

# Construction de triangles rectangles 3D à bords circulaires passant par trois points donnés

L. GARNIER, B. BELBIS, S. FOUFOU

LE2I, FRE CNRS 2309  
UFR Sciences, Université de Bourgogne, BP 47870,  
21078 Dijon Cedex, France  
<lgarnier,bbelbis,sfoufou>@u-bourgogne.fr

---

## Résumé

Les Cyclides de Dupin ont été introduites en 1822 par le Mathématicien français Charles Dupin. Ce sont des surfaces algébriques non sphériques de degré 4 dont les lignes de courbure sont des cercles. Elles sont intéressantes pour la modélisation géométrique puisqu'elles possèdent une équation paramétrique et deux équations implicites. Une cyclide de Dupin peut être obtenue comme l'image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution par une inversion. Un tore de révolution possède, par construction, deux familles de cercles : les méridiens et les parallèles. Sur un tore à collier, il existe une troisième famille de cercles : les cercles de Villarceau. Une inversion transformant un cercle en un cercle ou en une droite, le but de cet article est de construire, à partir de trois points de l'espace, un triangle non plan à bords circulaires sur un tore, chaque bord appartenant à l'une des trois familles de cercles précitées. En prenant différentes images de ce triangle par des inversions adéquates, nous pouvons obtenir des triangles 3D à bords circulaires sur des cyclides de Dupin en anneau. A terme, nous comptons utiliser les triangles 3D, en remplacement des triangles plans, pour la modélisation de formes 3D à partir de nuages de points.

Dupin cyclides are non-spherical algebraic surfaces of degree 4, discovered by the French mathematician Pierre-Charles Dupin at the beginning of the 19th century. A Dupin cyclide has a parametric equation and two implicit equations and circular lines of curvature. It can be defined as the image of a torus, a cone of revolution or a cylinder of revolution by an inversion. A torus has two families of circles : meridians and parallels. There is a third family of circles on a ring torus : Villarceau circles. As the image, by an inversion, of a circle is a circle or a straight line, the goal of this paper is to construct, on a ring torus, non-plane triangles with circular edges, each edge is a circular arc from the three families mentioned above. By an inversion, the image of this triangle is a non-plane triangle belonging to a ring Dupin cyclide.

---

**Mots clé :** cyclide de Dupin, cercle de Villarceau, tore de révolution, triangle 3D à bords circulaires

## 1. Introduction

La représentation d'un objet complexe est souvent réalisée en utilisant des maillages constitués de triangles inclus dans un plan. Cette méthode présente l'avantage d'offrir beaucoup de liberté dans l'aspect des objets. Cependant, ce type de représentation présente plusieurs inconvénients :

taille souvent très importante, duplication des informations topologiques, manipulation et édition lourde. Par exemple, si l'on déplace un point d'un objet, les coordonnées des points voisins doivent être recalculées. La visualisation est coûteuse en temps de calculs si l'on veut que l'objet soit dessiné avec beaucoup de détails, ce qui est nécessaire si la caméra est proche de l'objet. Dans le cas contraire, ces détails ne sont pas utiles et ralentissent l'animation. Il faut alors développer et/ou employer des algorithmes permettant de passer d'un niveau de raffinement à un autre. Ces algorithmes demandent énormément de temps de calculs. De plus, l'objet est mal connu, puisque approximé et le très grand nombre

de triangles rend coûteux les calculs (lancers de rayons, intersections...).

Afin de diminuer le nombre d'informations topologiques, il peut être pertinent de regrouper ces triangles plans dans des morceaux de surfaces. C'est pourquoi il serait très intéressant d'avoir un objet constitué de triangles 3D possédant une équation paramétrique et une équation implicite algébrique de degré le moins élevé possible, en particulier inférieur ou égal à 4. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur les cyclides de Dupin. Le triangle 3D permet de mieux approcher, du point de vue de la modélisation, un morceau de surface. Evidemment, lors de l'affichage de la scène, le triangle 3D est discrétisé et est affiché en utilisant des triangles plans : sur un même triangle 3D, il suffit de changer les intervalles de visualisation pour changer la résolution d'affichage. Aucun algorithme et aucune information topologique ne sont nécessaires sur un triangle 3D donné. Notons que pour un rendu par lancer de rayons, les calculs d'intersection entre un triangle 3D et une droite, même s'il faut résoudre une équation algébrique de degré 4, sont plus simples que les calculs entre une famille de triangles plans et une droite. En effet la solution est plus proche de la vraie surface et les calculs peuvent être plus rapides : dans le cas où seulement des triangles plans sont utilisés, leur nombre est plus important et il faut enfermer chacun de ces triangles plans dans trois demi-espaces. De plus, pour construire un objet avec des triangles 3D, nous n'avons besoin d'informations topologiques qu'au niveau du recollement de ces triangles ce qui est moins coûteux que l'emploi de triangles plans par le simple fait que leur nombre est beaucoup plus petit.

Pour mener à bien ce travail sur les triangles 3D, nous utilisons des tores à collier et des cyclides de Dupin en anneau. En effet, les tores de révolution sont des surfaces pouvant être définies par le produit cartésien de deux cercles et sont des surfaces algébriques de degré 4 [LFA91] dont les lignes de courbure sont composées de deux familles de cercles appelés méridiens et parallèles. Sur un tore à collier, Y. Villarceau a défini une troisième famille de cercles, appelés cercles de Villarceau : ces cercles sont les sections d'un tore par un plan tangent en exactement deux points du tore [BGL01]. Il est aussi possible de définir ces cercles comme intersections de sphères et du tore [Gar07]. En prenant un arc de cercle dans chaque famille, il est ainsi possible de construire un triangle 3D sur un tore à collier. Ce triangle est même rectangle puisque deux de ses côtés sont sur des lignes de courbure du tore.

Quant à elles, les cyclides de Dupin, introduites en 1822 par P. Ch. Dupin [Dup22], sont des surfaces non sphériques ayant des lignes de courbure circulaires, pouvant être représentées à la fois par des équations paramétriques et des équations implicites [For12, Gar07, Pra90]. Il est possible de générer une cyclide de Dupin comme l'image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution par une inversion [Gar07]. L'image d'un cercle ou

d'une droite par cette transformation non affine est un cercle ou une droite [Bia04, Lad02, Gar07]. En choisissant une inversion adéquate, le triangle 3D sur le tore à collier donne un triangle 3D sur la cyclide de Dupin en anneau, image du tore à collier par l'inversion précitée.

Le but de cet article est la construction, dans un premier temps, d'un triangle non plan à bords circulaires sur un tore à collier, puis d'un triangle non plan sur une cyclide de Dupin en anneau, obtenu par inversion du triangle précédent. Pour ce faire, nous utiliserons les trois familles de cercles, les parallèles, les méridiens et les cercles de Villarceau, définis sur un tore à collier et sur une cyclide de Dupin en anneau [Gar08]. Bien que d'autres auteurs aient déjà travaillé sur la modélisation de triangles sur une cyclide de Dupin quartique [AD96], à notre connaissance, c'est la première utilisation de cette troisième famille de cercles comme bords de triangles. Notons que chaque triangle construit est un triangle rectangle puisque deux de ses bords sont des cercles de courbure de la surface sur laquelle il repose.

Dans la suite de cet article, nous présentons des rappels concernant les surfaces de révolution, les tores, l'inversion et les cyclides de Dupin quartiques. Puis nous détaillerons deux algorithmes proposés pour la construction de triangles 3D à bords circulaires sur un tore à collier et sur une cyclide de Dupin en anneau. Ces algorithmes sont illustrés à travers quelques exemples et une comparaison entre l'emploi d'un triangle 3D et l'emploi de triangles plans est proposée. Enfin, la conclusion et les perspectives d'évolution de ce travail feront l'objet de la dernière section.

