramétrique d'une courbe de Bézier. Par rapport aux travaux précédents sur la modélisation de coniques, soit par des I.F.S. [Zai98, Gol04], soit par des courbes de subdivision [MWW01, BCR07b], nos algorithmes permettent de construire les tangentes à la courbe limite et sont inspirés de la méthode de De Casteljaou [Cas85]. De plus nous imposons que le point construit appartienne à la médiane du triangle, constitué des trois points de contrôle, issue du point intermédiaire. Notons qu'il serait possible de calculer cet I.F.S. non stationnaire en utilisant les formules classiques de changements de poids d'une courbe de Bézier afin de la mettre sous forme quasi standard [Far99]. Ainsi, nous construisons deux polygones, celui dont les sommets sont des points de la conique limite et celui dont les côtés sont tangents à la conique aux sommets construits précédemment. Nous utilisons une méthode purement géométrique afin de rester dans l'espace affine et nous pouvons ainsi construire, si certaines conditions sont respec-

tées, ces éléments à l'aide de la règle et du compas. Il est alors possible d'utiliser les algorithmes proposés dans cet article dans un logiciel de géométrie dynamique comme *Kig* <http://edu.kde.org/kig/>. De plus, nos algorithmes permettent de ne modéliser qu'un arc de la conique, ce qui peut être utile lors de la réalisation de jointures [Gar07]. Notre principe de construction à chaque étape du déroulement de notre algorithme, consiste à transformer un triangle en deux triangles : un triangle gauche et un triangle droit.

Pour ce faire, nous sommes obligés de déterminer certains éléments caractéristiques de la conique puisque nous nous en servons dans nos algorithmes. Ce travail, conduisant aux mêmes résultats théoriques, a été fait par J.P. Bécar [Béc97] en utilisant des points massiques [FJ89, FJ92] et en reparamétrisant la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 afin d'avoir deux sommets opposés et un vecteur. Deux autres méthodes ont été développées, en travaillant dans la fermeture projective du plan affine, G. Albrecht en se servant du calcul matriciel [Alb01], R. Goldman et W. Wang qui se servent du calcul matriciel et de la reparamétrisation des courbes [GW04]. Ces trois méthodes présentent de plus l'inconvénient de ne travailler que dans l'espace projectif alors que le but de cet article est de rester dans l'espace affine euclidien tant que nous le pouvons. Quant à lui, E. Lee, en restant dans l'espace affine, a proposé des méthodes, basées sur la reparamétrisation des courbes, le calcul vectoriel et l'utilisation de relations algébriques [Lee85]. Malheureusement, la plupart de ces méthodes sont inutilisables pour réaliser des constructions à la règle et au compas tandis que d'autres ne sont pas facilement exploitables. De plus, aucun de nos algorithmes n'utilise une équation paramétrique de coniques, aussi bien usuelle que sous forme de courbe de Bézier quadratique.

En mathématique, sur une feuille de papier, nous pouvons tracer des arcs de coniques de façon continue. En informatique graphique, ceci n'est plus possible du fait qu'un écran est un ensemble fini de pixels. Ainsi, pour représenter, à l'écran, un arc de conique, nous devons discrétiser ce dernier et l'objet géométrique qui est utilisé à la place de la conique est ou une ligne brisée (ou un polygone si nous représentons toute l'ellipse). Pour ce faire, nous avons choisi dans cet article d'utiliser une méthode itérative interpolante pour construire ce polygone (ainsi que celui des tangentes). La méthode classique aurait consisté à subdiviser l'intervalle de départ en n valeurs et à afficher les points correspondants.

Bien que le cercle soit une ellipse particulière (les deux foyers sont confondus, les directrices sont à l'infini, l'excentricité est nulle, on ne peut plus parler d'axe focal et d'axe non focal...), dans le reste de cet article, le terme ellipse ne considère pas le cas particulier du cercle puisque les algorithmes développés pour l'ellipse ne fonctionnent pas pour le cercle. Pour ce dernier, un algorithme particulier est présenté.

†. A chaque étape, nous avons trois points et un nombre ω dont la valeur change à chaque étape et dépend des étapes précédentes.

En résumé, nous voulons conserver la régularité affine de nos constructions c'est-à-dire que si nous considérons la courbe de Bézier γ définie par les trois points pondérés pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$: le point pondéré construit à l'étape suivante est $\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right); 1\right)$ et nous voulons que les points construits sur la conique soient répartis de façon uniforme sur l'arc de la conique propre : pour ce faire, à chaque étape, le point construit appartient à la médiane du triangle $P_0P_1P_2$ issue du sommet P_1 et nous construisons ainsi directement dans le plan affine euclidien usuel, un I.F.S. non stationnaire. A chaque étape du déroulement de notre procédé de construction itératif interpolant, les points extrémaux P_0 et P_2 appartiennent à la conique à centre tandis que le point pondéré $(P_1; \omega)$ permet à la fois de contrôler les tangentes à la courbe aux points précédents et de continuer le processus d'itération. De plus, lorsque les points P_0 , P_1 et P_2 sont construits à la règle et au compas et si le nombre ω est constructible[‡], les points construits par l'I.F.S. non stationnaire sont constructibles à la règle et au compas et des déductions de propriétés géométriques (parallélisme, orthogonalité, appartenance à un ensemble de points ...) peuvent être affichées par un logiciel de géométrie dynamique comme *Kig*.

Le plan de l'article est le suivant. Après avoir effectué quelque rappels concernant les coordonnées homogènes, les points isogonaux, les tangentes de direction donnée à une conique, les I.F.S., nous présentons les modèles de Bézier quadratiques polynômiaux et rationnelles sous forme quasi standard. Dans la section 3, nous donnons les éléments caractéristiques des coniques propres définies par trois points pondérés. Avant de conclure et de donner des perspectives, la section 4 présente les différents algorithmes permettant de modéliser des arcs de coniques à centre. Les annexes proposent des compléments sur quelques propriétés sur les courbes de Bézier rationnelles quadratiques sous forme quasi standard ainsi que les justificatifs des algorithmes 6 et 7.

Afin d'augmenter la lisibilité de cet article, la plupart des figures et les tableaux sont regroupés à la fin du document et pour certaines d'entre elles, le détail de la construction est rappelé dedans.

Dans cet article, \mathcal{P} désigne le plan affine euclidien réel muni du produit scalaire usuel.

2 Rappels

2.1 Coordonnées homogènes

Soit $(\Omega; \vec{T}; \vec{\mathbf{I}})$ un repère orthonormé direct du plan affine \mathcal{P} . L'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{P}}$ à l'espace affine

[‡]. ω est un nombre rationnel, une racine carrée d'un nombre rationnel...

\mathcal{P} est muni de la base $(\vec{T}; \vec{\mathbf{I}})$. La fermeture projective [Gar07] du plan affine euclidien \mathcal{P} est l'espace quotient $\widehat{\mathcal{P}} = \left(\vec{\mathcal{P}} \times \right) / \sim$.

Soit $M(x; y)$ un point de \mathcal{P} . Les coordonnées homogènes du point M sont définies par tout triplet de la forme :

$$(\omega x; \omega y; \omega) \quad \text{où } \omega \neq 0 \quad (1)$$

Réciproquement, si nous considérons un point M de $\widehat{\mathcal{P}}$ de coordonnées $(x; y; \omega)$ telles que ω soit non nul, nous identifions le point M de $\widehat{\mathcal{P}}$ avec le point du plan affine, de coordonnées $\left(\frac{x}{\omega}; \frac{y}{\omega}\right)$. Notons qu'au point de $\widehat{\mathcal{P}}$ de coordonnées $(x; y; \omega)$, $\omega \neq 0$, correspond, dans le plan affine \mathcal{P} , le point pondéré $M_\omega\left(\left(\frac{x}{\omega}; \frac{y}{\omega}\right); \omega\right)$. Des compléments de géométrie projective sont disponibles dans [Aud06, Lad02, Lad03, Leh03].

Dans cet article, nous aurons besoin, parfois, de déterminer les points à l'infini d'une droite ou d'une courbe. Pour cela, notons $\mathbb{P}\left(\vec{\mathcal{P}}\right)$ l'espace défini comme l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim_{\vec{\mathcal{P}}}$ suivante :

$$\forall (\vec{u}; \vec{v}) \in \left(\vec{\mathcal{P}} - \left\{\vec{0}\right\}\right)^2, \quad (2)$$

$$\vec{u} \sim_{\vec{\mathcal{P}}} \vec{v} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Il est possible de montrer que $\widehat{\mathcal{P}}$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{P} \cup \mathbb{P}\left(\vec{\mathcal{P}}\right)$, c'est-à-dire que l'ensemble \mathcal{H}_∞ des points de $\widehat{\mathcal{P}}$ de la forme $(x; y; 0)$, appelé hyperplan de l'infini, est isomorphe à $\mathbb{P}\left(\vec{\mathcal{P}}\right)$ qui est l'ensemble des directions du plan affine \mathcal{P} .

2.2 Rappels sur les I.F.S.

Un I.F.S. (Iterated Function Systems) [BD85, Bar88] est basé sur le théorème du point fixe, dans un espace métrique complet, appliqué sur les compacts en utilisant un opérateur appelé opérateur de Hutchinson [Hut81]. Etant donné un espace métrique (E, d) , un I.F.S. est un ensemble fini d'opérateurs $\{T_i\}_{i \in [0; N-1]}$ contractants sur E pour la distance d .

Pour tout I.F.S., il existe un unique compact \mathcal{A} tel que :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(\mathcal{A}) \quad (3)$$

où \mathcal{A} est appelé attracteur de l'I.F.S. et la formule (3) traduit la propriété d'auto-similarité de \mathcal{A} . Plus de détails sur les I.F.S. sont disponibles dans [GTN06, Gen92, Tos96, Zai98].

2.3 Point isogonal et symédiane

Commençons à donner les définitions d'un point isogonal d'un autre point relativement à un triangle et de symédiane.

Définition 1 : Point isogonal

Soit ABC un triangle non dégénéré et M un point du plan.

Soit s_X la réflexion d'axe la bissectrice issue du sommet X dans le triangle ABC .

Alors, le point M' défini par :

$$\{M'\} = s_A((MA)) \cap s_B((MB)) \cap s_C((MC))$$

est appelé l'isogonal du point M (relativement au triangle ABC).

Définition 2 : Symédiane

Soit $P_0P_1P_2$ un triangle. Soit Δ_m (resp. Δ) la médiane (resp. bissectrice) du triangle issue de P_1 .

La symédiane du triangle, issue de P_1 est Δ_s , image de la droite Δ_m par la réflexion d'axe Δ , figure 1.

Naturellement, si le triangle $P_0P_1P_2$ est isocèle de sommet principal P_1 , alors nous avons $\Delta_m = \Delta = \Delta_s$ c'est-à-dire que la symédiane issue de P_1 est confondue avec la médiane issue de P_1 .

Notons que le point de Lemoine L , défini comme intersection des trois symédiennes d'un triangle ABC , et le point isogonal du centre de gravité O du triangle ABC , figure 1.

2.4 Tangentes, ayant une direction donnée, à une conique à centre non circulaire

Commençons par rappeler la définition d'une conique :

Définition 3 : Soit C un ensemble de points $M(x;y)$ de \mathcal{P} .

C est une conique s'il existe un polynôme P , à deux variables, de degré 2 tel que :

$$\forall M(x;y) \in C, P(x;y) = 0 \quad (4)$$

L'équation de la formule (4) est appelée **équation implicite** ou **équation cartésienne**. Notons que chaque conique propre possède au moins une **équation paramétrique** usuelle c'est-à-dire qu'il existe une application γ d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathcal{P} telle que :

$$\forall M \in C, \exists t_0 \in I \mid \gamma(t_0) = M \quad (5)$$

Nous verrons dans le paragraphe 2.6 un troisième représentation possible des coniques.

Nous n'exposons ici que les propriétés qui nous seront utiles dans les différents algorithmes. Les propriétés usuelles des coniques propres ainsi que les démonstrations sont disponibles dans [Gar07]. Dans certains de nos algorithmes, nous aurons besoin de construire la tangente à un point d'une conique à centre non circulaire selon une direction donnée, lemme 1. Pour ce faire, nous avons besoin de définir le cercle directeur d'une conique à centre.

Définition 4 : Cercle directeur d'une conique à centre.

Soit F et F' les foyers d'une conique à centre tels que la distance entre les deux sommets de l'axe focal soit $2a$.

Le cercle directeur, noté Σ_F (resp. $\Sigma_{F'}$), associé au foyer F' (resp. F) est le cercle de centre F (resp. F') et de rayon $2a$.

Lemme 1 : Détermination des tangentes à une conique à centre dans une direction donnée

Soit E une conique à centre et Δ_0 une droite.

Soit Δ_F la droite passant par F et perpendiculaire à Δ_0 .

Soit M et M' les intersections entre la droite Δ_F et Σ_F , cercle directeur associé au foyer F' .

Les médiatrices des segments $[MF]$ et $[M'F']$ sont deux tangentes, parallèles Δ_0 , à la conique à centre E .

Démonstration : [Lad04, LH97]■

Nous énonçons une propriété essentielle, pour notre travail, donnée par E. Lee [Lee85] et dont tous les éléments pour la démonstration sont dans [Lad03] :

Proposition 1 : Alignements de P_1, I_1, O, N_3^+ et N_3^- .

Soit C une conique propre de centre O , P_0 et P_2 deux points de C non symétriques par rapport à O .

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$ et P_1 le point d'intersection des tangentes à C issues de P_0 et P_2 .

Soit N_3^+ et N_3^- les deux points de C tels que les tangentes à C en ces points soient parallèles à la droite (P_0P_2) .

Ainsi, les points P_1, I_1, O, N_3^+ et N_3^- sont alignés, figure 6.

Pour finir ce paragraphe sur les coniques dans le plan projectif, notons qu'il est ainsi possible de classifier, du point de vue affine, une conique propre en fonction de ses points à l'infini [Gar07, Gar09b] :

- * une ellipse ou un cercle est une conique qui ne coupe pas la **droite de l'infini** ;
- * une hyperbole est une conique qui coupe la **droite de l'infini** exactement deux fois ;
- * une parabole est une conique qui coupe la **droite de l'infini** exactement une fois.

Notons qu'il est aussi possible de dire que la parabole est tangente à la droite de l'infini [Aud06].

2.5 Courbes de Bézier polynomiales quadratiques

Pour t appartenant à $[0; 1]$, les polynômes de Bernstein de degré 2 sont :

$$\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^2 \\ B_1(t) &= 2t(1-t) \\ B_2(t) &= t^2 \end{aligned} \quad (6)$$

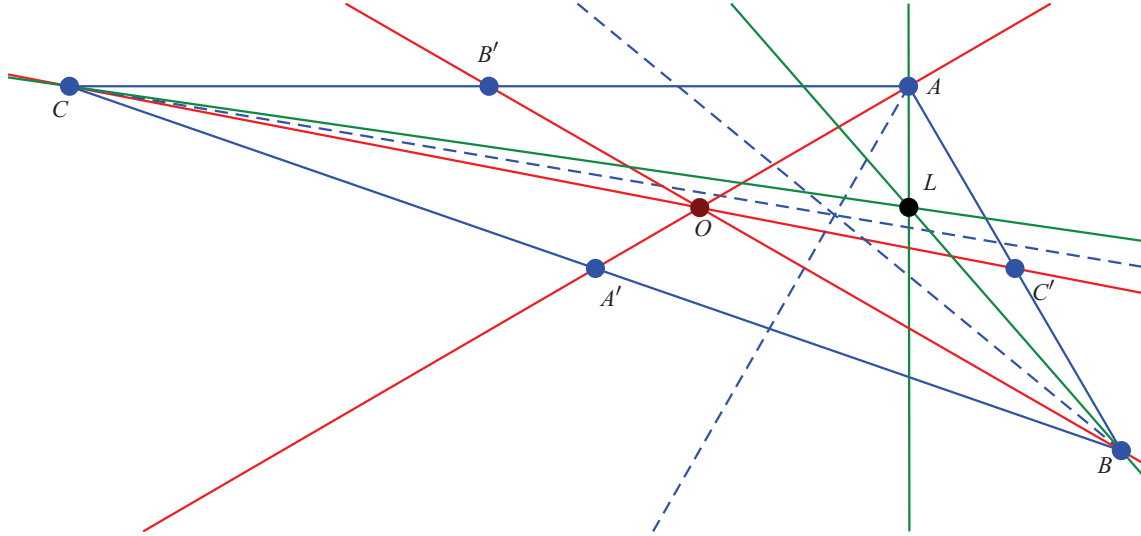


Figure 1: Le point de Lemoine L , défini comme intersection des trois symédianes du triangle ABC , est l'isogonal du centre de gravité O relativement à ce triangle. Les médianes sont en rouge, les symédianes sont en vert tandis que les bissectrices sont en pointillés bleus.

2.5.1 Définition

Définition 5 : courbe de Bézier polynomiale de degré 2

Soit $(P_i)_{i \in [0;2]}$ et O , quatre points de \mathcal{P} . La courbe de Bézier de degré 2 de points de contrôle $(P_i)_{i \in [0;2]}$ est l'ensemble des points $M(t)$ vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (7)$$

et les points $(P_i)_{i \in [0;2]}$ définissent un polygone appelé **polygone de contrôle** de la courbe de Bézier.

Géométriquement, pour t_0 fixé dans l'intervalle $[0; 1]$, $M(t_0)$ est le barycentre des points pondérés $(M_i; B_i(t_0))_{i \in [0;2]}$. La définition d'une courbe de Bézier de degré 2, formule (7), ne dépend pas du point O choisi et la courbe de Bézier est incluse dans son polyèdre de contrôle.

Nous avons $M(0) = P_0$ et $M(1) = P_2$ et il est possible de montrer que la tangente à la courbe au point P_0 (resp. P_2) est la droite (P_0P_1) (resp. (P_2P_1)) c'est-à-dire que le point P_1 permet de contrôler la tangente à la courbe en P_0 et en P_2 .

2.5.2 Arc de parabole et I.F.S. affine linéaire

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . L'algorithme 1 permet de construire un arc γ d'une parabole \mathcal{C}_P , d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) , en utilisant seulement des triangles et le théorème de la droite des milieux en prenant la valeur de $\frac{1}{2}$

dans l'algorithme de De Casteljaou [Gar09b, Gar07]. Notons que cet algorithme est un cas particulier de l'algorithme de Chaikin [Cha74, Rie75]. D'après le théorème de la droite des milieux appliqué dans le triangle $P_0P_1P_2$, **la droite (N_1N_2) est parallèle à la droite (P_0P_2) et est la tangente à l'arc de parabole au point N_3 [Gar09b]**. En fait, ce qui est sous-jacent à l'algorithme 1, qui permet la construction d'un I.F.S. linéaire à la règle et au compas, c'est la modélisation d'un arc de parabole par une courbe de Bézier polynomiale quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 .

