

# Calcul de chemin géodésique linéaire appliqué à la morphométrie numérique

Rémi Synave, Stefka Gueorguieva et Pascal Desbarats

synave@lisc.univ-littoral.fr  
{stefka,desbarats}@labri.fr  
LaBRI - Université de Bordeaux 1

---

## Résumé

*Une méthode de calcul d'un chemin géodésique linéaire reliant une paire de sommets appartenant à une surface polyédrique triangulée, avec ou sans bords, est proposée. La méthode construit un chemin géodésique contraint sur un plan de découpe pour satisfaire les conditions de linéarité. La méthode est intégrée dans une chaîne numérique complète d'acquisition au scanner laser, de reconstruction, de modélisation, et d'impression 3D. Une application de la méthode pour la simulation des mesures morphométriques est présentée.*

---

**Mots clé :** acquisition au scanner laser, chemin géodésique, subdivision, anthropologie numérique, morphométrie

## 1. Introduction

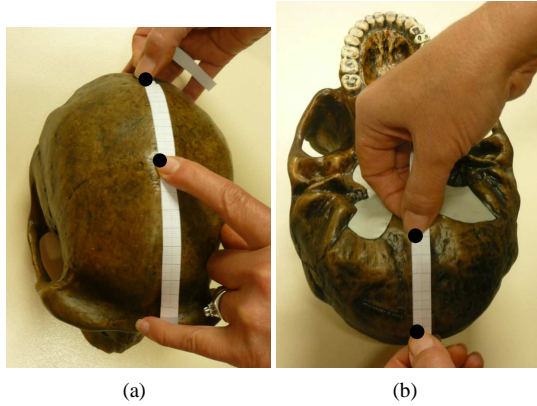
La recherche de chemin géodésique est un domaine étudié depuis de nombreuses années. Parmi les applications rattachées à notre étude on pourra citer la définition et l'estimation des métriques sur des courbes et surfaces discrètes [KK95, MM97, KS98, LMS97, JC98, KS01, NK02, GKK02, MVC05, WDB\*08b, PBCG09], le calcul de géodésiques, la paramétrisation et le remaillages des surfaces [Set96, SSG03, PC06, SSK\*05, LHL06, DRB\*09, SJC09, TWZZ07, XW09] ou encore l'imagerie médicale [CK97, WPS03, Coh05]. Nous nous intéressons plus particulièrement à une application issue de l'anthropologie numérique [CCD\*07] qui consiste à calculer les distances géodésiques entre des points caractéristiques situés sur des sommets de maillages représentant des reconstructions numériques de collections ostéologiques. Dans ce cadre précis, il s'agit de trouver la courbe discrète reliant des sommets caractéristiques et de calculer sa longueur afin de simuler les mesures morphométriques effectuées sur les modèles physiques. Par la suite, nous parlerons de **chemin géodésique discret** ou **chemin géodésique** reliant les **sommets caractéristiques**.

Dans le contexte de ce travail, nous effectuons des acquisitions d'objets réels et produisons des maillages que nous appelons **modèles numériques**. Ces modèles numériques ont

une précision définie par la résolution de l'acquisition. Dans la mesure où ces maillages sont des représentations discrètes des objets réels, le chemin géodésique est une approximation du plus court chemin entre les points caractéristiques sur le modèle physique (voir figure 1). Notre objectif est de trouver une solution optimale, non seulement au sens usuel, c'est à dire un chemin de plus courte longueur, mais aussi de construire un chemin qui remplit des conditions de linéarité en minimisant la courbure géodésique discrète introduite par Polthier [PS06].

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode de calcul de chemin géodésique linéaire reliant un sommet source à un sommet destination sur une surface triangulée. Notre méthode est fondée sur la définition d'un plan de découpe passant par les sommets source et destination, et suivant la courbure de la surface le long d'une bande comprenant des chemins les plus courts. Ce plan de découpe est utilisé pour subdiviser la surface initiale de manière à produire un chemin géodésique le long de l'intersection. Ce chemin ainsi construit est appelé **chemin géodésique linéaire**. La méthode élaborée généralise les résultats de [PS06, LHL06].

Le chemin linéaire de Polthier [PS06] résout le problème discret de la valeur initiale : soit une surface polyédrique  $S$ , un sommet  $p$ ,  $p \in S$ , et un vecteur  $v$  tangent de  $S$  dans  $p$ ,  $v \in T_p S$ . Alors le problème discret de la valeur initiale consiste à trouver un chemin géodésique  $\gamma$  sur  $S$  tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(0)' = v$  qui relie  $p$  à la frontière de  $S$ .



**Figure 1:** Mesure morphométrique à l'aide d'un ruban millimétré - (a) Mesure "crâne\_M27" entre les points caractéristiques bregma et lambda - (b) Mesure "crâne\_M28(b)" entre l'inion et l'opisthion.

A la différence du chemin linéaire de Polthier, nous nous intéressons au problème avec des points source et destination spécifiés et des directions libres aux sommets de départ et d'arrivée.

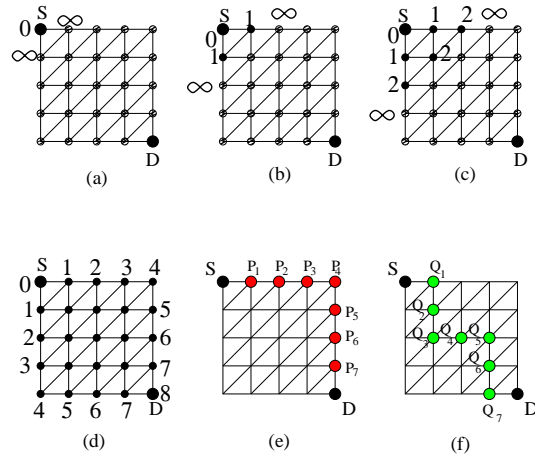
A l'instar de [LHL06], un plan de découpe contraint la construction du chemin linéaire. Le calcul du plan de découpe selon Lee et al. dépend uniquement de la frontière de la surface polyédrique sous-jacente et est restreint aux surfaces 2D variété avec bords. Nous proposons une nouvelle construction du plan de découpe qui dépend de la courbure de la surface localement dans une région comprenant les sommets caractéristiques et des chemins les plus courts les reliant. Notre plan de découpe est défini pour des surfaces avec ou sans bords. De plus, la subdivision de la surface initiale par le plan de découpe et le traçage du chemin géodésique le long de la surface subdivisée permet de construire un chemin linéaire passant par des points d'inflexion.

