

# Les coordonnées de Plücker revisitées

Lilian Aveneau

XLIM, Université de Poitiers, CNRS  
Département SIC

[lilian.aveneau@xlim.fr](mailto:lilian.aveneau@xlim.fr)

---

## Résumé

*Les coordonnées de Plücker sont bien connues, notamment en informatique graphique, comme un outil de modélisation et de manipulation de droites de l'espace 3D. La plupart des introductions sur le sujet définissent ces coordonnées soit directement par la géométrie, soit au moyen de l'algèbre linéaire, malheureusement sans fournir de définition claire quant à l'espace de droites sous-jacent. Cela en fait un outil certes pratique, mais peu intuitif. Le résultat est le risque (avéré dans certaines publications) d'erreur d'interprétation ou encore de mauvaise utilisation. Une troisième définition de ces coordonnées, moins connues que les deux précédentes, repose sur l'algèbre de Grassmann, et offre à ce titre un vrai espace de manipulation.*

*Cet article propose une étude de ces trois formulations, purement géométrique, ou basés sur l'algèbre linéaire ou celle de Grassmann. Le but est d'apporter un éclairage complet, et en ce sens différent des approches traditionnelles, des coordonnées de Plücker. Il suggère aussi des exemples d'utilisation de ces définitions de coordonnées de droites, en remontrant quelques unes des propriétés utilisées dans la communauté graphique.*

---

**Mots clé :** Informatique Graphique, Coordonnées de Plücker, Algèbre de Grassmann

## 1. Introduction

Les coordonnées de Plücker sont une représentation des droites de l'espace affine 3D, introduite au XIX<sup>ème</sup> siècle par Julius Plücker dans ses travaux sur la *géométrie des lignes* [Plü65]. En informatique graphique, elles sont utilisées par exemple par Seth Teller, notamment pour le calcul des droites passant par 4 droites [TH99], ou encore pour le calcul de l'*antipenumbra* d'une source polygonale [Tel92] pour du calcul d'éclairage direct. Cette notion se retrouve aussi dans le cadre du lancer de rayons avec les travaux de Pellegrini [Pel90], et plus généralement pour le calcul de l'intersection de triangles [Pel93].

Ces coordonnées sont, de plus, largement utilisées pour formuler et résoudre des calculs de visibilité. Ainsi, Shaun Nirenstein [NBG02,HMN05] les utilise-t-il afin de représenter les droites traversant deux polygones convexes tridimensionnels donnés, pour ensuite en retrancher celles bloquées par des obstacles, autrement dit pour calculer la visibilité entre deux polygones 3D. Ces travaux se sont poursuivis, en particulier par ceux de Frédéric Mora [MA05] ou encore Sylvain Charneau [Cha07].

Il est remarquable que si Nirenstein utilise les coordonnées de Plücker, sa vision trop géométrique l'entraîne vers une optimisation qui se révèle être la source de bien des problèmes. Ainsi, il utilise une réduction du nombre de coordonnées de Plücker, arguant du fait de travailler dans un espace projectif, les coordonnées définissant une droite à un scalaire près. Malheureusement, tous les problèmes de robustesse de sa technique, soulevés dans la thèse de Mora, proviennent directement de cette réduction. Une meilleure connaissance des droites de Plücker et surtout de l'espace vectoriel les contenant lui aurait pourtant permis d'éviter ce piège.

Dans [Sho98], Shoemake présente la vision purement géométrique des coordonnées de Plücker, tout en proposant un ensemble de propriétés en découlant fort utile. Cet aspect des coordonnées de Plücker n'est pas le seul : il existe ainsi une seconde formulation basée sur l'algèbre linéaire, donc exprimée sous forme matricielle [Som59], permettant justement de démontrer quelques unes des propriétés énumérées par Shoemake. Dernièrement, Sylvain Charneau [Cha07] a proposé un modèle d'espace de droites nD reposant sur l'algèbre de Grassmann [Pos81]. Ce modèle, appliqué au cas tridimensionnel, fournit encore une fois les coordonnées de Plücker, avec en supplément une véritable notion d'espace

de droites, qui se révèle très utile pour résoudre des problèmes purement algébriques.

Cet article a pour objectif premier de faire le point sur ces trois visions complémentaires des coordonnées de Plücker, en les développant complètement et en montrant leurs possibilités respectives, autrement dit leurs intérêts. Il reprend ainsi l'ensemble des approches précédentes, géométrique [Sho98], en algèbre linéaire [Som59] ou basée sur l'algèbre de Grassmann [Cha07], et les compare dans le but de mieux les comprendre. Ceci devrait permettre au lecteur de manipuler l'espace de droites pour y opérer des démonstrations, à partir des intuitions qu'offrent ces différentes approches.

La section 2 rappelle les deux formulations classiques des coordonnées de Plücker, l'une purement géométrique, l'autre basée sur l'algèbre linéaire. La section 3 introduit l'espace de droites reposant sur l'algèbre de Grassmann, qui offre l'avantage d'une vision géométrique formelle, permettant notamment d'avoir l'intuition mathématique des résultats et démonstrations que l'on voudrait y opérer. La section 4 reformule quelques propriétés classiques découlant des coordonnées de Plücker, et montre notamment l'intérêt de connaître les différentes formulations. Enfin, la dernière section conclut cet article.

## 2. Formulations classiques

### 2.1. L'approche purement géométrique

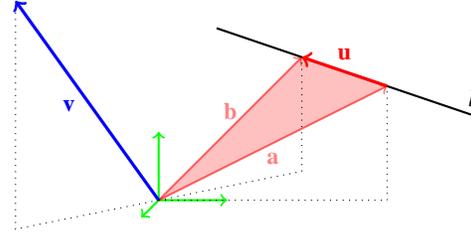
L'interprétation géométrique se place dans l'espace affine 3D usuel muni d'un repère cartésien [Aud06], qui offre par définition un espace de points et un espace vectoriel dit directeur. Soit une droite  $l$ , définie en toute généralité par deux points  $A$  et  $B$ , connus par leurs vecteurs de coordonnées notés  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Comme illustré sur la figure 1, la vision géométrique d'une droite  $l$  consiste à définir, d'une part, sa direction  $\mathbf{u}$  d'expression  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , et, d'autre part, sa position  $\mathbf{v}$  d'expression  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , où  $\times$  représente le produit vectoriel. En mécanique, où nos deux points formant la droite sont assimilés à deux particules en mouvement, cette position  $\mathbf{v}$  est aussi connue comme un moment de force.

