

# Interpolation multirésolution de formes 2D

Mélanie Cornillac\*, Baptiste Caramiaux, Stefanie Hahmann\* et Georges-Pierre Bonneau\*

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble Universités

\*prénom.nom@imag.fr

---

## Résumé

*We present a multiresolution morphing algorithm using "as-rigid-as-possible" shape interpolation combined with an angle-length based multiresolution decomposition of simple 2D piecewise curves. This novel multiresolution representation is defined intrinsically and has the advantage that the details' orientation follows any deformation naturally. The multiresolution morphing algorithm consists of transforming separately the coarse and detail coefficients of the multiresolution decomposition. Thus all LoD (level of detail) applications like LoD display, compression, LoD editing etc. can be applied directly to all morphs without any extra computation. Furthermore, the algorithm can robustly morph between very large size polygons with many local details as illustrated in numerous figures. The intermediate morphs behave natural and least-distorting due to the particular intrinsic multiresolution representation.*

*Nous présentons une nouvelle méthode de morphing de courbes planes utilisant une combinaison entre une interpolation "aussi-rigide-que-possible" et une décomposition multirésolution intrinsèque. Cette nouvelle représentation multirésolution est basée sur les angles et longueurs, et présente l'avantage que l'orientation des détails suit naturellement n'importe quelle déformation. Le principe du morphing multirésolution est de transformer séparément les coefficients grossiers et ceux de détails issus de la décomposition multirésolution. Ainsi, toutes les manipulations des niveaux de détails (NdD) comme l'affichage de NdD, la compression, l'édition, ... peuvent être appliquées directement aux métamorphoses sans calcul supplémentaire. De plus, nous montrons au travers de nombreuses figures la robustesse de notre algorithme sur des polygones de grande taille avec de nombreux détails. Les polygones intermédiaires se comportent naturellement et leur distorsion est minimale grâce à la représentation multirésolution intrinsèque que nous avons choisie.*

---

**Mots clé :** Modélisation géométrique, courbes, analyse multirésolution, morphing, interpolation, représentation intrinsèque.

## 1. Introduction

Le *morphing* (ou métamorphose) est la transformation progressive et lisse d'un modèle en un autre par interpolation. Ce modèle peut être en dimension 2 une image ou une courbe, ou en 3D une surface ou un volume. Le problème est de créer une transition entre deux formes qui soit esthétique et intuitive. Les formes intermédiaires doivent préserver l'apparence et les propriétés des formes en entrée. La simple interpolation linéaire entre les deux formes s'avère souvent inadaptée, car les formes intermédiaires ont ten-

dance à beaucoup varier en volume ou encore à voir les proportions de leurs formes caractéristiques changer. Un autre effet négatif est que des détails géométriques peuvent disparaître pour réapparaître plus tard. Le processus de *morphing* se décompose en deux problèmes : le *problème du couplage des sommets* (trouver une correspondance entre les caractéristiques géométriques des objets source et destination) et le *problème de la trajectoire des sommets* (trouver la trajectoire suivie par deux éléments correspondants au cours de la métamorphose). Ces deux problèmes suscitent toujours beaucoup d'intérêt en recherche, puisqu'il n'existe pas à ce jour de définition formelle d'une solution satisfaisante.

## Travaux précédents

Il est bien connu qu'un bon couplage initial des sommets sources et destinations peut améliorer de manière si-

gnificative la qualité du *morphing* [SG92]. La plupart des algorithmes de *morphing* imposent donc manuellement le couplage de quelques points choisis [ACOL00, SGWM93, GG95] ou supposent simplement que le problème est résolu [SG03, SR95]. Dans [Mey94], le problème du couplage des points est résolu de façon multirésolution en utilisant les ondelettes. Dans notre travail, nous considérons que le couplage des points est donné, et que seul le problème de la trajectoire des points est à résoudre pour des formes polygonales 2D.

De bons résultats sont généralement obtenus en choisissant d'abord une représentation alternative de la courbe ou surface avant de l'interpoler. Dans le cas de formes polygonales 2D, Sederberg et al. [SGWM93] représentent les polygones par un ensemble de longueurs et d'angles. Shapira et Rappoport [SR95] utilisent une représentation 'squelette-étoilé'. Goldstein et Gotsman [GG95] utilisent une représentation multirésolution basée sur l'évolution de la courbe. Le *morphing* est aussi appliqué à des éléments décrivant l'intérieur de la forme 2D, comme des triangles. Ainsi, Floater et Gotsman [FG99] ont utilisé des coordonnées barycentriques pour métamorphoser des triangulations compatibles, et Surazhsky et Gotsman [SG03] ont en plus interpolé des composantes intrinsèques de ces coordonnées. Alexa et al. [ACOL00] effectuent un *morphing* entre des triangulations compatibles en utilisant des applications locales qui minimisent les distorsions. Mentionnons aussi une technique de *morphing* multirésolution de maillages par Lee et al. [LDSS99]. Pour les techniques de *morphing* de maillages 3D, un état de l'art est proposé par Alexa [Ale02]. La clé d'une méthode réussie semble être l'utilisation d'une représentation basée sur des propriétés intrinsèques à la géométrie des objets de façon à ce que l'interpolation de ses éléments donne automatiquement un résultat satisfaisant.