La méthode proposée est validée d'une part en utilisant le critère métrique en comparant les longueurs des chemins géodésiques sur des exemples synthétiques où ces longueurs peuvent être calculées de manière analytique. D'autre part, la validité est étudiée en fonction de la courbure et des caractéristiques topologiques (surfaces 2D variété avec ou sans bords) de la surface triangulée sous-jacente.

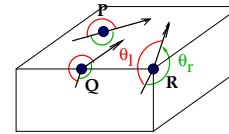
Dans un premier temps, nous faisons un survol des méthodes de calcul du chemin géodésique qui nous ont inspirées. Dans un second temps, nous détaillons notre méthode en proposant plusieurs cas d'études en fonction de types de surfaces triangulées. Nous donnons ensuite les résultats de la réalisation et de l'application de notre méthode dans une chaîne complète<sup>1</sup> de l'acquisition au scanner laser à l'im-

<sup>1</sup> La bibliothèque qui supporte l'ensemble des fonctionnalités est

pression 3D en passant par la reconstruction et la modélisation [SDG08, Syn09].



**Figure 2:** Calcul du plus court chemin d'après [Dij71] - (a) Maillage initial - (b,c,d) Itérations de l'algorithme - (e,f) Différents plus courts chemins calculés avec l'algorithme de Dijkstra.



**Figure 3:** Définition de la courbure discrète d'un chemin géodésique dans un point P sur une face, dans un point Q sur une arête et dans un sommet R.

## 2. État de l'art

De manière traditionnelle [Mou85, MMP87, Tho97, Mit98], les méthodes de calcul du chemin géodésique sont classées en deux catégories, selon si on calcule la distance entre un sommet source et l'ensemble des autres sommets ou la distance entre une paire de sommets fixés que l'on appellera **sommet source** et **sommet destination**, et qu'on dénotera respectivement S et D.

La méthode la plus connue est sans doute l'algorithme de Dijkstra [Dij71] qui permet de manière exhaustive de trouver le chemin le plus court entre un sommet source et tous les autres sommets du maillage. Une illustration est donnée sur la figure 2. Au départ, la distance entre le sommet source et tous les autres sommets est initialisée à une valeur extrême  $\infty$ . A chaque itération de l'algorithme, les distances aux sommets voisins sont mises à jour si de nouveaux plus courts

téléchargeable à l'adresse <http://liba2ri.free.fr> sous licence GNU GPL.

chemins sont trouvés. Pour chaque sommet on sauvegarde la distance du chemin le reliant à la source et son prédécesseur dans ce chemin. Ainsi, à partir d'un sommet donné, en remontant tous ses prédécesseurs on peut tracer le chemin de plus courte longueur le reliant au sommet source. Les avantages principaux de cet algorithme sont sa simplicité et sa généralité. Par contre, la complexité dans le cas général de polyèdre non convexe est exponentielle [SS84, CR87]. De plus, si le chemin obtenu est optimisé par rapport à sa longueur, la linéarité de celui-ci n'est pas assurée. Une illustration est donnée sur la figure 2(e,f). Deux chemins les plus courts reliant  $S$  et  $D$ ,  $\{P_i\}_{i=0}^8$  et  $\{Q_i\}_{i=0}^8$ ,  $P_0 = Q_0 = S$  et  $P_8 = Q_8 = D$  sont représentés. Pour évaluer leur linéarité nous utilisons la courbure discrète géodésique  $\kappa_g$  introduite par Polthier [PS06] définie par (1) et illustrée sur la figure 3.

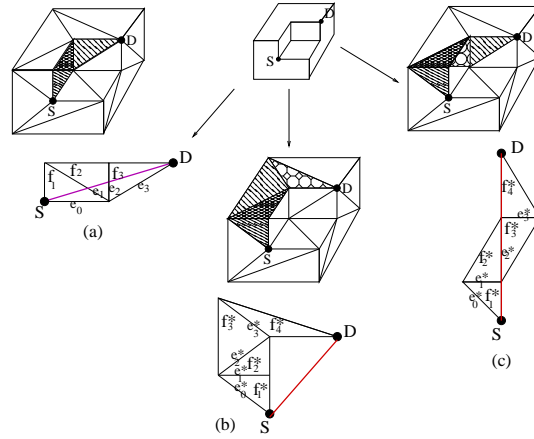
$$\kappa_g(P) = \frac{2\pi}{\theta_l + \theta_r} \left( \frac{\theta_l + \theta_r}{2} - \theta_r \right) \quad (1)$$

Les angles  $\theta_l$  et  $\theta_r$  dénotent les sommes des angles voisins au sommet  $P$  situés respectivement à gauche et à droite du chemin d'après son orientation de  $S$  vers  $D$ . Pour un chemin linéaire  $\theta_l = \theta_r$  et  $\kappa_g(P) = 0$  pour tout sommet  $P$  appartenant au chemin. Ainsi, pour le chemin  $\{P_i\}_{i=0}^8$  sur la figure 2(e),  $\kappa_g(P_i) = 0, i = 1 \dots 7, i \neq 4$ , et  $\kappa_g(P_4) = \pi$ . Pour le chemin  $\{Q_i\}_{i=0}^8$  sur la figure 2(f),  $\kappa_g(Q_i) = \pi, i = 1, 5$ ,  $\kappa_g(Q_i) = 0, i = 2, 4, 6$ , et  $\kappa_g(Q_i) = -\pi, i = 3, 7$ .

L'algorithme de Dijkstra a été repris dans de nombreuses études. Deux des plus connues sont la méthode continue de Dijkstra (MMP) [Mou85, MMP87, Tho97, Kap99, SSK\*05, Sch07] et la "Fast Marching Method" (FMM) [KK94, Set96, KS98, SSG03]. Ces méthodes sont aussi utilisées pour le calcul d'une approximation du chemin géodésique. Des études comparatives [DRB\*09] donnent un avantage à la méthode FMM à cause du phénomène de conversion du système métrique ("metrication error"). Les longueurs des chemins calculées au moyen de l'algorithme de Dijkstra ne sont pas isométriques sur différentes triangulations du même échantillonnage de points.