Autrement dit, les coordonnées d'une droite  $l$  sont définies à l'aide du sextuplé suivant :

$$\Pi_l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\} \quad (1)$$

$$= \{\mathbf{b} - \mathbf{a} : \mathbf{a} \times \mathbf{b}\} \quad (2)$$

*i.e.* via six coordonnées correspondant aux deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . Elles s'écrivent aussi, pour une droite passant par les deux points distincts  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives



**Figure 1:** Approche géométrique des coordonnées de Plücker, pour la droite  $l$  passant par les points de vecteurs  $\mathbf{a}$  puis  $\mathbf{b}$  : elle prend la forme d'un vecteur directeur  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , et d'un moment  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  orthogonal à l'hyperplan contenant  $l$  et l'origine du repère cartésien.

$(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  :

$$\Pi_l = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ces coordonnées identifient la droite modulo un scalaire  $\alpha$  non nul : tous les sextuplés  $\{\alpha \mathbf{u} : \alpha \mathbf{v}\}$  représentent la même droite. Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

**Théorème 1** Soient, dans  $\mathbb{R}^3$ , deux points  $A$  et  $B$  distincts et de vecteurs coordonnées  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Posons les vecteurs  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Ces deux vecteurs définissent sans ambiguïté une unique droite  $l$ , identifiée par les coordonnées  $\Pi_l = \{\alpha \mathbf{u} : \alpha \mathbf{v}\}$ , et ce  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ .

*Preuve* (géométrique)

Soient deux autres points  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \alpha \mathbf{u}$  et  $\mathbf{d} = \mathbf{b} + \beta \mathbf{u}$  sur la droite  $l$  définie par  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Montrons que les coordonnées de Plücker calculées à partir de  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  sont proportionnelles à celles calculées à partir de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . La direction est  $\mathbf{u}' = \mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + (\beta - \alpha)\mathbf{u} = (1 + \beta - \alpha)\mathbf{u}$ . La position est

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{c} \times \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{u}) \times (\mathbf{b} + \beta \mathbf{u}) \\ &= ((1 - \alpha)\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}) \times ((1 + \beta)\mathbf{b} - \beta \mathbf{a}) \\ &= (1 - \alpha)(1 + \beta)\mathbf{a} \times \mathbf{b} + (\dots)\mathbf{b} \times \mathbf{b} + (\dots)\mathbf{a} \times \mathbf{a} \\ &\quad - \alpha \beta \mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ &= (1 - \alpha + \beta - \alpha \beta)\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \alpha \beta \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= (1 - \alpha + \beta)\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= (1 - \alpha + \beta)\mathbf{v} \end{aligned}$$

Donc, les sextuplés  $\{\mathbf{u}' : \mathbf{v}'\} = \{(1 - \alpha + \beta)\mathbf{u} : (1 - \alpha + \beta)\mathbf{v}\}$  et  $\{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$  sont bien proportionnels. ■

## 2.2. Propriétés des coordonnées

Dans [Sho98], Ken Shoemake propose un panorama assez intéressant des différentes propriétés des coordonnées de Plücker. Nous en rappelons ici deux, à titre d'exemples. La plus importante concerne la possibilité de calculer l'orientation relative de deux droites entre elles. Dans l'espace, deux droites peuvent être coplanaires (*i.e.* elles se croisent, au moins à l'infini), ou non. Dans ce dernier cas, en prenant deux points quelconques mais distincts sur chaque droite, nous obtenons toujours un tétraèdre de volume non nul.

### 2.2.1. Coplanarité

L'approche géométrique des coordonnées de Plücker permet de montrer facilement le théorème suivant :

**Théorème 2** Deux droites de coordonnées  $\Pi_l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$  et  $\Pi_{l'} = \{\mathbf{u}' : \mathbf{v}'\}$ , définies à partir de couples de points distincts, sont coplanaires si et seulement si :

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (4)$$

Pour faire la preuve de ce théorème, commençons par montrer le lemme suivant :

**Lemme 1** Soient deux droites de coordonnées  $\Pi_l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$  et  $\Pi_{l'} = \{\mathbf{u}' : \mathbf{v}'\}$ , alors la quantité :

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

est invariante par translation.

*Preuve* (Lemme 1) Appliquons la translation d'un vecteur quelconque  $\mathbf{t}$  sur cette quantité. Soient deux points de vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  choisis distincts sur  $l$  tels que  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ; soient deux points de vecteurs  $\mathbf{a}'$  et  $\mathbf{b}'$  choisis distincts sur  $l'$  tels que  $\mathbf{u}' = \mathbf{b}' - \mathbf{a}'$  et  $\mathbf{v}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$ . Les droites translattées ont les coordonnées  $\Pi_l^t = \{\mathbf{u} : (\mathbf{t} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{t} + \mathbf{b})\}$  et  $\Pi_{l'}^t = \{\mathbf{u}' : (\mathbf{t} + \mathbf{a}') \times (\mathbf{t} + \mathbf{b}')\}$ . Pour la première partie de l'équation 4, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \cdot ((\mathbf{t} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{t} + \mathbf{b})) &= \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{b} - \mathbf{t} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Pour la seconde partie de l'équation 4 nous avons :

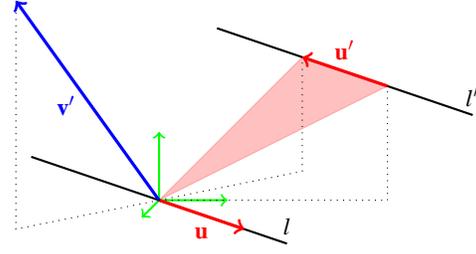
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{t} + \mathbf{a}') \times (\mathbf{t} + \mathbf{b}')) &= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{b}' - \mathbf{t} \times \mathbf{a}' + \mathbf{v}') \\ &= -\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \end{aligned}$$

La somme des deux parties reste donc constante par translation d'un vecteur  $\mathbf{t}$  quelconque. ■

Nous pouvons maintenant écrire la preuve du théorème 2.

*Preuve* (Théorème 2) Commençons par montrer l'implication, en supposant que les deux droites sont coplanaires. Plaçons-nous dans le cas où la première droite  $l$  passe par l'origine du repère cartésien, par exemple en prenant  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{b}$  (cf. figure 2).

Par hypothèse, la position  $\mathbf{v}$  de  $l$  est nulle, ce qui implique  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = 0$ . Il suffit donc de montrer que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = 0$ , ce qui est forcément le cas puisque, par hypothèse de coplanarité,  $\mathbf{u}$



**Figure 2:** Exemple géométrique de coplanarité de deux droites  $l$  et  $l'$ , dans un repère dont l'origine appartient à  $l$ .