## 2. Rappels

Dans tout cet article, nous nous plaçons, sauf mention contraire, dans l'espace affine euclidien usuel  $\mathcal{E}_3$  muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

### 2.1. Surfaces de révolution

Une surface  $S$  est une surface de révolution si et seulement si l'on peut trouver une droite  $\Delta$  telle que, pour tout nombre  $\alpha$ , nous ayons  $S = \mathcal{R}_{\Delta, \alpha}(S)$  où  $\mathcal{R}_{\Delta, \alpha}$  est la rotation d'axe  $\Delta$  et d'angle  $\alpha$ . Si  $\{(f(\theta); z(\theta)), \theta \in I\}$  représente une courbe  $\gamma$ , alors :

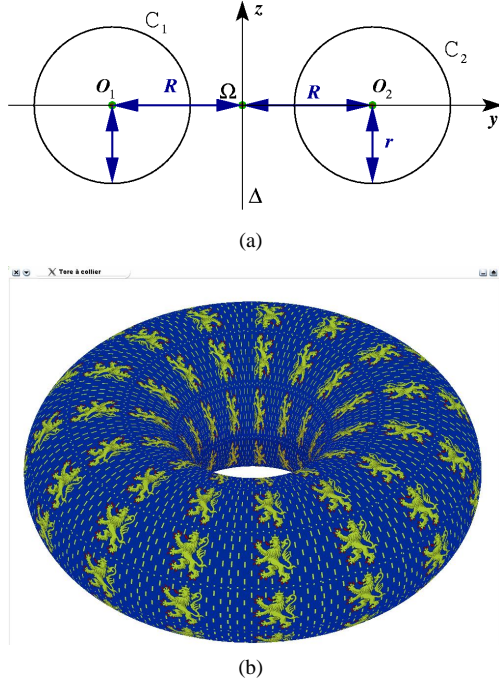
$$S = \left\{ \left( \begin{array}{c} f(\theta) \cos(\psi) \\ f(\theta) \sin(\psi) \\ z(\theta) \end{array} \right), (\psi; \theta) \in [0; 2\pi] \times I \right\} \quad (1)$$

représente une surface de révolution, obtenue par rotation d'axe  $(O, \vec{k})$  de la courbe  $\gamma$ . L'intersection de la surface obtenue par un plan contenant l'axe de rotation est **appelée méridienne**. Notons que les autres méridiennes sont les images de la courbe  $\gamma$  par une rotation d'axe  $\Delta$ .

## 2.2. Le tore

### 2.2.1. Définition et équations

La méridienne engendrant un tore de révolution, figure 1, est l'union de deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$  et de rayon  $r$ . L'axe  $\Delta$  de la rotation, contenu dans le plan engendré par la méridienne, est la médiatrice du segment  $[O_1O_2]$ . Dans ce plan,  $\Omega$  désigne le point d'intersection de  $\Delta$  avec le segment  $[O_1O_2]$ . Ces deux droites sont des axes du repère de ce plan. Soit  $R = \Omega O_1$ . Les nombres  $r$  et  $R$  sont appelés respectivement rayon mineur et rayon majeur du tore.



**Figure 1:** Surface de révolution algébrique : le tore. (a) : une méridienne  $C_1 \cup C_2$ . (b) : rendu 3D.

En prenant une paramétrisation classique du cercle  $C_2$ , figure 1, nous avons  $y(\theta) = R + r \cos \theta$  et  $z(\theta) = r \sin \theta$ , ce qui conduit à l'équation paramétrique suivante du tore :

$$\Gamma_T(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \psi \\ (R + r \cos \theta) \sin \psi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $\theta \in [0; 2\pi]$ ,  $\psi \in [0; 2\pi]$ . Une équation implicite algébrique de ce tore [LFA91] est :

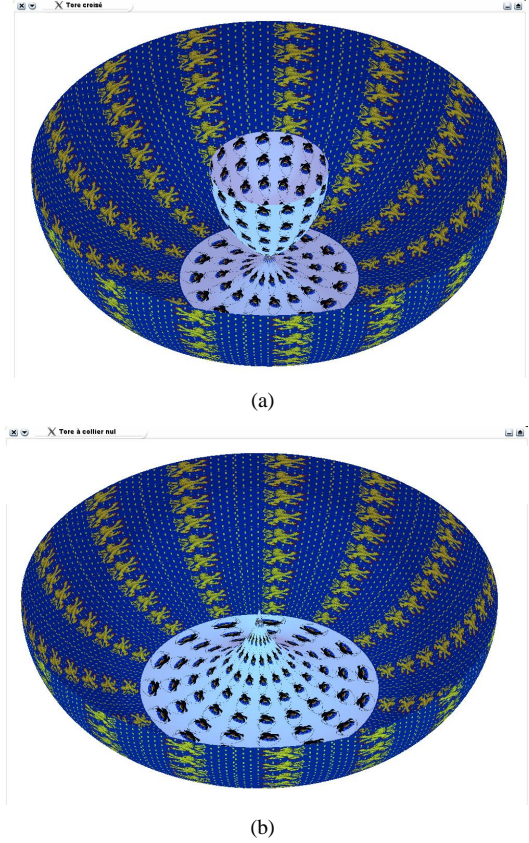
$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0 \quad (3)$$

Nous pouvons distinguer trois types de tores [BGL01] :

- Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  ne s'intersectent pas, nous avons  $R > r$ , le tore est dit à collier, figure 1(b) ;

- Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  sont sécants en deux points, nous avons  $R < r$ , le tore est dit croisé, figure 2(a) ;
- Si les cercles  $C_1$  et  $C_2$  sont tangents, nous avons  $R = r$ , le tore est dit à collier nul, figure 2(b).

Pour augmenter la visibilité des figures 2(a) et 2(b), nous n'avons affiché qu'un demi tore et avons changé de texture : les points singuliers du tore sont dans la texture claire.



**Figure 2:** Deux types de tores dégénérés. (a) : un demi tore croisé. (b) : un demi tore à collier nul.

Un tore à collier admet une autre équation implicite non algébrique [BGL01] :

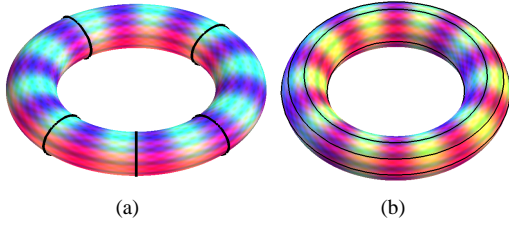
$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

qui sert à la détermination des centres de sphères définissant les cercles de Villarceau.

### 2.2.2. Cercles de Villarceau sur un tore à collier

Hormis les cercles obtenus avec l'un des paramètres constants qui sont les cercles méridiens pour  $\psi$  constant, figure 3(a) et les cercles parallèles pour  $\theta$  constant, figure 3(b), il existe un et un seul autre type de cercles sur un tore à collier : les cercles de Villarceau (1813-1889) [BGL01]. Un

cercle de Villarceau est la section du tore par un plan tangent au tore en exactement deux points.



**Figure 3:** Cercles de courbure sur un tore. (a) : les méridiens où  $\psi$  est constant. (b) : les parallèles où  $\theta$  est constant.

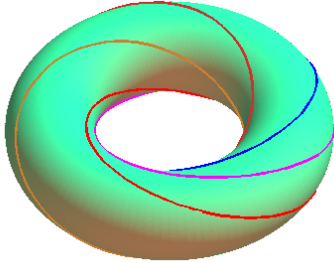
Il est possible, dans un premier temps, de déterminer deux cercles de Villarceau, les autres s'en déduisent par rotation autour de l'axe de révolution du tore, en considérant le plan  $\mathcal{P}$ , tangent au tore à collier en exactement deux points, d'équation :

$$rx + \sqrt{R^2 - r^2} z = 0$$

Après quelques calculs [Gar08], nous obtenons les équations paramétriques des cercles de Villarceau  $t \mapsto \gamma_T(t)$  où l'expression de  $\gamma_T(t)$  est :

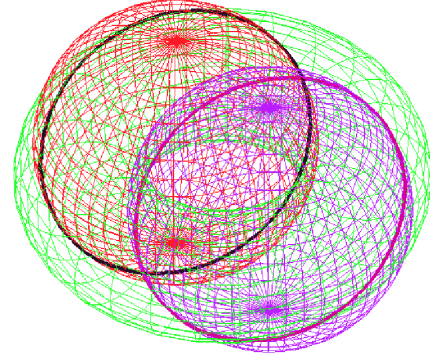
$$\begin{pmatrix} \sqrt{R^2 - r^2} \sin(t) \cos(\theta_0) - (r + R \cos(t)) \sin(\theta_0) \\ \varepsilon \left( \sqrt{R^2 - r^2} \sin(t) \sin(\theta_0) + (r + R \cos(t)) \cos(\theta_0) \right) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

où  $\theta_0$  est un nombre fixé et  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ , figure 4.



**Figure 4:** Cercles de Villarceau sur un tore à collier.

Il est aussi possible de déterminer ces deux cercles en utilisant des sphères, que nous nommons **sphères de Villarceau**, : à partir de l'équation (4), nous pouvons montrer que l'un (resp. l'autre) de ces deux cercles est l'intersection du tore avec la sphère de centre ayant pour coordonnées  $(0, r, 0)$  (resp.  $(0, -r, 0)$ ) et de rayon  $R$ , figure 5. Nous utiliserons l'une de ces sphères dans l'algorithme 1.