Une autre approche (CH) [CH96, KO00, PC06, XW09] est basée sur le calcul d'un dépliement sur un plan [SS84] de l'ensemble de faces traversées par un plus court chemin. Ce dépliement transforme un chemin géodésique en segment de ligne droite et permet de construire de manière incrémentale une arborescence dont les feuilles correspondent aux plus courts chemins reliant la racine au reste des sommets. Une illustration est donnée sur la figure 4 pour le calcul du plus court chemin entre  $S$  et  $D$ . Les faces  $\{f_i\}_{i=1}^3$  sont traversées par un plus court chemin reliant  $S$  et  $D$ . Sur le dépliement de  $\{f_i\}_{i=1}^3$  de la figure 4(a), le plus court chemin est un segment de droite, ainsi la suite d'arêtes  $\{e_i\}_{i=0}^3$ ,  $e_i = f_i \cap f_{i+1}, i = 1, 2$ , forme une "séquence du plus court chemin". Certaines séquences ne sont pas "séquences du plus court chemin" comme celles montrées sur la figure 4(b,c). L'algorithme CH permet d'éliminer ces séquences de la recherche et de ré-

duire la complexité à  $O(n^2)$ ,  $n$  étant le nombre de sommets de la surface.



**Figure 4:** Dépliement de surface et calcul de "séquence du plus court chemin".

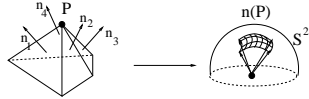
Pour certaines applications le problème du plus court chemin nécessite des algorithmes performants pour le calcul des solutions approximatives [KK94, HS95, HPSV96, AHPSV97, VA97, LMS97, KS98, AMS00, KS01, BCD\*02, NK02, MVC05, SSK\*05, TWZZ07]. Parmi ces solutions deux approches émergent. La première se fonde sur une optimisation itérative d'une approximation initiale du plus court chemin [LMS97, MM97, KS01, MVC05] suivant un raffinement sélectif de la surface sous-jacente. La qualité de l'approximation dépend de manière significative de l'initialisation et peut provoquer, soit une convergence vers un extremum local, soit demander un nombre important d'itérations. La deuxième [KS98, NK02, SSK\*05, TWZZ07], se base sur le calcul d'une fonction de distance géodésique qui permet de simuler la propagation d'un front à partir du sommet source  $S$ . Ensuite, par rétro-propagation à partir du sommet destination  $D$  on évalue le chemin le plus court le reliant à  $S$ . Pour ce faire on utilise l'algorithme FMM pour résoudre l'équation eikonale.

$$|\nabla T(P)|F = 1 \quad (2)$$

où  $T$  est la fonction de distance définie pour tout sommet  $P$  de la surface,  $T(S) = 0$ , et  $F$  est la vitesse de propagation du front. Il faut remarquer que l'évaluation de (2) sur des maillages irréguliers comme par exemple ceux comprenant des triangles obtus, nécessite une étude de cas [FH05, TWZZ07, WDB\*08b] qui le sensibilise à la qualité de la triangulation de la surface sous-jacente.

Dans notre domaine applicatif, une contrainte principale est de ne prendre en compte que les données réellement acquises. Aucun des "défauts" du modèle numérique comme des trous ou des aspérités dans la surface reconstruite qui peuvent faire dévier un chemin géodésique ne doivent pas

être comblés ou lissés. Ainsi par exemple, on ne peut pas rechercher et mesurer un chemin linéaire entre deux sommets caractéristiques si ce chemin est dévié par un bord de la surface ou si des variations de la courbure de la surface ne permettent pas la simulation d'une mesure physique. Pour étudier ces problèmes nous avons utilisé l'approche différentielle discrète [PP93, PS99, MMSB02, PS06, Gar04], en particulier la notion de courbure de Gauss d'une surface polyédrique. À tout sommet  $P$  appartenant à  $S$ , une surface polyédrique  $2D$  variété, on associe une normale  $n(P)$ ,  $n(P) \in S^2$ , qui est l'enveloppe convexe des vecteurs normaux des faces voisines comme illustré sur la figure 5. La courbure de Gauss

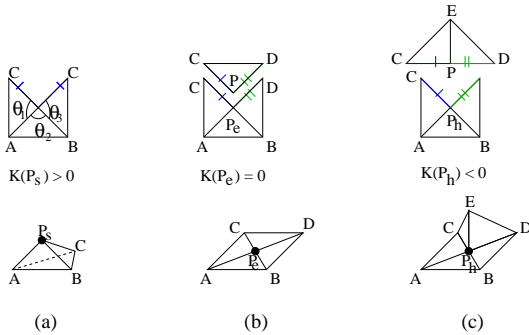


**Figure 5:** Courbure de Gauss,  $K(P)$  en un sommet d'une surface polyédrique.

peut être calculée d'après des caractéristiques métriques de  $S$ . Ainsi pour une surface polyédrique  $2D$  variété, la courbure de Gauss,  $K(P)$ , dans un sommet  $P$  est définie comme l'excès angulaire :

$$K(P) = 2\pi - \theta(P) = 2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i(P) \quad (3)$$

où  $\theta_i$  sont les angles de centre  $P$  appartenant aux faces voisines. Selon la courbure discrète, les sommets sont classés en trois groupes : les sommets sphériques  $P_s$ ,  $K(P_s) > 0$ , les sommets euclidiens  $P_e$ ,  $K(P_e) = 0$ , et les sommets hyperboliques  $P_h$ ,  $K(P_h) < 0$ . Une illustration est donnée sur la figure 6. Par exemple, le sommet  $F$ , du cube sur la fi-

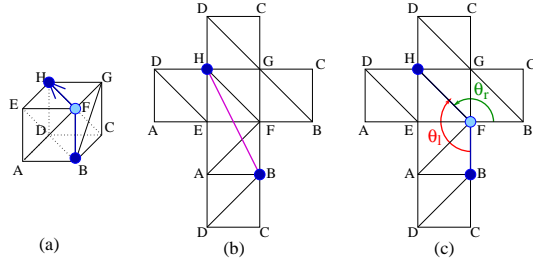


**Figure 6:** Classification des sommets d'une surface polyédrique en fonction de leur excès angulaire - (a) Sommet sphérique  $P_s$  - (b) Sommet euclidien  $P_e$  - (c) Sommet hyperbolique  $P_h$ .

gure 7, est un sommet sphérique avec une courbure de Gauss  $K(F) = \pi/2$ .