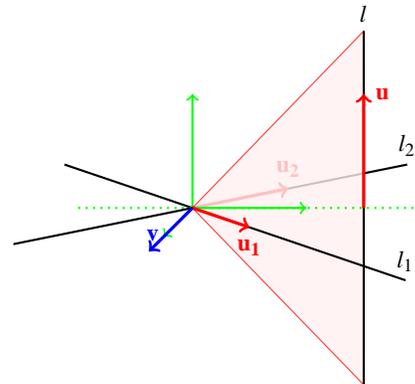
est dans le plan passant par l'origine du repère et de normale  $\mathbf{v}'$ .

Dans le cas général, il suffit d'appliquer le lemme 1 pour finir de montrer l'implication.

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer la réciproque. Supposons que l'équation 4 soit vérifiée. Vu le lemme 1, nous déplaçons le repère en  $\mathbf{a}$ , sur  $l$ . Nous avons toujours  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = 0$ , avec par hypothèse  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Il vient que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = 0$ , ce qui implique que  $\mathbf{u}$  est dans le plan contenant  $l'$  et passant par le point  $A$ , autrement dit que les deux droites sont coplanaires. ■

### 2.2.2. Orientation relative

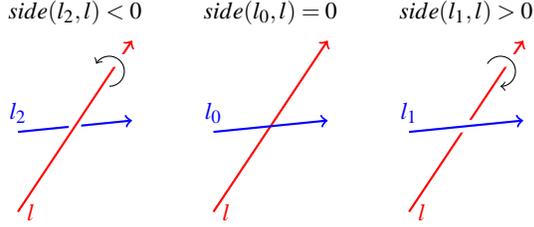
En pratique, l'équation 4 sert principalement pour qualifier l'orientation relative des deux droites entre elles, *i.e.* une mesure du volume du tétraèdre construit. Il est relativement facile de vérifier que, lorsque cette mesure est strictement négative (resp. positive), alors les deux droites passent à gauche (resp. à droite) l'une de l'autre. Les deux termes de



**Figure 3:** Application du lemme 1 à l'illustration de l'orientation relative de droites entre elles : le produit  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}$  est positif, la droite  $l_1$  passe à droite de  $l$ ; au contraire,  $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}$  est négatif et  $l_2$  passe à gauche de  $l$ .

cette égalité représentent chacun un déplacement le long de

chaque droite par rapport à la position de l'autre droite, *i.e.* à un hyperplan de normale  $\mathbf{v}$ . Pour s'en convaincre, il suffit de translater encore une fois le repère cartésien en un point situé sur  $l$  ou  $l'$ , donc d'avoir encore un des deux termes nul ; la situation devient purement vectorielle, et l'orientation plus palpable (*cf.* figure 3).



**Figure 4:** Illustration de l'opérateur  $side()$ , qui fournit l'orientation relative de deux droites entre-elles : à gauche, il est négatif, et  $l_2$  passe à gauche de  $l$  ; au centre il est nul, et les droites se croisent ; à droite il est positif et  $l_1$  passe à droite de  $l$ .

Cette caractérisation de l'orientation relative entre deux droites est justement ce qui permet de tester l'intersection d'un rayon quelconque avec un triangle, ou un polygone convexe, ou encore un volume convexe [MW04], en ne calculant que les orientations entre le rayon et les arêtes bordant le triangle/polygone/volume. On définit alors l'opérateur  $side()$ , illustré sur la figure 4, comme :

$$side(l, l') = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} \quad (5)$$

### 2.3. L'approche en algèbre linéaire

L'approche purement géométrique est bien pratique pour, par exemple, déduire des algorithmes comme la recherche de l'intersection entre un rayon et un triangle, ou d'autres algorithmes basés sur une approche géométrique. Par contre, elle s'avère peu pratique pour s'essayer à une démonstration un tant soit peu complexe.

Nous rappelons ici une autre version des coordonnées de Plücker classiques. Quel que soit l'auteur qui s'y essaie, leur dérivation passe toujours par un plongement de l'espace de points 3D dans un espace projectif  $\mathbb{P}^3$ , *i.e.* en associant à chaque point une droite vectorielle [Aud06]. Tout point s'exprime donc en coordonnées homogènes à l'aide de quatre coordonnées, la dernière valant 1, *e.g.* :  $\mathbf{a} = (x, y, z, 1)$ .

Soit  $l$  une droite définie par deux points distincts  $A$  et  $B$  de vecteurs  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  et  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ . Construisons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

Les points  $A$  et  $B$  étant distincts, les colonnes de la matrice  $M$

sont linéairement indépendantes, et  $M$  est de rang 2. Soit  $N$  une seconde matrice construite à partir de deux autres points distincts de vecteurs  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  de la même droite  $l$ . De fait, ces deux points appartenant à la droite  $l$ , chacun est linéairement dépendant des points  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= x_1 \mathbf{a} + y_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= x_2 \mathbf{a} + y_2 \mathbf{b} \end{aligned}$$

Autrement dit, les colonnes de  $N$  sont des combinaisons linéaires de celles de  $M$ , et il existe une matrice  $T$ , inversible (les points de vecteurs  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  étant distincts), telle que :

$$N = M \times T = M \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Construisons maintenant les mineurs de la matrice  $N$ , *i.e.* l'ensemble des déterminants des sous-matrices  $2 \times 2$  basées sur les lignes  $i$  et  $j$ . Ces déterminants sont de la forme :

$$\begin{aligned} c_i d_j - c_j d_i &= (x_1 a_i + y_1 b_i)(x_2 a_j + y_2 b_j) \\ &\quad - (x_1 a_j + y_1 b_j)(x_2 a_i + y_2 b_i) \\ &= (x_1 x_2 a_i a_j + x_1 y_2 a_i b_j + x_2 y_1 a_j b_i + y_1 y_2 b_i b_j) \\ &\quad - (x_1 x_2 a_j a_i + x_1 y_2 a_j b_i + x_2 y_1 a_i b_j + y_1 y_2 b_j b_i) \\ &= x_1 y_2 [a_i b_j - a_j b_i] + x_2 y_1 [a_j b_i - a_i b_j] \end{aligned}$$

Ce calcul montre que les lignes  $i$  et  $j$  des matrices  $M$  et  $N$  sont liées par la relation :

$$\begin{vmatrix} c_i & d_i \\ c_j & d_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

En remarquant dans l'équation 6 que le déterminant à droite est constant quels que soient les indices des lignes  $i$  et  $j$ , il devient évident que les deux autres déterminants sont des expressions de coordonnées de la droite  $l$ , connue à un scalaire près, et donc dans un espace projectif.