Notons que l'algorithme 1 ne nécessite que la construction du milieu d'un segment, il est ainsi possible de construire les points d'un arc de parabole à la règle et au compas.

La notation $\text{bar}\{(A_i; a_i)_{i \in I}\}$ désigne le barycentre des points pondérés $(A_i; a_i)$ avec $i \in I$. L'algorithme 1 peut être modélisé par un I.F.S. linéaire composé de deux transformations contractantes T_0 et T_1 définies par :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; 1)\} \\ \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; 2); (P_2; 1)\} \end{pmatrix} \quad (8)$$

et

$$T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; 2); (P_2; 1)\} \\ \text{bar}\{(P_1; 1); (P_2; 1)\} \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

La notation matricielle de la formule (8) serait :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

et, pour tout entier naturel n non nul, nous aurions alors :

$$T_0^n \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

c'est-à-dire que le calcul de la n -ième itération ne dépend pas des points de contrôle initiaux dans le sens où le calcul de la puissance de la matrice est le même si nous changeons de points de contrôle.

Comme un des buts de cet article est de pouvoir réaliser des constructions à la règle et au compas, nous n'utilisons pas les notations matricielles, car elles seraient inexploitable, et nous préférons garder les notations utilisées en géométrie classique.

La figure 7 déroule l'algorithme 1 dans une profondeur[§] de 2. En entrée, nous avons les extrémités P_0 et P_2 de l'arc de parabole γ et P_1 , point de contrôle des tangentes en ces deux extrémités.

Algorithme 1 : Construction, à la règle et au compas, d'un arc de parabole par un I.F.S. linéaire dans le plan affine euclidien.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} .
Procédure $\text{FractPara}(P_0, P_1, P_2)$

1. Soit N_1 le milieu du segment $[P_0P_1]$.
2. Soit N_2 le milieu du segment $[P_2P_1]$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. $\text{FractPara}(P_0, N_1, N_3)$.
5. $\text{FractPara}(N_3, N_2, P_2)$.

Sortie : un arc de parabole défini par trois points non alignés P_0, P_1 et P_2 .

La première étape de cet algorithme consiste à construire le point N_1 (resp. N_2), milieu du segment $[P_0P_1]$ (resp. $[P_2P_1]$). Le point N_3 , milieu du segment $[N_1N_2]$ est ensuite construit. En prenant la méthode d'adressage usuelle en théorie des I.F.S., que nous garderons lors du déroulement

[§]. L'algorithme est récursif et l'exécution se déroule sous la forme d'un arbre.

des différents algorithmes, nous avons :

$$\begin{cases} N_1 = P_{10} \\ N_2 = P_{11} \\ N_3 = P_{20} \end{cases}$$

ce qui se traduit par :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ N_1 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \end{pmatrix}$$

et :

$$T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_3 \\ N_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que si $P_{i_0 \dots i_{n-1}}, (i_0; \dots; i_{n-1}) \in \{0; 1\}^n$, est un point de \mathcal{P} , alors son image, par la transformation contractante $T_{i_n}, i_n \in \{0; 1\}$, est noté $P_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}$. Ainsi, la représentation d'un arc de parabole (mais aussi de conique) par un I.F.S. nécessite l'utilisation d'une fonction d'adressage et chaque point du polygone approximant la courbe est représenté par un mot. Pour de plus amples informations sur les fonctions d'adressage associées aux I.F.S., le lecteur peut se reporter à [Gen92, Tos96, Zai98].

Horis dans cet article, ces points sont aussi calculés par des produits de matrices, du type de celle donnée par la formule (10), en ne considérant que des propriétés barycentriques des points de contrôle.

Comme nous avons $P_{01} = P_{20}$, c'est le point de recollement, dans la suite, nous écrirons :

$$T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{20} \\ P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$$

Naturellement, nous avons $P_0 = P_{00} = P_{000}$ et $P_2 = P_{21} = P_{211}$. La première partie de la seconde étape est de construire les points P_{100} et P_{101} , milieux respectifs des segments $[P_0P_{10}]$ et $[P_{10}P_{20}]$, puis de construire le point P_{200} , milieu du segment $[P_{100}P_{101}]$. La seconde partie de la seconde étape est de construire les points P_{110} et P_{111} , milieux respectifs des segments $[P_{20}P_{11}]$ et $[P_{11}P_2]$ puis de construire le point P_{210} , milieu du segment $[P_{110}P_{111}]$. Les deux points P_{200} et P_{210} sont deux autres points de l'arc de parabole γ .

Nous souhaitons adapter l'algorithme 1 aux coniques euclidiennes à centre et n'utiliser que des constructions géométriques dans le plan affine euclidien. Pour ce faire, nous avons besoin des propriétés des courbes de Bézier rationnelles quadratiques sous forme quasi standard et nous pourrions ainsi construire, à la règle et au compas[¶], en restant dans le plan affine euclidien, un I.F.S. non stationnaire basé sur l'algorithme de De Casteljaou.

[¶]. Les points devront être construits à la règle et au compas et le point ω devra être un nombre constructible.

2.6 Courbes de Bézier rationnelles quadratiques (CBRQs) sous forme quasi standard

2.6.1 Définition

A partir de la définition d'une courbe de Bézier polynomiale, formule (7), il est possible, en prenant les coordonnées homogènes des trois points de contrôle, de définir une courbe de Bézier polynomiale projective. En changeant de représentant projectif et en revenant dans l'espace affine, nous pouvons définir les courbes rationnelles de degré 2 [Gar07]. A un point de l'espace affine \mathcal{P} , nous faisons correspondre une classe d'équivalence de $\widehat{\mathcal{P}}$. D'un point de vue affine, le choix de tel ou tel représentant sur une courbe de Bézier rationnelle quadratique joue un rôle sur la nature de la conique euclidienne obtenue dans le plan affine [Gar09b].

En prenant $\omega_0 = \omega_2 = 1$ et $\omega_1 = \omega \neq 0$, il est possible de définir un type particulier de courbe de Bézier rationnelle quadratique :

Définition 6 : CBRQ affine sous forme (quasi) standard

Soit ω un réel non nul.

Un point $M(t)$ appartient à la CBRQ sous forme quasi standard, définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et le poids ω , si et seulement si pour un point O de \mathcal{P} , pour tout t de $[0; 1]$, $M(t)$ vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{OM(t)} = \frac{B_0(t)\overrightarrow{OP_0} + \omega B_1(t)\overrightarrow{OP_1} + B_2(t)\overrightarrow{OP_2}}{B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t)} \quad (12)$$

Lorsque nous avons $\omega > 0$, la CBRQ est dite sous **forme standard**.

Naturellement, si nous avons :

$$\forall t \in [0; 1], \quad B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t) \neq 0 \quad (13)$$

la CBRQ est incluse dans le plan affine. Si la condition donnée par la formule (13) n'est pas vérifiée, la valeur t_0 correspondante induit une direction dans la fermeture projective du plan affine.

La valeur de ω détermine alors la nature de la conique obtenue [Gar07] :

- * si $|\omega| = 1$ alors le dénominateur s'annule une fois et la conique coupe la **droite de l'infini** une fois, la CBRQ est un arc de parabole,
- * si $|\omega| > 1$ alors le dénominateur s'annule deux fois et la conique coupe la **droite de l'infini** deux fois, la CBRQ est un arc d'hyperbole,
- * si $0 < |\omega| < 1$ alors le dénominateur ne s'annule pas et la conique ne coupe pas la **droite de l'infini**, la CBRQ est un arc d'ellipse.

D'après la formule (12), un arc de conique propre à centre peut être vue comme le lieu géométrique d'un ensemble de

points constitué d'une famille de barycentre des points pondérés :

$$\left(M_i; \frac{\omega_i B_i(t_0)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t_0)} \right)_{i \in [0; 2]}$$

où $t_0 \in [0; 1]$.

Ainsi, d'après la formule (7) (resp. formule (12)), nous obtenons une troisième représentation possible d'un arc de parabole (resp. de conique propre à centre).

Si P_0, P_1 et P_2 sont trois points non alignés, $RQBC\{(P_0; P_1; P_2)\}$ désigne une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 tandis que $RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ désigne la courbe de Bézier rationnelle quadratique quasi standard de points de contrôle $(P_0; 1), (P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

2.6.2 Modélisation d'arcs de cercles par des CBRQs sous forme quasi standard

Il est possible de modéliser des arcs de cercles en utilisant des courbes de Bézier rationnelles quadratiques. Lorsque les extrémités de l'arc de cercle modélisé ne sont pas diamétralement opposées, le lecteur peut se reporter à [Far99, Gar07] pour les démonstrations, dans le cas contraire, cas que nous excluons dans cet article, le lecteur peut se reporter à [FJ89].

3 Détermination des éléments caractéristiques d'une conique propre non circulaire

Soit ω un nombre constructible et P_0, P_1 et P_2 trois points, non alignés, construits à la règle et au compas. En n'utilisant que des concepts de géométrie classique et des constructions à la règle et au compas, nous déterminons, les éléments caractéristiques d'un arc de conique défini par les trois points pondérés $(P_0; 1), (P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$. Quelques résultats que nous allons utiliser sont disponibles dans l'annexe A. Une équation paramétrique pourrait être obtenue en utilisant une CBRQ sous forme quasi standard, de points de contrôle pondérés $(P_0; 1), (P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$, et il serait alors possible d'utiliser les résultats existants [Béc97, Alb01, GW04, Lee85]. Malheureusement, ces méthodes ne sont pas facilement exploitables pour réaliser des constructions à la règle et au compas.

3.1 Cas de la parabole

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où nous avons $\omega = -1$ ou $\omega = 1$, ce dernier cas revenant à une courbe polynomiale. Notre travail consiste à déterminer le foyer F , le sommet S et la directrice \mathcal{D} .

L'algorithme 2, illustré par la figure 8, détaille les étapes permettant de construire les éléments de la parabole induite

par trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec $|\omega| = 1$.

Algorithme 2 Eléments caractéristiques d'une parabole définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec $|\omega| = 1$.

Donnée : trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec $|\omega| = 1$.

1. Détermination de I_1 , milieu du segment $[P_0P_2]$.
2. Détermination de la médiane $\Delta_m = (P_1I_1)$.
3. Détermination de la bissectrice intérieure Δ , issue de P_1 , du triangle $P_0P_1P_2$.
4. Détermination de la symédiane Δ_s , issue de P_1 , du triangle $P_0P_1P_2$.
5. Détermination de C_1 , cercle circonscrit au triangle $P_0P_1P_2$.
6. Détermination de I_2 , seconde intersection entre la symédiane Δ_s et le cercle C_1 .
7. Détermination du foyer F , milieu du segment $[P_1I_2]$.
8. Détermination de C_2 , cercle de centre P_0 passant par F .
9. Détermination de J_1 , intersection de C_2 avec la parallèle à Δ_m passant par P_0 telle que les vecteurs $\overrightarrow{I_1P_1}$ et $\overrightarrow{P_0J_1}$ soient de même sens.
10. Détermination de la directrice \mathcal{D} , tangente au cercle C_2 au point J_1 .
11. Détermination de l'axe focal Δ_F , droite parallèle à Δ_m passant par F .
12. Détermination du point H , intersection entre les droites \mathcal{D} et Δ_F .
13. Détermination du sommet S de la parabole, milieu du segment $[HF]$.

Sortie : le foyer F , le sommet S et la directrice \mathcal{D} d'une parabole.

Nous proposons une esquisse de justification de l'algorithme 2. Le fait que le foyer F appartient à la symédiane est une conséquence du second théorème de Poncelet. Il suffit ensuite de considérer la similitude directe s_F de centre F tel que $s_F(P_0) = P_1$ et $s_F(P_1) = P_2$ ce qui conduit à la formule de division harmonique de Newton :

$$FP_1^2 = FP_2 \times FP_0$$

et, le fait que F est le milieu du segment $[P_1I_2]$, nous permet d'obtenir la relation de division harmonique :

$$FI_2^2 = FI_2 \times FI_1$$

ce qui montre que I_2 est bien l'intersection entre la symédiane issue de P_1 dans le triangle $P_0P_1P_2$ et le cercle circonscrit au triangle $P_0P_1P_2$.

3.2 Cas des coniques à centre non circulaires

Dans ce paragraphe, nous ne considérons pas le cas particulier du cercle (i.e. $|\omega| \neq \cos(\widehat{P_0P_1}, \widehat{P_0P_2})$), pour plus de détails, consulter [Lee85, Far99, Gar07, Gar09b, GFN06, Gar04].

L'algorithme 3 repose sur le théorème 1 qui est illustré par la figure 9 :

Théorème 1 :

Soit \mathbb{E} une conique à centre non circulaire de centre O et de foyer F et F' .

Soit A', B' et C' trois points deux à deux distincts appartenant à \mathbb{E} .

Soit A, B et C les sommets du triangle formé par les tangentes à \mathbb{E} aux points A', B' et C' (en utilisant la notation usuelle : le point X' appartient au côté qui n'est pas issu du point X).

Soit O' l'isogonale du point O relativement au triangle ABC . Soit O_A l'intersection de la droite $(O'A)$ avec le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$.

Soit O_B l'intersection de la droite $(O'B)$ avec le cercle circonscrit au triangle $BA'C'$.

Soit O_C l'intersection de la droite $(O'C)$ avec le cercle circonscrit au triangle $CB'A'$.

Alors les quadrangles $[A, O_A, F, F']$, $[B, O_B, F, F']$ et $[C, O_C, F, F']$ sont harmoniques.

Dém : La démonstration est laissée au lecteur. Une méthode analytique est possible en utilisant les expressions rationnelles des fonctions cos, sin et tan et le logiciel maple. Notons que le logiciel *Kig* permet de justifier la construction, figure 9.

■

Rappelons que le fait que le quadrangle $[A, B, C, D]$ soit harmonique implique la cocyclicité des quatre points A, B, C et D .

Pour des raisons de visibilité, la figure 9 n'illustre le théorème 1 que pour les points A, A' et O_A . Les quatre points A, O_A, F et F' sont bien cocycliques et appartiennent au cercle $C_{FF'O_AA}$.

Le premier travail est la détermination du centre O et des foyers F et F' de la conique, algorithme 3. Dans un second temps, nous déterminerons les autres éléments en fonction du type de la conique à centre.

La construction du centre O et des foyers F et F' de la conique se fait en trois étapes : détermination de O , construction du point I_2 tel que le quadrangle $[P_1, I_2, F, F']$ soit harmonique [Lad03] et construction des foyers F et F' . La figure 10 illustre l'algorithme 3.

La première étape est la détermination de la médiane Δ_m du triangle $P_0P_1P_2$ issue de P_1 .

La deuxième étape est la détermination du centre O de la conique à centre. Ceci peut être réalisé :

Algorithme 3 Détermination du centre, des foyers et des axes focal et non focal d'une conique à centre.

Donnée : trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec : $0 \neq |\omega| \neq 1$ et $|\omega| \neq \cos(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$.

1. Détermination de la médiane $\Delta_m = (P_1I_1)$ où I_1 est le milieu du segment $[P_0P_2]$.
2. Détermination du centre O , de la conique.
3. Détermination de Δ , bissectrice issue de P_1 dans le triangle $P_0P_1P_2$.
4. Détermination de la symédiane Δ_s , image de la médiane Δ_m par la réflexion d'axe Δ .
5. Détermination de C_1 , cercle circonscrit au triangle $P_0P_1P_2$.
6. Détermination du point I_2 comme seconde intersection de la droite Δ_s avec le cercle C_1 .
7. Détermination de l'axe focal Δ_F de la conique comme bissectrice, issue de O , dans le triangle P_1OI_2 .
8. Détermination de l'axe non focal Δ_f de la conique, comme perpendiculaire de Δ_F passant par le centre O .
9. Détermination de I_3 , image de I_2 par la réflexion d'axe non focal Δ_f .
10. Détermination de C_2 , cercle passant par $I_2I_3P_1$.
11. Détermination des foyers F et F' par :

$$\{F; F'\} = C_2 \cap \Delta_F$$

12. Calcul de $c = OF$.

Sortie : Le centre O de la conique, les foyers F et F' , l'axe focal Δ_F et l'axe non focal Δ_f .

- en employant les deux CBRQs sous forme quasi standard, $\gamma^+ = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ et $\gamma^- = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), -\omega\}$, en considérant les points P_1 , $N_3^+ = \gamma^+(\frac{1}{2})$, $N_3^- = \gamma^-(\frac{1}{2})$ et I_1 , milieu du segment $[P_0P_2]$, théorème 2.
- en construisant le point N_3^+ (resp. N_3^-) comme barycentre des points pondérés $(I_1; 1)$ et $(P_1; |\omega|)$ (resp. $(P_1; -|\omega|)$), théorème 2 de l'annexe A.
- en utilisant la relation donnée par Lee [Lee85] :

$$\overrightarrow{P_1O} = \frac{1}{1-\omega^2} \overrightarrow{P_1I_1} \quad (14)$$

Remarquons, dans les deux premiers cas, que le fait que les CBRQs soient sous forme quasi standard nous assure l'alignement des points N_3^+ , P_1 et I_1 d'une part, N_3^- , P_1 et I_1 d'autre part. Le centre O de l'ellipse est le milieu du segment $[N_3^- N_3^+]$.

L'étape suivante est la construction du point I_2 , seconde intersection du cercle passant par P_0 , P_1 et P_2 est la symé-

diane Δ_s du triangle $P_0P_1P_2$ issue de P_1 ce qui est réalisé par les étapes de 3 à 6.

Les étapes 7 à 11 permettent de construire les deux foyers de l'ellipse et nous finissons par calculer le paramètre c de la conique à centre.

3.2.1 Cas de l'ellipse

L'algorithme 4 permet de déterminer les éléments restants de l'ellipse à partir du centre O , des foyers F et F' et des axes focal et non focal obtenus par l'algorithme 3.

Algorithme 4 Détermination des éléments caractéristiques d'une ellipse définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

Donnée : le centre O de l'ellipse, les foyers F et F' , l'axe focal Δ_F et l'axe non focal Δ_f donnés par l'algorithme 3.

1. Détermination du demi-grand axe :

$$a = \frac{FN_3^+ + F'N_3^+}{2}$$

ainsi que les sommets A et A' de l'axe focal par $OA = OA' = a$.