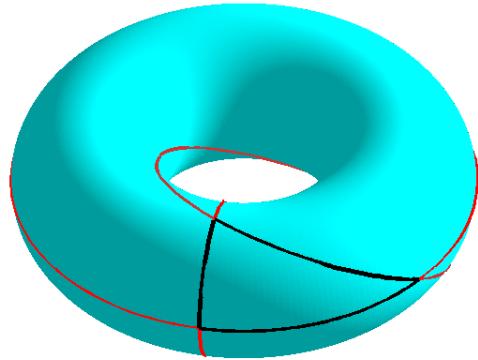
**Figure 5:** Deux cercles de Villarceau sur un tore à collier obtenus comme intersections du tore et de deux sphères.

A partir de la formule (5), il est facile de montrer que :

$$O_{\varepsilon, \theta_0} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta_0) \\ \varepsilon r \cos(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

est le centre du cercle de Villarceau  $C_{\varepsilon, \theta_0}$  et que le rayon de ce cercle est  $R$ . Le lecteur intéressé par des détails concernant les cercles de Villarceau peut se reporter à [Gar07, Gar08].

Nous pouvons alors, en prenant un cercle de chaque famille, obtenir un triangle 3D à bords circulaires sur un tore, figure 6. De plus, le fait d'utiliser deux cercles de courbure, un parallèle et un méridien, implique que le triangle est rectangle. Les arcs de cercles délimitant le triangle 3D sont en noir tandis que les complémentaires des arcs de cercles de courbure sont en rouge et le complémentaire de l'arc de Villarceau est en orange.



**Figure 6:** Triangle rectangle 3D à bords circulaires, sur un tore, dont les bords sont un arc de méridien, un arc de parallèle et un arc de cercle de Villarceau.

### 2.3. Inversion

Une inversion  $i_{\Omega_0, k}$  d'un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ , de pôle  $\Omega_0$  et de rapport  $k$  non nul est une transformation de  $\mathcal{E} - \{\Omega_0\}$  dans  $\mathcal{E} - \{\Omega_0\}$  qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'} = \frac{k}{\overrightarrow{\Omega_0 M}^2} \overrightarrow{\Omega_0 M} \quad (7)$$

Notons que le point  $M'$  est l'unique point de la droite  $(\Omega_0 M)$  vérifiant la relation :

$$\overrightarrow{\Omega_0 M'} \cdot \overrightarrow{\Omega_0 M} = k \quad (8)$$

D'après la formule (8) et la symétrie du produit scalaire, il est évident qu'une inversion  $i_{\Omega_0, k}$  est involutive c'est-à-dire :

$$M' = i_{\Omega_0, k}(M) \iff M = i_{\Omega_0, k}(M')$$

Si  $k$  est positif, l'ensemble des points invariants est la sphère de centre  $\Omega_0$  et de rayon  $\sqrt{k}$ . Dans l'algorithme que nous proposons dans la section 3 pour construire des triangles 3D, c'est cette sphère qui sera construite afin de caractériser l'inversion.

Pour finir ces quelques rappels, notons que l'image, par une inversion, d'un cercle (resp. sphère) est un cercle (resp. sphère) lorsque le centre de l'inversion n'appartient pas à l'ensemble de départ [Gar07]. Le lecteur intéressé par des détails concernant les propriétés de l'inversion peut se reporter à [Lad02, Lad03, Aud06].

### 2.4. Les cyclides de Dupin quartiques

Bien que d'autres définitions des cyclides de Dupin soient possibles [Dup22, Gar07], une cyclide de Dupin quartique peut être définie comme étant l'image d'un tore de révolution, d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution par une inversion.

Cette définition géométrique ne permet pas de manipuler directement ces surfaces puisqu'il faut utiliser une surface initiale et une transformation non affine. Il est possible de déterminer des équations paramétriques et implicites d'une cyclide de Dupin. Ainsi une cyclide de Dupin quartique dépend de trois paramètres (que nous pouvons supposer positifs)  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  avec  $a \geq c$ . Pour des raisons de commodité, nous posons  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Une cyclide de Dupin de degré 4 possède une équation paramétrique dont la nappe paramétrée  $\Gamma_d$ , définie sur  $[0; 2\pi]^2$  à valeur dans  $\mathcal{E}_3$ , a pour expression :

$$\Gamma_d(\theta; \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\mu(c - a \cos \theta \cos \psi) + b^2 \cos \theta}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \theta \times (a - \mu \cos \psi)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \\ \frac{b \sin \psi \times (c \cos \theta - \mu)}{a - c \cos \theta \cos \psi} \end{pmatrix} \quad (9)$$

et deux équations implicites équivalentes :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 + b^2)^2 - 4(ax - c\mu)^2 - 4b^2 y^2 = 0 \quad (10)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - \mu^2 - b^2)^2 - 4(cx - a\mu)^2 + 4b^2 z^2 = 0 \quad (11)$$

résultats obtenus par [For12] et aussi par [Dar17] en explicitant l'enveloppe des sphères définissant une cyclide de Dupin.

En utilisant des notions de géométrie différentielle et des notions topologiques, il est possible de classer les cyclides de Dupin quartiques, en fonction de la surface de révolution utilisée, en cinq types, table 1.

Type de la cyclide de Dupin quartique	Surface de révolution initiale
En anneau	Tore à collier
A croissant externe	Tore croisé ou cône
A croissant interne	Tore croisé ou cône
A croissant externe nul	Tore à collier nul ou cylindre
A croissant interne nul	Tore à collier nul ou cylindre

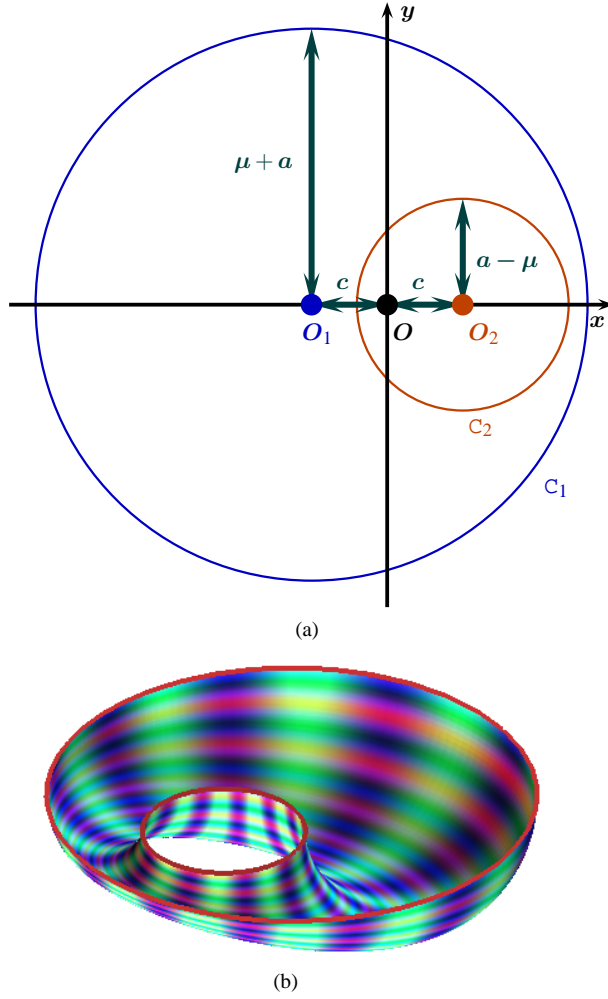
**Table 1:** Les cinq types de cyclides de Dupin quartiques obtenues comme images de surface(s) de révolution par une inversion.

Dans la suite de cet article, nous omettrons le terme quartique. Des exemples de cyclides de Dupin en anneau sont montrés par les figures 8, 9 et 11. La seule façon d'obtenir ce type de cyclide de Dupin est de construire la cyclide de Dupin comme l'image d'un tore à collier par une inversion et nous avons alors  $0 \leq c < \mu < a$ . Concernant les liens entre le type de la cyclide de Dupin et les valeurs des paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ , le lecteur peut se reporter à [Gar07]. A partir des formules (3) et (10), il est évident que si  $c$  est nul, la cyclide de Dupin est un tore de révolution de rayon majeur  $a$  et de rayon mineur  $\mu$ .