La méthode de *morphing* que nous présentons dans cet article est basée sur une nouvelle représentation multirésolution. Dans la modélisation de formes complexes comportant de nombreux détails géométriques qui sont donc difficiles à manipuler, l'analyse multirésolution offre un outil puissant pour représenter et déformer efficacement des objets à différents niveaux de résolution. Ainsi, une forme complexe est décomposée en une approximation grossière ainsi qu'un ensemble de coefficients de détails, permettant à tout moment la reconstruction du modèle initial. La déformation d'objets complexes comportant de nombreux détails peut être délicate et coûteuse à calculer. Dans un cadre multirésolution, même les objets complexes peuvent être édités à une échelle choisie avec deux principaux effets. Premièrement, modifier des points de contrôle basse-résolution modifie la forme globale de l'objet sans en affecter les détails. Deuxièmement, modifier des coefficients de détails fins modifie le caractère local de l'objet sans affecter sa forme globale.

Le *morphing* multirésolution décompose donc la forme source et la forme destination en une approximation gros-

sière et un ensemble de coefficients de détails, il calcule séparément la suite de formes grossières intermédiaires et celle de détails, et enfin reconstruit toutes les formes intermédiaires. Le choix de la représentation multirésolution est déterminant pour la qualité des formes générées. En modélisation géométrique assistée par ordinateur (CAGD) ou en informatique graphique, les courbes ont généralement une représentation multirésolution (MR) basée sur les B-splines [FS94, CQ92, EG95, Ber05, HBS05] et sont définies pour des applications particulières. Dans le cas des déformations, et le *morphing* appartient à cette application, l'orientation des détails est un problème majeur. Par exemple, une analyse multirésolution basée sur une ondelette ne préserve pas l'orientation des détails au cours de la transformation. En effet, les détails sont encodés dans un système global de coordonnées. Une représentation multirésolution qui encode des détails en utilisant des repères locaux comme [FS94] résout ce problème mais n'est pas appropriée pour le *morphing*. En effet, les polygones grossiers peuvent tirer profit du *morphing* intrinsèque de Sederberg, mais les détails eux ne le peuvent pas. Donc le *morphing* des détails souffrirait du même manque de réalisme qu'un *morphing* linéaire des sommets.

## Aperçu

Dans cet article, nous introduisons une représentation multirésolution pour les courbes 2D polygonales basée sur la courbure. Tous les coefficients de détails seront représentés intrinsèquement par angles et longueurs. Nous montrons que, comme les repères locaux, la représentation multirésolution préserve l'orientation des détails au cours de la déformation. En outre, nous étudions son utilisation pour le *morphing* en la combinant avec la technique de *morphing* "as-rigid-as-possible" de Alexa et al. [ACOL00] qui s'est avérée fournir des métamorphoses de bonne qualité. Nous présentons donc un algorithme de *morphing* multirésolution intrinsèque aussi-rigide-que-possible.

## 2. Analyse Multirésolution basée sur la représentation angle-longueur

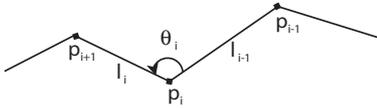
L'analyse multirésolution divise un vecteur de coefficients  $c^n$  en une partie grossière  $c^{n-1}$  et une partie de détails  $d^{n-1}$ . Cette division peut-être appliquée récursivement au nouveau vecteur  $c^{n-1}$ . Ainsi le vecteur original des coefficients peut-être décomposé en une hiérarchie de vecteurs dits de basse-résolution  $c^{n-1}, \dots, c^0$  et de vecteurs de détails  $d^{n-1}, \dots, d^0$ . Ce procédé est appelé *analyse ou décomposition*. Le vecteur des coefficients originaux peut-être retrouvé depuis n'importe quelle séquence  $c^j, d^j, d^{j+1}, \dots, d^n$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ . Ce procédé est appelé *synthèse ou reconstruction*. Pour plus de détails et fondements mathématiques sur l'analyse multirésolution, vous pouvez vous reporter au travail original de Mallat [Mal89]. Une vue d'ensemble des applications en informatique graphique est donnée dans [SDS96].

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les déformations d'une représentation MR basée sur des ondelettes souffrent généralement d'un manque de réalisme car l'orientation des détails reste fixe lors de la déformation.

C'est pourquoi nous introduisons dans cet article une autre méthode d'analyse MR pour des courbes linéaires par morceaux (polygones 2D). Dans le cadre applicatif du *morphing*, notre méthode possède deux propriétés importantes : l'orientation des détails suit la déformation naturellement (voir Figure 3) et la représentation MR est définie intrinsèquement.

Nous savons, grâce à la géométrie différentielle, qu'une courbe paramétrique est déterminée de manière unique, à isométrie près, par sa fonction courbure [Car76]. La courbure est une propriété intrinsèque d'une courbe. Dans le contexte des courbes planes et linéaire par morceaux, les angles et longueurs définissent intrinsèquement une courbe, à isométrie près [Ada75, SGWM93]. Nous allons utiliser ces quantités intrinsèques pour définir les coefficients grossiers et de détails d'une analyse MR.