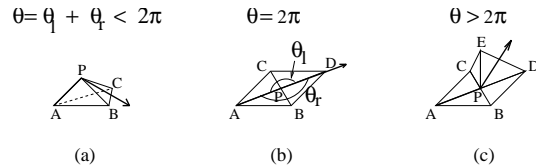
Le chemin géodésique discret diffère de manière significative d'une géodésique sur une surface continue. Ainsi un

chemin discret passant par un sommet sphérique ne peut pas être localement le plus court. Sur l'exemple de la figure 7, le chemin géodésique discret reliant les sommets  $B$  et  $H$  en passant par le sommet sphérique  $F$  de la figure 7(a) n'est pas localement le plus court comme illustré sur la figure 7(b). Polthier [PS06] introduit le chemin géodésique



**Figure 7:** Chemin géodésique discret - (a) Chemin le plus court - (b) Chemin localement le plus court - (c) Chemin géodésique de Polthier

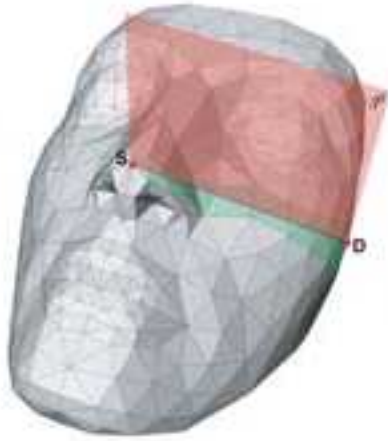
discret comme une courbe discrète telle qu'en tout point  $P$  de cette courbe, la courbure géodésique discrète  $\kappa_g(P)$  définie par (1) soit nulle,  $\kappa_g(P) = 0$ . L'illustration est donnée sur la figure 7(c). Cette définition permet une solution unique au problème discret de la valeur initiale et la simulation de la propagation d'un front évolutif [PS99] sur une surface polyédrique. Nous utilisons le chemin géodésique linéaire comme support des mesures entre sommets caractéristiques. Si le point de départ est le sommet source, la direction définie par la courbure géodésique rend certains sommets inaccessibles par un chemin linéaire. Sur la figure 8 sont donnés des exemples de chemins linéaires au départ du sommet  $A$  et de direction  $\vec{AP}$ . Sur la figure 8(c) le chemin linéaire doit couper l'arête  $ED$ , les sommets  $A$  et  $D$  sont reliés par le chemin  $\{A, P, D\}$  qui n'est pas linéaire. Pour palier à ce pro-



**Figure 8:** Chemin de Polthier entrant dans un sommet - (a) Sphérique - (b) Euclidien - (c) Hyperbolique.

blème, [LHL06] propose un raffinement de la surface polyédrique sous-jacente par un plan de découpe passant par les sommets source et destination. Pour calculer la normale du plan de découpe, Lee et al. utilise des faces virtuelles composées par le sommet source et des paires de sommets voisins appartenant au bord de la surface. Après la découpe, un chemin linéaire est tracé le long de l'intersection du plan de découpe et de la surface polyédrique. Une illustration est

donnée sur la figure 9. Le problème de cette construction est



**Figure 9:** *Chemin linéaire par plan de découpe. Figure tirée de [LHL06].*

l'orientation du plan de découpe qui selon le positionnement du sommet source par rapport au bord peut être très éloigné du plus court chemin pour simuler une mesure physique. De plus, cette orientation n'est pas définie pour des surfaces fermées sans bords ou des surfaces à bords multiples. Nous proposons une nouvelle méthode de calcul du plan de découpe fondée sur l'évaluation de la courbure de la surface localement dans une région longeant le chemin géodésique discret. Notre approche est applicable sur des surfaces triangulées avec ou sans bords.

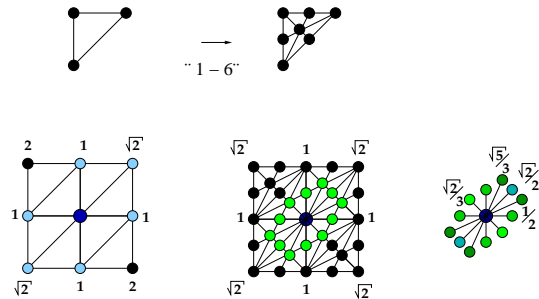
### 3. Calcul du chemin géodésique linéaire

L'algorithme de calcul du chemin géodésique linéaire proposé est composé de trois étapes comprenant la densification du maillage initial, la construction du plan de découpe et la subdivision du maillage par le plan de découpe, et finalement le traçage du chemin géodésique linéaire. Dans la suite nous détaillons chacune de ces étapes.

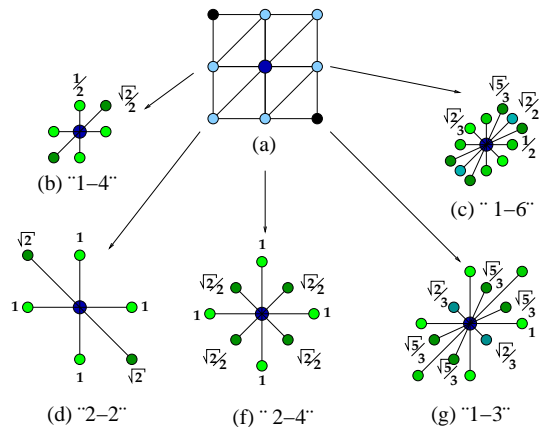
#### 3.1. Densification du maillage

Le raffinement du maillage est commun à toutes les méthodes approximatives. L'introduction des points de Steiner [MM97, LMS97, KS01] sur les arêtes, par exemple, permet de rééchantillonner le continuum d'orientations autour d'un sommet de l'intervalle complet  $[0, 2\pi]$ . Pour ce faire nous considérons les méthodes de subdivisions les plus utilisées pour le raffinement des maillages [ZSS96, ZDL\*00, DKL\*05]. Contrairement au raffinement par l'introduction des points de Steiner où des paramètres, comme leur nombre et le positionnement par arête qui sont difficiles à évaluer et

souvent sont des valeurs expérimentales, les propriétés des surfaces de subdivision sont bien connues. Nous étudions le voisinage de chaque sommet avant et après la subdivision en fonction de la discrétisation de l'angle total autour d'un sommet et des longueurs des arêtes adjacentes. Les grilles sont régulières et correspondent au maillages produits par l'acquisition. Pour la subdivision "1-6" par exemple, la première ligne de la figure 10 montre la subdivision d'un triangle. La deuxième ligne illustre la transformation des distances entre sommets voisins. La figure 11 montre l'ensemble des voisinages selon les différentes méthodes de subdivision après raffinement. Nous recherchons la subdivision pour qui l'ensemble des sommets voisins à un sommet donné après la subdivision est accessible de manière isotropique. Pour ce faire, après la subdivision, l'échantillonnage des angles autour d'un sommet doit être régulier et les sommets voisins équidistants. Le calcul de l'écart type des angles entre deux arêtes voisines et des longueurs des arêtes pour les subdivisions les plus utilisées montre que la subdivision "1-6" optimise ces deux paramètres.