A partir des équations implicites (10) et (11), il est trivial qu'une cyclide de Dupin admet les plans  $\mathcal{P}_y : y = 0$  et  $\mathcal{P}_z : z = 0$  comme plans de symétrie. La section d'une cyclide de Dupin par l'un de ces deux plans est l'union de deux cercles appelés cercles principaux. La figure 7 montre les deux cercles principaux d'une cyclide de Dupin en anneau, obtenus en utilisant le plan  $\mathcal{P}_z$ . A partir de ces deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de centres  $O_1$  et  $O_2$  et de rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$ ,  $\rho_2 \leq \rho_1$ , il est possible de déterminer les paramètres de la cyclide de Dupin :

$$c = \frac{O_1 O_2}{2} \quad a = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad \mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \quad (12)$$

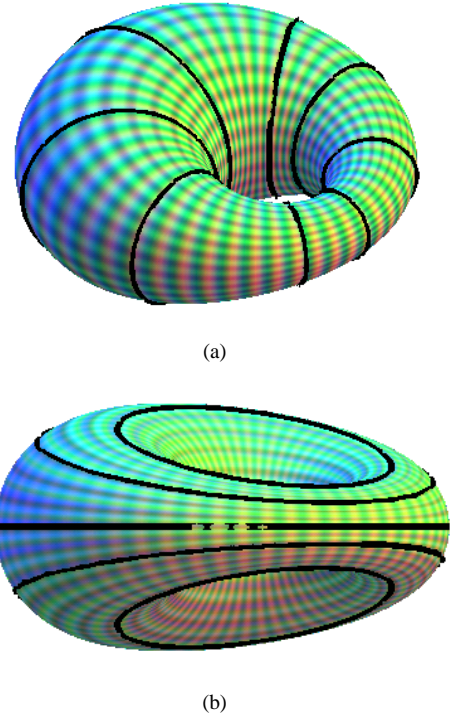
Notons qu'à partir des cercles principaux de la figure 7(a), il est possible de construire deux types de cyclides de Dupin. Nous avons privilégié le type en anneau, mais en intervenant les valeurs de  $a$  et  $\mu$ , nous obtiendrions une cyclide



**Figure 7:** Coupe d'une cyclide de Dupin en anneau par le plan de symétrie  $\mathcal{P}_z$  d'équation  $(z = 0)$ . (a) : les deux cercles principaux. (b) : une demi-cyclide de Dupin de frontière le plan  $\mathcal{P}_z$ .

de Dupin à croissant interne, type qui ne nous intéresse pas dans notre problématique puisqu'il n'existe pas de cercle de Villarceau sur un tore croisé. Ce type de cyclides de Dupin peut être utile lors d'opérations de jointures ce qui fait que la construction des cercles principaux est fondamentale puisqu'ils permettent de déterminer les paramètres de la cyclide de Dupin lorsque nous avons choisi le type de cette dernière.

La figure 8 montre des cercles de courbure sur une cyclide de Dupin obtenus avec l'un des paramètres constant dans la formule (9). De plus, les plans définis par les cercles de courbure obtenus pour  $\theta$  constant (resp.  $\psi$  constant) forment un faisceau et s'intersectent en une droite que l'on nommera  $\Delta_\theta$  (resp.  $\Delta_\psi$ ) (figure 9).



**Figure 8:** Cercles de courbure d'une cyclide de Dupin en anneau (a) : méridiens,  $\theta$  est constant. (b) : parallèles,  $\psi$  est constant.

Pour  $\theta_0$  fixé, les deux cercles de courbure, définis par  $\theta_0$  et  $\theta_0 + \pi$ , se situent dans le plan d'équation :

$$a \sin(\theta_0) x - b \cos(\theta_0) y = \mu c \sin(\theta_0) \quad (13)$$

La droite  $\Delta_\theta$ , intersection des plans d'équations  $(x = \frac{c\mu}{a})$  et  $(y = 0)$ , est commune à tous ces plans (lorsque l'on fait varier  $\theta_0$ ),

Pour  $\psi_0$  fixé, les deux cercles de courbure, définis par  $\psi_0$  et  $\pi - \psi_0$ , se situent dans le plan d'équation :

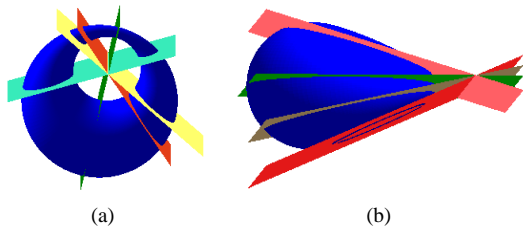
$$c \sin(\psi_0) x - bz = \mu a \sin(\psi_0) \quad (14)$$

La droite  $\Delta_\psi$ , intersection des plans d'équations  $(x = \frac{a\mu}{c})$  et  $(z = 0)$  est commune à tous ces plans (lorsque l'on fait varier  $\psi_0$ ),

Notons que si la cyclide de Dupin est un tore, la droite  $\Delta_\psi$  est rejetée à l'infini car les plans correspondants sont parallèles.

Concernant les autres propriétés des cyclides de Dupin, il est possible de se reporter à [Dar17, Dar66, Dar73, Dup22, Pra90, Gar07, Gar04].

Afin de déterminer les cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin donnée, nous devons construire une inversion



**Figure 9:** Faisceaux de plans définis par les cercles de courbure d'une cyclide de Dupin en anneau (a) : les méridiens avec  $\theta$  constant, l'intersection des plans est la droite  $\Delta_\theta$ . (b) : les parallèles avec  $\psi$  constant, l'intersection des plans est la droite  $\Delta_\psi$ .

telle que l'image de la cyclide de Dupin, par cette inversion, soit un tore un collier. Il existe quatre pôles possibles pour l'inversion, mais seulement deux sont réels et il est alors possible d'obtenir les équations paramétriques des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau [Gar08].

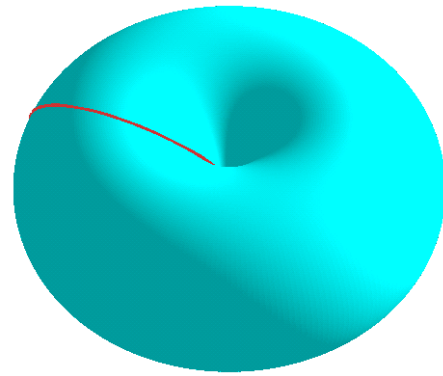
La figure 10 montre un cercle de Villarceau sur le tore et son image, par l'inversion, sur la cyclide de Dupin tandis que la figure 11 montre douze cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau. La vue de la figure 10(c) a été modifiée afin de mieux voir le cercle sur la cyclide de Dupin. Ainsi, comme pour le tore, nous pouvons construire des triangles 3D sur une cyclide de Dupin en anneau, figure 12. Comme dans le cas du tore à collier, ce triangle 3D est rectangle puisque deux de ses bords sont sur des cercles de courbure de la cyclide de Dupin. Les arcs de cercles en rouge sont sur les deux cercles de courbure tandis que l'arc de cercle en bleu est sur le cercle de Villarceau.

### 3. Construction de triangles 3D à bords circulaires

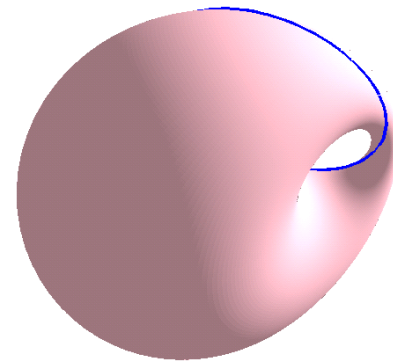
Nous avons vu que nous pouvons construire des triangles 3D à bords circulaires sur un tore à collier ou sur une cyclide de Dupin en anneau. Le but de ce paragraphe est, à partir de trois points donnés de l'espace,  $P_{020}$ ,  $P_{200}$  et  $P_{002}$ , de construire un tore puis une cyclide de Dupin de telle façon que ces trois points soient les sommets d'un triangle 3D sur la surface correspondante.

#### 3.1. Sur un tore

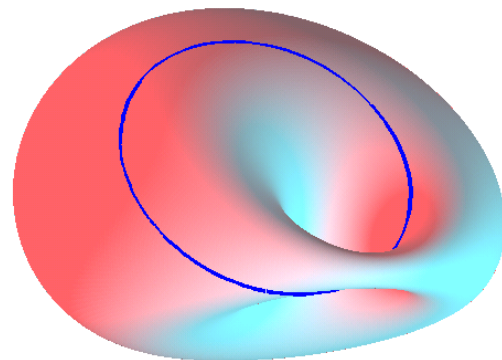
L'algorithme 1 nous permet de construire un triangle 3D à bords circulaires sur un tore à collier. Nous rappelons que le triangle est composé de trois arcs de cercles : un arc obtenu à partir d'un parallèle, un autre obtenu à l'aide d'un méridien et le dernier obtenu à partir d'un cercle de Villarceau. Puisque le triangle est rectangle, sans perte de généralités, nous prenons  $P_{200}$  et  $P_{002}$  dans le plan d'équation  $z = 0$  (figure 13) et les points  $P_{020}$  et  $P_{002}$  dans le plan d'équation  $y = 0$ .