2. Détermination du demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et les sommets B et B' de l'axe non focal par $OB = OB' = b$.
3. Détermination de l'excentricité de l'ellipse $e = \frac{c}{a}$.
4. Détermination des points H et H' , distincts, de Δ_F tels que $AH = A'H' = eAF$.
5. Détermination des deux directrices de l'ellipse \mathcal{D} et \mathcal{D}' , perpendiculaires à Δ_F et passant respectivement par H et H' .

Sortie : Le centre O de l'ellipse, les foyers F et F' , les quatre sommets A , B , A' et B' , les directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' ainsi que l'excentricité e .

Connaissant un point de l'ellipse, en appliquant la définition bifocale de l'ellipse, nous pouvons déterminer la valeur du demi-grand axe a . Maintenant que nous connaissons l'axe focal, le nombre $c = OF$ et a , nous déterminons la valeur du demi-petit axe b . Nous pouvons en déduire les quatre sommets A , A' sur l'axe focal, et B et B' sur l'axe non focal, l'excentricité e ainsi que les deux directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' [Gar07].

3.2.2 Cas de l'hyperbole

L'algorithme 5 permet de déterminer les éléments restants de l'hyperbole à partir du centre O , des foyers F et F' et des axes focal et non focal obtenus par l'algorithme 3.

Connaissant un point de l'hyperbole, en appliquant la définition bifocale de l'hyperbole, nous pouvons déterminer la valeur du demi-grand axe a . Maintenant que nous connaissons l'axe focal, le nombre $c = OF$ et a , nous déterminons la valeur de b . Nous pouvons en déduire les deux sommets A , A' de l'axe focal, l'excentricité e et les deux directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' [Gar07].

Algorithme 5 Détermination des éléments caractéristiques d'une hyperbole définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

Donnée : le centre O de l'hyperbole, les foyers F et F' , l'axe focal Δ_F et l'axe non focal $\Delta_{F'}$ donnés par l'algorithme 3.

1. Détermination du demi-grand axe :

$$a = \frac{|FN_3^+ - F'N_3^+|}{2}$$

ainsi que les sommets A et A' de l'axe focal par $OA = OA' = a$.

2. Détermination de l'excentricité de l'ellipse $e = \frac{c}{a}$.

3. Détermination des points H et H' , distincts, de Δ_F tels que $AH = A'H' = eAF$.

4. Détermination des deux directrices de l'hyperbole \mathcal{D} et \mathcal{D}' , perpendiculaires à Δ_F et passant respectivement par H et H' .

Sortie : Le centre O de l'hyperbole, les foyers F et F' , les deux sommets A et A' , les directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' ainsi que l'excentricité e .

4 Modélisation, dans le plan euclidien, d'arcs de coniques à centre par un I.F.S. non stationnaire

Une conique propre est complètement déterminée par cinq contraintes. En partant des points P_0 et P_2 de la future conique et des deux tangentes (P_0P_1) et (P_2P_1) , il nous suffit d'ajouter une contrainte simple : un point de la médiane issue de P_1 dans le triangle $P_0P_1P_2$ ou un poids ω au point P_1 . C'est cette dernière considération qui a été choisie afin d'utiliser directement les propriétés des courbes de Bézier quadratiques et le corollaire 1 exhibe ce lien.

Nous voulons conserver la régularité affine de nos constructions c'est-à-dire que si nous considérons la courbe de Bézier γ définie par les trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$: le point pondéré construit à l'étape suivante est $\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right); 1\right)$. En d'autre terme, nous voulons transformer notre courbe de Bézier rationnelle quadratique sous forme quasi standard, sous jacente, en deux courbes de même nature : ainsi le point construit, recollement de ces deux dernières, doit avoir un poids de 1.

Montrons qu'il ne suffit pas d'appliquer l'I.F.S. issu de la version projective de l'algorithme 1. Prenons $P_0(1; 0)$, $P_1(1; 1)$, $P_2(0; 1)$ et $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ainsi la CBRQ induite par ces points de contrôle est l'arc de cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1 situé dans le premier quadrant. Nous avons alors, en coordonnées homogènes, de façon naturelle : $\widehat{P}_0 \sim (1; 0; 1)$, $\widehat{P}_1 \sim \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\widehat{P}_2 \sim (0; 1; 1)$. Nous avons alors $\widehat{N}_1 \sim \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ et $\widehat{N}_2 \sim \left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{2+\sqrt{2}}{4}; \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$. Finalement, le point obtenu est $\widehat{N}_3 \sim \left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}; \frac{1+\sqrt{2}}{4}; \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ qui

définit le point affine pondéré :

$$\left(\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}; \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right); \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$$

ce qui ne permet pas de garder les CBRQ sous forme quasi standard puisque la valeur du poids du point construit est $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ alors que nous voulons avoir 1. Pour tenter de remédier à ce problème, prenons $\widehat{P}_1 \sim (1; 1; 1)$. Ainsi, nous avons $\widehat{N}_1 \sim \left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $\widehat{N}_2 \sim \left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$. Finalement, le point obtenu est $\widehat{N}_3 \sim \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; 1\right)$ qui définit le point affine pondéré $(N_3; 1) = \left(\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right); 1\right)$. Nous avons :

$$ON_3^2 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{8}$$

c'est-à-dire :

$$ON_3 \neq OP_0 = OP_2 = 1$$

ce qui prouve que l'I.F.S. linéaire projectif déduit de l'algorithme de De Casteljau ne convient pas. Si nous voulions construire notre I.F.S., nous devrions, à chaque itération, déterminer quels sont les "bons" représentants des points de contrôle à considérer et quelle est la valeur du paramètre t à prendre dans l'intervalle $[0; 1]$. Une solution serait de recalculer tous les poids à chaque itération, ce qui rendrait la construction à la règle et au compas très lourde, en utilisant les formules données par G. Farin [Far99] :

$$\widehat{\omega}_0 = 1 \quad \widehat{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_2}} \quad \widehat{\omega}_2 = 1$$

où $\widehat{\omega}_0$, $\widehat{\omega}_1$ et $\widehat{\omega}_2$ sont les nouveaux poids calculés à partir des anciens poids ω_0 , ω_1 et ω_2 . Ceci permettrait cependant de conserver la valeur de $\frac{1}{2}$ pour le paramètre t .

De plus, comme du point de vue projectif, il n'y a pas de distinction entre les diverses coniques propres, il n'est pas légitime "d'adapter" la version projective de l'algorithme 1 afin d'obtenir des coniques euclidiennes, nous proposons donc d'autres méthodes, basées sur des critères euclidiens purement géométriques, permettant de rester dans le plan affine et rendant possible l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique comme par exemple *Kig*. En effet, si le poids ω et les coordonnées des points de contrôle sont constructibles, la construction à la règle et au compas est possible puisque le barycentre des points pondérés $(P_0; 1)$ et $(P_1; \omega)$ l'est en utilisant le théorème de Thalès.

Notons que la convergence de nos algorithmes 6 et 9 est assurée par l'I.F.S. linéaire projectif issu de l'algorithme de De Casteljau.

Pour terminer ce paragraphe, **remarquons qu'en plus des points P_0 et P_2 , seul le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ de la CBRQ sous-jacente appartient à la conique : l'auto-similarité n'est vraie que du point de vue projectif.**

4.1 Cas d'un arc de cercle en utilisant des triangles

En nous basant sur l'algorithme 1, permettant de modéliser de façon itérative un arc de parabole, nous proposons un algorithme permettant de modéliser de façon itérative un arc de cercle, algorithme 6. Cet algorithme s'inspire de la modélisation d'arc de cercle en utilisant une CBRQ sous forme quasi standard.

Pour obtenir un arc de cercle, le triangle $P_0P_1P_2$ doit être isocèle en P_1 , notion qui n'existe pas en géométrie projective d'ailleurs. L'algorithme 6 va décomposer ce triangle isocèle en deux triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$ isocèles respectivement en N_1 et N_2 .

Algorithme 6 : Construction d'un arc de cercle, dans le plan affine, par un I.F.S. affine non stationnaire.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} tels que $P_0P_1 = P_2P_1$.

Soit $\omega = \cos(\widehat{P_0P_1, P_0P_2})$.

Procédure FractCercle(P_0, P_1, P_2, ω)

1. Soit $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.
2. Soit $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. $\omega = \sqrt{\frac{1+\omega}{2}}$.
5. FractCercle(P_0, N_1, N_3, ω).
6. FractCercle(N_3, N_2, P_2, ω).

Sortie : un arc de cercle d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) .

L'algorithme 6 peut s'écrire formellement en s'inspirant de la théorie des I.F.S. à l'aide de deux applications T_0^{ce} et T_1^{ce} , de $\mathcal{P}^3 \times]-1; 1[$ dans lui-même, définies par :

$$T_0^{ce} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\} \\ \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; 2\omega); (P_2; 1)\} \\ \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

et

$$T_1^{ce} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; 2\omega); (P_2; 1)\} \\ \text{bar}\{(P_1; \omega); (P_2; 1)\} \\ P_2 \\ \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

En utilisant cette notation, nous ne pouvons pas utiliser directement de matrices pour décrire notre processus itératif

étant donné que l'application :

$$\omega \mapsto \sqrt{\frac{1+\omega}{2}}$$

n'est pas linéaire. Cependant, le poids ω ne dépend que de la position des points initiaux P_0, P_1 et P_2 ainsi que de ses valeurs précédentes c'est-à-dire que nous pouvons décrire notre processus d'une manière linéaire, analogue à celle utilisée à la formule (11) : nous perdons alors le caractère indépendant des points de contrôle dans les étapes de calculs et la matrice change à chaque étape. Cette dernière propriété est due au caractère non stationnaire de notre I.F.S. Pour tout entier naturel n non nul, nous aurions alors, pour la première application contractante, :

$$(T_0^{ce})^n \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{0,n} \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

avec :

$$\mathcal{M}_{0,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1+\omega_n} & \frac{\omega_n}{1+\omega_n} & 0 \\ \frac{1}{2+2\omega_n} & \frac{2\omega_n}{2+2\omega_n} & \frac{1}{2+2\omega_n} \end{pmatrix} \quad (18)$$

et :

$$\omega_0 = \cos(\widehat{P_0P_1, P_0P_2}) \quad (19)$$

$$n > 0 \implies \omega_n = \sqrt{\frac{1+\omega_{n-1}}{2}}$$

La figure 4 montre les éléments de l'algorithme 6. D'après le théorème 2, N_3 est bien sur l'arc de cercle et d'après le théorème 3, la droite (N_1N_2) est tangente au cercle en N_3 . Nous montrons, en deux étapes en annexe C, que cet algorithme construit bien des points de l'arc de cercle souhaité.

Nous retrouvons, dans l'étape 4. de l'algorithme 6, la relation établie, lors de leurs études sur les courbes de subdivision, par G. Morin et al [MWW01] et C. Beccari et al [BCR07a]. Une approche didactique, ne nécessitant que des connaissances sur les barycentres et la géométrie affine pouvant être utilisée dans l'enseignement secondaire, a été proposée [Gar09a], mais la démonstration se fait alors en quatre étapes. Nous pouvons énoncer :

Résultat 1 :

La courbe limite obtenue par l'algorithme 6 est le petit arc de cercle [Gar07] de centre O et de rayon OP_0 , d'extrémités P_0 et P_2 .

La figure 13 montre un déroulement de profondeur 2 de l'algorithme 6. Nous partons d'un triangle $P_0P_1P_2$ isocèle en P_1 . Le premier niveau va construire les points $N_1 = P_{10}$

et $N_2 = P_{11}$ étapes 1. et 2. de l'algorithme 6, puis le point $N_3 = P_{20}$ de l'arc de cercle, étape 3. de l'algorithme 6. La valeur ω du poids est alors recalculée, étape 4. de l'algorithme 6. La première (resp. deuxième) partie du second niveau va construire les points P_{100} et P_{101} (resp. P_{110} et P_{111}), étapes 1. et 2. de l'algorithme 6, puis le point P_{200} (resp. P_{210}) de l'arc de cercle, étape 3. de l'algorithme 6. Notons que du point de vue projectif, les figures 7 et 13 sont équivalentes, ce qui n'est pas le cas dans le cadre de la géométrie euclidienne.

Dans l'algorithme 6, nous avons pris le poids ω positif ce qui permet d'obtenir le petit arc de cercle. Que se passe-t-il si la valeur négative pour le poids ω est utilisée? Nous obtenons alors le résultat 2 dont la justification est proposée en annexe C.

Résultat 2 :

En prenant :

$$\omega = -\cos\left(\widehat{P_0P_1, P_0P_2}\right) = -\cos\alpha$$

à la place de $\omega = \cos\alpha$, la courbe limite obtenue par l'algorithme 6 est le grand arc de cercle [Gar07] de centre O et de rayon OP_0 , d'extrémités P_0 et P_2 .

A partir des résultats 1 et 2, il est très facile de construire tout le cercle en appliquant deux fois l'algorithme 6. Ceci a pour effet d'obtenir deux arcs de cercles et les poids initiaux sont alors :

- premier appel : $\omega = \cos\left(\widehat{P_0P_1, P_0P_2}\right)$;
- second appel : $\omega = -\cos\left(\widehat{P_0P_1, P_0P_2}\right)$.

La figure 14 montre comment il est possible d'approximer le cercle de la figure 5. Le polygone $P_0P_2P_{210}P_{200}P_{200}$ est constitué par les points du cercle à afficher tandis que le polygone $P_1P_{111}P_{110}P_{101}P_{100}$ est le polygone dont les côtés sont tangents aux sommets du polygone précédent. Sur cet exemple, déroulons l'algorithme 6, sur une profondeur de 2, en partant des trois points pondérés $(P_0; 1) = ((1; 0); 1)$, $(P_1; -\frac{\sqrt{2}}{2}) = ((1; 1); -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(P_2; 1) = ((0; 1); 1)$, figure 5.

Nous avons $N_1 = \text{bar}\left\{(P_0; 1); (P_1; -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1N_1} &= \frac{2}{2-\sqrt{2}}\overrightarrow{P_1P_0} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2}\overrightarrow{P_1P_0} \\ &= (2+\sqrt{2})\overrightarrow{P_1P_0} = -\left(2+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{1}\end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$N_1 = P_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et nous obtiendrions de même :

$$N_2 = P_{11} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$N_3 = P_{20} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

et :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \simeq 0,383$$

Les coordonnées des points calculés lors de l'étape suivante sont données dans le tableau 1. Les points en gras sont des points du cercle.

4.2 Algorithme de construction d'une tangente, de direction connue, à une conique à centre non circulaire.

Avant de proposer l'algorithme conduisant à un arc de conique à centre non circulaire, algorithme 9, nous présentons l'algorithme 7 qui permet de construire un point d'une conique à centre, la tangente à cette conique en ce point en utilisant des critères géométriques en s'appuyant sur le lemme 1, figure 15. Dans le cas de l'hyperbole, nous posons $N_3 = N_3^+$. Le fait d'avoir $\omega > -1$ nous assure de rester sur la même branche de l'hyperbole et donc dans le plan affine \mathcal{P} .

Concernant la validité de l'algorithme 7, donnée en annexe B, nous devons montrer que les points I, J, N_1, N_2 et N_3 sont alignés, que le point N_3 appartient bien à la conique à centre et que les points O, I_1, N_3 et P_1 sont alignés, figure 15 dans le cas de l'ellipse, figure 16 dans le cas de l'hyperbole. Si les points P_0 et P_2 sont symétriques par rapport à un des axes de la conique alors le point N_3 cherché est l'un des sommets appartenant à cet axe.

4.3 Construction d'un arc de conique à centre non circulaire par un I.F.S. affine non stationnaire

Nous nous donnons trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec $\omega \in -\{-1; 0; 1\}$ et :

$$|\omega| \neq \cos\left(\widehat{P_0P_1, P_0P_2}\right) \quad (20)$$

Le premier travail est la détermination de la conique limite, en utilisant l'algorithme 3 suivi de l'algorithme 4 si $|\omega| < 1$, suivi de l'algorithme 5 si $|\omega| > 1$. En particulier, dans notre algorithme 9, nous aurons besoin des cercles directeurs à la conique et de la procédure **FracConCentre** donnée par l'algorithme 8.

Il nous reste donc à donner l'algorithme de construction itératif d'un arc de conique à centre, algorithme 9. Dans le cas de l'ellipse, si O n'est pas le milieu de segment $[P_0P_2]$, pour obtenir le petit (resp. grand) arc d'ellipse, il suffit de prendre les points M et P dans le demi-plan ne contenant

Algorithme 7 : Construction, à la règle et au compas, de la tangente parallèle à (P_0P_2) à un arc de conique à centre.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . Soit $\omega \in]-1; +\infty[- \{0; 1\} \mid |\omega| \neq \cos(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2})$.

Précalcul : les foyers F et F' ainsi que le demi-grand axe a sont connus.

Soit \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- les demi-plans de frontière (P_0P_2) . Soit $s \in \{+; -\}$

Précondition 1 : les points P_0 et P_2 ne sont pas symétriques par rapport à un axe de la conique à centre.

Précondition 2 : dans le cas de l'hyperbole, F' est le foyer le plus éloigné de la branche d'hyperbole contenant les points P_0 et P_2 .

1. Construction des cercles directeurs Σ_F et $\Sigma_{F'}$ associés respectivement aux foyers F' et F .
2. Construction de la perpendiculaire $\Delta_{F'}$ à (P_0P_2) passant par F' .
3. Construction du point P , intersection entre $\Delta_{F'}$ et $\Sigma_{F'}$ tel que $P \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et tel que P soit le point d'intersection le plus éloigné de F' dans le cas de l'hyperbole.
4. Construction de la perpendiculaire Δ_F à (P_0P_2) passant par F .
5. Construction du point M , intersection entre Δ_F et Σ_F tel que $M \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et M est le point d'intersection le plus proche de F dans le cas de l'hyperbole.
6. Construction de N_3 , intersection des droites (PF) et (MF') .
7. Construction de I , milieu du segment $[FM]$ et de J , milieu du segment $[F'P]$.
8. Construction de N_2 , intersection des droites (IN_3) et (P_2P_1) .
9. Construction de N_1 , intersection des droites (IN_3) et (P_0P_1) .