**Figure 10:** *Subdivision "1-6".*



**Figure 11:** *Voisinages des sommets dans les maillages subdivisés : (a) Initial (b) Subdivision "1-4" (Loop [Loo87]) (c) Subdivision "1-6" (d) Subdivision "2-2" ("Edge-Flip") (e) Subdivision "2-4" (f) Subdivision "1-3" (Kobelt [Kob00]).*



Ainsi, la première étape de notre algorithme est la densification du maillage par une subdivision "1 – 6" qui découpe chaque triangle en six parties par rapport aux trois médianes. De cette manière aucune direction n'est privilégiée. Un sommet est relié avec le milieu de l'arête opposée.

### 3.2. Calcul du plan de découpe

Contraindre le chemin sur un plan, passant par le sommet source et destination, solutionne plusieurs problèmes de part sa construction : la linéarité, l'orientation dans des sommets sphériques ou hyperboliques, l'unicité et le reliement des sommets source et destination par ce chemin.

Ce qui reste à définir est l'orientation du chemin de manière à être le plus proche possible du plus court chemin exact en suivant la courbure de la surface dans la bande de triangles le long de ce chemin exact et par analogie à la mesure physique prise au ruban millimétré.

#### 3.2.1. Recensement de sommets de plus courts chemins

Cette étape est basée sur deux observations décisives pour notre application :

- le chemin le plus court n'est pas unique, différentes suites d'arêtes peuvent donner la longueur optimale,
- suivant l'algorithme employé, le chemin le plus court n'est pas symétrique par rapport aux sommets source et destination. Par exemple, en utilisant un algorithme tel que  $A^*$  [GH05], les chemins de  $S$  à  $D$ , et de  $D$  à  $S$  peuvent être composés de différentes suites d'arêtes. Or, quand on effectue des mesures physiques, aussi bien la distance que le "plongement" du ruban millimétré entre des points caractéristiques sur la surface de l'objet, sont identiques.

Pour cette raison, dans un premier temps nous procédons à un recensement de sommets appartenant à des chemins les plus courts entre  $S$  et  $D$  puis  $D$  et  $S$ .

Pour rechercher le plus court chemin nous reprenons l'algorithme  $A^*$  [GH05]. Soit l'exemple de la figure 12(a) où on cherche à construire le plus court chemin allant de  $S$  à  $D$ . Comme illustré sur la figure 12, à la première itération il y a deux candidats possibles,  $P_1$  et  $P_1^*$ . Les chemins  $c_1^1 = (S, P_1)$  et  $c_2^1 = (S, P_1^*)$  sont équivalents (même longueur, même courbure). A la deuxième itération, il y a trois sommets candidats pour la prolongation du chemin le plus court retenu à la première itération,  $Q_2, P_2$  et  $Q_2^*$ . Les chemins obtenus,  $c_1^2 = (S, P_1, Q_2)$ ,  $c_2^2 = (S, P_1, P_2)$ ,  $c_3^2 = (S, P_1^*, P_2)$  et  $c_4^2 = (S, P_1^*, Q_2^*)$  ont la même longueur. Les chemins  $c_1^2$  et  $c_4^2$  bien que linéaires, "éloignent" du sommet destination  $D$  par rapport aux chemins  $c_2^2$  et  $c_3^2$ . Si on étudie les distances des extrémités des chemins au sommet  $D$  on a :

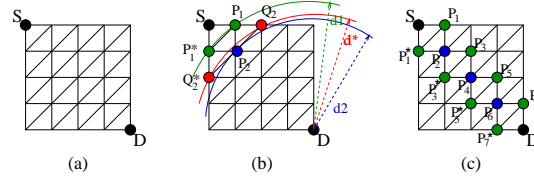
$$d_1 = \|P_1D\| = \|P_1^*D\| \quad (4)$$

$$d^* = \|Q_2D\| = \|Q_2^*D\| \quad (5)$$

$$d_2 = \|P_2D\| \quad (6)$$

$$d_1 < d^* < d_2 \quad (7)$$

Nous proposons de choisir le chemin le plus court qui à chaque itération nous rapproche le plus au sommet destination. S'il existe plusieurs sommets qui sont à la même distance du sommet destination, le choix se porte sur l'un d'eux sans préférence. Les sommets sources de choix multiples sont maintenus dans une liste de manière à être aussi pris en compte à l'étape de calcul du plan de découpe. Nous appelons cette méthode "Approche avant". Sur l'exemple, l'ensemble de sommets traités par l' "Approche avant" est donné sur la figure 12(c). Par symétrie, la méthode "Ap-

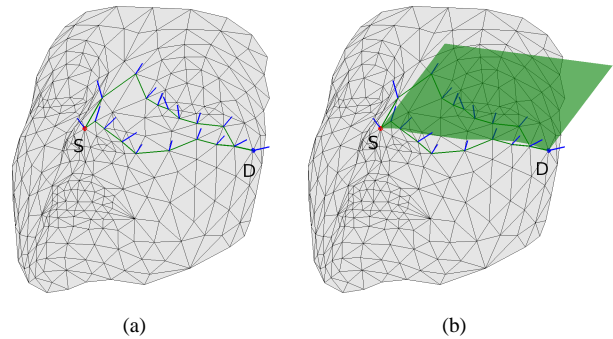


**Figure 12:** Le plus court chemin - (a) Maillage initial - (b) "Approche-avant" - (c) Ensemble de sommets couverts par différents chemins "Approche-avant".

proche arrière", produit un plus court chemin de  $D$  à  $S$  en cherchant à chaque itération le sommet qui nous rapproche le plus du sommet  $S$ .

#### 3.2.2. Calcul du plan de découpe

A cette étape de l'algorithme on construit le plan de découpe (voir figure 13) passant par les sommets source et destination,  $S$  et  $D$ , et de normale calculée comme une somme pondérée des normales  $n(P)$ , pour l'ensemble des sommets  $P$  recensés à l'étape précédente.



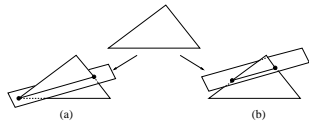
**Figure 13:** Illustration du calcul du plan de découpe sur le modèle utilisé dans [LHL06] - (a) Résultat des méthodes "Approche avant" et "Approche arrière" et calcul des normales - (b) Calcul du plan de découpe.

### 3.2.3. Subdivision par le plan de découpe

L'intersection du maillage avec le plan de découpe produit un chemin linéaire qui "traverse" les triangles du maillage. Deux cas de découpe sont possibles :

- l'ajout d'un sommet sur une des arêtes du triangle dans le cas où l'un des sommets du triangle se trouve sur le plan et le plan coupe l'arête opposée (voir figure 14(a)),
- l'ajout d'un sommet sur deux arêtes du triangle dans le cas où le plan et le triangle s'intersectent. (voir figure 14(b))

La subdivision des triangles par le plan de découpe entraîne un ajout d'arêtes à l'intersection du plan et du maillage créant ainsi un chemin linéaire allant du sommet source  $S$  au sommet destination  $D$ .