(a)

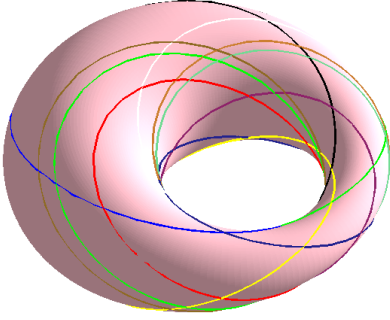


(b)

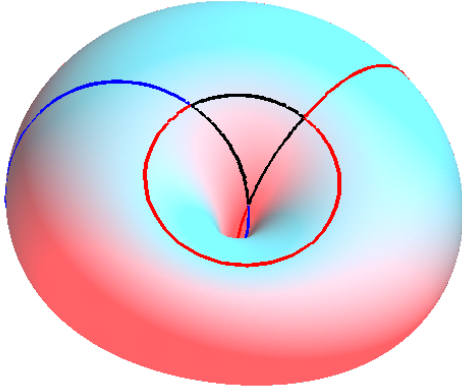


(c)

**Figure 10:** Lien entre les cercles de Villarceau. (a) : sur le tore. (b) : sur la cyclide de Dupin en gardant le même angle de vue. (c) : sur la cyclide de Dupin en optimisant l'angle de vue.



**Figure 11:** Cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin



**Figure 12:** Triangle rectangle 3D sur une cyclide de Dupin en anneau.

Les étapes 1, 2 et 3 de l'algorithme 1 nous permettent de construire les plans médiateurs respectifs de  $[P_{200}P_{020}]$ ,  $[P_{200}P_{002}]$  et  $[P_{002}P_{020}]$  à partir des milieux de chaque segment.

Les étapes 2 et 4 nous permettent de construire le centre du tore,  $O_T(x_T, 0, z_T)$ , en fonction de  $z_T$ .

Les étapes 2 et 5 nous permettent d'obtenir  $O_p(x_p, 0, 0)$ , le centre du parallèle.

Notons que les points  $O_T$ ,  $O_v$  et  $O_m$  sont dans le plan d'équation  $z = z_T$ . Les étapes 3 et 6 nous permettent d'obtenir la coordonnée  $x_m$ , en fonction de  $z_T$ , du centre du méridien  $O_m$ .

A l'étape 7, nous déterminons le rayon mineur du tore.

$O_v(x_T + r \cos \theta_0, r \sin \theta_0, z_T)$  étant le centre de la sphère de Villarceau, les étapes 1 et 8 nous permettent de déterminer, à l'aide de  $z_T$ , le plan défini par les points  $O_m$ ,  $O_T$  et  $O_v$ .

A l'étape 9, nous calculons le rayon majeur du tore en posant  $R = O_m O_T$  ce qui nous permet, à l'étape 10, de dé-

terminer  $O_v$  en fonction de  $\theta_0$ , en résolvant l'équation :

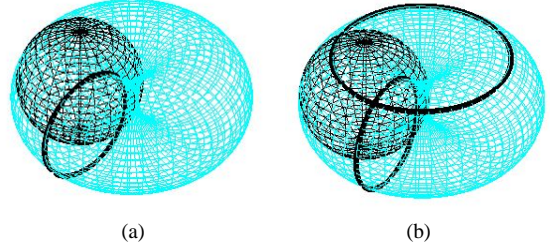
$$O_m O_T^2 = P_{020} O_v^2 = R^2$$

Nous obtenons plusieurs solutions, nous choisirons la bonne solution à l'étape 12.

A l'étape 11, nous effectuons un changement de repère afin de placer tous les points dans le repère du tore.

Les arcs de cercles seront modélisés par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques [Gar07] que nous appellerons courbes de Bézier afin d'alléger les notations. L'étape 12 permet de trouver la bonne solution de l'équation (20) en imposant que le grand cercle de la sphère de centre  $O_v$  et passant par  $P_{020}$  et  $P_{200}$  soit sur le tore, figure 14.

A l'étape 13 (resp. étape 14), nous considérons l'arc de méridien (resp. l'arc de parallèle) comme une courbe de Bézier, figure 15.



**Figure 14:** Représentation du tore avec la sphère de Villarceau, un parallèle et un méridien. (a) : Le tore de rayons  $r \simeq 3,25$  et  $R \simeq 3,61$ , la sphère de Villarceau et un méridien. (b) : Le tore, la sphère de Villarceau, un parallèle et un méridien.

Dans l'exemple des figures 14 et 15, le rayon mineur est  $r \simeq 3,25$  tandis que le rayon majeur est  $R \simeq 3,61$ . Les trois sommets de départ sont :

$$\begin{aligned} P_{002} &= (2; 0; 0) \\ P_{200} &= (0; -4; 0) \\ P_{020} &= (-2; 0; -1) \end{aligned} \quad (15)$$

le centre du tore est :

$$O_T \simeq (-3; 0; -2,93) \quad (16)$$

le centre du cercle de Villarceau est :

$$O_v \simeq (-1,87; -3,04; -2,93) \quad (17)$$

le centre du parallèle est :

$$O_p \simeq (-3; 0; 0) \quad (18)$$

tandis que le centre du méridien est :

$$O_m \simeq (-0,61; 0; -2,93) \quad (19)$$



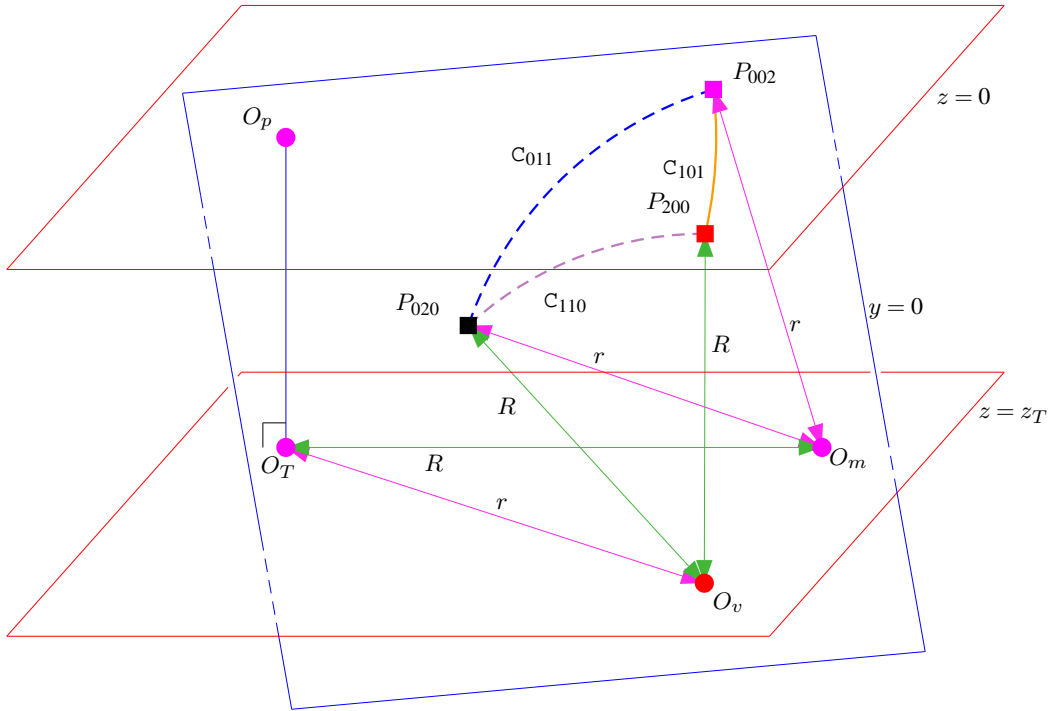


Figure 13: Schéma de construction d'un triangle 3D sur un tore à collier, algorithme 1.

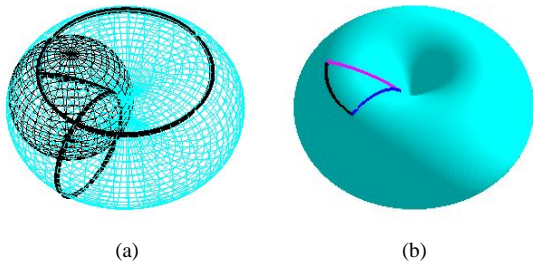


Figure 15: Représentation du triangle 3D sur le tore de la figure 14. (a) : Le tore et les trois cercles qui composent le triangle. (b) : Le triangle 3D sur le tore.