Notons les sommets du polygone à décomposer  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Nous transformons alors la représentation en coordonnées  $(x, y)$  du polygone initial en une représentation en coordonnées  $(\theta, l)$ , où  $\theta_i = \angle(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}})$  est l'angle défini en sens trigonométrique de deux segments consécutifs de polygone au point  $P_i$  et  $l_i = \|\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\|$ ,  $i = 0, \dots, N-2$ , voir Figure 1. Les coordonnées  $(x, y)$  des points de contrôle  $P_i$  peuvent être retrouvées directement en utilisant par exemple  $P_0$  comme point initial et  $\overrightarrow{P_0P_1}$  comme segment initial (déterminant ainsi la translation et la rotation).



**Figure 1:** Des coordonnées  $(x, y)$  aux coordonnées  $(\theta, l)$  ( $l_i, \theta_i$  en fonction de  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$ )

La *représentation MR angle-longueur* que nous introduisons maintenant fonctionne exclusivement avec les coordonnées  $(\theta, l)$ . A l'instar des ondelettes passeuses [Swe97], nous choisissons de ne garder que la moitié des points de contrôle à chaque étape d'analyse afin d'obtenir le polygone grossier.

## 2.1. L'Analyse

L'analyse (décomposition) est une procédure récursive consistant à diviser un vecteur de coefficients d'un polygone  $(\theta^{n+1}, l^{n+1})$  en un vecteur de coefficients grossiers (correspondant au polygone de basse-résolution)  $(\theta^n, l^n)$  et en un vecteur de coefficients de détails. L'indice  $n$  dénote alors le

niveau de résolution. Les deux types de coefficients (de détails et grossiers) au niveau  $n$  doivent être déduits directement de  $(\theta^{n+1}, l^{n+1})$  et vice-versa.

En utilisant les règles basiques de trigonométrie pour les triangles, nous déduisons les formules d'analyse suivantes, illustrées dans la Figure 2. A chaque étape, le polygone fin  $(\theta^{n+1}, l^{n+1})$  est décomposé en son approximation  $(\theta^n, l^n)$ , appelé polygone grossier, ainsi qu'un ensemble de détails  $(\alpha^n, \beta^n)$  permettant la reconstruction du polygone fin (voir Partie 2.2). Les détails sont des angles.

### coefficients grossiers

$$\theta_i^n = \theta_{2i}^{n+1} + \theta_{2i-1}^{n+1} + \alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n - \pi,$$

$$l_i^n = \sqrt{\left(l_{2i+1}^{n+1}\right)^2 + \left(l_{2i}^{n+1}\right)^2 - 2 \cdot l_{2i+1}^{n+1} \cdot l_{2i}^{n+1} \cos\left(\theta_{2i+1}^{n+1}\right)},$$

pour  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ .

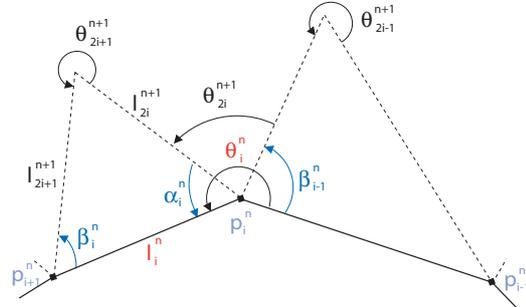
(1)

### coefficients de détails

$$\alpha_i^n = \arccos\left(\frac{l_{2i}^{n+1} - l_{2i+1}^{n+1} \cos(\theta_{2i+1}^{n+1})}{l_i^n}\right),$$

(2)

$$\beta_i^n = \theta_{2i+1}^{n+1} - \alpha_i^n - \pi, \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2^n - 1.$$



**Figure 2:** L'analyse. Le polygone en pointillés appartient au niveau de résolution  $n+1$ , le polygone en traits pleins appartient au niveau  $n$ .

A partir d'un polygone à  $2^{n+1}$  segments, une étape d'analyse crée un polygone à  $2^n$  segments et  $2^n$  coefficients de détails, lesquels sont représentés par deux vecteurs bidimensionnels de la forme :

$$\begin{aligned} (\theta^{n+1}, l^{n+1}) &\rightarrow (\theta^n, l^n) \\ &\searrow \\ &(\alpha^n, \beta^n), \end{aligned}$$

où  $\theta^n = (\theta_0^n, \dots, \theta_{2^n-1}^n)$ , de même pour  $\mathbf{l}^n, \alpha^n, \beta^n$ . A partir d'un polygone à  $D$  segments,  $2^n \leq D < 2^{n+1}$ , on peut donc effectuer jusqu'à  $n$  étapes d'analyse.

## 2.2. La Synthèse

L'analyse fournit un polygone grossier  $(\theta^0, \mathbf{l}^0)$  (une forme géométrique simple) et un ensemble de coefficients de détails  $(\alpha^0, \beta^0), \dots, (\alpha^n, \beta^n)$ . La synthèse va reconstruire le polygone original. Nous travaillons encore en coordonnées  $(\theta, \mathbf{l})$ . Ainsi, l'algorithme consiste à calculer les longueurs  $l_{2i}^{n+1}, l_{2i+1}^{n+1}$  et les angles  $\theta_{2i}^{n+1}, \theta_{2i+1}^{n+1}$  au niveau  $n+1$  grâce aux coefficients grossiers et de détails au niveau  $n$ . Ce procédé correspond à une étape de synthèse. Nous pouvons ensuite itérer l'algorithme sur la forme reconstruite avec les détails.