Il vient la définition classique des coordonnées de Plücker, qui sont les déterminants des matrices formées des lignes  $i$  et  $j$  de  $M$  (ou de  $N$ ), *i.e.* des mineurs de  $M$  ou  $N$  :

$$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$= a_i b_j - a_j b_i \quad (8)$$

Le nombre de coordonnées distinctes (à un scalaire près) qui ne soient pas toujours nulles est  $C_2^4 = 6$ , ce qui donne les six coordonnées des droites de Plücker :

$$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6) \quad (9)$$

$$= (\delta_{41}, \delta_{42}, \delta_{43}, \delta_{23}, \delta_{31}, \delta_{12}) \quad (10)$$

L'ordre dans lequel sont données ces coordonnées peut sembler étrange de prime abord ; en réalité il n'a pas d'autre importance que la convenance de celui qui le décide : il a été choisi ici pour correspondre exactement aux coordonnées obtenues avec la version purement géométrique de l'équation 3.

Cette approche, algébrique, repose principalement sur la notion de calcul de déterminant, pour résoudre des systèmes linéaires. Il s'agit donc d'effectuer des calculs à partir des coordonnées de points projectifs engendrant les droites. Une telle démarche offre certes un cadre plus rigoureux que la vision purement géométrique, mais un cadre bien lourd à manipuler, car uniquement basé sur des systèmes matriciels. La version reposant sur l'algèbre de Grassmann va apporter bien plus de souplesse.

### 3. Formulation utilisant l'algèbre de Grassmann

Sans trop entrer dans les détails des algèbres géométriques, nous rappelons ici l'essentiel de l'algèbre de Grassmann, de façon à construire ensuite l'espace des droites [Pos81]. Cette partie s'inspire librement de la thèse de S. Charneau [Cha07] qui définit les espaces de droites pour des espaces projectifs de dimensions  $n \geq 2$ .

#### 3.1. Algèbre de Grassmann

##### 3.1.1. Rappels

Commençons par un rapide rappel sur une algèbre en général, qui peut se comprendre comme un espace de sous-espaces vectoriels. Soit un espace vectoriel  $E$  défini sur un corps  $K$ , et soient deux éléments  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de  $E$  linéairement indépendants. Autrement dit,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux vecteurs tels qu'il n'existe aucun scalaire  $\alpha \in K$  tel que  $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , où  $\alpha\mathbf{a}$  fait intervenir la loi externe de  $E$ . Le produit de  $\mathbf{a}$  par  $\mathbf{b}$  donne dans l'algèbre  $\wedge(E)$  un représentant du sous-espace engendré par nos deux vecteurs. Ce sous-espace n'est pas un élément de  $E$ , mais s'exprime dans un nouvel espace vectoriel. La somme de tous ces sous-espaces forme l'algèbre  $\wedge(E)$ .

Un élément d'un espace vectoriel  $E$  est un vecteur de  $E$ , par définition. Nous appellerons *multivecteur* un élément de l'algèbre  $\wedge(E)$ .

**Définition 1** L'algèbre de Grassmann est associative unitaire, avec comme loi interne multiplicative le produit extérieur  $\wedge$ , dont la particularité principale est d'être anticommutatif. Ainsi, pour tous vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de  $E$ , nous avons :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \quad (12)$$

Pour manipuler les éléments des espaces vectoriels ou des algèbres, il convient d'y définir une base. La construction d'une base de  $\wedge(E)$  va, en pratique, reposer sur celle d'une base de  $E$ . Soit donc pour  $E$  la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ ,  $d$  étant la dimension de  $E$ . Une base de l'algèbre est alors la famille suivante :

$$(1_{\otimes}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{d-1} \wedge \mathbf{e}_d, \dots, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_d) \quad (13)$$

Autrement dit, une base de  $\wedge(E)$  est une famille contenant

les produits des vecteurs des  $2^d$  sous-ensembles de la base de  $E$ .

De la base de l'algèbre, il est facile de déduire celles des sous-espaces de dimension  $d' \in [0 \dots d]$ , comme étant les sous-ensembles d'éléments de dimensions identiques. Par exemple, la base du sous-espace de dimension 0 (les scalaires sur  $K$ ) est toujours l'unité  $1_{\otimes}$ . La base du sous-espace de dimension 1 est la base de  $E$ . Celle du sous-espace de dimension  $d$  est composé du multivecteur  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_d$ .

##### 3.1.2. Exemple

Prenons en exemple l'espace  $E$  de dimension 3 et de base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Une base de l'algèbre est alors la famille :

$$(1_{\otimes}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$$

Afin d'obtenir les mêmes coordonnées de Plücker que précédemment, nous utilisons le multivecteur  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  et non pas  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ , ce qui deviendra clair en fin de §3.2.

Remarquons que cette base contient celles des sous-espaces de l'algèbre de dimensions  $d \in [0 \dots 3]$ , à savoir :

$$(1_{\otimes}) \text{ pour } \bigwedge^0(E)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \text{ pour } \bigwedge^1(E)$$

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) \text{ pour } \bigwedge^2(E)$$

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \text{ pour } \bigwedge^3(E)$$

##### 3.1.3. Interprétation géométrique

Le produit extérieur  $\mathbf{a}$ , pour nous, deux significations intéressantes lorsqu'il est appliqué à deux éléments de  $\wedge^1(E)$ , *i.e.* à deux vecteurs de  $E$ . La première, formelle, est que le multivecteur obtenu,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , représente un sous-espace vectoriel de base  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

La seconde est géométrique : ce multivecteur, ou *bivecteur*, représente l'ensemble des vecteurs de  $E$  qui sont linéairement dépendants à la fois de  $\mathbf{a}$  et de  $\mathbf{b}$ . Géométriquement, en associant  $E$  à un espace projectif (pour passer de la notion de vecteurs ou droites vectorielles, de dimension  $d$ , à celle de point en dimension  $d - 1$ ),  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  forment une droite dans l'espace  $E$ , quelle que soit sa dimension  $d$ .

Ainsi, est-il courant de lire ici ou là que l'espace de droites est l'espace des bivecteurs, *i.e.* des 2-vecteurs de l'algèbre construite sur l'espace projectif de départ, et ce quel que soit  $d$  [Pos81, Cha07].