### 3.2. Sur des cyclides de Dupin en anneau

A partir d'un triangle obtenu par l'algorithme 1, nous souhaitons construire une inversion laissant invariants les sommets et transformant les cercles en cercles et le tore en cyclide de Dupin. Pour cela,  $\Omega_i$ , le centre de l'inversion, ne doit pas être choisi ni sur un des cercles ni sur le tore.

$\Omega_i$	$k$	figures
$(3, 11 ; -1,55 ; 2)$	6,86	17(a) et 18(a)
$(4, 11 ; -2,05 ; -2)$	29,35	17(b) et 18(b)
$(3,54 ; -1,77 ; \frac{1}{4})$	13,79	17(c) et 18(c)

Table 2: Valeurs approchées des coordonnées du centre  $\Omega_i$  de l'inversion et du rapport  $k$  de l'inversion, formule (21), utilisés pour obtenir les figures 17 et 18.

Afin de rendre aisée la manipulation des triangles 3D sur la cyclide de Dupin obtenue par inversion du tore à collier, il est indispensable de calculer les paramètres  $a$ ,  $c$  et  $\mu$  de cette cyclide afin de pouvoir utiliser les équations (9), (10) et (11).

Ainsi, à l'étape 1, nous choisissons  $\Omega_i(x_i, y_i, z_i)$ , centre d'une sphère passant par les trois sommets du triangle. Le point  $\Omega_i$  appartient donc aux plans médiateurs des segments  $[P_{200}P_{020}]$  et  $[P_{200}P_{002}]$ . Nous obtenons un seul degré de liberté sur la coordonnée  $z_i$  et trois exemples sont présentés dans le tableau 2.

**Algorithme 1** Construction d'un triangle rectangle 3D à bords circulaires, de sommets donnés, sur un tore à collier.

**Entrée** : trois points  $P_{200}(x_{200}; y_{200}; 0)$ ,  $P_{020}(x_{020}; 0; z_{020})$ ,  $P_{002}(x_{002}; 0; 0)$  non alignés avec  $y_{200} < 0$ .

1. Détermination de  $I_{110}$  milieu du segment  $[P_{200}P_{020}]$ .
2. Détermination de  $I_{101}$  milieu du segment  $[P_{200}P_{002}]$ .
3. Détermination de  $I_{011}$  milieu du segment  $[P_{002}P_{020}]$ .
4. Initialisation du centre du tore  $O_T(x_T; 0; z_T)$ . Détermination, en fonction de  $z_T$ , de  $x_T$  par :

$$\overrightarrow{O_T I_{101}} \bullet \overrightarrow{P_{002} P_{200}} = 0$$

5. Initialisation du centre du parallèle  $O_p(x_p; 0; 0)$  passant par  $P_{002}$  et  $P_{200}$ . Détermination de  $x_p$  par :

$$\overrightarrow{O_p I_{101}} \bullet \overrightarrow{P_{002} P_{200}} = 0$$

6. Initialisation du centre du méridien  $O_m(x_m; 0; z_T)$ . Détermination, en fonction de  $z_T$ , de  $x_m$  par :

$$\overrightarrow{O_m I_{011}} \bullet \overrightarrow{P_{002} P_{020}} = 0$$

7. Initialisation du rayon mineur du tore en fonction de  $z_T$  :  $r = O_m P_{002}$ .

8. Initialisation du centre de la sphère de "Villarceau"  $O_v(x_T + r \cos \theta_0; r \sin \theta_0; z_T)$ . Détermination de  $z_T$  par :

$$\overrightarrow{O_v I_{110}} \bullet \overrightarrow{P_{020} P_{200}} = 0$$

9. Détermination du rayon majeur du tore :  $R = O_m O_T$ .

10. Résolution, en fonction de  $\theta_0$  de l'équation :

$$O_m O_T^2 = P_{020} O_v^2 \quad (20)$$

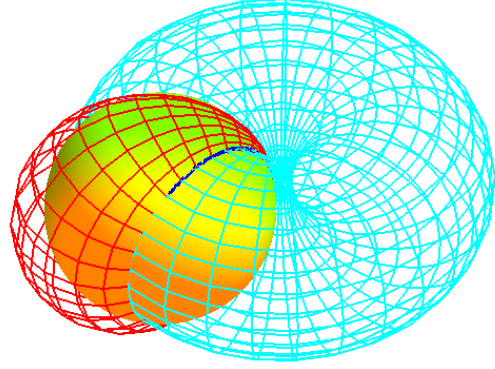
Soit  $S_{\theta_0}$  l'ensemble des solutions comprises entre 0 et  $2\pi$ .

11. Expression de tous les points dans le repère du tore.
12. Soit  $C_{110}$ , un arc du cercle de Villarceau, la courbe de Bézier de centre  $O_v$  passant par  $P_{020}$  et  $P_{200}$ . Détermination de  $\theta_0$  tel que le cercle  $C_{110}$  vérifie l'équation implicite du tore.
13. Soit  $C_{011}$ , un arc du cercle méridien, la courbe de Bézier de centre  $O_m$  passant par  $P_{020}$  et  $P_{002}$ .
14. Soit  $C_{101}$ , un arc du cercle du parallèle, la courbe de Bézier de centre  $O_p$  passant par  $P_{200}$  et  $P_{002}$ .

**Sortie** : un triangle rectangle 3D à bords circulaires sur un tore à collier.

La sphère construite à l'étape 1 est la sphère d'inversion, ce qui nous permet, à l'étape 2, de calculer le rapport d'inversion :

$$k = P_{002} \Omega_i^2 \quad (21)$$



**Figure 16:** La sphère d'inversion permettant d'obtenir la cyclide de Dupin en anneau à partir du tore à collier.

À l'étape 3, nous construisons la cyclide de Dupin comme l'image du tore par l'inversion construite précédemment, figure 17. La figure 16 montre, sur le dernier exemple, le tore de révolution, la cyclide de Dupin et la sphère d'inversion.

Par la suite, nous déterminons les paramètres de la cyclide de Dupin. Pour cela, nous commençons à l'étape 4 par déterminer la droite  $\Delta_\theta$  comme étant l'intersection de deux parallèles sur la cyclide de Dupin. À l'étape 5, nous déterminons la droite  $\Delta_\psi$  comme étant l'intersection de deux méridiens sur la cyclide de Dupin. À l'étape 6, nous construisons  $\Delta_0$ , la perpendiculaire commune aux droites  $\Delta_\theta$  et  $\Delta_\psi$  ainsi que le plan  $\mathcal{P}_z$ , engendré par  $\Delta_0$  et  $\Delta_\psi$ . Ce plan est un plan de symétrie de la future cyclide de Dupin.

Lors de l'étape 7, nous calculons les couples de points  $(A_i, B_i)$ ,  $i \in \{0; 1; 2\}$ , intersections de trois parallèles avec le plan  $\mathcal{P}_z$ .

À l'étape 8, ces trois couples de points vont nous permettre de déterminer les cercles  $C_1$  et  $C_2$ , cercles principaux de la cyclide de Dupin, passant respectivement par  $(A_0, A_1, A_2)$  et  $(B_0, B_1, B_2)$ . Le centre de  $C_1$  (resp.  $C_2$ ) est  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) et son rayon est  $\rho_1$  (resp.  $\rho_2$ ).

À l'étape 9, nous déterminons les paramètres de la cyclide de Dupin grâce aux cercles principaux, formule (12). Les valeurs approchées des paramètres des cyclides de Dupin dépendent de la cote de l'inversion et sont données par le tableau 3.

Les étapes 10, 11 et 12 nous permettent de définir le triangle 3D sur la cyclide de Dupin en modélisant chaque arc de cercles par une courbe de Bézier.

La figure 17 montre trois exemples de cyclides de Dupin obtenues par inversion du tore de la figure 15(b). Les sommets du triangle sur ce tore sont invariants, ainsi la sphère d'inversion doit passer par ces trois points, ce qui nous laisse un degré de liberté : nous avons choisi la cote  $z_i$  du centre de la sphère d'inversion.

$z_i$	$a$	$c$	$\mu$	figures
2	1,96	1,30	1,45	17(a) et 18(a)
-2	9,34	7,35	7,77	17(b) et 18(b)
$\frac{1}{4}$	2,38	1,23	1,52	17(c) et 18(c)

**Table 3:** Valeurs approchées, en fonction de la cote  $z_i$  du centre  $\Omega_i$  de l'inversion, des paramètres des cyclides de Dupin des figures 17 et 18.