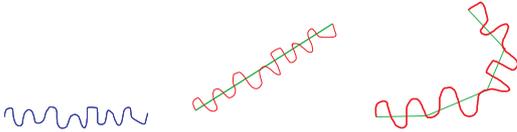
Les formules de synthèse, comme celles d'analyse, sont obtenues géométriquement (voir Figure 2 pour une illustration).

### reconstruction des longueurs

$$\begin{aligned} l_{2i}^{n+1} &= l_i^n \frac{\sin(\beta_i^n)}{\sin(\alpha_i^n + \beta_i^n)} \\ l_{2i+1}^{n+1} &= l_i^n \frac{\sin(\alpha_i^n)}{\sin(\alpha_i^n + \beta_i^n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

### reconstruction des angles

$$\begin{aligned} \theta_{2i}^{n+1} &= \theta_i^n - \alpha_i^n - \beta_{i-1}^n \\ \theta_{2i+1}^{n+1} &= \pi + \alpha_i^n + \beta_i^n. \end{aligned} \quad (4)$$



**Figure 3:** A gauche : courbe initiale avec 256 points de contrôle. Au centre : déformation du polygone grossier au niveau 6. A droite : déformation du polygone grossier au niveau 8. L'orientation des détails suit naturellement l'orientation du polygone grossier lors de la déformation.

## 2.3. Les cas spéciaux

Trois cas spéciaux nécessitant un traitement particulier sont à prendre en considération. Ils correspondent aux cas où les coefficients de détails  $(\alpha_i, \beta_i)$  prennent les valeurs  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$  et  $(\pi, 0)$ . Géométriquement, ces cas correspondent à des triangles dégénérés i.e. où  $p_{2i}^{n+1}, p_{2i+1}^{n+1}$  et  $p_{2i+2}^{n+1}$  sont colinéaires. Lorsque nous stockons les valeurs des détails lors de l'analyse, nous ne pouvons pas retrouver les longueurs correctes  $l_{2i}^{n+1}, l_{2i+1}^{n+1}$  au moment de la synthèse car ces valeurs

reportées dans les formules précédentes (3) provoquent une division par 0. Ainsi à l'apparition d'un de ces cas, nous procédons de la manière suivante :  $\beta_i$  est assigné à une valeur spécifique au cas rencontré. Cette valeur nous permettra de savoir quel traitement appliquer lors de la synthèse, et nous assignons à  $\alpha_i$  le rapport des longueurs caractéristiques du triangle plat. Ainsi la reconstruction peut être effectuée sans les aberrations numériques mentionnées précédemment.

## 3. Morphing multirésolution

En entrée, nous avons deux polygones  $P_S$  et  $P_T$  avec le même nombre de points de contrôle, appelés polygones source et destination. Nous cherchons à construire les polygones intermédiaires  $P_t$  qui transforment graduellement  $P_S$  en  $P_T$ , pour  $t \in [0, 1]$ , où  $P_S = P_0$  et  $P_T = P_1$ . Il existe de nombreux interpolants possibles pour  $P_t$  et il est particulièrement difficile de caractériser mathématiquement de "bons" algorithmes de *morphing*, puisque le jugement dépend à la fois du domaine d'application et de la perception humaine de la géométrie.

La méthode la plus triviale consiste à interpoler le long d'un segment entre les positions des points couplés. Cette interpolation des sommets est connue pour modifier de manière inconsistante de nombreuses propriétés géométriques, telles que les longueurs, les angles et l'aire au cours du *morphing*. Sederberg et al. [SGWM93] ont présenté une méthode améliorée d'interpolation. Au lieu d'interpoler les positions des points, l'algorithme interpole des entités d'une définition intrinsèque du polygone : les angles et les longueurs des arêtes. Une telle représentation des polygones est invariante par mouvement rigide. Il en résulte que le *morphing* de deux caractéristiques se comporte naturellement. Il s'avère aussi que les proportions de toutes les caractéristiques géométriques sont préservées.

Le travail de Lipman et al. [LSLCO05] peut être vu comme une sorte de généralisation de la technique d'interpolation 2D de Sederberg à l'interpolation de maillages 3D. Ils introduisent une représentation des surfaces invariante par mouvement rigide basée sur les formes fondamentales discrètes intrinsèques, et proposent d'interpoler les coefficients de ces formes.

L'approche d'interpolation entre des entités intrinsèques a aussi été employée par Surazshky et Gotsman [SG03]. Ils calculent d'abord des triangulations compatibles des polygones source et destination puis ils interpolent la valeur moyenne des coordonnées barycentriques des triangles en utilisant une description par longueurs et angles. L'intérêt d'appliquer le *morphing* à des triangulations compatibles est qu'en général, les auto-intersections peuvent être évitées. Cependant, le calcul de triangulations compatibles ainsi que de représentations alternatives de l'intérieur des polygones [SR95] est généralement difficile et coûteux.

L'algorithme que nous présentons dans cette partie fait

partie de la classe des algorithmes basés sur des représentations intrinsèques du contour. Les polygones en entrée sont représentés par la représentation multirésolution intrinsèque que nous avons introduite dans la Partie 2. La nature multirésolution de cette représentation a l'avantage de générer les polygones intermédiaires directement à tous les niveaux de détails sans avoir à en calculer une représentation MR. Voici les caractéristiques de notre algorithme intrinsèque MR qui le rendent particulièrement approprié pour le *morphing* :

- L'orientation des détails suit la déformation naturellement.
- La représentation MR est définie intrinsèquement.
- Les formes intermédiaires interpolent les polygones source et destination de façon "aussi-rigide-que-possible" comme dans [ACOL00].
- Les formes intermédiaires peuvent être visualisées à tous les niveaux de résolution grâce au *morphing* MR qui calcule séparément l'interpolation des coefficients grossiers et de détails.
- Dans le cas de courbes fermées, nous n'avons pas le problème de non-fermeture que présente la méthode de Sederberg [SGWM93].