### 3.2. Construction de l'espace de Plücker

Cette signification géométrique permet de construire, pour n'importe quel espace de points, un espace de droites. Prenons l'espace  $\mathbb{R}^3$ , qui contient des points connus par leurs trois coordonnées,  $(x, y, z)$ . Il est possible de l'associer projectivement à un espace vectoriel  $E$  de dimension

4, en reliant tout point  $P$  à un vecteur  $\mathbf{p} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha)$ . Les deux espaces ne sont pas en bijection, puisqu'il existe une infinité de vecteurs n'ayant pas de correspondance dans l'espace de points 3D. Par contre, à tout point de  $\mathbb{R}^3$ , correspondra une unique droite vectorielle dans l'espace vectoriel  $E$ .

Nous savons que le produit extérieur de deux vecteurs donne une représentation d'une droite. Essayons d'appliquer ce principe au cas 3D. Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathbb{R}^3$ , associés à deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$ . Soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  une base de l'espace affine, et  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  la base de l'espace projectif correspondant.

Calculons le produit extérieur de  $\mathbf{a}$  par  $\mathbf{b}$ , *i.e.* l'expression du représentant de la droite  $(AB)$ . En posant  $(a_1, a_2, a_3, 1)$  et  $(b_1, b_2, b_3, 1)$  les coordonnées de nos deux points, donc de nos deux vecteurs, nous avons :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$$

L'algèbre de Grassmann est associative unitaire. Il est ainsi possible de distribuer notre produit extérieur sur le produit intérieur additif :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= a_1 \mathbf{e}_1 \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ &+ a_2 \mathbf{e}_2 \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ &+ a_3 \mathbf{e}_3 \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\ &+ \mathbf{e}_4 \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \end{aligned}$$

En développant et après ré-arrangement des termes, il reste :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= a_1 b_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + a_2 b_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + a_3 b_3 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_4 \\ &+ a_1 b_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_2 b_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &+ a_1 b_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + a_3 b_1 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &+ a_1 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + b_1 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &+ a_2 b_3 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a_3 b_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &+ a_2 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + b_2 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &+ a_3 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + b_3 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, nous remarquerons que la première ligne s'annule du fait de l'anticommutativité du produit extérieur (*cf.* l'équation 11), et en utilisant l'équation 12 il vient :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (b_1 - a_1) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \quad (14)$$

$$+ (b_2 - a_2) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \quad (15)$$

$$+ (b_3 - a_3) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (16)$$

$$+ (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad (17)$$

$$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \quad (18)$$

$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \quad (19)$$

On retrouve ainsi les coordonnées de Plücker telles que définies géométriquement dans l'équation 3.

Notons qu'il existe plusieurs expressions, différentes mais

toutes correctes, obtenues en modifiant l'ordre utilisé dans les produits extérieurs. Ainsi, en lieu et place du terme en  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  (équation 18) nous aurions pu écrire un terme en  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ , *i.e.* l'opposé. Donc, en changeant de base de notre sous-espace, nous changeons l'expression des coordonnées de nos éléments. Ce fait rejoint les multiples définitions des coordonnées de Plücker, dans l'ordre ou le signe.

### 3.3. Grassmannienne

Quelle que soit l'approche utilisée jusqu'ici pour exprimer les coordonnées de Plücker, il apparaît qu'elles sont liées entre-elles et que certains sextuplés ne représentent pas forcément une droite, certaines combinaisons n'ayant pas de correspondance. Exprimer ce fait avec l'algèbre de Grassmann consiste à discuter de la décomposabilité des vecteurs de l'espace de droites. Pour qu'un tel vecteur  $\mathbf{v}$  coïncide avec une droite de  $\mathbb{P}^3$ , il faut qu'il puisse s'exprimer comme le produit extérieur de deux 1-vecteurs, *i.e.*  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ . Formellement, cela signifie que l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}$  correspondant à une droite appartient à la Grassmannienne, qui justement est définie comme l'ensemble des vecteurs décomposables.

**Définition 2** Soit  $\mathbf{v}$  un multivecteur de l'algèbre de Grassmann définie sur  $E$ . Un multivecteur est dit *décomposable* si et seulement si il s'écrit comme le produit extérieur de vecteurs de  $E$ .

Il en découle la propriété suivante, dont la démonstration, reposant à la fois sur la dépendance linéaire de  $\mathbf{v}$  vis-à-vis de lui-même et sur l'anticommutativité du produit extérieur, est laissée en exercice :

**Propriété** Un multivecteur  $\mathbf{v}$  est décomposable si et seulement si  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$ .

**Définition 3** La surface de Plücker, aussi connue sous le nom de Grassmannienne, de variété de Grassmann ou d'hypersurface de Plücker, est l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de dimension 2 dans un espace vectoriel de dimension 4. Les points de cette variété ont pour représentants homogènes les multivecteurs décomposables non nuls de  $\wedge^2(E)$ .

Clairement, il existe beaucoup de 2-vecteurs de  $\wedge^2(E)$  qui n'appartiennent pas à cette *surface*. Par exemple, soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de l'espace de droites non décomposable, *i.e.* tel que  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ , où  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  est une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{P}^3$ . Calculons le produit de  $\mathbf{v}$  par lui-même :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} &= [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}] \wedge [\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}] \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \wedge \mathbf{b} \\ &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \\ &= 2\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne est immédiate puisque notre famille de vecteurs  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  est, par hypothèse, libre.

Il est tout aussi facile de montrer que tous les vecteurs décomposables, *i.e.* de la forme  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , appartiennent à la Grassmannienne et représentent une droite de l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$ . Le dernier point est immédiat, par définition, sachant quand même qu'il peut s'agir d'une droite à l'infini dans le cas où  $\mathbf{a}$  et/ou  $\mathbf{b}$  sont eux-mêmes des points à l'infini. Le premier point consiste à montrer que  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$ , ce qui est presque aussi immédiat, puisque par permutation nous avons  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}$ , *i.e.* par définition du produit extérieur (*cf.* équation 11)  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$ .

### 3.4. Dualité

**Définition 4** Algébriquement, l'espace dual  $E^*$  d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  est le  $K$ -espace vectoriel des formes linéaires  $\theta(\mathbf{v})$  (ou covecteurs) de  $E$  sur  $K$  muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire :

$$\begin{aligned}(\theta + \phi)(\mathbf{v}) &= \theta(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{v}) \\ (\alpha\theta)(\mathbf{v}) &= \alpha\theta(\mathbf{v})\end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}$  est un vecteur de  $E$  et  $\alpha$  un scalaire de  $K$ , avec  $\theta$  et  $\phi$  deux formes linéaires de  $E$  sur  $K$ .