Sortie : la tangente $\mathcal{T} = (N_1N_2)$, parallèle à la corde (P_0P_2) , au point N_3 de la conique à centre E.

pas (resp. contenant) le point O . Le choix de s permet de construire l'un ou l'autre des deux points de l'ellipse ayant une tangente parallèle à la droite (P_0P_2) . Il est possible de construire simultanément ces deux points en considérant les deux points d'intersections entre les cercles et les perpendiculaires à la droite (P_0P_2) passant par les foyers, les couples de points sont $(M_s; P_s) \in \mathcal{P}^s$ c'est-à-dire qu'ils doivent appartenir au même demi-plan de frontière (P_0P_2) .

Les trois premières étapes de la partie principale de l'algorithme 9 se servent des propriétés des arcs de coniques modélisés par des CBRQ. Un calcul itératif provenant de ce modèle serait lourd à mettre en place, puisqu'il faut calculer le nouveau poids ω à chaque étape. Notre algorithme

Algorithme 8 Procédure **FracConCentre** utile pour l'algorithme 9.

Procédure FracConCentre (P_0, P_1, P_2)

Si P_0 et P_2 ne sont pas symétriques par rapport à un des deux axes de la conique **alors** :

1. Construction de la perpendiculaire $\Delta_{F'}$ à (P_0P_2) passant par F' .
2. Construction du point P , intersection entre $\Delta_{F'}$ et $\Sigma_{F'}$ tel que $P \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et tel que P soit le point d'intersection le plus éloigné de F' dans le cas de l'hyperbole.
3. Construction de la perpendiculaire Δ_F à (P_0P_2) passant par F .
4. Construction du point M , intersection entre Δ_F et Σ_F tel que $M \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et M est le point d'intersection le plus proche de F dans le cas de l'hyperbole.
5. Construction de N_3 , intersection des droites (PF) et (MF') .
6. Construction de I , milieu du segment $[FM]$ et de J , milieu du segment $[F'P]$.
7. Construction de N_2 , intersection des droites (IN_3) et (P_2P_1) .
8. Construction de N_1 , intersection des droites (IN_3) et (P_0P_1) .

sinon

1. Construction de N_3 , sommet de la conique appartenant à la médiatrice de $[P_0P_2]$, le plus proche de P_0 .
2. Construction de \mathcal{T} , la parallèle à (P_0P_2) passant par N_3 .
3. Construction de N_2 , intersection des droites \mathcal{T} et (P_2P_1) .
4. Construction de N_1 , intersection des droites \mathcal{T} et (P_0P_1) .

fin si

FracConCentre (P_0, N_1, N_3)

FracConCentre (N_3, N_2, P_2)

Fin Procédure FracConCentre (P_0, P_1, P_2)

permet d'obtenir une construction itérative, basée seulement sur des constructions géométriques simples. Cet algorithme permet de construire deux polygones, celui qui approxime la conique à centre et celui des tangentes à la conique aux points construits précédemment.

Comme l'intersection de deux droites est un ensemble et non un point, introduisons la notation suivante qui va nous servir dans les formules (21) et (22). Soit $A \in \mathcal{P}$. Alors :

$$ExtPt(\{A\}) = A$$

L'algorithme 9, qui décompose le triangle $P_0P_1P_2$ en deux triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$, peut s'écrire formellement en s'inspirant de la théorie des I.F.S. à l'aide de deux applications T_0^{cc} et T_1^{cc} , de \mathcal{P}^3 dans lui-même, définies par :

Algorithme 9 : Construction d'un arc de conique à centre non circulaire par un I.F.S. affine non stationnaire.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . Soit $\omega \in]-1; +\infty[- \{0; 1\} \mid |\omega| \neq \cos(\widehat{P_0P_1}, \widehat{P_0P_2})$.

Précalcul : les foyers F et F' sont connus, le centre O et les sommets A et A' (B et B' dans le cas de l'ellipse) aussi. Soit \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- les demi-plans de frontière (P_0P_2) . Soit $s \in \{+; -\}$

Précondition : dans le cas de l'hyperbole, F' est le foyer le plus éloigné de la branche d'hyperbole contenant les points P_0 et P_2 .

Partie principale :

1. Construction des cercles directeurs Σ_F et $\Sigma_{F'}$ associés respectivement aux foyers F' et F .
2. Soit $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.
3. Soit $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.
4. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
5. $\text{FractConCentre}(P_0, N_1, N_3)$.
6. $\text{FractConCentre}(N_3, N_2, P_2)$.

Sortie : un arc de conique à centre, non circulaire, défini par trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

$$T_0^{cc} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{ExtPt}((IJ) \cap (P_1P_0)) \\ \text{ExtPt}((PF) \cap (MF')) \end{pmatrix} \quad (21)$$

et

$$T_1^{cc} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ExtPt}((PF) \cap (MF')) \\ \text{ExtPt}((IJ) \cap (P_1P_2)) \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (22)$$

où I et J sont les milieux respectifs des segments $[FM]$ et $[F'P]$, M et P étant construits par les quatre premiers points de l'algorithme 8.

Pour obtenir toute la conique, dans le cas de l'ellipse, il suffit d'appliquer l'algorithme précédent deux fois : une fois avec ω , une fois avec $-\omega$.

Finissons par un exemple complet en considérant les points $P_0 = (7; 2)$, $P_1 = (7; 9)$, $P_2 = (-1; -1)$ et $\omega = \frac{1}{3}$. Commençons par déterminer l'ellipse limite en utilisant les algorithmes 3 et 4. Nous avons $I_1 = (3; \frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{P_1I_1} = (-4; -\frac{17}{2})$. Nous savons que le point N_3^+ (resp. N_3^-) est le barycentre des points $(I_1; 1)$ et $(P_1; \frac{1}{3})$ (resp. $(P_1; -\frac{1}{3})$), en appliquant la formule (23), annexe A, nous avons la relation $\overrightarrow{P_1I_1} = \frac{4}{3} \overrightarrow{P_1N_3^+}$ (resp. $\overrightarrow{P_1I_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{P_1N_3^-}$) d'où :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_1N_3^+} = \frac{3}{4} \overrightarrow{P_1I_1} \\ \overrightarrow{P_1N_3^-} = \frac{3}{2} \overrightarrow{P_1I_1} \end{cases}$$

ce qui fait :

$$N_3^+ = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{17}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{21}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2,625 \end{pmatrix}$$

et :

$$N_3^- = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{17}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3,75 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des points sont données par le tableau 2 tandis que les équations approchées des droites caractéristiques sont données par le tableau 3.

Le cercle C_1 a pour équation approchée :

$$(x-1, 12)^2 + (y-5, 50)^2 = 46,8$$

tandis que le cercle C_2 a pour équation approchée :

$$(x+2, 53)^2 + (y-6, 37)^2 = 97,6$$

et une équation approchée de l'ellipse est :

$$0,44x^2 + 0,71y^2 - 0,81xy - 2,67x + 2,81y - 0,21 = 0$$

La figure 17 montre l'ellipse limite et les différents éléments, nous avons $a \simeq 5,35$, $c \simeq 4,93$, $b \simeq 2,08$ et $e \simeq 0,90$.

Maintenant que nous connaissons la conique limite, nous pouvons dérouler l'algorithme sur les deux triplets de points pondérés $(P_0; 1) = ((7; 2); 1)$, $(P_1; \omega) = ((7; 9); \frac{1}{3})$ et $(P_2; 1) = ((-1; -1); 1)$ d'une part et $(P_0; 1) = ((7; 2); 1)$, $(P_1; -\omega) = ((7; 9); -\frac{1}{3})$ et $(P_2; 1) = ((-1; -1); 1)$ d'autre part. Le seul intérêt est la construction des points qui vont contrôler les tangentes, à savoir, les points P_{10}^+ et P_{11}^+ d'une part et P_{10}^- et P_{11}^- puisque les points $N_3^+ = P_{20}^+$ et $N_3^- = P_{20}^-$ sont déjà connus : ils sont utiles à la détermination des éléments caractéristiques de la conique limite.

Lors de l'exécution suivante, nous obtenons quatre points supplémentaires sur la conique, figure 18.

Les coordonnées des points de la conique sont données dans le tableau 4 tandis que celles de ceux qui contrôlent les tangentes sont données par le tableau 5.

La figure 19 montre le polygone dont les sommets $P_0, P_{200}^+, P_{20}^+, B = P_{210}^+, P_2, A' = P_{210}^-, P_{20}^-$ et P_{200}^- sont des points de l'ellipse et le polygone dont les sommets $P_{100}^+, P_{101}^+, P_{110}^+, P_{111}^+, P_{111}^-, P_{110}^-, P_{101}^-$ et P_{100}^- contrôlent les tangentes à l'ellipse limite aux sommets du polygone précédent.

Pour finir, la figure 20, réalisée à partir d'un programme C++ et des librairies OpenGL, montre le résultat obtenu, en utilisant l'I.F.S. projectif linéaire basé sur l'algorithme de De Casteljau. Comme nous partons des trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$, les points construits, lors de la première itération, par l'un ou l'autre des deux algorithmes sont identiques. C'est seulement à partir de la seconde itération que les résultats diffèrent. La répartition des points

appartenant à l'ellipse est beaucoup plus régulière sur la figure 19 que sur la figure 20. En plus de l'aspect visuel qui saute aux yeux, la valeur de la distance maximale entre deux sommets consécutifs du polygone des sommets est d'environ 4,87819 dans la figure 19 tandis qu'elle est d'environ 6,17581 dans la figure 20.

4.4 Dédution de propriétés géométriques

A partir des règles de construction d'une figure géométrique, certains logiciels de géométrie dynamique peuvent dire si un point appartient à un certain ensemble, si deux droites sont perpendiculaires ou parallèles. Par exemple, si nous construisons, avec *Kig*, deux droites parallèles Δ_1 et Δ_2 , puis une droite Δ_3 qui est perpendiculaire à la droite Δ_2 , alors le logiciel *Kig* sait nous informer que les deux droites Δ_3 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans les figures 21 et 22, les points N_3^+ et N_3^- ont été construits en utilisant l'algorithme 9. Dans la figure 21 (resp. 22), le logiciel *Kig* déduit que les tangentes à l'ellipse en N_3^+ et N_3^- sont parallèles à la droite (P_0P_2) (resp. perpendiculaires à la médiatrice du segment $[P_0P_2]$).

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons déterminé les éléments caractéristiques d'une conique propre à partir de trois points, non alignés, pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ dont un arc pourrait être modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique sous forme quasi standard. La construction de ces éléments est possible à la règle et au compas lorsque les coordonnées des trois points P_0 , P_1 et P_2 et lorsque le poids ω sont constructibles : il est alors possible d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme *Kig*. En se basant sur les propriétés de ces courbes de Bézier et sur les propriétés des coniques à centre, nous avons développé des algorithmes permettant de construire, à la règle et au compas (sous certaines conditions), dans le plan affine, un I.F.S. affine non stationnaire. Notons que lorsque la conique est une ellipse (cercle compris), nous pouvons obtenir toute la conique en appliquant deux fois l'algorithme adéquat. Nos algorithmes permettent une approche pédagogique et didactique puisque les seules notions utilisées pour les constructions géométriques sont des notions de géométrie du secondaire de l'Éducation Nationale Française.

Dans un temps proche, nous étudierons la possibilité d'utiliser ces algorithmes pour modéliser des carreaux de quadriques et de tores. L'étape suivante serait d'obtenir des algorithmes itératifs, basés sur la théorie des I.F.S., de constructions de carreaux de cyclides de Dupin.

Remerciements

Je remercie, pour leurs apports, deux personnes du forum de mathématiques *les-mathematiques.net* : Bruno Ingraio concernant les propriétés des polaires et pôles d'une

conique ; François Rideau dit "Pappus" concernant son apport de la symédiane pour la détermination des éléments caractéristiques d'une conique propre.

Je remercie pour leurs discussions fructueuses Christian Gentil et Sandrine Lanquetin, Maîtres de Conférences au Le2i de l'Université de Bourgogne, à propos de la modélisation de courbes de façon itérative basée sur les I.F.S. et de courbes de subdivision.

Je remercie aussi les relecteurs de R.E.F.I.G, en particulier Eric Tosan et Gudrun Albrecht, pour l'amélioration de la lecture de ce papier due à leurs remarques pertinentes.

Références

- [Alb01] G. Albrecht. Determination of geometrical invariants of rationally parametrized conic sections. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces : Oslo 2000*, pages 15–24, 2001.
- [Aud06] M. Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, 2006. ISBN 2-86883-883-9.
- [Bar88] M.F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1988.
- [Béc97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [BCR07a] C. Beccari, G. Casciola, and L. Romani. An interpolating 4-point c2 ternary non-stationary subdivision scheme with tension control. *Comput. Aided Geom. Des.*, 24(4) :210–219, 2007.
- [BCR07b] C. Beccari, G. Casciola, and L. Romani. A non-stationary uniform tension controlled interpolating 4-point scheme reproducing conics. *Comput. Aided Geom. Des.*, 24(1) :1–9, 2007.
- [BD85] M.F. Barnsley and S.G. Demko. Iterated Function Schemes and the Global Construction of Fractals. In *Proc. Royal Soc. A*, volume 399, pages 243–275, 1985.
- [Béz86] P. Bézier. *Courbe et surface*, volume 4. Hermès, Paris, 2ème édition, Octobre 1986.
- [Cas85] P. De Casteljaou. *Mathématiques et CAO. Volume 2 : formes à pôles*. Hermes, 1985.
- [Cha74] G. Chaikin. An algorithm for high-speed generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3 :346–349, 1974.
- [DP98] G. Demengel and J. P. Pouget. *Mathématiques des Courbes et des Surfaces. Modèles de Bézier, des B-Splines et des NURBS*. Ellipse, 1998.
- [Far99] G. Farin. *NURBS from Projective Geometry to Practical Use*. A K Peters, Ltd, 2 édition, 1999. ISBN 1-56881-084-9.
- [FJ89] J.C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.

- [FJ92] J.C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, volume RMA 24. Masson, 1992.
- [Gar04] L. Garnier. *Utilisation des cyclides de Dupin quartiques et des supercyclides quartiques en modélisation géométrique*. PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, Décembre 2004.
- [Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [Gar09a] L. Garnier. Arcs de cercles et courbes de Bézier rationnelles quadratiques. *Feuille de Vigne, IREM de Dijon*, 114 :21–37, Décembre 2009.
- [Gar09b] L. Garnier. Courbes de Bézier quadratiques et arcs de coniques. *Feuille de Vigne, IREM de Dijon*, 113 :17–32, Septembre 2009.
- [Gen92] C. Gentil. *Les fractales en synthèse d'images : le modèle I.F.S.* PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON - 1, 1992.
- [GFN06] L. Garnier, S. Foufou, and M. Neveu. Conversion d'un carreau de Bézier rationnel biquadratique en un carreau de cyclide de Dupin quartique. *RTSI-TSI*, 25(6) :709–734, 2006. numéro spécial AFIG'04.
- [Gol04] R. Goldman. The Fractal Nature of Bézier Curves. In *GMP '04 : Proceedings of the Geometric Modeling and Processing 2004*, pages 3–11, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.
- [GTN06] C. Gentil, E. Tosan, and M. Neveu. Geometric modelling with IFS. *Third International Conference of Applied Mathematics, Plovdiv, Bulgaria*, 2006.
- [GW04] R. N. Goldman and W. Wang. Using invariants to extract geometric characteristics of conic sections from rational quadratic parameterizations. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 14(3) :161–187, 2004.
- [Hut81] J. Hutchinson. Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(5) :713–747, 1981.
- [Lad02] Y. Ladegaillerie. *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [Lad03] Y. Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [Lad04] Y. Ladegaillerie. *Géométrie, exercices corrigés pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, 2004. ISBN : 2-7298-2198-8.
- [Lee85] E.T.Y. Lee. The rational Bézier representation for conics. In G. Farin (ed.), editor, *In Geometric Modeling, Algorithms and New Trends*, SIAM, pages 3–19, Philadelphia, 1985.
- [Leh03] D. Lehmann. *Une introduction à la géométrie projective*. Mathématiques 2ème cycle. Ellipse, 2003. ISBN 2-72978-1529-5.
- [LH97] C. Lebossé and C. Hémary. *Géométrie, Classe de Mathématiques, 1961, programmes de 1945*. Edition Jacques Gabay, 2ème édition, 1997. ISBN : 2-87647-077-2.
- [MWW01] G. Morin, J. D. Warren, and H. Weimer. A subdivision scheme for surfaces of revolution. *Computer Aided Geometric Design*, 18(5) :483–502, 2001.
- [Rie75] R. Riesenfeld. On Chaikin's Algorithm. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 4(3) :304–310, 1975.
- [Tos96] E. Tosan. *Une algèbre de formes fractales utilisant les I.F.S.* PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON - 1, 1996.
- [Zäi98] C. E. Zäir. *Formes fractales à pôles basées sur une généralisation des I.F.S.* PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON - 1, 1998.

A Annexe A : Propriétés sur les courbes de Bézier rationnelles quadratiques sous forme quasi standard.

Théorème 2 : Relation déterminée par deux points et les tangentes en ces points

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés du plan affine euclidien \mathcal{P} , $\gamma = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ et I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$.

1. Si $\omega \neq -1$, le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est le barycentre des points pondérés $(I_1; 1)$ et $(P_1; \omega)$ d'où :

$$\overrightarrow{P_1 I_1} = (1 + \omega) \overrightarrow{P_1 \gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (23)$$

2. Si $\omega = -1$, le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est le point à l'infini de la droite $(I_1 P_1)$ et représente donc la direction asymptotique de la parabole.
3. Du point de vue projectif, le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ appartient à la droite $(I_1 P_1)$.

Démonstration du théorème :

On a $B_0\left(\frac{1}{2}\right) = B_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} B_0\left(\frac{1}{2}\right) + \omega B_1\left(\frac{1}{2}\right) + B_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \\ \frac{1}{4} + \frac{\omega}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}(2 + 2\omega) = \frac{\omega + 1}{2} \end{aligned}$$

1. Si $\omega \neq -1$, alors, pour tout point O de \mathcal{P} , nous avons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O \gamma\left(\frac{1}{2}\right)} &= \frac{2}{1 + \omega} \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{OP_0} + \frac{\omega}{2} \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OP_2} \right) \\ &= \frac{2}{1 + \omega} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OI_1} + \frac{1}{2} \omega \overrightarrow{OP_1} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \omega} \left(\overrightarrow{OI_1} + \omega \overrightarrow{OP_1} \right) \end{aligned}$$

ce qui prouve que le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est le barycentre des points pondérés $(I_1; 1)$ et $(P_1; \omega)$ et les points $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, I_1 et P_1 sont alignés ce qui démontre le point 3. de ce théorème. De plus, nous avons :

$$\overrightarrow{P_1 I_1} = (1 + \omega) \overrightarrow{P_1 \gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (24)$$

car $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est le barycentre des points pondérés $(I_1; 1)$ et $(P_1; \omega)$. \square

2. Si $\omega = -1$, alors le dénominateur est nul ce qui prouve que le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur. Soit $(x_1; y_1; 1)$ (resp1. $(x_I; y_I; 1)$) (resp2. $(x; y; \omega_3)$) les coordonnées homogènes

de P_1 (resp1. de I_1) (resp2. de $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$). Nous avons alors, en prenant O à l'origine du repère Ω :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_I - x_1 \\ y_I - y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\omega_3 = 0$ et le point $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{P_1 I_1}$, $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est donc le point à l'infini de la droite $(I_1 P_1)$ ce qui démontre le point 3. de ce théorème. \square

Corollaire 1 : Calcul du poids

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés du plan affine euclidien \mathcal{P} .