### 3.1. Algorithme

Une fois la représentation MR de  $P_S$  et  $P_T$  calculée, nous disposons de deux ensembles de coefficients grossiers  $(\theta_S^0, \mathbf{l}_S^0)$ ,  $(\theta_T^0, \mathbf{l}_T^0)$  et de deux ensembles de coefficients de détails  $(\alpha_S^0, \beta_S^0), \dots, (\alpha_S^n, \beta_S^n)$ , et  $(\alpha_T^0, \beta_T^0), \dots, (\alpha_T^n, \beta_T^n)$ . En principe, les formes intermédiaires sont maintenant générées en interpolant les coefficients de cette représentation intrinsèque. Cependant, nous devons faire particulièrement attention aux coefficients du polygone grossier. Interpoler les coordonnées  $(\theta, \mathbf{l})$  du polygone grossier reviendrait à appliquer l'algorithme de Sederberg [SGWM93] au polygone grossier. Dans ce cas, nous hériterions du problème de non-fermeture des polygones intermédiaires dans les cas où  $P_S$  et  $P_T$  sont fermés, ce qui impliquerait des optimisations supplémentaires. Au lieu de cela, nous proposons une solution où ce problème ne se produit pas. Nous devons aussi interpoler les coefficients de détails qui sont des angles. Chaque couple  $(\alpha, \beta)$  représente un des triangles qui sera ajouté au polygone grossier pour l'amener vers le polygone fin. Le choix de la méthode d'interpolation des détails est donc lui aussi déterminant pour obtenir une métamorphose satisfaisante.

**Interpolation "aussi-rigide-que-possible" des coefficients grossiers :** Dans le cas de polygones fermés à  $3 \cdot 2^n$  sommets, les polygones grossiers après  $n$  étapes d'analyse  $P_S^0$  et  $P_T^0$  sont des triangles. Dans ce cas, nous interpolons ces deux triangles avec l'interpolation "aussi-rigide-que-possible" d'Alexa [ACOL00]. La transformation affine  $A$  entre  $P_S^0$  et  $P_T^0$  est décomposée en une matrice de rotation  $R_\gamma$  et une matrice symétrique  $S$  en utilisant la décomposition en

valeurs singulières :  $A = R_\gamma S$ . Les triangles intermédiaires sont ensuite obtenus en interpolant les composantes de cette décomposition :  $A(t) = R_{t\gamma}((1-t)I + tS)$ . Cette interpolation entre deux triangles est dite "aussi-rigide-que-possible" car les angles varient de manière pratiquement linéaire. Dans tous les autres cas, nous pouvons rééchantillonner la courbe pour avoir  $D \cdot 2^n$  points, où  $D$  est le petit nombre de points de contrôle grossiers. Un polygone grossier avec peu de sommets peut facilement être triangulé et interpolé par la méthode d'interpolation d'Alexa, localement de distorsion minimale.

**Interpolation des coefficients de détails :** Les coefficients de détails représentent intrinsèquement les triangles qui sont ajoutés au polygone grossier pour l'amener à un niveau de résolution plus élevé. Chaque couple d'angles  $(\alpha, \beta)$  représente un triangle. Les coefficients de détails intermédiaires de niveau  $j$  sont obtenus par interpolation linéaire :

$$\begin{aligned}\alpha_t^j &= (1-t)\alpha_S^j + t\alpha_T^j, \\ \beta_t^j &= (1-t)\beta_S^j + t\beta_T^j,\end{aligned}\tag{5}$$

pour  $0 \leq j \leq n$  et  $t \in [0, 1]$ .

L'interpolation peut générer des cas particuliers, correspondant à des triangles dégénérés. Nous procédons alors comme décrit dans la Partie 2.3 pour permettre la reconstruction au moment de la synthèse.

Les formes intermédiaires sont les déformations "aussi-rigides-que-possible" des formes source et destination. En effet, la reconstruction de toutes les métamorphoses intermédiaires se fait par l'ajout de triangles aux polygones de plus basse résolution à chaque niveau de résolution. De plus, ces triangles sont obtenus en interpolant linéairement les angles, voir l'équation 5. Notre méthode peut donc être considérée comme un *morphing* "aussi-rigide-que-possible" de courbes multirésolutions, selon la définition donnée par Alexa.

Une autre intérêt de notre méthode est que nous obtenons la représentation MR complète de toutes les courbes intermédiaires ce qui nous permet de les visualiser à différents niveaux de résolution.

### 3.2. Résultats et discussion

Contrairement à la plupart des algorithmes de *morphing* existants, notre méthode est conçue pour les polygones de très grande taille avec beaucoup de détails locaux. Cependant, elle peut aussi bien traiter tous les autres polygones simples et lisses. Par conséquent nous avons seulement choisi des exemples comportant de nombreux détails fins, qui sont difficiles à métamorphoser. La plupart d'entre eux ont été produits en extrayant le contour d'une image.