Une propriété importante est la suivante :

**Propriété** Soit  $\theta$  une forme linéaire non nulle dans le dual  $E^*$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . L'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}$  de  $E$  tels que  $\theta(\mathbf{v}) = 0$  détermine un hyperplan  $\mathcal{H} = \{\mathbf{v} \in E \mid \theta(\mathbf{v}) = 0\}$ , *i.e.* un sous-espace vectoriel de dimension  $n - 1$  dans  $E$ . ■

L'opérateur  $side()$  défini dans l'équation 5 peut être transformé en une forme linéaire  $\theta(l')$  en fixant la droite  $l$ , *i.e.* en posant

$$\theta(l') = side(l, l')$$

Appliquant cette notion de dualité à notre espace de Plücker, il devient possible d'associer à n'importe quelle droite de coordonnées  $l$  son hyperplan dual  $\mathcal{H}_l$  dans  $\wedge^2(E)^*$ , l'espace dual de  $\wedge^2(E)$ . L'utilité d'une telle démarche est surtout justifiée dans les calculs de visibilité, qui reposent sur des intersections dans  $\wedge^2(E)$  de demi-espaces définis par des hyperplans du dual [NBG02, HMN05, MA05, Cha07].

On observera à ce titre que l'hyperplan dual d'une droite contient l'ensemble des droites qui lui sont incidentes ou parallèles (*i.e.* incidentes à l'infini). En effet, en prenant une droite  $l$  de coordonnées  $\Pi_l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$ , alors pour toute droite  $l'$  de coordonnées  $\Pi_{l'} = \{\mathbf{u}' : \mathbf{v}'\}$ , l'incidence s'exprime par la relation  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' = 0$ , découlant de l'orientation relative de droites entre-elles. Cette relation est justement l'expression de la dualité : il est relativement simple de montrer qu'il s'agit d'une forme linéaire, et donc que l'hyperplan dual de  $l$  a pour coordonnées  $\Pi_l^* = \{\mathbf{v} : \mathbf{u}\}$  dans la base duale de  $E$  [Pos81].

Il faut prendre garde à ne pas pousser trop loin l'analogie avec, dans un espace affine 3D, un plan passant par l'origine, qui est toujours le dual d'un vecteur qui lui est orthogonal. Si, en 3D, tout vecteur non nul n'appartient pas à son plan dual, au contraire, dans l'espace de Plücker, toute droite  $l$  de vecteur  $\Pi_l$  est par définition contenue dans son hyperplan dual  $\mathcal{H}_l$ .

## 4. Retrouver les propriétés connues

Clairement, les trois versions, géométrique, matricielle (algèbre linéaire), ou algébrique (algèbre de Grassmann), conduisent toutes aux mêmes coordonnées de Plücker. Il ne s'agit que de mécanismes différents formalisant plus ou moins bien la même chose. Les coordonnées sont dans chaque cas exactement les mêmes.

Là où les différences se font sentir, c'est lorsque nous essayons d'utiliser ces définitions de droites dans quelque but que ce soit. Nous prenons dans la suite des exemples qui essayent de faire comprendre les possibilités et les limites des différentes approches.

### 4.1. L'opérateur $side()$

L'opérateur  $side()$  [MW04] permet de calculer explicitement l'orientation relative de deux droites entre elles. Sa définition se comprend très bien dans le cadre des algèbres de Grassmann. Comme cela a été vu dans le paragraphe 2.2.2, cet opérateur représente une *mesure* du volume formé par deux couples de points pris sur les deux droites. Dans l'algèbre de Grassmann, cela revient à calculer le sous-espace engendré par ces 4 points.

Soient deux droites de  $\mathbb{P}^3$  définies respectivement à partir de deux points de vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  (resp.  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$ ). L'opérateur  $side()$ , *i.e.* le sous-espace  $SE$  engendré par le produit de ces quatre points, s'écrit donc :

$$\begin{aligned}SE &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} \\ &= \left( \sum_{i=1}^4 a_i \mathbf{e}_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{e}_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^4 c_i \mathbf{e}_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^4 d_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= (\dots) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4\end{aligned}$$

Les pointillés de la dernière ligne représentent les 24 termes  $s \cdot a_i b_j c_k d_l$  où les indices  $i, j, k, l$  sont des permutations de  $[1, 2, 3, 4]$ , et où  $s$  est un signe positif ou négatif résultant de l'anticommutativité du produit extérieur. Pour simplifier son calcul, prenons directement dans l'espace de Plücker les droites  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ ; le même sous-espace s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} &= (v_1 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + v_4 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + v_5 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + v_6 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &\quad \wedge (u_1 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + u_4 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + u_5 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + u_6 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)\end{aligned}$$

En développant le produit extérieur sur l'addition, et en éliminant les 30 termes dans lesquels apparaît deux fois un même vecteur de la base de  $\wedge^1(E) \sim E$ , il reste les 6 termes suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} &= v_1 u_4 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + v_2 u_5 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad + v_3 u_6 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + v_4 u_1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad + v_5 u_2 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 + v_6 u_3 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= (v_1 u_4 + v_2 u_5 + v_3 u_6 + v_4 u_1 + v_5 u_2 + v_6 u_3) \\ &\quad \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Rappelons que, par exemple,  $\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ , encore une fois du fait de l'anti-commutativité du produit extérieur.

Si l'approche de Grassmann permet de retrouver formellement l'expression de l'opérateur *side()*, il apparaît évident que la version géométrique est malgré tout plus rapide, tout en étant plus intuitive. Par contre, retrouver le même résultat en utilisant l'algèbre linéaire est largement plus difficile. C'est malgré tout possible, et cela consiste à calculer le déterminant de la matrice  $4 \times 4$  résultant du système composé des quatre points projectifs, puis à remarquer que si les deux droites ainsi définies sont coplanaires alors ce déterminant est nul, exprimant ainsi la dépendance linéaire des quatre vecteurs. Dans le cas contraire, les droites ne sont pas coplanaires, la matrice est de rang 4, et le signe du déterminant représente l'orientation des deux droites par analogie avec le cas géométrique.