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0 P_2]$.

Soit $\gamma = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ avec $\omega > 0$.

Soit N_3 un point intérieur au segment $[I_1 P_1]$.

N_3 est un point de la courbe γ si :

$$\omega = \frac{I_1 N_3}{P_1 N_3}$$

Démonstration :

D'après le théorème 2 et la formule (23), nous avons :

$$1 + \omega = \frac{P_1 I_1}{P_1 N_3}$$

d'où :

$$\omega = \frac{P_1 I_1 - P_1 N_3}{P_1 N_3} = \frac{I_1 N_3}{P_1 N_3}$$

car le point N_3 est un point intérieur au segment $[I_1 P_1]$.

Théorème 3 : Relation déterminée par deux points et les tangentes en ces points

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés du plan affine euclidien \mathcal{P} , $\gamma = RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ avec $\omega \neq -1$.

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0 P_2]$.

Soit $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$, $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$ et N_3 le milieu du segment $[N_1 N_2]$. Alors :

1. $N_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. La droite $(N_1 N_2)$ est la tangente à la CBRQ en N_3 .
3. $(N_1 N_2) // (P_0 P_2)$.

Démonstration du théorème :

1. Du fait que nous avons $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$, $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$, nous obtenons pour tout point O

de \mathcal{P} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON_1} &= \frac{1}{1+\omega} (\overrightarrow{OP_0} + \omega \overrightarrow{OP_1}) \\ \overrightarrow{ON_2} &= \frac{1}{\omega+1} (\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})\end{aligned}\quad (25)$$

et du fait que N_3 est le milieu du segment $[N_1N_2]$, c'est-à-dire que, pour tout point O , nous avons :

$$\overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2} = 2\overrightarrow{ON_3} \quad (26)$$

et en remplaçant dans la formule (26), les expressions données dans la formule (25), nous obtenons :

$$2\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{1+\omega} (\overrightarrow{OP_0} + 2\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})$$

ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{2+2\omega} (\overrightarrow{OP_0} + 2\omega \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})$$

que nous mettons sous la forme :

$$\overrightarrow{ON_3} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_0} + \frac{1}{2}\omega \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2} \right)$$

ce qui prouve la formule $N_3 = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. \square

2. A partir du résultat sur la parabole, paragraphe 2.5.2, et du fait que du point de vue projectif, il n'y a pas de distinction entre parabole, ellipse et hyperbole, la droite (N_1N_2) est tangente à la CBRQ au point N_3 . \square
3. Comme nous avons $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$, $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$, en considérant l'homothétie \mathcal{H} de centre P_1 et de rapport $\frac{1}{1+\omega}$, la droite (N_1N_2) , contenant le point N_3 , est l'image de la droite (P_0P_2) par l'homothétie \mathcal{H} ce qui prouve que les droites (P_0P_2) et (N_1N_2) sont parallèles. De plus, nous avons la relation :

$$\overrightarrow{P_1N_1} = \frac{1}{1+\omega} \overrightarrow{P_1P_0} \quad (27)$$

\square

■

B Annexe B : Justifications de l'algorithme 7

Justification commune de l'algorithme 7

La démonstration de la première assertion est commune aux deux types de coniques à centre : J est le milieu de $[PF']$, I est le milieu de $[MF]$ d'où :

$$\begin{cases} JP &= JF' \\ IM &= IF \end{cases}$$

Les droites (MF) et $(F'P)$ sont parallèles puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à (P_0P_2) , nous pouvons ainsi, en appliquant le théorème de Thalès, établir les relations :

$$\begin{cases} \frac{N_3F}{PF} &= \frac{N_3M}{F'M} \\ \frac{N_3P}{FP} &= \frac{N_3F'}{MF'} \end{cases}$$

or, $FP = 2a$ (car $P \in \Sigma_{F'}$) et $F'M = 2a$ (car $M \in \Sigma_F$), ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{cases} N_3F' &= N_3P \\ N_3M &= N_3F \end{cases} \quad (28)$$

ce qui prouve que les triangles $F'PN_3$ et FMN_3 sont isocèles en N_3 ce qui fait que les droites (JN_3) et (IN_3) sont des médiatrices dans leur triangle respectif et sont donc perpendiculaires à leur base respective $(F'P)$ et (MF) . Ces dernières étant parallèles comme perpendiculaires à la droite (P_0P_2) , les droites (JN_3) et (IN_3) sont parallèles d'où :

$$(JN_3) = (IN_3) \quad (29)$$

ce qui fait que les points N_3 , I et J sont alignés. De plus, la droite (IJ) est parallèle à (P_0P_2) . D'après le lemme 1 appliqué au point J et la formule (29), la droite (IJ) est une tangente à la conique à centre.

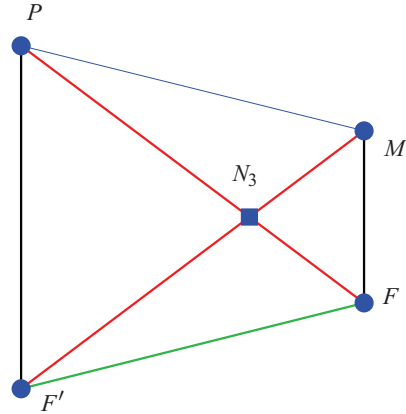


Figure 2: L'intersection des droites (PF) et $(F'M)$ appartient au trapèze de bases $[F'P]$ et $[MF]$.

D'après la proposition 1, les points O , N_3 , I_1 et P_1 sont alignés. En supposant pour le moment que N_3 appartient bien à

la conique, comme N_1 (resp. N_2) appartient à la droite (P_0P_1) (resp. (P_2P_1)), la droite (N_1N_3) (resp. (N_2N_3)) est la tangente à la conique à centre au point N_3 . Par construction, la droite (N_1N_2) est la tangente à la conique à centre au point N_3 et l'alignement des points O, N_3, I_1 et P_1 prouve que le point N_3 est l'extrémité du recollement des deux courbes de Bézier.

Il reste à montrer que N_3 appartient bien à la conique et il va falloir distinguer le cas de l'ellipse, figure 2, et celui de l'hyperbole, figure 3.

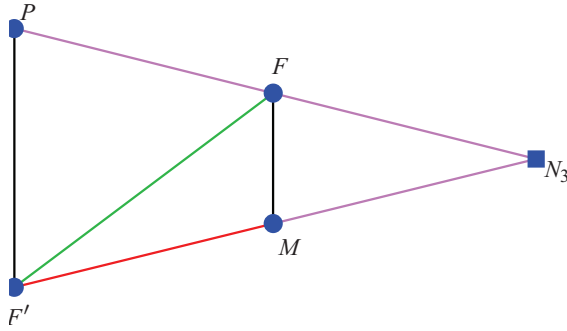


Figure 3 : L'intersection des droites (PF) et $(F'M)$ n'appartient pas au trapèze de bases $[F'P]$ et $[MF]$.

Lemme 2 :

Soit deux segments $[F'P]$ et $[MF]$, parallèles, tels que $FP = F'M$ et tels que les droites (PF) et $(F'M)$ soient sécantes en N_3 .

- $F'M < FF'$ implique que le point N_3 n'appartient pas au trapèze de bases $[F'P]$ et $[MF]$, figure 3.
- $F'M > FF'$ implique que le point N_3 appartient au trapèze de bases $[F'P]$ et $[MF]$, figure 2.

Démonstration :

Considérons les diagonales $[FF']$ et $[PM]$ du trapèze isocèle de base $[F'P]$ et $[MF]$.

- Si $F'M < FF'$ (resp. $F'M > FF'$), les diagonales sont plus grandes que les côtés, le quadrilatère est non croisé et le point N_3 est à l'extérieur du trapèze.
- Si $F'M > FF'$, les diagonales sont plus petites que les côtés, le quadrilatère est croisé et le point N_3 est à l'intérieur du trapèze.

■

Justification de l'algorithme 7 dans le cas de l'ellipse

En appliquant le lemme 2, nous avons :

$$2a = F'M > FF' = 2c$$

ce qui fait que le trapèze de base $[F'P]$ et $[MF]$ est croisé, ce qui implique $N_3 \in [F'M]$. De plus, nous avons $N_3M =$

N_3F , formule (28), N_3 appartient au segment $[F'M]$ et M appartient au cercle Σ_F de rayon $2a$, d'où :

$$N_3F + N_3F' = N_3F' + N_3M = 2a$$

ce qui prouve que N_3 appartient à l'ellipse et est donc le point de contact entre l'ellipse et la tangente (IJ) .

Justification de l'algorithme 7 dans le cas de l'hyperbole

La figure 16 illustre l'algorithme 7 dans le cas de l'hyperbole.

En appliquant le lemme 2, nous avons :

$$2a = F'M < FF' = 2c$$

ce qui fait que le trapèze de base $[F'P]$ et $[MF]$ est non croisé, ce qui implique $N_3 \notin [F'M]$. De plus, nous avons $N_3M = N_3F$, formule (28), M appartient au segment $[F'N_3^+]$ et M appartient au cercle Σ_F de rayon $2a$, d'où :

$$\left| N_3^+F - N_3^+F' \right| = \left| N_3^+F' - N_3^+M \right| = F'M = 2a$$

ce qui prouve que N_3 appartient à l'hyperbole et est donc le point de contact entre l'hyperbole et la tangente (IJ) .

C Annexe C : Justificatifs de l'algorithme 6

Justification du résultat 1

La démonstration s'effectue en deux étapes :

(Étape 1) montrer que les triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$ sont isocèles en N_1 et N_2 ;

(Étape 2) montrer que le nouveau calcul de ω est correct.

Étape 1.

Étant donné que la construction est symétrique par rapport à la droite (O_0P_1) , pour pouvoir réitérer le processus, il suffit de montrer que nous avons :

$$P_0N_1 = N_1N_3 \quad (30)$$

Nous savons que la droite (N_1N_2) est tangente au cercle au point N_3 et que la droite (N_1P_0) est tangente au cercle au point P_0 donc N_1 appartient à la médiatrice du segment $[P_0N_3]$ ce qui prouve la formule (30).

Étape 2.

Afin d'améliorer la rapidité de l'algorithme 6, déterminons une relation simple entre le poids ω dans le triangle $P_0P_1P_2$ isocèle en P_1 et le poids ω_1 dans le triangle $P_0N_1N_3$ isocèle en N_1 , figure 4. En ne considérant que des angles géométriques, nous avons :

$$\beta_1 = 180^\circ - 2\alpha_1$$

et le point N_1 appartenant au segment $[P_1P_0]$, nous avons :

$$\alpha + \beta_1 = 180^\circ$$

d'où :

$$\alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha_1) = 2\alpha_1$$

Comme $\omega = \cos \alpha$ et $\omega_1 = \cos \alpha_1$, la relation :

$$\cos \alpha_1 = \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

conduit à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}}$$

Justification du résultat 2

Le poids n'intervient pas dans les trois premières étapes de l'algorithme 6, ces dernières sont donc encore valides. Il reste donc à étudier l'étape 4. Nous avons :

$$\omega = -\cos \left(\widehat{P_0P_1, P_0P_2} \right) = -\cos \alpha$$

et :

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \left(\frac{180^\circ - \alpha}{2} \right) \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos(180^\circ - \alpha)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}}$$

et l'étape 4. de l'algorithme 6 est encore valide. Remarquons qu'à partir de la seconde étape, tous les poids calculés sont positifs (i.e. $-1 < \omega \Rightarrow 1 + \omega > 0$).

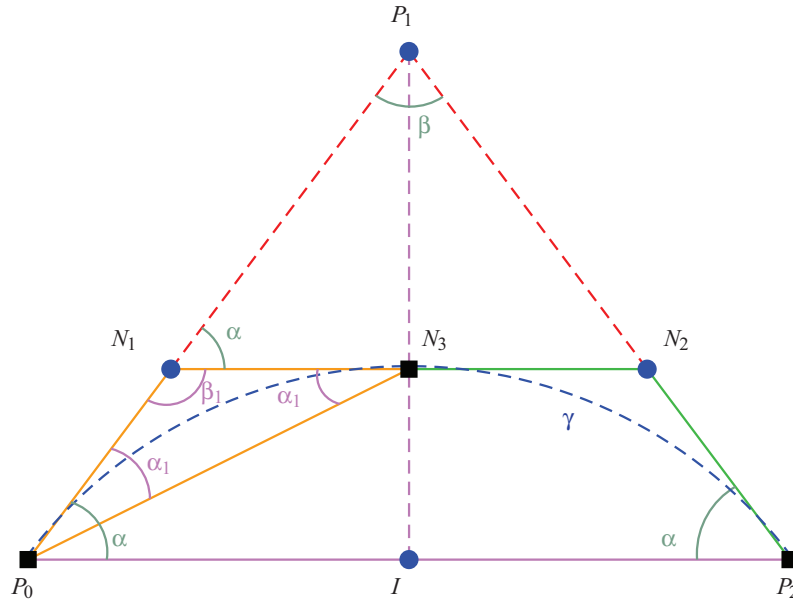
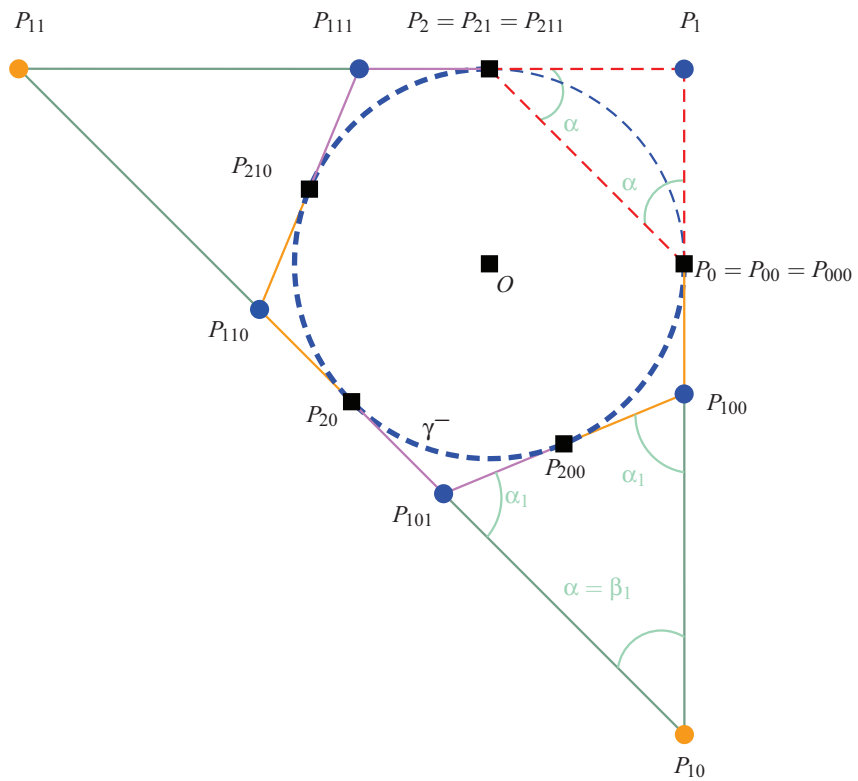


Figure 4: Principe de la construction d'un arc de cercle obtenu par un I.F.S. affine non linéaire, à partir de trois points pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega)$ et $(P_2;1)$.



© REFIG 2010.

Figure 5: Construction, à partir de trois points pondérés $(P_0;1)$, $(P_1;\omega)$ et $(P_2;1)$ avec $-1 < \omega < 0$, d'un arc de cercle γ^- obtenu par un I.F.S. affine non linéaire : les points P_0 , P_{200} , P_{20} , P_{210} et P_2 appartiennent à l'arc de cercle tandis que les droites (P_0P_{100}) , $(P_{100}P_{101})$, $(P_{101}P_{110})$, $(P_{110}P_{111})$ et $(P_{111}P_2)$ sont les tangentes à l'arc de cercle.