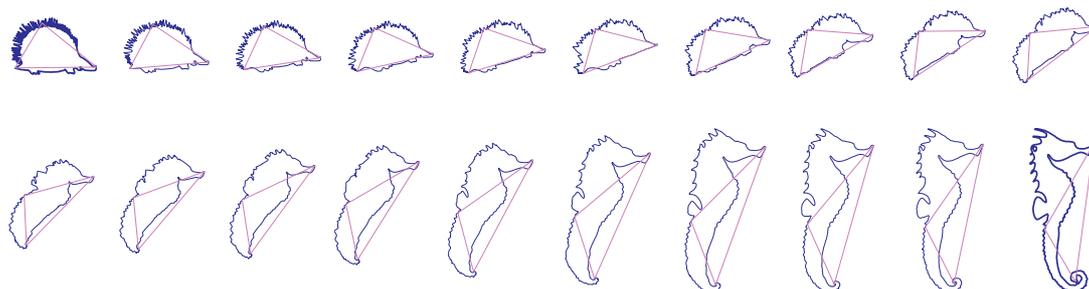


Figure 4: Hérisson - Hippocampe (1536 points)

### Correspondance des points

La correspondance des points influence la qualité du *morphing*, mais comme nous l'avons précisé en introduction, c'est un problème à part entière que nous ne prétendons pas traiter ici. Nous décrivons néanmoins la méthode que nous utilisons pour créer nos exemples.

Pour le couplage des sommets, nous définissons manuellement un point de départ pour le polygone source et destination. Tous les sommets restants correspondent alors automatiquement par leurs indices. Afin d'éviter des auto-intersections des *morphings*, les sommets doivent être orientés dans le même sens, dans le sens trigonométrique par exemple. De plus, les sommets de départ doivent soit correspondre à un caractère particulier des courbes, soit se correspondre géographiquement, par exemple être les sommets d'abscisses minimales. Dans la Figure 4 nous choisissons le nez des animaux comme point de départ.

Le choix de plus d'un sommet à coupler est possible avec notre méthode en sélectionnant les sommets du polygone grossier de la façon suivante. Ceci donne un contrôle supplémentaire à l'utilisateur. Avant d'effectuer le *morphing* entre le polygone source et destination, une analyse multirésolution est exécutée selon les algorithmes décrits dans la Section 3.1. Puisque l'analyse MR est basée sur le sous-échantillonnage, les sommets du polygone grossier sont aussi des sommets du polygone fin et sont séparés par  $2^n - 1$  sommets. Ces relations particulières entre les polygones fins et grossiers peuvent maintenant être utilisées pour fixer manuellement tous les sommets des courbes source et destination grossières en tant que points de couplage pour le *morphing*. Une fois que l'utilisateur a manuellement choisi trois ou quatre indices de sommets destinés à construire le polygone grossier, les polygones fins sont rééchantillonnés de sorte qu'une puissance de deux du nombre de sommets se trouve entre eux. C'est ainsi que nous procédons pour les Figures 4, 7. Pour les autres Figures 5 et 6, nous avons simplement fixé le sommet d'abscisse minimale comme point de départ.

### Représentation multirésolution de toutes les courbes

L'algorithme de *morphing* interpole les représentations intrinsèques du polygone grossier et les coefficients de détails. Nous obtenons donc en sortie une représentation multirésolution complète de chaque courbe intermédiaire. Ainsi, toutes les manipulations des niveaux de détails comme l'affichage, la compression, l'édition, ... peuvent être appliquées directement aux métamorphoses sans aucun calcul supplémentaire.

La Figure 5 montre sur la première ligne le *morphing* MR entre les cartes de France et d'Allemagne ainsi que les *morphings* des polygones grossiers. Les courbes de résolution complète (8192 sommets) sont obtenues par une synthèse complète (Partie 2.2). Les quatre autres lignes correspondent aux métamorphoses de résolutions inférieures obtenues par une synthèse partielle.

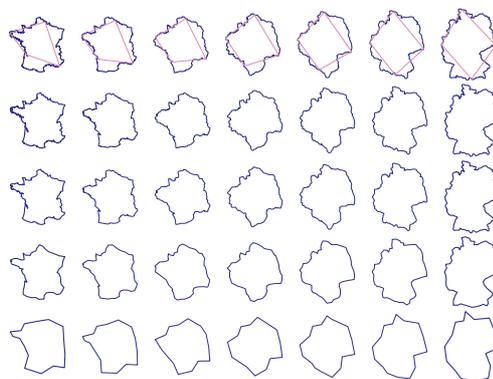


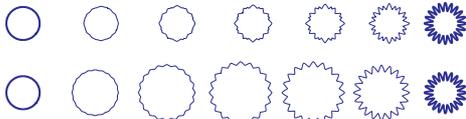
Figure 5: France - Allemagne (8192 points) à 5 niveaux de résolution  $n=13$  (niveau le plus fin), 10, 8, 6, 4

L'utilisateur peut en fait contrôler deux paramètres de l'interpolation. Il peut choisir d'interpoler une représentation plus ou moins grossière des polygones (voir Figure 9). Notons que plus les polygones grossiers ont de sommets, plus

leur interpolation sera coûteuse. Il peut aussi choisir une synthèse complète ou partielle pour visualiser les formes intermédiaires.