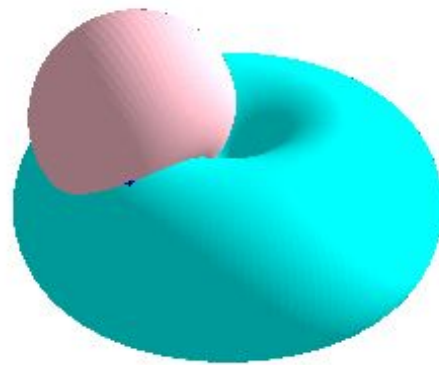
La figure 18 montre le triangle 3D obtenu sur la cyclide de Dupin. L'arc de cercle rouge (resp. doré) est un arc de courbure obtenu avec  $\psi$  (resp.  $\theta$ ) constant dans l'équation (9). L'arc de cercle bleu est un arc de cercle de Villarceau.

### 3.3. Triangles plans versus triangles 3D

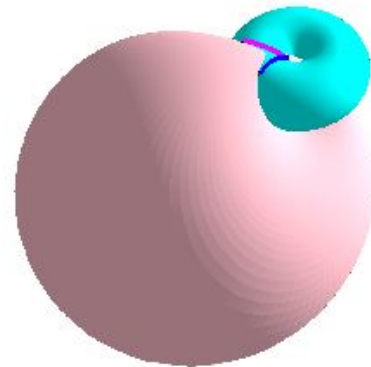
La figure 19 montre un triangle 3D à bords circulaires et une représentation facétisée avec 67 triangles plans. Dans le cas du triangle 3D, il nous suffit de stocker les trois paramètres de la cyclide de Dupin  $a$ ,  $c$  et  $\mu$ , les douze coefficients de la matrice de la transformation affine sous forme projective, ainsi que les deux paramètres  $\theta_0$  et  $\psi_0$  donnant la valeur du méridien et du parallèle passant par deux sommets ce qui nous fait 17 réels et aucune information topologique sur ce triangle. Dans le cas des 67 triangles plans, nous devons stocker les 45 sommets ce qui nécessite le stockage de 135 réels et les informations topologiques permettant de relier ces sommets entre eux. Nous faisons remarquer que pour construire cette représentation facétisée, nous n'avons pris que 8 points par arc de cercles, ce qui n'est pas beaucoup et peut générer des erreurs d'approximation. De plus, si nous voulons affiner la visualisation de la surface, c'est-à-dire augmenter le nombre de triangles plans à afficher, dans le cas du triangle 3D, nous n'avons aucune modification à faire concernant le stockage des données, seuls les pas de discrétisations sont à changer, tandis que dans le cas de la modélisation des triangles plans, il faut recalculer les sommets et les informations topologiques.

Qu'en est-il des calculs d'intersections ? Dans le cas du tore, nous pouvons obtenir facilement les équations des plans contenant les cercles de courbure ainsi que l'équation du plan contenant le cercle de Villarceau [Gar08]. Dans le cas d'une cyclide de Dupin, les formules (13) et (14), donnent les équations des plans engendrés par les cercles de courbure. En prenant un point, en plus de  $P_{020}$  et  $P_{200}$ , sur le cercle de Villarceau, nous pouvons obtenir l'équation implicite du troisième plan contenant le cercle de Villarceau. Dans les deux cas, nous pouvons enfermer le triangle dans un espace obtenu par intersections de trois demi-espaces de frontières les trois plans précédents, figure 20. Ainsi, un point du triangle 3D doit vérifier :

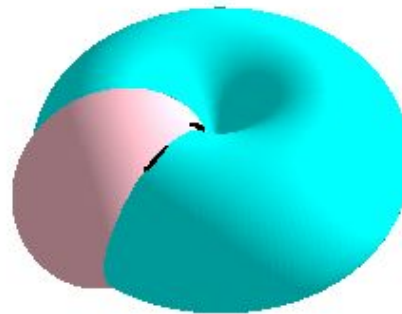
- trois inégalités correspondant à l'intersection des trois demi-espaces ;



(a)

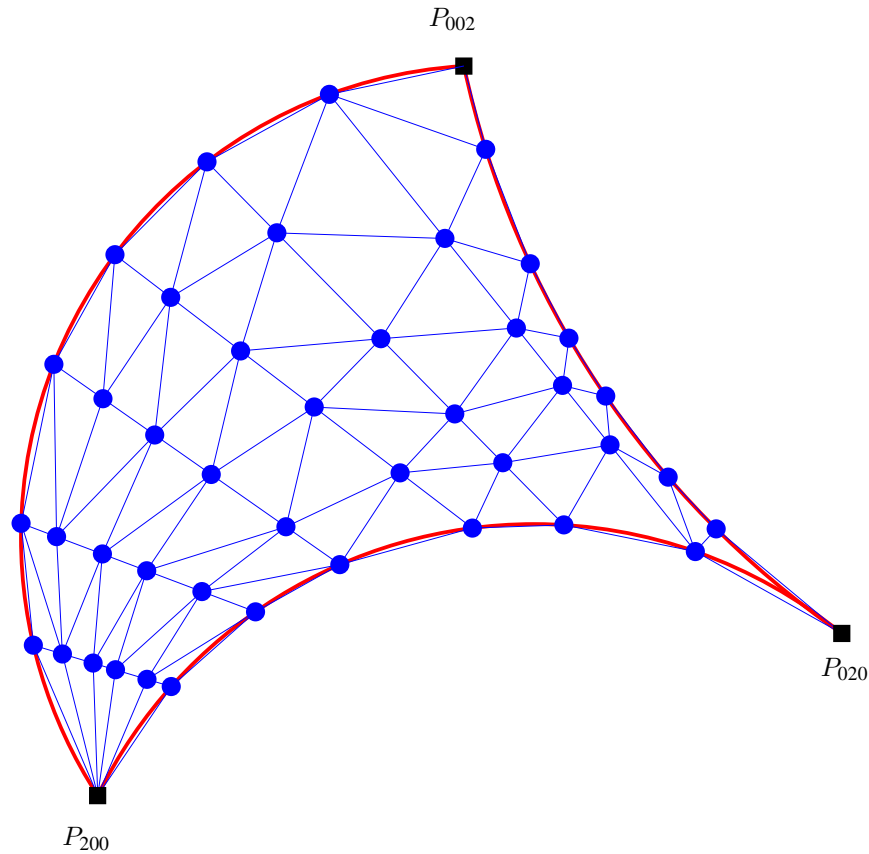


(b)



(c)

**Figure 17:** Exemples de cyclides de Dupin en anneau (en rose) obtenues par inversion du tore à collier (en cyan) de la figure 15(b) en fonction de la cote  $z_i$  du centre de la sphère d'inversion. (a) :  $z_i = 2$ . (b) :  $z_i = -2$ . (c) :  $z_i = 0,25$ .



**Figure 19:** Modélisation par un triangle 3D, affichage et/ou modélisation par des triangles plans.

- l'équation implicite de degré 4 du tore ou de la cyclide de Dupin.

Ainsi, les calculs lors d'un lancer de rayons sont très simplifiés puisqu'il suffit de tester trois inégalités de degré 1 pour savoir si le rayon coupe la zone englobant le triangle 3D (un test par plan) et dans le cas favorable, résoudre une équation de degré 4 pour déterminer le ou les éventuel(s) point(s) d'intersection entre le rayon et le triangle 3D.

Dans le cas de triangles plans, nous devons tester l'intersection entre le rayon et les triangles plans, un à un, jusqu'à l'obtention d'une première intersection et, si le rayon ne coupe aucun des 67 triangles, nous devons faire 67 tests !!!