D Annexe D : Images et tableaux

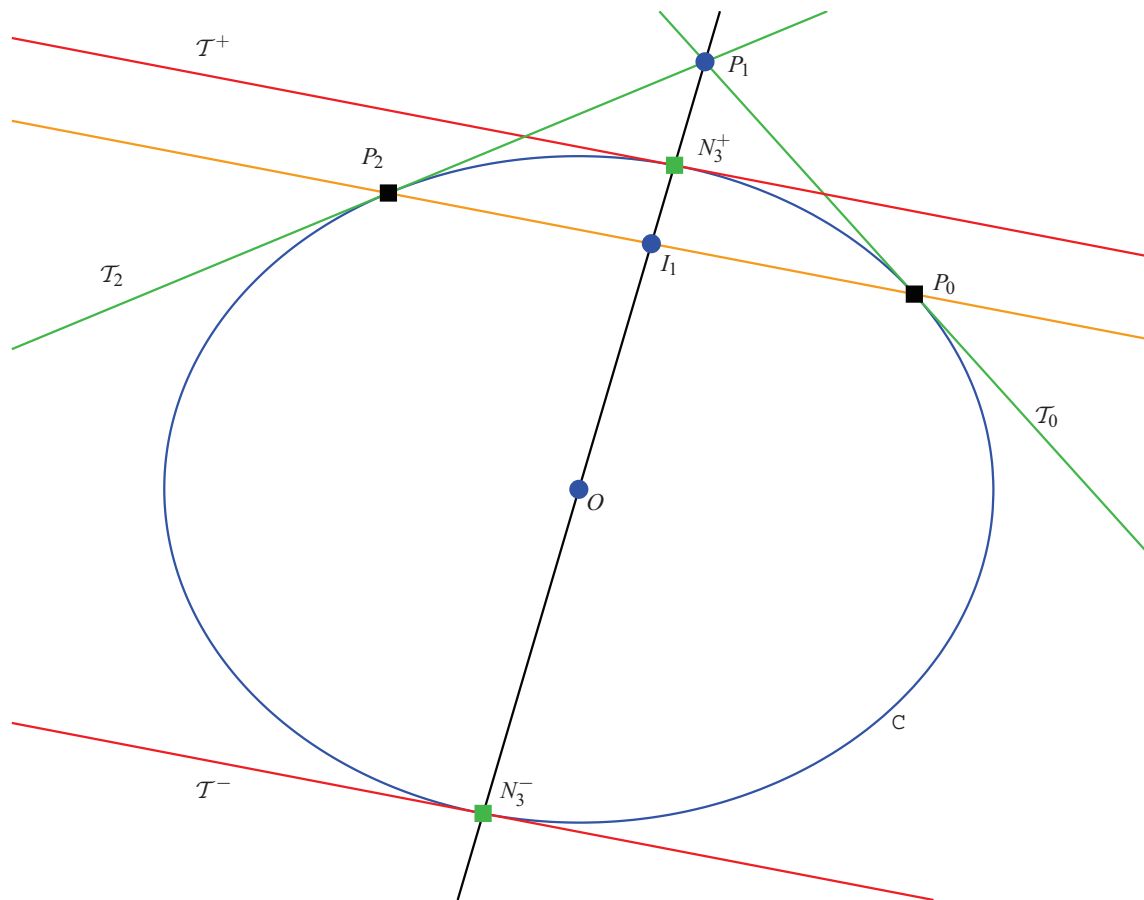
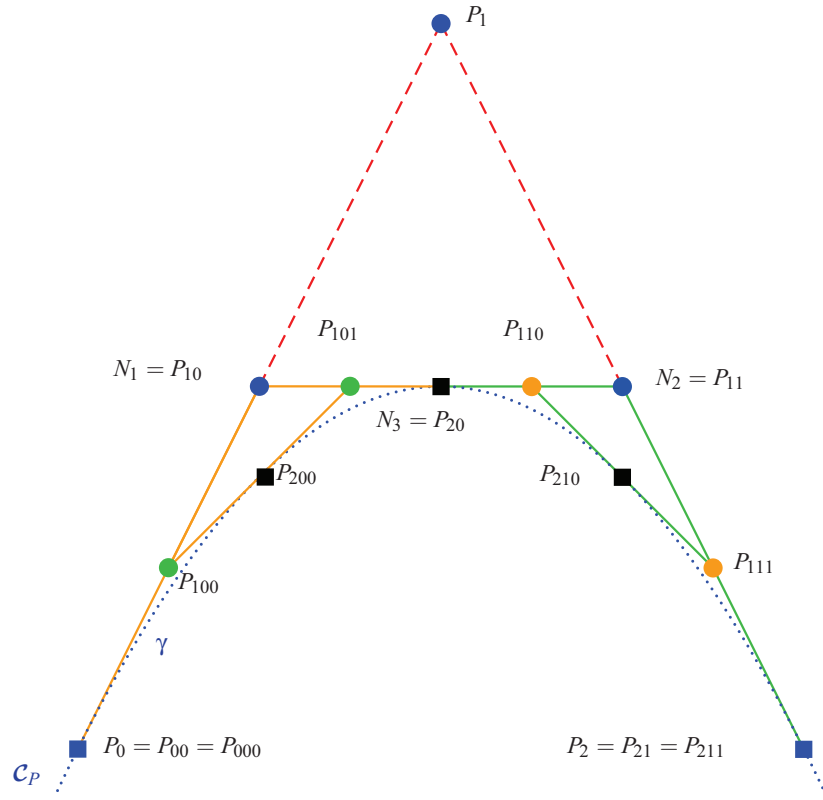


Figure 6: Pôles, polaires d'une conique à centre : la polaire du point P_1 est la droite (P_0P_2) tandis que le pôle de la droite (P_0P_2) est le point P_1 .



Algorithme 1 de construction, à la règle et au compas, d'un arc de parabole par un I.F.S. linéaire dans le plan affine euclidien usuel

Entrée : Trois points P_0, P_1 et P_2 non alignés de \mathcal{P} .

Procédure $\text{FractPara}(P_0, P_1, P_2)$

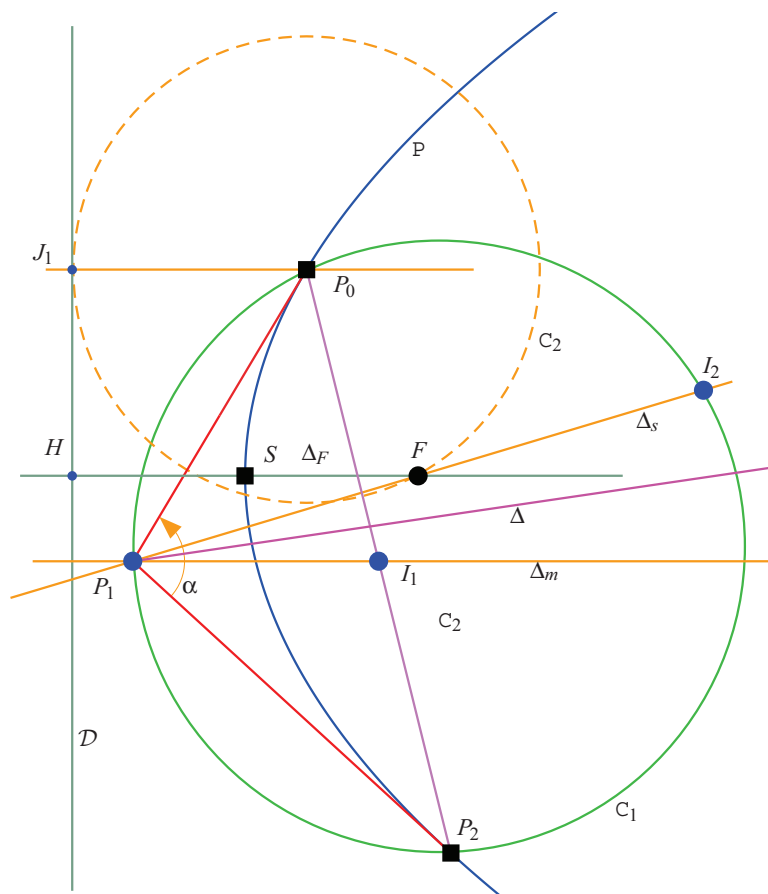
1. Soit N_1 le milieu du segment $[P_0P_1]$.
2. Soit N_2 le milieu du segment $[P_2P_1]$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. $\text{FractPara}(P_0, N_1, N_3)$.
5. $\text{FractPara}(N_3, N_2, P_2)$.

Sortie : un arc de parabole défini par trois points non alignés P_0, P_1 et P_2 .

Les deux applications contractantes T_0 et T_1 sont données par :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ N_1 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \end{pmatrix} \qquad T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_3 \\ N_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$$

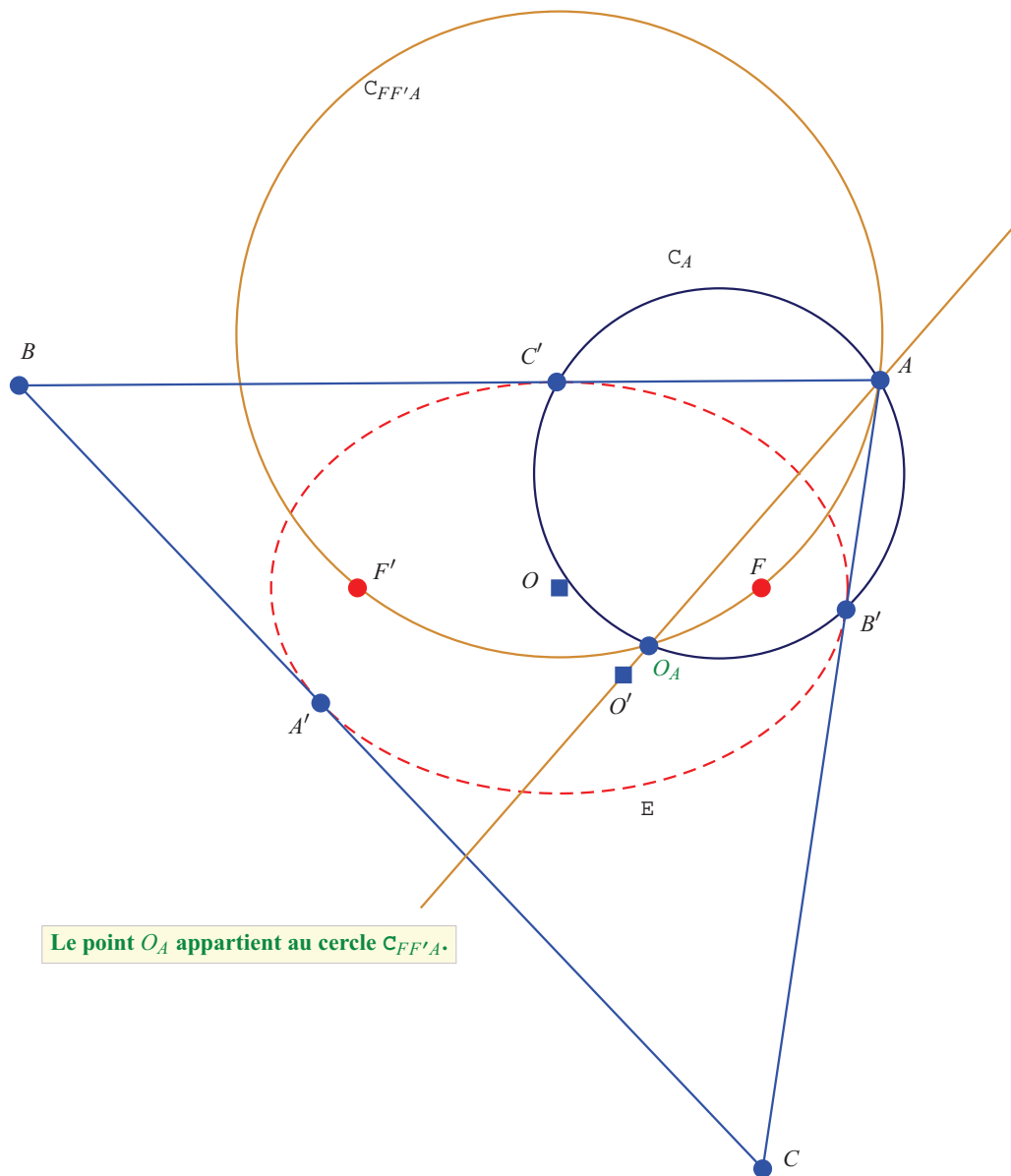
Figure 7: Construction, à la règle et au compas, d'un arc de parabole par un I.F.S. affine induit par l'algorithme 1 : les points $P_0, P_{200}, P_{20}, P_{210}$ et P_2 appartiennent à la parabole tandis que les droites $(P_0P_{100}), (P_{100}P_{101}), (P_{101}P_{110}), (P_{110}P_{111})$ et $(P_{111}P_2)$ sont les tangentes à l'arc de parabole.



Algorithme 2 : éléments caractéristiques d'une parabole définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ avec $|\omega| = 1$.

1. Détermination de I_1 , milieu du segment $[P_0P_2]$.
2. Détermination de la médiane $\Delta_m = (P_1I_1)$.
3. Détermination de la bissectrice intérieure Δ , issue de P_1 , du triangle $P_0P_1P_2$.
4. Détermination de la symédiane Δ_s , issue de P_1 , du triangle $P_0P_1P_2$.
5. Détermination de C_1 , cercle circonscrit au triangle $P_0P_1P_2$.
6. Détermination de I_2 , seconde intersection entre la symédiane Δ_s et le cercle C_1 .
7. Détermination du foyer F , milieu du segment $[P_1I_2]$.
8. Détermination de C_2 , cercle de centre P_0 passant par F .
9. Détermination de J_1 , intersection de C_2 avec la parallèle à Δ_m passant par P_0 telle que les vecteurs $\overrightarrow{I_1P_1}$ et $\overrightarrow{P_0J_1}$ soient de même sens.
10. Détermination de la directrice \mathcal{D} , tangente au cercle C_2 au point J_1 .
11. Détermination de l'axe focal Δ_F , droite parallèle à Δ_m passant par F .
12. Détermination du point H , intersection entre les droites \mathcal{D} et Δ_F .
13. Détermination du sommet S de la parabole, milieu du segment $[HF]$.

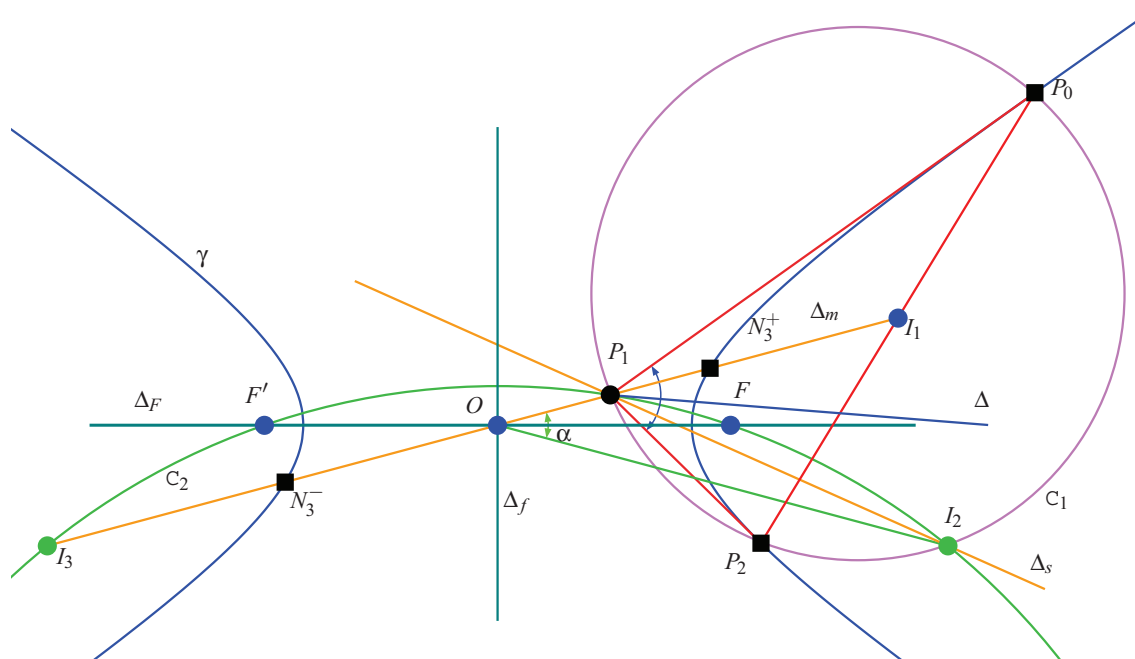
Figure 8: Eléments caractéristiques (directrice \mathcal{D} , Foyer F et sommet S), constructibles à la règle et au compas, d'une parabole définie par trois points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; 1)$ et $(P_2; 1)$.



Le point O_A appartient au cercle $C_{FF'A}$.

- Soit E une conique à centre non circulaire de centre O et de foyer F et F' .
 - Soit A', B' et C' trois points deux à deux distincts appartenant à E .
 - Soit A, B et C les sommets du triangle formé par les tangentes à E aux points A', B' et C' (en utilisant la notation usuelle : le point X' appartient au côté qui n'est pas issu du point X).
 - Soit O' l'isogonal du point O relativement au triangle ABC .
 - Soit O_A l'intersection de la droite $(O'A)$ avec le cercle circonscrit au triangle $AB'C'$.
 - Soit O_B l'intersection de la droite $(O'B)$ avec le cercle circonscrit au triangle $BA'C'$.
 - Soit O_C l'intersection de la droite $(O'C)$ avec le cercle circonscrit au triangle $CB'A'$.
- \implies Alors les quadrangles $[A, O_A, F, F']$, $[B, O_B, F, F']$ et $[C, O_C, F, F']$ sont harmoniques.

Figure 9: Propriétés des quadrangles harmoniques d'un triangle tangent à une conique à centre (pour des raisons de lisibilité, les points O_B , O_C et consorts ne sont pas affichés).

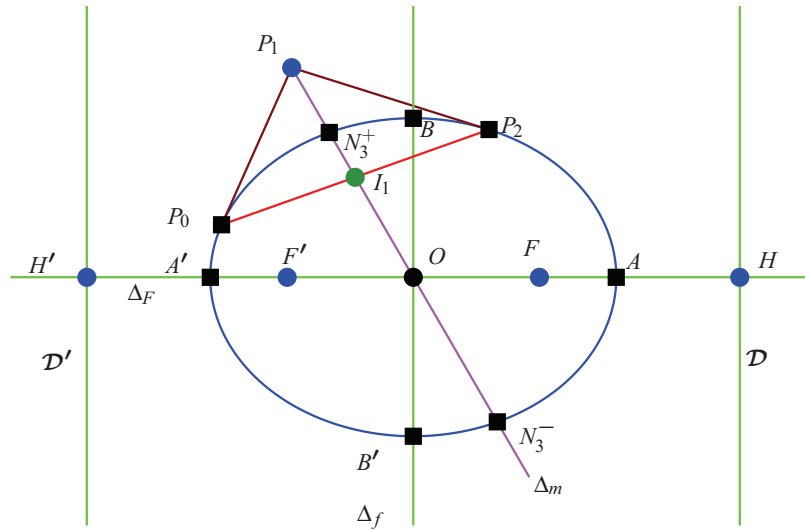

Algorithme 3 : Détermination du centre, des foyers et des axes focal et non focal d'une conique à centre.

1. Détermination de la médiane $\Delta_m = (P_1I_1)$ où I_1 est le milieu du segment $[P_0P_2]$.
2. Détermination du centre O , de la conique, par exemple, comme milieu du segment $[N_3^+N_3^-]$.
3. Détermination de Δ , bissectrice issue de P_1 dans le triangle $P_0P_1P_2$.
4. Détermination de la symédiane Δ_s , image de la médiane Δ_m par la réflexion d'axe Δ .
5. Détermination de C_1 , cercle circonscrit au triangle $P_0P_1P_2$.
6. Détermination du point I_2 comme seconde intersection de la droite Δ_s avec le cercle C_1 .
7. Détermination de l'axe focal Δ_F de la conique comme bissectrice, issue de O , dans le triangle P_1OI_2 .
8. Détermination de l'axe non focal Δ_f de la conique, comme perpendiculaire de Δ_F passant par le centre O .
9. Détermination de I_3 , image de I_2 par la réflexion d'axe non focal Δ_f .
10. Détermination de C_2 , cercle passant par $I_2I_3P_1$.
11. Détermination des foyers F et F' par :

$$\{F; F'\} = C_2 \cap \Delta_F$$

12. Calcul de $c = OF$.

Figure 10: Centre, foyers et axes focal et non focal, constructibles à la règle et au compas si ω est constructible, d'un arc de conique à centre non circulaire définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.