### Morphing MR aussi-rigide-que-possible

Nous avons pu observer dans tous nos tests que les métamorphoses ont un comportement naturel et que les transformations sont de distorsion minimale. En effet, la manière dont nous interpolons les polygones grossiers et les coefficients de détails rend notre méthode d'interpolation de formes "aussi-rigide-que-possible". Pour l'interpolation des polygones grossiers, nous utilisons la méthode de Alexa [ACOL00] qui calcule l'interpolation de distorsion minimale par optimisation. Cette méthode exige généralement le calcul de triangulations compatibles pour les objets source et destination. Cette étape parfois difficile et coûteuse est omise dans notre cas, puisque les polygones grossiers sont tout à fait triviaux (ils se composent de 1-3 triangles maximum). En outre, les détails sont transformés en interpolant linéairement leurs représentations intrinsèques. Ici aussi, l'interpolation est de distorsion minimale, puisque les angles varient linéairement. En résumé, notre méthode de *morphing* MR se comporte de façon "aussi-rigide-que-possible". Toutes les figures témoignent de cette importante propriété. En particulier, une comparaison entre le *morphing* MR et le *morphing* intrinsèque classique [SGWM93] représentée sur la Figure 6 soutient clairement notre affirmation.

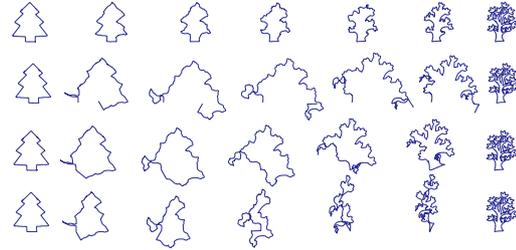


**Figure 6:** Comparaison *morphing* MR (ligne du haut) - *morphing* intrinsèque sans MR (513 points) (ligne du bas)

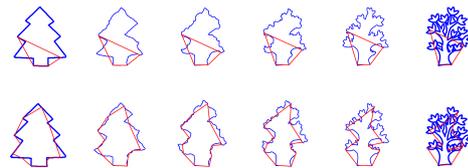
### Une exemple délicat

Bien que la méthode n'empêche pas explicitement les auto-intersections, il est néanmoins rare d'en observer. En effet, la manière dont nous interpolons les polygones grossiers garantit des transformations sans auto-intersection, mais seulement pour les polygones grossiers. Cependant, pour tester la robustesse de notre méthode sur cet aspect, nous employons un exemple très délicat représenté sur la Figure 7. Aucune auto-intersection ne se produit, contrairement à un *morphing* intrinsèque sans multirésolution, voir la Figure 8. Un autre problème du *morphing* intrinsèque est la non-fermeture des polygones intermédiaires. Dans [SGWM93], il a été énoncé que les polygones intermédiaires sont toujours proches. Ceci pourrait être vrai pour des *morphings* entre des formes similaires, comme illustré dans [SGWM93]. Mais dans les cas où les formes sont très

différentes et compliquées avec beaucoup de détails, la non-fermeture est un réel problème puisque de grandes parties des métamorphoses doivent être corrigées, voir la Figure 8. Notre méthode ne présente pas ce problème, puisque les polygones au niveau le plus grossier sont interpolés en utilisant une décomposition en triangles selon [ACOL00].



**Figure 8:** Comparaison de 4 méthodes de *morphing* intrinsèque. Première ligne : *morphing* MR. Deuxième ligne : *morphing* intrinsèque des coordonnées  $(\theta, l)$  des polygones. Les polygones des deux dernières lignes sont obtenus en fermant les polygones de la ligne deux de deux façons différentes. Troisième ligne : fermeture affine. Quatrième ligne : 'mise au point des arêtes' selon [SGWM93].

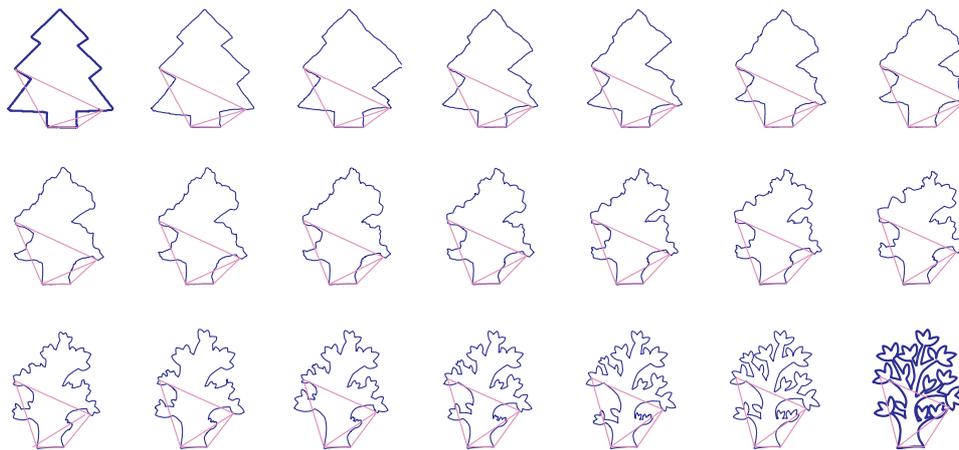


**Figure 9:** Comparaison du *morphing* MR avec un polygone grossier à 4 et 16 sommets respectivement (polygones de 2048 points).