**Figure 14:** Découpe d'un triangle - (a) Un sommet appartient au plan de découpe - (b) Aucun sommet n'appartient au plan de découpe.

### 3.3. Calcul du chemin géodésique linéaire contraint sur le plan de découpe

À partir du sommet source  $S$  on trace le chemin géodésique linéaire dans le maillage subdivisé par le plan de découpe en itérant les pas suivants à commencer par le sommet source  $S$ .

1. Pour un sommet  $P$  trouver l'arête  $e_P$  incidente à  $P$  et sur le plan de découpe.
2. Vérifier si c'est la fin de chemin selon si la deuxième extrémité de  $e_P$  est le sommet destination  $D$ . Si le test est positif alors le traçage est arrêté. Le chemin géodésique linéaire est achevé. Sinon, le sommet  $P$  est réinitialisé avec la deuxième extrémité de  $e_P$  et il y a réitération depuis le pas précédent.

## 4. Expérimentations

### 4.1. Plan d'expérimentation

La validation du calcul du chemin géodésique linéaire est effectuée sur un ensemble de maillages triangulaires qui regroupe deux types de modèles : des modèles synthétiques et des modèles d'objets acquis et reconstruits avec la chaîne  $A2RI$ . Les modèles synthétiques sont issus soit de discrétisations des surfaces quadratiques telles que la sphère, le cylindre et le cône, soit des modèles appartenant aux dépôts<sup>2</sup> qui sont utilisés comme des exemples témoins. Les

maillages produits par  $A2RI$  comprennent des objets de formes géométriques variées ainsi que les spécimens des collections ostéologiques représentatifs pour cette étude.

Les extrémités des chemins géodésiques sont pointées soit de manière interactive en des sommets du maillage, avec la précision d'un voisinage de profondeur choisie, soit dans une liste de sommets caractéristiques prédéfinis.

Enfin, le calcul du chemin est évalué suivant deux aspects. Le premier aspect concerne la correspondance entre le chemin géodésique calculé et le chemin réel en termes de longueur et de linéarité. Le deuxième aspect est lié à la performance en termes d'efficacité du parcours des graphes sous-jacents et du temps de calcul de la méthode implémentée au sein d' $A2RI$ .

### 4.1.1. Modèles numériques

L'ensemble des modèles numériques utilisés est donné dans les tables 1 et 4, et illustrés sur la Fig. 18.

Chaque ligne de la table 1 comprend le descriptif du nombre total des sommets ( $\#S$ ), des arêtes ( $\#A$ ) et des deux points extrêmes de la boîte englobante d'un modèle.

Les quatre premières lignes correspondent aux modèles synthétiques obtenus à partir d'échantillonnages des surfaces paramétriques, appelés primitives. Les primitives utilisées sont :

- Un cube de coté 1 et centré sur le point  $(0.5;0.5;0.5)$ .
- Une sphère de centre  $(0,0,0)$  et de rayon 1.
- Un cylindre obtenu par la translation d'un cercle situé dans le plan  $y = 0$ , centré en  $(0,0,0)$ , et de rayon 1, extrudé le long du vecteur  $(0,4,0)$ . Le cercle et le vecteur sont discrétisés par des suites de points équidistants en respectivement 15 anneaux et 30 segments.
- Un cône dont la base est un cercle dans le plan  $y = 0$ , centré en  $(0,0,0)$ , et de rayon 2. Le sommet du cône est défini en  $(0,5,0)$ . Le cercle et la hauteur sont discrétisés en respectivement 30 anneaux et 15 segments.

Les modèles synthétiques, maillages tests utilisés dans des études similaires, sont listés dans les lignes 5, 6, 7 et 8 de la table 1, et correspondent respectivement aux modèles de "la figurine Nefertiti" et du modèle représentant une carrosserie de la voiture "Beetle"<sup>3</sup>, du "Bunny"<sup>4</sup> et de l'"Egg-box". En dernier, sur les lignes, 9, 10, 11 et 12, les modèles numériques reconstruits avec la chaîne  $A2RI$  à partir des acquisitions d'objets sont évalués.

La table 1 contient également des modèles synthétiques volumineux<sup>5</sup> et montre l'efficacité du calcul défini par [GH05]. Pour chaque modèle on retrouve le nombre total

<sup>3</sup> Graph theory toolbox :

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/5355>

<sup>4</sup> Stanford University Computer Graphics Laboratory, <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>

<sup>5</sup> Aim-at-shape : <http://shapes.aimatshape.net/>

<sup>2</sup> Stanford University Computer Graphics Laboratory, <http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>

Modèles	#S	#A	Points extrêmes
Cube	8	18	( 0.00, 0.00, 0.00) - ( 1.00, 1.00, 1.00)
Sphère	642	1920	(-1.00, -1.00, -1.00) - ( 1.00, 1.00, 1.00)
Cylindre	482	1440	(-1.00, 0.00, -1.00) - ( 1.00, 4.00, 1.00)
Cône	452	1350	(-2.00, 0.00, -2.00) - ( 2.00, 5.00, 2.00)
Nefertiti	299	860	(-1.92, -2.49, -1.85) - ( 1.98, 2.37, 0.53)
Beetle	988	2760	(-0.20, -0.17, -0.50) - ( 0.20, 0.17, 0.50)
Bunny	35286	105852	(-0.09, 0.03, -0.06) - ( 0.06, 0.19, 0.06)
Egg-box	18625	55488	(-5.00, -5.00, -2.18) - ( 5.00, 5.00, 2.18)
Vase	5736	16869	(-31.56, -88.70, -596.43) - (20.80, 32.18, -565.06)
Tête_poly	16873	49814	(-77.55, -138.54, 4.46) - (87.23, 115.61, 145.31)
Crâne	46793	139170	(-55.47, -93.82, -805.33) - (91.15, 58.86, -600.94)
Talus	6116	18342	(-24.32, -2.70, -29.36) - (28.19, 40.64, 22.52)
Éléphant	78792	235948	(-11.33, -14.88, -23.49) - (11.34, 14.87, 23.16)
Vase-lion	200002	600000	(-0.30, -0.50, -0.37) - ( 0.30, 0.50, 0.37)
Julius	387900	1162063	(-79.81, -143.77, -1323.65) - (123.16, 137.58, -1079.75)
Raptor	1000080	3000000	(-0.60, -0.43, -0.17) - ( 0.99, 0.34, 0.16)

**Table 1:** Modèles numériques de test évalués en termes de nombre total de sommets (#S), d'arêtes (#A) et des points extrêmes des boîtes englobantes.

de sommets #S, d'arêtes #A, la longueur d'un chemin géodésique aux extrémités choisies aléatoirement, l'évaluation de sa linéarité en termes de la moyenne de la courbure géodésique discrète  $\kappa_g()$  tout au long du chemin, l'efficacité de calcul et le temps d'exécution.