Algorithme 4 : Détermination des éléments caractéristiques d'une ellipse définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

Donnée : le centre O de l'ellipse, les foyers F et F' , l'axe focal Δ_F et l'axe non focal Δ_f donnés par l'algorithme 3.

1. Détermination du demi-grand axe :

$$a = \frac{FN_3^+ + F'N_3^+}{2}$$

ainsi que les sommets A et A' de l'axe focal par $OA = OA' = a$.

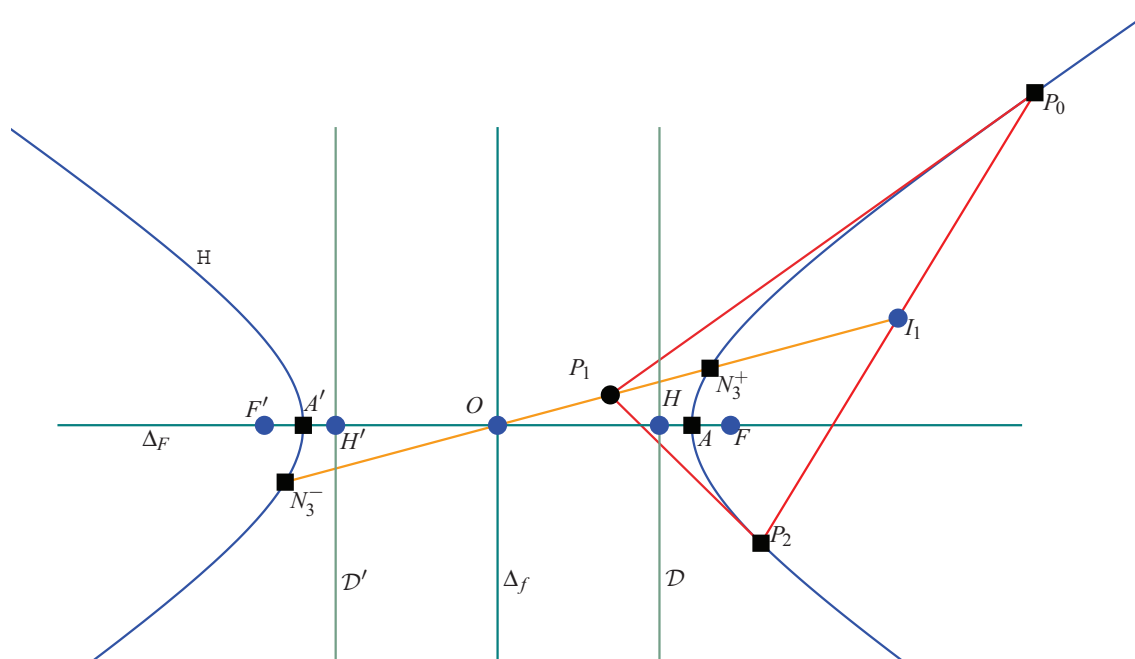
2. Détermination du demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et les sommets B et B' de l'axe non focal par $OB = OB' = b$.

3. Détermination de l'excentricité de l'ellipse $e = \frac{c}{a}$.

4. Détermination des points H et H' , distincts, de Δ_F tels que $AH = A'H' = eAF$.

5. Détermination des deux directrices de l'ellipse \mathcal{D} et \mathcal{D}' , perpendiculaires à Δ_F et passant respectivement par H et H' .

Figure 11: *Eléments caractéristiques, constructibles à la règle et au compas si ω est constructible, d'une ellipse dont un arc de conique est définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.*



Algorithme 5 : Détermination des éléments caractéristiques d'une hyperbole définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.

Donnée : le centre O de l'hyperbole, les foyers F et F' , l'axe focal Δ_F et l'axe non focal Δ_f donnés par l'algorithme 3 :

1. Détermination du demi-grand axe :

$$a = \frac{|FN_3^+ - F'N_3^-|}{2}$$

ainsi que les sommets A et A' de l'axe focal par $OA = OA' = a$.

2. Détermination de l'excentricité de l'ellipse $e = \frac{c}{a}$.

3. Détermination des points H et H' , distincts, de Δ_F tels que $AH = A'H' = eAF$.

4. Détermination des deux directrices de l'hyperbole \mathcal{D} et \mathcal{D}' , perpendiculaires à Δ_F et passant respectivement par H et H' .

Figure 12: *Eléments caractéristiques, constructibles à la règle et au compas si ω est constructible, d'une hyperbole dont un arc de conique modélisé par trois points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$.*

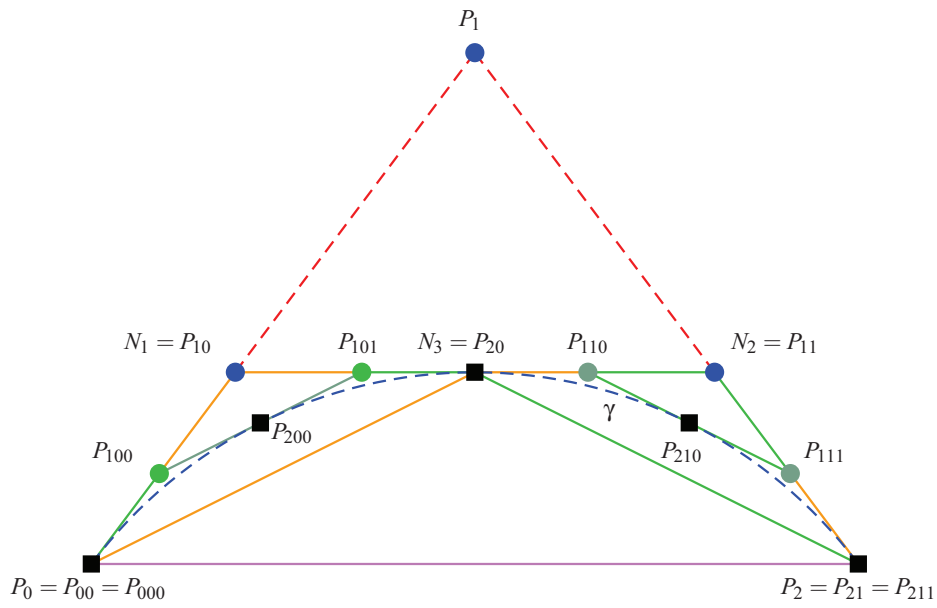


Figure 13: Déroulement de l'algorithme 6 sur une profondeur de 2 : les points P_0 , P_{200} , P_{20} , P_{210} et P_2 appartiennent à l'arc de cercle tandis que les droites (P_0P_{100}) , $(P_{100}P_{101})$, $(P_{101}P_{110})$, $(P_{110}P_{111})$ et $(P_{111}P_2)$ sont les tangentes à l'arc de cercle.

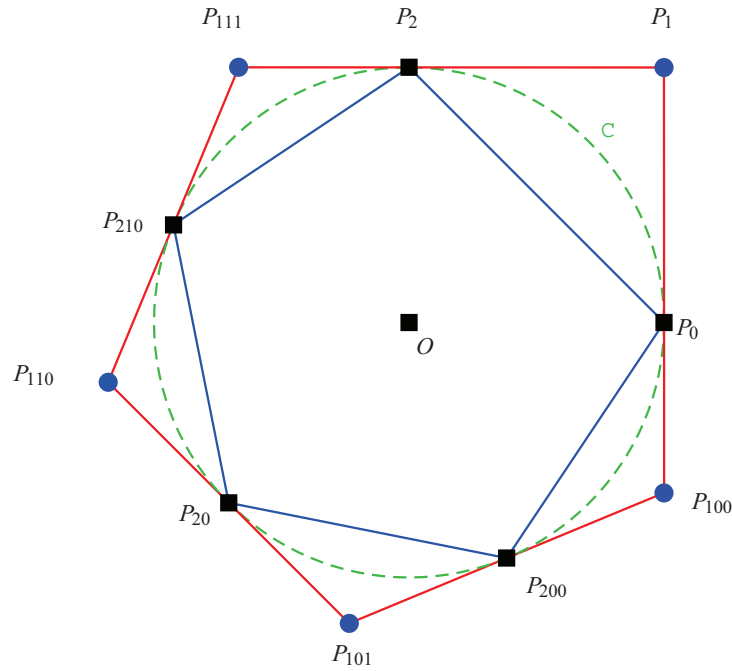
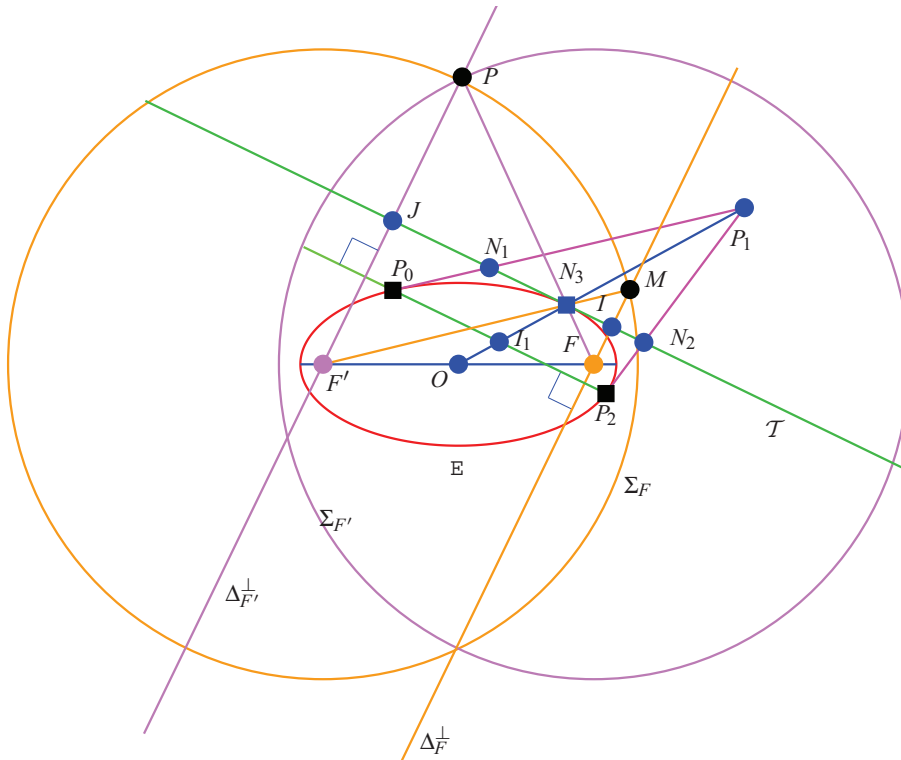


Figure 14: Construction d'un cercle par deux polygones par un I.F.S. affine non stationnaire : $P_0P_2P_{210}P_{20}P_{200}$ est celui des sommets appartenant au cercle, $P_1P_{111}P_{110}P_{101}P_{100}$ est celui des tangentes au cercle aux sommets du polygone précédent.

Nom	Coordonnées exactes	Coordonnées approchées
P_{100}	$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -0,668 \end{pmatrix}$
P_{101}	$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}+1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,235 \\ -1,180 \end{pmatrix}$
P_{200}	$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,383 \\ -0,924 \end{pmatrix}$
P_{110}	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}-1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,668 \\ 1 \end{pmatrix}$
P_{111}	$\begin{pmatrix} -\sqrt{2-\sqrt{2}}+1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,180 \\ -0,235 \end{pmatrix}$
P_{210}	$\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,924 \\ 0,383 \end{pmatrix}$

Table 1: Coordonnées des points calculés lors de la seconde étape du déroulement de l'algorithme 6, figure 14.

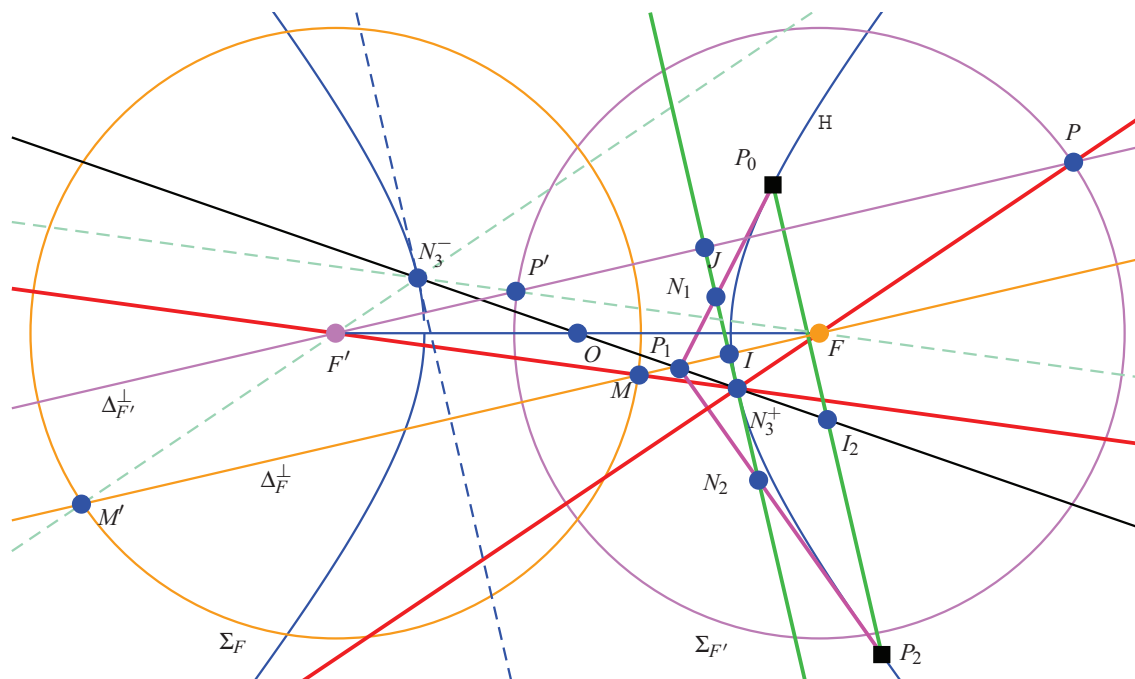


Algorithme 7 : Construction, à la règle et au compas, de la tangente parallèle à (P_0P_2) à un arc d'ellipse.

Précalcul : les foyers F et F' ainsi que le demi-grand axe a sont connus.

1. Construction des cercles directeurs Σ_F et $\Sigma_{F'}$ associés respectivement aux foyers F' et F .
2. Construction de la perpendiculaire $\Delta_{F'}^\perp$ à (P_0P_2) passant par F' .
3. Construction du point P , intersection entre $\Delta_{F'}^\perp$ et $\Sigma_{F'}$ tel que $P \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et tel que P soit le point d'intersection le plus éloigné de F' dans le cas de l'hyperbole.
4. Construction de la perpendiculaire Δ_F^\perp à (P_0P_2) passant par F .
5. Construction du point M , intersection entre Δ_F^\perp et Σ_F tel que $M \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et M est le point d'intersection le plus proche de F dans le cas de l'hyperbole.
6. Construction de N_3 , intersection des droites (PF) et (MF') .
7. Construction de I , milieu du segment $[FM]$ et de J , milieu du segment $[F'P]$.
8. Construction de N_2 , intersection des droites (IN_3) et (P_2P_1) .
9. Construction de N_1 , intersection des droites (IN_3) et (P_0P_1) .

Figure 15: Construction de la tangente \mathcal{T} , parallèle à la droite (P_0P_2) , à une ellipse non circulaire E et détermination du point de contact N_3 entre \mathcal{T} et E .


Algorithme 7 : Construction, à la règle et au compas, de la tangente parallèle à (P_0P_2) à un arc d'hyperbole.

Précalcul : les foyers F et F' ainsi que le demi-grand axe a sont connus.

1. Construction des cercles directeurs Σ_F et $\Sigma_{F'}$ associés respectivement aux foyers F' et F .
2. Construction de la perpendiculaire $\Delta_{F'}^\perp$ à (P_0P_2) passant par F' .
3. Construction du point P , intersection entre $\Delta_{F'}^\perp$ et $\Sigma_{F'}$ tel que $P \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et tel que P soit le point d'intersection le plus éloigné de F' dans le cas de l'hyperbole.
4. Construction de la perpendiculaire Δ_F^\perp à (P_0P_2) passant par F .
5. Construction du point M , intersection entre Δ_F^\perp et Σ_F tel que $M \in \mathcal{P}^s$ dans le cas de l'ellipse et M est le point d'intersection le plus proche de F dans le cas de l'hyperbole.
6. Construction de N_3 , intersection des droites (PF) et (MF') .
7. Construction de I , milieu du segment $[FM]$ et de J , milieu du segment $[F'P]$.
8. Construction de N_2 , intersection des droites (IN_3) et (P_2P_1) .
9. Construction de N_1 , intersection des droites (IN_3) et (P_0P_1) .

Figure 16: Construction de la tangente \mathcal{T} , parallèle à la droite (P_0P_2) , à une hyperbole H et détermination du point de contact N_3^+ entre \mathcal{T} et H .