## 4. Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle représentation multirésolution de formes polygonales, basée sur les angles et longueurs. Combinée à l'interpolation "aussi rigide que possible" de Alexa et al. [ACOL00], cette représentation est utilisée pour définir une nouvelle méthode de *morphing*.

L'intérêt d'une représentation intrinsèque, telle que celle que nous décrivons, est que l'orientation des détails suit naturellement n'importe quelle déformation. Puisque nous interpolons les représentations multirésolutions des courbes, nous obtenons sans calcul supplémentaire la représentation MR de toutes les courbes intermédiaires. Nous interpolons les polygones grossiers de façon aussi rigide que possible, et les angles de détails sont interpolés linéairement. Notre méthode a donc un comportement globalement aussi rigide que possible. Dans le cas de polygones fermés, contrairement à la méthode de Sederberg, notre méthode ne rencontre pas le problème de non fermeture des formes intermédiaires. Comme toutes les méthodes de *morphing* interpolant les contours des formes et non une représentation de



**Figure 7:** Sapin de Noël - Arbre à fleurs (2048 points)

l'intérieur des formes, notre méthode ne peut pas garantir l'absence d'auto intersections. Cependant, nous montrons au travers de nombreux exemples qu'il est possible de les éviter en pratique.

Nous travaillons actuellement sur la généralisation de cette méthode aux maillages 3D.

#### Remerciements

Ces travaux ont été financés en partie grâce au soutien du Réseau d'Excellence Européen AIM@SHAPE (IST NoE No 506766) <http://www.aimatshape.net>. Merci à Nicolas Szafran pour avoir créé des exemples en extrayant des contours d'images.

#### Références

- [ACOL00] ALEXA M., COHEN-OR D., LEVIN D. : As-rigid-as-possible shape interpolation. In *SIGGRAPH '00 : Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques* (New York, NY, USA, 2000), ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 157–164.
- [Ada75] ADAMS J. A. : The intrinsic method for curve definition. *Computer Aided Design*. Vol. 7, Num. 4 (1975), 243–249.
- [Ale02] ALEXA M. : Recent advances in mesh morphing. *Comput. Graph. Forum*. Vol. 21, Num. 2 (2002), 173–196.
- [Ber05] BERTRAM M. : Single-knot wavelets for non-uniform b-splines. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 22, Num. 9 (2005), 848–864.
- [Car76] CARMO M. D. : *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [CQ92] CHUI C., QUAK E. : Wavelets on a bounded interval. In *Numerical Methods of Approximation Theory*, Braess D., Schumaker L., (Eds.). Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, pp. 1–24.
- [EG95] ELBER G., GOTSMAN C. : Multiresolution control for nonuniform bspline curve editing. In *The Third Pacific Graphics Conference on Computer Graphics and Applications, Seoul, Korea* ([August 1995]), pp. 267–278.
- [FG99] FLOATER M. S., GOTSMAN C. : How to morph tilings injectively. *J. Comput. Appl. Math.*. Vol. 101, Num. 1-2 (1999), 117–129.
- [FS94] FINKELSTEIN A., SALESIN D. H. : Multiresolution curves. *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 94)* (1994), 261–268.
- [GG95] GOLDSTEIN E., GOTSMAN C. : Polygon morphing using a multiresolution representation. In *Graphics Interface '95* (1995), Canadian Inf. Process. Soc., pp. 247–254.
- [HBS05] HAHMANN S., BONNEAU G.-P., SAUVAGE B. : Area preserving deformation of multiresolution curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 22, Num. 4 (2005), 249–267.
- [LDSS99] LEE A. W. F., DOBKIN D., SWELDENS W., SCHRÖDER P. : Multiresolution mesh morphing. *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 99)* (1999), 343–350.
- [LSLCO05] LIPMAN Y., SORKINE O., LEVIN D., COHEN-OR D. : Linear rotation-invariant coordinates for meshes. *ACM Trans. Graph.*. Vol. 24, Num. 3 (2005), 479–487.
- [Mal89] MALLAT S. : A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 11 (1989), 674–693.

- [Mey94] MEYERS D. : Multiresolution tiling. *Computer Graphics Forum. Vol. 13*, Num. 5 (1994), 325–340.
- [SDS96] STOLLNITZ E., DEROSE T., SALESIN D. : *Wavelets for Computer Graphics : Theory and Applications*. Morgan-Kaufmann, 1996.
- [SG92] SEDERBERG T. W., GREENWOOD E. : A physical based approach to 2-d shape bending. *Computer Graphics,(SIGGRAPH 92 Proceedings). Vol. 26*, Num. 2 (1992), 25–34.
- [SG03] SURAZHISKY V., GOTSMAN C. : Intrinsic morphing of compatible triangulations. *International Journal of Shape Modeling. Vol. 9*, Num. 2 (2003), 191–201.
- [SGWM93] SEDERBERG T., GAO P., WANG G., MU H. : 2-d shape blending : An intrinsic solution to the vertex path problem. *Computer Graphics,(SIGGRAPH 93 Proceedings). Vol. 27* (1993), 15–18.
- [SR95] SHAPIRA M., RAPPOPORT A. : Shape blending using the star-skeleton representation. *IEEE Comput. Graph. Appl. Vol. 15*, Num. 2 (1995), 44–50.
- [Swe97] SWELDENS W. : The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM J. Math. Anal. Vol. 29*, Num. 2 (1997), 511–546.