#### 4.1.2. Implémentation logicielle

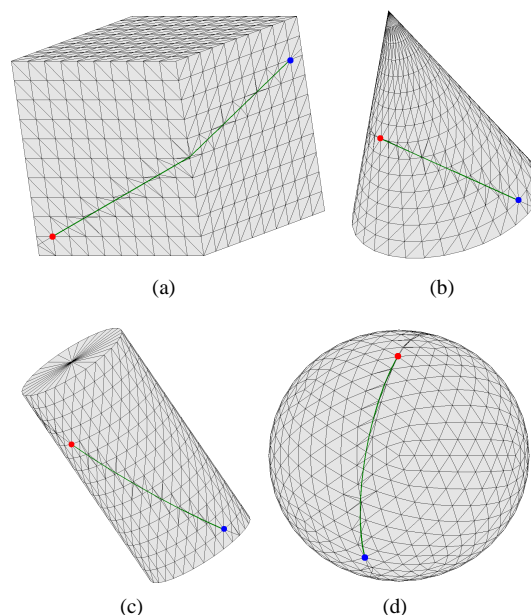
L'ensemble des méthodes proposées sont réalisées comme une partie intégrante d'une chaîne complète *A2RI* d'acquisition, de reconstruction, de modélisation et d'impression 3D [SDG08, Syn09]. Les algorithmes sont implémentés en langage C et tournent sur une plate-forme de type PC Intel E8400@3GHz et muni de 4Go de RAM.

Pour les modèles reconstruits à partir d'acquisitions au scanner laser, les protocoles d'acquisition sont explicités dans [Syn09].

## 4.2. Résultats

### 4.2.1. Évaluation de la longueur du chemin géodésique

Dans la mesure où le chemin géodésique est utilisé dans l'analyse morphométrique des reconstructions numériques des spécimens ostéologiques, la précision du calcul de la longueur du chemin est un facteur majeur de l'estimation. Pour évaluer cette précision les longueurs des chemins géodésiques construits sont comparées aux valeurs estimées de manière analytique. Les résultats sont résumés dans la table 2. Soit le cube sur les Fig. 15(a) et Fig. 16(a), l'évaluation du chemin linéaire construit reliant les deux sommets extrêmes est donnée dans la première ligne de la



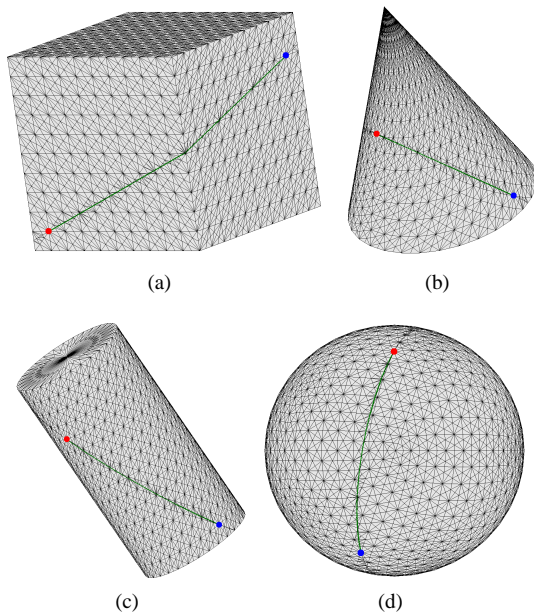
**Figure 15:** Chemins linéaires sur des primitives synthétiques.

table 2. La valeur calculée analytiquement est égale à  $\sqrt{5} \approx 2,236067977$  et son estimation est calculée à partir du dépliement du cube sur un plan. On peut constater que l'erreur de mesure est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Pour l'exemple de



Modèles	Nombre de subdivisions	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de $\kappa_g$	Efficacité %	Temps sec
Cube	0	8	18	2.280776	0.199261	18.1818	0.000091
	1	38	108	2.236068	0.000000	4.8387	0.000381
	2	218	648	2.255943	-0.133126	2.6667	0.001754
Sphère	0	642	1920	1.567306	-0.001679	15.8621	0.011958
	1	3842	11520	1.567252	-0.001222	5.9896	0.025296
	2	23042	69120	1.567202	0.000882	2.2908	0.136340
Cylindre	0	482	1440	2.708775	0.000000	15.9341	0.006294
	1	2882	8640	2.708775	0.000000	5.8704	0.029836
	2	17282	51840	2.708775	0.000000	2.2835	0.116424
Cône	0	452	1350	4.043486	0.008890	16.0870	0.005484
	1	2702	8100	4.044524	0.009493	5.9105	0.017199
	2	16202	48600	4.045431	0.009984	2.2236	0.098157

**Table 2:** Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des primitives.



**Figure 16:** Chemins linéaires sur des primitives raffinées.

la sphère, Fig. 15(d) et Fig. 16(d), la valeur analytique est égale à  $\frac{\pi}{2} \approx 1.57079633$  et l'erreur est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Pour le cylindre, Fig. 15(c) et Fig. 16(c), l'estimation analytique est de 2.709084105 et l'erreur est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Et finalement, pour le cône, Fig. 15(b) et Fig. 16(b), la valeur estimée est de 4.035347 et l'erreur est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Il faut remarquer aussi que le chemin construit est stable par rapport au raffinement de la surface sous-jacente. Ainsi, des subdivisions supplémentaires n'améliorent pas la précision de manière significative.

L'estimation de la longueur du chemin géodésique est

faite aussi pour des surfaces reconstruites à partir des acquisitions laser. Pour certains spécimens, dû à l'endommagement de la surface ostéologique sous-jacente, les surfaces reconstruites représentent des 2D variétés avec bords correspondant aux trous et aspérités de l'os. Dans ce cas, la construction du chemin linéaire est effective à l'exception d'un croisement de bords liés aux parties endommagées. En pratique, une mesure physique ne peut "enjamber" le vide, cette mesure ne peut pas être validée et par conséquent elle n'est pas prise. Une étude de la précision des mesures euclidiennes et géodésiques sur des modèles numériques par rapport aux mesures manuelles sur des collections ostéologiques peut être trouvée dans [DGS\*09].