#### 4. Conclusion et perspectives

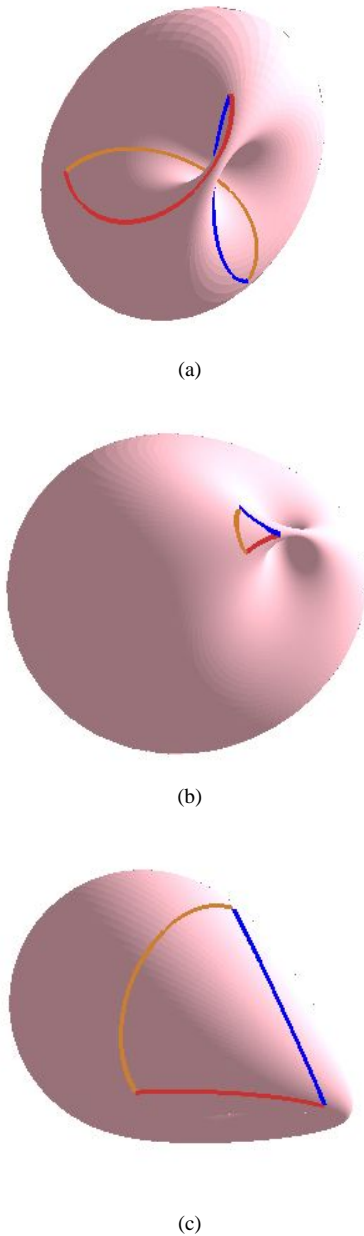
Dans cet article, nous avons développé une méthode permettant de construire des triangles rectangles 3D non plans à bords circulaires sur une cyclide de Dupin en anneau à l'aide d'un tore et d'une ou plusieurs inversion(s). Nous sommes partis de trois points de l'espace, avons construit le triangle sur le tore à collier, puis fabriqué un triangle sur

la cyclide de Dupin obtenue à partir du tore et d'une inversion. Néanmoins, il existe une infinité d'inversions permettant d'obtenir une cyclide de Dupin en anneau à partir du tore construit précédemment et laissant invariants les trois points donnés. Notre méthode induit malheureusement une perte de contrôle concernant la forme du triangle 3D sur la cyclide de Dupin comme le montre la figure 18(a).

En plus de la résolution du problème précité, les prochaines étapes de ce travail auront pour objectifs la construction de triangles 3D non rectangles en s'appuyant sur deux cercles de Villarceau, la réalisation de jointures de type  $G^1$  entre de tels triangles ainsi que la modélisation d'objets complexes en utilisant des patchworks de triangles rectangles non plans à bords circulaires. En s'appuyant sur des supercyclides elliptiques, une généralisation aux triangles 3D à bords elliptiques est envisagée dans un avenir plus lointain.

#### 5. Remerciements

Les auteurs remercient tout d'abord Dominique MICHELUCCI, Professeur au Le2i de l'Université de Bourgogne,



**Figure 18:** Représentations de triangles 3D sur des cyclides de Dupin de la figure 17. (a) :  $z_i = 2$ . (b) :  $z_i = -2$ . (c) :  $z_i = 0,25$ .

qui s'est interrogé sur le devenir des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin. Sans lui, ce travail n'aurait pas vu le jour. Nous remercions également Gudrun ALBRECHT, Professeur au LAMAV de l'Université de Valenciennes qui nous a inspiré l'idée de l'utilisation future de ces triangles en modélisation géométrique.

**Algorithme 2** Construction d'un triangle rectangle 3D, de sommets donnés, sur une cyclide de Dupin en anneau.

**Entrée :** un triangle rectangle 3D à bords circulaires, de sommets donnés,  $P_{200}(x_{200}; y_{200}; 0)$ ,  $P_{020}(x_{020}; 0; z_{020})$  et  $P_{002}(x_{002}; 0; 0)$ , sur un tore à collier, construit par l'algorithme 1.

1. Choix d'un point  $\Omega_i$ , n'appartenant pas au tore, appartenant au plan médiateur du segment  $[P_{200}P_{020}]$  et du plan médiateur du segment  $[P_{200}P_{002}]$ .
2. Calcul du rapport de l'inversion  $k = P_{002}\Omega_i^2$ .
3. Construction de la cyclide de Dupin  $S_{CD4}$ , image du tore par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ .
4. Détermination de la droite  $\Delta_\theta$  de la cyclide de Dupin à partir des images, par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ , de deux méridiens sur le tore.
5. Détermination de la droite  $\Delta_\psi$  de la cyclide de Dupin à partir des images, par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ , de deux parallèles sur le tore.
6. Détermination de la droite  $\Delta_0$ , perpendiculaire commune aux droites  $\Delta_\theta$  et  $\Delta_\psi$ , et construction du plan  $\mathcal{P}_z$ , engendré par  $\Delta_0$  et  $\Delta_\psi$ , de la cyclide de Dupin.
7. Détermination de trois couples de points  $(A_i, B_i)$  avec  $i = 0; 1; 2$ , intersection des images, par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ , de trois méridiens sur le tore avec le plan  $\mathcal{P}_z$  vérifiant :

$$d(B_i, \Delta_\theta) < d(A_i, \Delta_\theta) \quad (22)$$

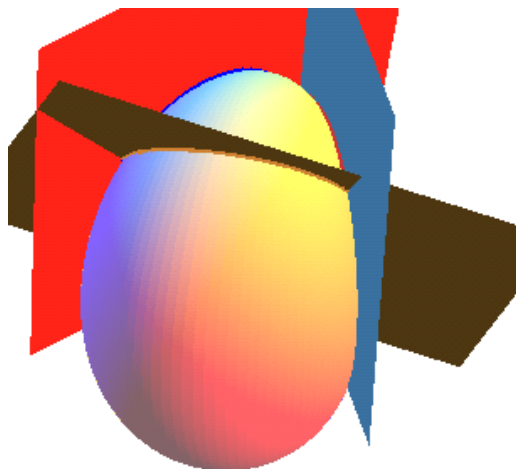
8. Détermination des cercles principaux  $C_1$  et  $C_2$  définis respectivement par  $(A_0, A_1, A_2)$  et  $(B_0, B_1, B_2)$ , de centres  $O_1$  et  $O_2$  et de rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .
9. Détermination des paramètres de la cyclide de Dupin, formule (12).
10. Soit  $C_{110}^{CD4}$ , un arc du cercle de Villarceau sur la cyclide de Dupin, image de  $C_{110}$  par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ .
11. Soit  $C_{011}^{CD4}$ , un arc du cercle méridien sur la cyclide de Dupin, image de  $C_{011}$  par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ .
12. Soit  $C_{101}^{CD4}$ , un arc du cercle du parallèle sur la cyclide de Dupin, image de  $C_{101}$  par l'inversion  $i_{\Omega_i, k}$ .

**Sortie :** un triangle rectangle 3D à bords circulaires sur une cyclide de Dupin.

Les auteurs remercient également les relecteurs de REFIG et de l'AFIG08 qui, grâce à leurs conseils, ont permis d'augmenter la lisibilité de cet article.

## Références

- [AD96] ALBRECHT G., DEGEN W. : Construction of Bézier rectangles and triangles on the symmetric Dupin horn cyclide by means of inversion. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 14, Num. 4 (1996), 349–375.



**Figure 20:** Le triangle 3D de la figure 18(c), sur la cyclide de Dupin en anneau, emprisonné par trois plans.

- [Gar07] GARNIER L. : *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007.
- [Gar08] GARNIER L. : Représentation analytique des cercles de Villarceau sur une cyclide de Dupin en anneau. *R.E.F.I.G.* Vol. 2, Num. 1 (2008), 47–59.
- [Lad02] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie pour le CAPES de Mathématiques*. Ellipses, Paris, 2002. ISBN 2-7298-1148-6.
- [Lad03] LADEGAILLERIE Y. : *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Ellipses, Paris, 2003. ISBN 2-7298-1416-7.
- [LFA91] LELONG-FERRAND J., ARNAUDIES J. M. : *Cours de Mathématiques : variétés, courbes et surfaces*, 2ème ed. Dunod, Octobre 1991.
- [Pra90] PRATT M. J. : Cyclides in computer aided geometric design. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 7, Num. 1-4 (1990), 221–242.
- [Aud06] AUDIN M. : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006. ISBN 2-86883-883-9.
- [BGL01] BOUVIER A., GEORGE M., LIONNAIS F. L. : *Dictionnaire des Mathématiques*, 1ère ed. Quadrigé, PUF, 2001.
- [Bia04] BIASI J. D. : *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation interne*, 3 ed. Collection CAPES / AGREG. Ellipse, janvier 2004. ISBN :2-7298-1855-3.
- [Dar66] DARBOUX G. : *Thèse à la faculté des sciences de Paris*. Annales scientifiques de l'école normale, 1866.
- [Dar73] DARBOUX G. : *Sur une Classe Remarquable de Courbes et de Surfaces Algébriques et sur la Théorie des Imaginaires*. Gauthier-Villars, 1873.
- [Dar17] DARBOUX G. : *Principes de géométrie analytique*. Gauthier-Villars, 1917.
- [Dup22] DUPIN C. P. : *Application de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc*. Bachelier, Paris, 1822.
- [For12] FORSYTH A. R. : *Lecture on Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1912.
- [Gar04] GARNIER L. : *Utilisation des cyclides de Dupin quartiques et des supercyclides quartiques en modélisation géométrique*. PhD thesis, Université de Bourgogne, Dijon, France, Décembre 2004.