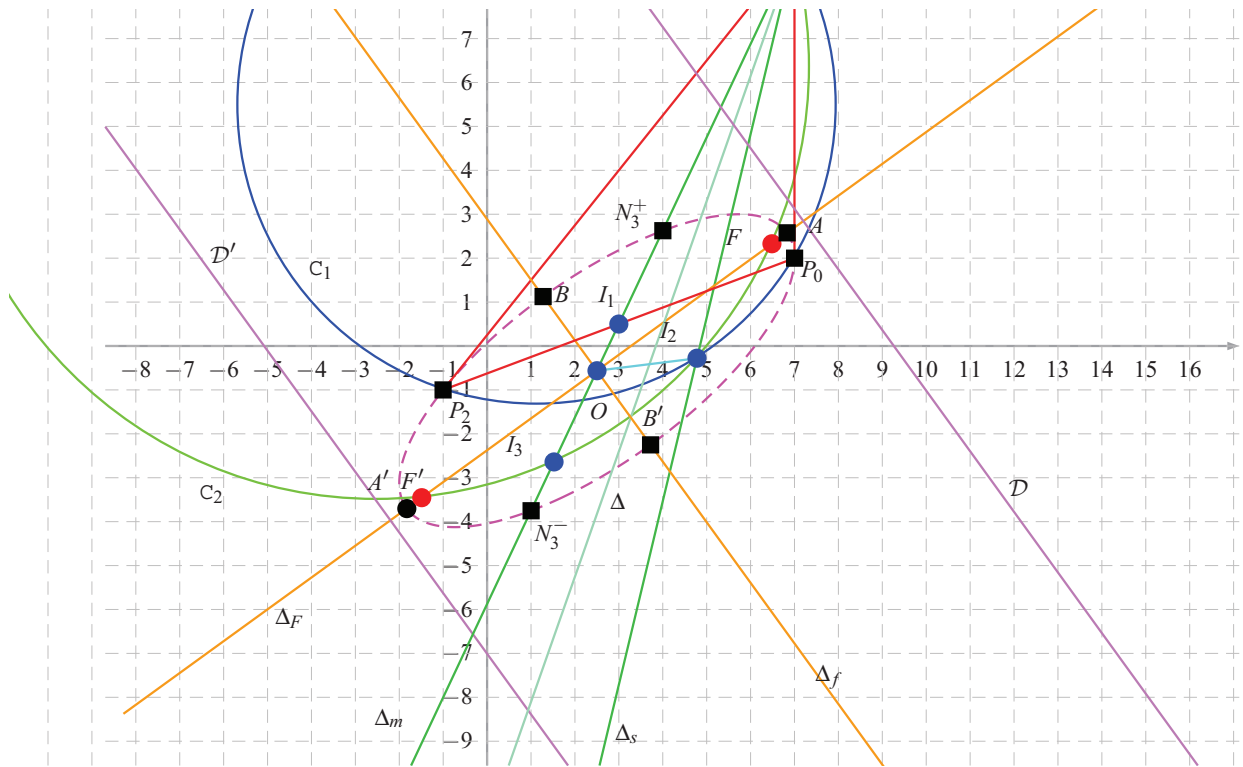


Figure 17: Ellipse limite obtenue, dans le plan euclidien, par un I.F.S. affine non stationnaire, à partir de trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$. Nous avons $P_0 = (7; 2)$, $P_1 = (7; 9)$, $P_2 = (-1; -1)$ et $\omega = \frac{1}{3}$.

Nom et coordonnées
$P_0 = (7; 2)$
$P_1 = (7; 9)$
$P_2 = (-1; -1)$
$I_1 = \left(3; \frac{1}{2}\right)$
$N_3^+ = (4; 2,625)$
$N_3^- = (1; 3,75)$
$O \simeq (2, 5; 0, 6)$
$I_2 \simeq (4, 8; -0, 3)$
$I_3 \simeq (1, 5; -2, 6)$
$F \simeq (6, 5; 2, 3)$
$F' \simeq (-1, 5; -3, 5)$
$A \simeq (6, 8; 2, 6)$
$A' \simeq (-1, 8; -3, 7)$
$B \simeq (1, 3; 1, 1)$
$B' \simeq (3, 7; -2, 2)$

Table 2: Coordonnées des points de la figure 17.

Nom	Equation approchée
Δ	$y = 2.85x - 11$
Δ_m	$y = 2.12x - 5.88$
Δ_s	$y = 4.18x - 20.2$
Δ_F	$y = 0.725x - 2.37$
Δ_f	$y = -1.38x + 2.89$
\mathcal{D}	$y = -1.38x + 12.8$
\mathcal{D}'	$y = -1.38x - 7.01$

Table 3: Equations approchées des droites de la figure 17.

Le cercle C_1 a pour équation approchée :

$$(x - 1, 12)^2 + (y - 5, 50)^2 = 46, 8$$

tandis que le cercle C_2 a pour équation approchée :

$$(x + 2, 53)^2 + (y - 6, 37)^2 = 97, 6$$

et une équation approchée de l'ellipse est :

$$0, 44x^2 + 0, 71y^2 - 0, 81xy - 2, 67x + 2, 81y - 0, 21 = 0$$

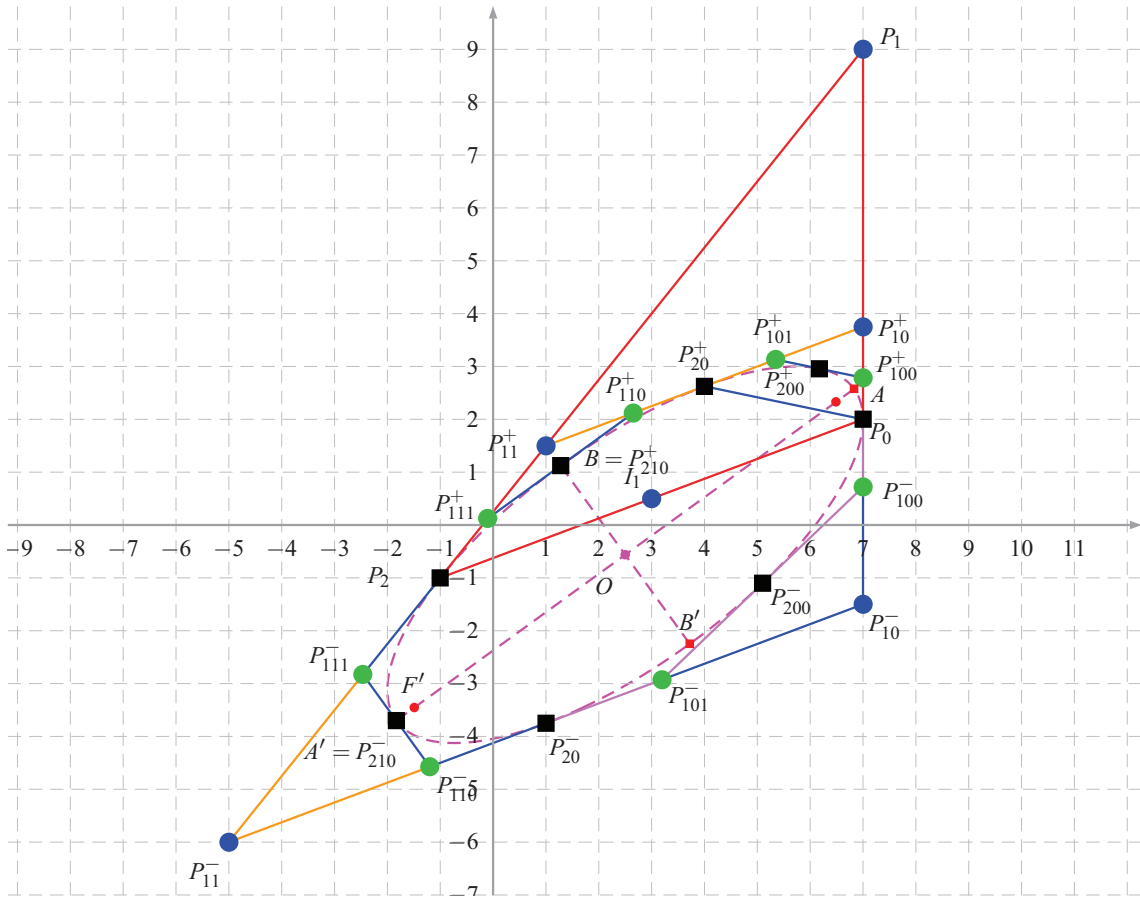


Figure 18: Création d'une ellipse, dans le plan euclidien d'un I.F.S. affine non stationnaire, à partir de trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ en utilisant l'algorithme 9. Nous avons $P_0 = (7; 2)$, $P_1 = (7; 9)$, $P_2 = (-1; -1)$ et $\omega = \frac{1}{3}$.

Nom	Coordonnées figures 18 et 19	Coordonnées figure 20
P_0	$= (7; 2)$	$= (7; 2)$
P_{200}^+	$\simeq (6, 2; 3, 0)$	$\simeq (6, 3; 2, 9)$
P_{20}^+	$= (4; 2, 625)$	$= (4; 2, 625)$
$B = P_{210}^+$	$\simeq (1, 3; 1, 1)$	$\simeq (1; 0, 9)$
P_2	$= (-1; -1)$	$= (-1; -1)$
$A' = P_{210}^-$	$\simeq (-1, 8; -3, 7)$	$= (-2; -3, 125)$
P_{20}^-	$= (1; -3, 75)$	$= (1; -3, 75)$
P_{200}^-	$\simeq (5, 1; -1, 1)$	$= (6; -0, 125)$

Table 4: Coordonnées des points de l'ellipse des figures 18, 19 et 20.

Nom	Coordonnées figures 18 et 19	Coordonnées figure 20
P_{100}^+	$\simeq (7; 2, 8)$	$= (7; 2, 7)$
P_{101}^+	$\simeq (5, 3; 3, 1)$	$= (5, 5; 3, 1875)$
P_{110}^+	$\simeq (2, 7; 2, 11)$	$= (2, 5; 2, 0625)$
P_{111}^+	$\simeq (-0, 1; 0, 1)$	$= (-0, 2; 0)$
P_{111}^-	$= (-2, 5; -2, 8)$	$= (-2; -2, 25)$
P_{110}^-	$\simeq (-1, 2; -4, 6)$	$= (-2; -4, 875)$
P_{101}^-	$= (3, 2; -2, 9)$	$= (4; -2, 625)$
P_{100}^-	$\simeq (7; 0, 7)$	$= (7; 1, 125)$

Table 5: Coordonnées des points contrôlant les tangentes de l'ellipse des figures 18, 19 et 20.

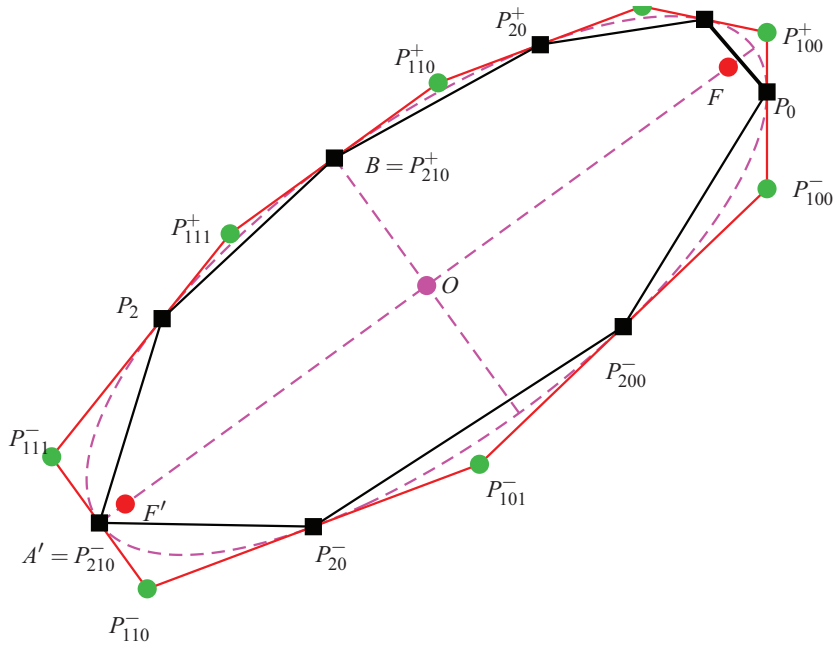


Figure 19: Polygones des sommets et des tangentes a une ellipse définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ construits, à la règle et au compas, par un I.F.S. affine non stationnaire avec $P_0 = (7; 2)$, $P_1 = (7; 9)$, $P_2 = (-1; -1)$ et $\omega = \frac{1}{3}$.

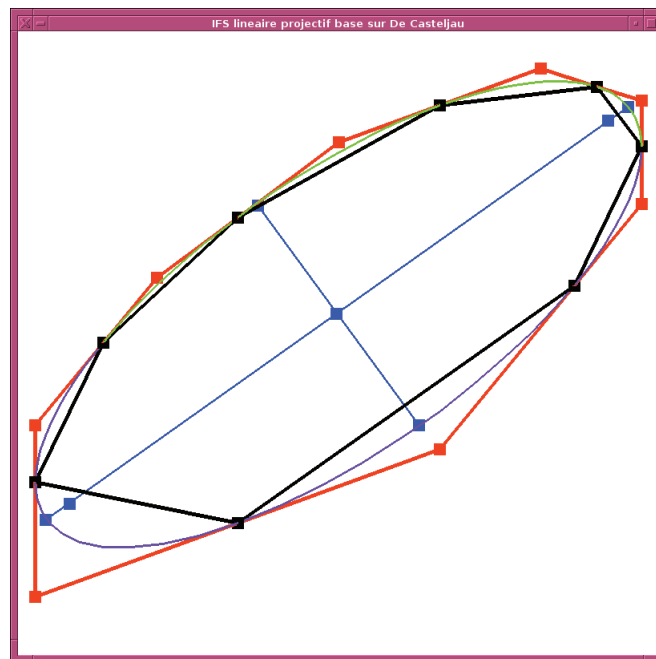


Figure 20: Polygones des sommets et des tangentes a une ellipse définie par trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ construits en utilisant l'I.F.S. linéaire projectif basé sur l'algorithme de De Casteljaou avec les points et le poids de la figure 19.

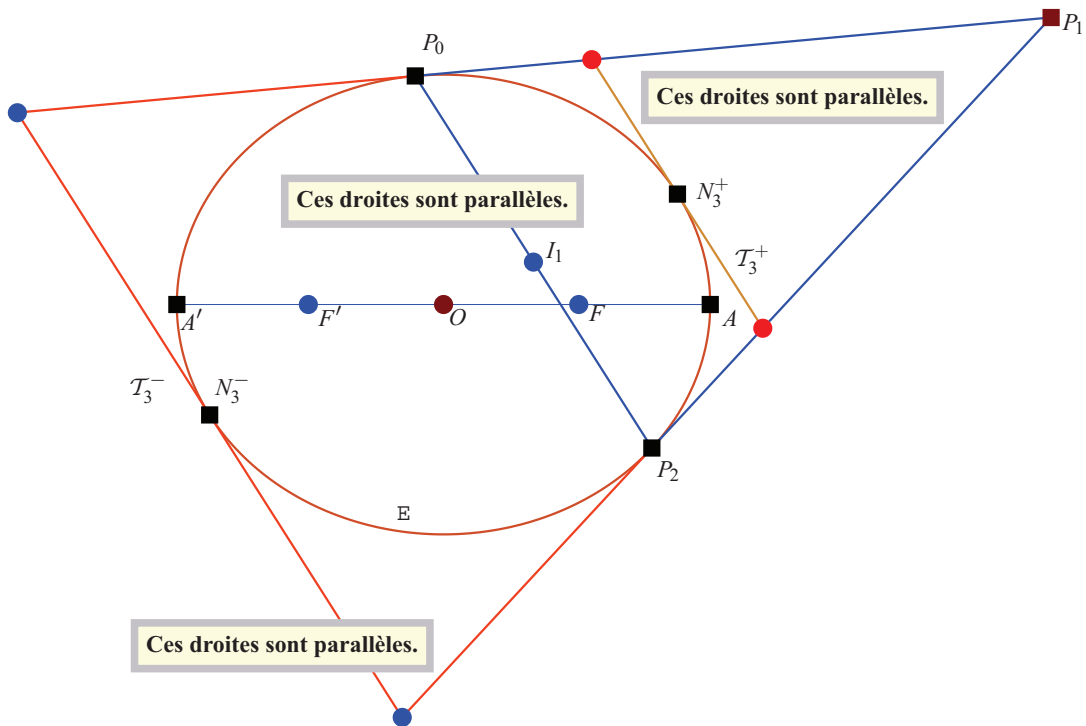


Figure 21: Dédution, grâce au logiciel Kig, du parallélisme de la droite (P_0P_2) et des tangentes à l'ellipse aux points N_3^+ et N_3^- construits en utilisant l'algorithme 7.

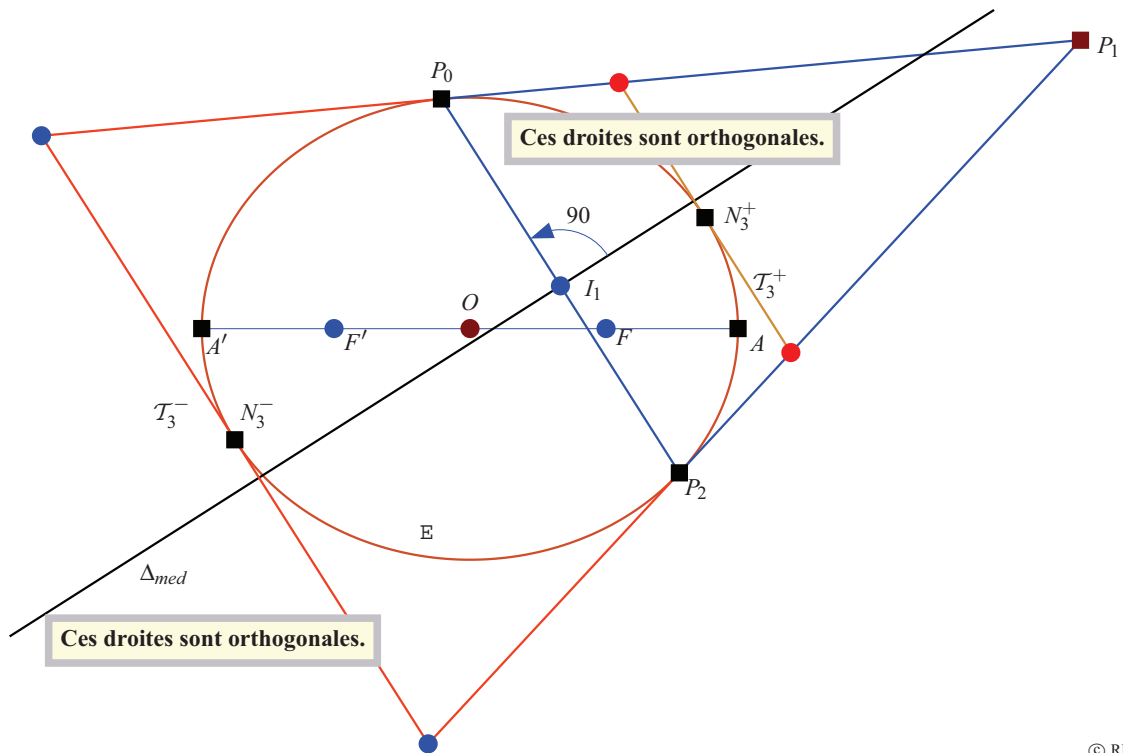


Figure 22: Dédution, grâce au logiciel Kig, que la droite Δ_{med} , médiatrice du segment $[P_0P_2]$ est perpendiculaire aux tangentes à l'ellipse aux points N_3^+ et N_3^- construits en utilisant l'algorithme 7.