#### 4.2. La quadrique de Plücker

La quadrique de Plücker [Pos81], autrement dit la surface de  $\mathbb{P}^5$  contenant l'ensemble des droites ayant un équivalent dans  $\mathbb{P}^3$ , correspond exactement à la définition de la Grassmannienne (cf. définition 3) : l'approche de Grassmann est donc la plus naturelle. Une droite de Plücker de coordonnées  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$  appartenant à la Grassmannienne, le fait que  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$  conduit (la preuve est la même que ci-dessus pour le calcul de  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ ), à la fameuse relation de Plücker :

$$v_1 v_4 + v_2 v_5 + v_3 v_6 = 0 \quad (20)$$

L'approche linéaire permet d'en faire la preuve, assez difficilement et longuement (et c'est pourquoi nous ne la développons pas ici), sans aucune intuition géométrique possible.

L'approche géométrique est plus intuitive, tout en restant moins élégante que la version Grassmannienne. Il suffit de remarquer que l'opérateur *side()* fournit notamment l'incidence de deux droites entre elles, en cas de résultat nul ; en l'appliquant sur la même droite, nous obtenons encore une fois l'équation 20.

#### 4.3. Intersection droite et plan

Lorsque la droite est connue par ses coordonnées de Plücker, alors l'approche géométrique permet d'obtenir une so-

lution : notons donc la droite  $l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$ , et le plan défini dans  $\mathbb{P}^3$  comme  $\pi = [\mathbf{n} : d]$ , i.e. par sa normale et un scalaire  $d$  pris tel qu'il existe un point  $A$  du plan avec  $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ . Le point d'intersection  $P$ , s'il est unique (si  $\pi$  et  $l$  ne sont pas coplanaires) est défini en coordonnées homogènes comme  $[\mathbf{v} \times \mathbf{n} - d\mathbf{u} : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]$ .

Notons pour commencer que si le produit scalaire  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  est nul, le point d'intersection est un point à l'infini. En effet, l'intersection dans  $\mathbb{R}^3$  entre un plan et une droite qui lui est parallèle est, soit la droite elle-même, soit l'ensemble vide.

Pour montrer que cette expression de l'intersection est valide, il suffit de montrer que le point obtenu est à la fois dans le plan  $\pi$  et sur la droite  $l$ . La première assertion est évidente, puisque appliquée à l'équation du plan nous avons directement :

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} : d] \cdot \mathbf{p} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n} - d\mathbf{u}) + d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ne connaissant pas deux points quelconques de  $l$ , nous posons arbitrairement ceux de vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , supposés linéairement indépendants. Pour l'appartenance à la droite, en algèbre linéaire il suffit de montrer que le système formé par les trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{p}$  reste de rang 2 :

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_p \\ y_a & y_b & y_p \\ z_a & z_b & z_p \\ 1 & 1 & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Les 4 déterminants  $3 \times 3$  que l'on peut construire font tous intervenir les coordonnées de Plücker de  $l$ , comme par exemple le premier :

$$x_p \begin{vmatrix} y_a & y_b \\ z_a & z_b \end{vmatrix} + y_p \begin{vmatrix} z_a & z_b \\ x_a & x_b \end{vmatrix} + z_p \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}$$

Notons que, ci-dessus, les trois déterminants  $2 \times 2$  correspondent, par définition, aux coordonnées du vecteur position  $\mathbf{v}$  de  $l$ . Il est facile de vérifier que tous ces déterminants  $3 \times 3$  sont nuls, et donc que le système est bien de rang 2. Par exemple, toujours avec le premier cas et en utilisant les coordonnées de la droite  $\{\mathbf{u} : \mathbf{v}\} = (u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z)$  :

$$\begin{aligned} x_p \cdot v_x + y_p \cdot v_y + z_p \cdot v_z &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{n} - d\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En utilisant les algèbres de Grassmann, la preuve de l'appartenance du point d'intersection  $P$  à la droite  $l$  consiste aussi à montrer que ces déterminants sont nuls. Si un point appartient à une droite, c'est que le sous-espace engendré par  $l \wedge \mathbf{p}$  est nul, ce qui, dans le principe, revient bien au même.

#### 4.4. Intersection entre une droite et un triangle

L'intersection entre une droite et un triangle est relativement simple partant de celle entre la même droite et le plan support du triangle en question. Il suffit ensuite (ou avant, selon les implantations) de vérifier l'appartenance du point d'intersection au triangle. Pour cela, on applique l'opérateur  $side()$  sur chacune des trois arêtes du triangle. Pour qu'il y ait intersection, il faut que les trois signes soient identiques (tous positifs ou nuls, ou tous négatifs ou nuls) : en effet, si la droite traverse le triangle, c'est obligatoirement en passant soit à droite de chaque arête, soit à leurs gauches.

En pratique, sans précalcul, il est courant de simplifier les traitements, en ramenant l'origine du repère cartésien sur le point de départ du rayon, de sorte à simplifier l'opérateur  $side()$ , i.e. à faire abstraction de la position du rayon qui devient nulle. On se ramène ainsi à un test classique de position d'un vecteur par rapport à un hyperplan passant par l'origine (cf. le §2.2.2), revenant ainsi à un test assez proche de celui de Möller [MT97].

#### 4.5. Plan passant par une droite et un point

L'algèbre de Grassmann apporte une solution simple. Remarquons qu'un plan défini par trois points de vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  de  $E = \mathbb{P}^3$  est le 3-vecteur de  $\wedge^3(E)$  de valeur  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ . Une base de  $\wedge^3(E)$  est par exemple la famille libre des quatre vecteurs suivants :  $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$ .

Calculons le produit d'une droite  $\Pi = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ , exprimé dans la même base que pour les équations 14 à 19, et d'un point  $\mathbf{a} = (x, y, z, 1)$ , produit qui correspond à un sous-espace de dimension 3 dans  $E$ , noté  $SE$  :

$$SE = (v_1 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 + v_4 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + v_5 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + v_6 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge (x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$$

En développant, et en supprimant sans attendre tous les termes nuls résultant de l'anticommutativité du produit extérieur, donc de l'équation 11, il vient :

$$\begin{aligned} SE &= v_1 y \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + v_1 z \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + v_2 x \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + v_2 z \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + v_3 x \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + v_3 y \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &\quad + v_4 x \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + v_4 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \\ &\quad + v_5 y \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + v_5 \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 \\ &\quad + v_6 z \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + v_6 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \\ &= (v_2 z - v_3 y + v_4) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (v_3 x - v_1 z + v_5) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (v_1 y - v_2 x + v_6) \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (v_4 x + v_5 y + v_6 z) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Il est possible de réaliser simplement le lien avec la version géométrique des coordonnées de Plücker. Soit donc le plan

formé par la droite  $l = \{\mathbf{u} : \mathbf{v}\}$  et le point  $\mathbf{p} = (x, y, z, 1)$ , et ayant pour équation :

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

Il faut retrouver dans l'expression de  $SE$  les quatre coordonnées du plan. Pour cela, remarquons que quatre points quelconques sont coplanaires si et seulement si leur produit est nul :  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = 0$ ; en n'utilisant encore que la propriété d'anticommutativité du produit extérieur, il est alors évident que les termes de  $SE$  correspondent aux coordonnées du plan. Ainsi, dans la première on retrouve  $a \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$  : en multipliant ce terme par un point  $\mathbf{q}$  quelconque, il ne reste que  $a x_q \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ . Au final, le plan passant par une droite et un point est  $(a, b, c) = \mathbf{u} \times \mathbf{p} + \mathbf{v}$  et  $d = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ , preuve d'un résultat que l'on retrouve dans [Sho98].

#### 4.6. Construction d'une droite par deux plans

Soit deux plans d'équations  $[a_1, b_1, c_1, d_1] = [\mathbf{n}_1 : d_1]$  et  $[a_2, b_2, c_2, d_2] = [\mathbf{n}_2 : d_2]$ . La droite passant par ces deux plans est définie par leur intersection. Malheureusement, l'intersection n'est pas quelque chose d'évident à manipuler dans les algèbres de Grassmann, même si c'est possible en travaillant dans l'espace dual.

Avec l'algèbre linéaire, il suffit de montrer (avec le même raisonnement que pour définir les coordonnées de Plücker) que les mineurs du système représentant notre droite la caractérisent. La matrice en question est formée des équations de plans :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{pmatrix}$$

L'équation de la droite  $l$  résultante est :

$$\Pi_l = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ d_2 a_1 - d_1 a_2 \\ d_2 b_1 - d_1 b_2 \\ d_2 c_1 - d_1 c_2 \end{pmatrix}$$

Le lecteur attentif aura remarqué qu'il en découle que la droite s'écrit aussi  $\Pi_l = \{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 : d_2 \mathbf{n}_1 - d_1 \mathbf{n}_2\}$ .

#### 5. Conclusion

Cet article a rappelé les trois versions connues permettant de définir proprement les coordonnées de Plücker. Il s'agit d'approches complémentaires, ayant chacune leur intérêt propre. La vision géométrique est surtout utile pour sa possibilité d'y interpréter géométriquement quelques propriétés, et donc d'imaginer des utilisations nouvelles. De cette approche découle principalement l'utilisation des coordonnées de Plücker en lancé de rayons, dans le but de cal-

culer l'intersection d'un rayon avec une face ou un volume convexe.

De l'approche reposant sur l'algèbre linéaire, nous retiendrons surtout l'expression matricielle. Assez naturelle elle-aussi, elle montre bien l'aspect "calcul de déterminant" des coordonnées de Plücker. Elle permet quelques démonstrations simples, comme le calcul de l'expression du plan passant par un point et une droite. Malgré tout, son aspect matriciel, trop dépendant des coordonnées, empêche toute interprétation géométrique, et gêne à ce titre son utilisation.

Enfin, de la définition dans l'algèbre de Grassmann, nous retiendrons que l'utilisation d'une algèbre géométrique, simple à mettre en oeuvre et à manipuler, autorise un formalisme symbolique, et aboutit de fait à une définition des coordonnées très simple, formelle, et facile à manipuler. Les quelques démonstrations illustrées dans cet article en sont un exemple. Notons que l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique permet en pratique d'effectuer assez simplement des démonstrations plus complexes. Notamment, elle permet de formaliser le calcul de visibilité introduit par Nirenstein pour aboutir à des solutions vraiment robustes et efficaces [CAF07].

## Références

- [Aud06] AUDIN M. : *Géométrie*. EDP Sciences, 2006.
- [CAF07] CHARNEAU S., AVENEAU L., FUCHS L. : Exact, robust and efficient full visibility computation in the Plücker space. *The Visual Computer* 23, 9-11 (2007), 773–782.
- [Cha07] CHARNEAU S. : *Étude et application des algèbres géométriques pour le calcul de la visibilité globale dans un espace projectif de dimension  $n \geq 2$* . PhD thesis, Université de Poitiers, décembre 2007.
- [HMN05] HAUMONT D., MAKINEN O., NIRENSTEIN S. : A low dimensional framework for exact polygon-to-polygon occlusion queries. In *Rendering Techniques 2005 : Proceedings of the 16th symposium on Rendering* (2005), Eurographics Association, pp. 211–222.
- [MA05] MORA F., AVENEAU L. : Fast and exact direct illumination. In *Proceedings of CGI'2005* (Juin 2005).
- [MT97] MÖLLER T., TRUMBORE B. : Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *journal of graphics tools* 2, 1 (1997), 21–28.
- [MW04] MAHOVSKY J., WYVILL B. : Fast ray-axis aligned bounding box overlap tests with plücker coordinates. *Journal of Graphics Tools* 9, 1 (2004), 35–46.
- [NBG02] NIRENSTEIN S., BLAKE E., GAIN J. : Exact from-region visibility culling. In *Proceedings of the 13th workshop on Rendering* (2002), Eurographics Association, pp. 191–202.
- [Pel90] PELLEGRINI M. : Stabbing and ray-shooting in 3-dimensional space. In *Proc. 6<sup>th</sup> ACM Symposium on Computational Geometry* (1990), pp. 177–186.
- [Pel93] PELLEGRINI M. : Ray shooting on triangles in 3-space. *Algorithmica* 9, 5 (1993), 471–494.
- [Plü65] PLÜCKER J. : On a new geometry of space. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), 725–791.
- [Pos81] POSTNIKOV M. : *Leçons de géométrie : Algèbre linéaire et géométrie différentielle*. Editions Mir, Moscou, 1981.
- [Sho98] SHOEMAKE K. : Plücker coordinate tutorial. *Ray Tracing News* 11(1) (1998).
- [Som59] SOMMERVILLE D. : *Analytical Geometry of Three Dimensions*. Cambridge University Press, 1959.
- [Tel92] TELLER S. : Computing the antipenumbra of an area light source. *Computer Graphics (Proc. Siggraph '92)* 26 (1992), 139–148.
- [TH99] TELLER S., HOHMEYER M. : Determining the lines through four lines. *Journal of Graphics Tools* 4, 3 (1999), 11–22.