#### 4.2.2. Évaluation de la linéarité du chemin géodésique

La linéarité du chemin géodésique est estimée avec la courbure discrète géodésique  $\kappa_g$  définie par l'équation (1). Sur l'ensemble des exemples les moyennes et les écart types de  $\kappa_g$  sont calculés. On remarque que les chemins construits sont linéaires avec une courbure en dessous de  $10^{-2}$ . De même, on note que la linéarité est stable par rapport au raffinement de la surface.

L'algorithme présenté permet de tracer un chemin géodésique passant par des points d'inflexion avec une inversion de la courbure tout en préservant son orientation initiale. Une illustration est donnée sur la Fig. 17.

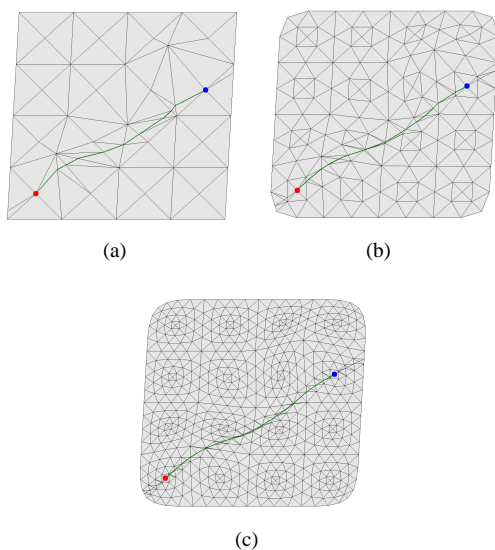
#### 4.2.3. Évaluation de l'efficacité du calcul du chemin géodésique

Pour estimer la performance de l'algorithme on utilise la mesure d'efficacité définie par [GH05] comme le nombre de sommets appartenant au chemin géodésique divisé par le nombre de sommets parcourus. L'efficacité est donnée en pourcentage. Un algorithme optimal qui parcourt seulement les sommets du chemin géodésique a une efficacité

de 100%. Cette mesure est indépendante des performances du matériel. L'étude de [GH05] contient une analyse comparative des performances de plusieurs algorithmes de recherche du chemin le plus court reliant une paire de sommets dans un graphe orienté valué. Ainsi, pour des exemples tests de graphes aléatoires  $R_{ij}$  avec  $65536 \times 4^{i-1}$  sommets,  $4 \times 65536 \times 4^{i-1}$  arêtes et poids  $\in \{1, \dots, 10 \times 100^{i-1}\}$ , l'efficacité de l'algorithme de Dijkstra est estimée dans l'intervalle  $[0.001, 0.040]$  allant en décroissant avec l'augmentation du nombre de sommets. Certaines optimisations, basées sur l'algorithme  $A^*$ , arrivent à une efficacité de 26,47%.

D'après nos expérimentations, la meilleure performance de l'algorithme proposé est de l'ordre de 18%. Par contre, cette performance est maintenue pour des modèles de taille volumineuse. L'efficacité décroît si on procède à un raffinement des maillages. Cela ne représente pas une contrainte forte étant donné que les raffinements des maillages n'améliorent pas de manière perceptible ni l'erreur de mesure de la longueur du chemin construit, ni sa linéarité.

Le temps de calcul pour l'ensemble des expérimentations est donné à titre indicatif dans la dernière colonne des tables 2, 3 et 4. Il dépend de l'implémentation et de la puissance du matériel et est lié à l'efficacité de l'algorithme. Cependant, il permet d'avoir une meilleure compréhension de l'algorithme proposé et de sa mise en oeuvre en pratique.



**Figure 17:** Chemins linéaires - (a) Maillage initial - (b) Maillage raffiné par une itération de subdivision "Loop" - (c) Maillage raffiné par deux itérations de subdivision "Loop".

## 5. Conclusion et développements futurs

Une nouvelle méthode de calcul d'un chemin géodésique linéaire reliant une paire de sommets d'une surface triangulée, 2D variété avec ou sans bords, est proposée. Cette

méthode est intégrée dans une chaîne numérique complète *A2RI* de l'acquisition au laser scanner à l'impression 3D, et expérimentée pour l'évaluation morphométrique de reconstructions numériques des collections muséographiques. Cela implique un contrôle de la précision de mesure de la longueur et de la courbure discrète du chemin construit afin de pouvoir simuler les mesures manuelles effectuées par les anthropologues sur les spécimens originaux.

Pour tester la précision du calcul et valider la méthode, des modèles synthétiques et des modèles d'objets acquis sont testés. La précision de l'estimation de la longueur du chemin géodésique linéaire est de l'ordre de  $5 \times 10^{-2}$  mm sur l'ensemble des modèles synthétiques en comparaison avec les valeurs analytiques exactes. Pour les modèles d'objets acquis, l'estimation est faite comparativement à des mesures manuelles avec une grande variabilité inter-observateur. Ainsi, sur une étude morphométrique de la collection de tali de l'ostéothèque de Pessac, la variabilité inter-observateur des mesures manuelles est de l'ordre de 3mm. L'évaluation des chemins géodésiques correspondants aux caractéristiques de formes étudiées sur les tali pour l'intégralité des mesures numériques est en dessous de ce seuil.

Ce type d'évaluation de la précision est peu connu et étudié pour des reconstructions à partir des acquisitions au scanner laser, inversement à celles du scanner CT. Cependant, une majorité des applications qui supportent des modèles numériques issus d'acquisition au scanner laser et en particulier l'anthropologie numérique nécessitent la maîtrise de la précision et la conformité des modèles et mesures numériques aux objets et mesures physiques. Un prolongement imminent de notre étude est le développement des méthodes pour l'appariement de caractéristiques de la forme géométrique selon des contraintes métriques basées sur l'évaluation de chemins géodésiques linéaires. À terme, une évaluation précise des caractéristiques surfaciques et volumiques pourrait déboucher sur de nouveaux outils d'investigation des séries archéologiques pour une meilleure préservation de l'héritage culturel.

## Remerciements :

Nous tenons tout particulièrement à remercier Mlle Hélène Coqueugnot pour l'accès à la collection privée des crânes juvéniles de la faculté de médecine à Strasbourg, et Mme Christine Couture pour l'accès à la collection de tali de l'ostéothèque de Pessac.

## Références

- [AHPV97] AGARWAL P., HAR-PELED S., SHARIR M., VARADARAJAN K. : Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions. *Journal of the ACM*. Vol. 44, Num. 4 (1997), 567–584.
- [AM05] ARYA S., MOUNT D. : Computational geometry : Proximity and location. In *Handbook of Data Structures and Applications*, Mehta D., Sahni S., (Eds.). Chap-

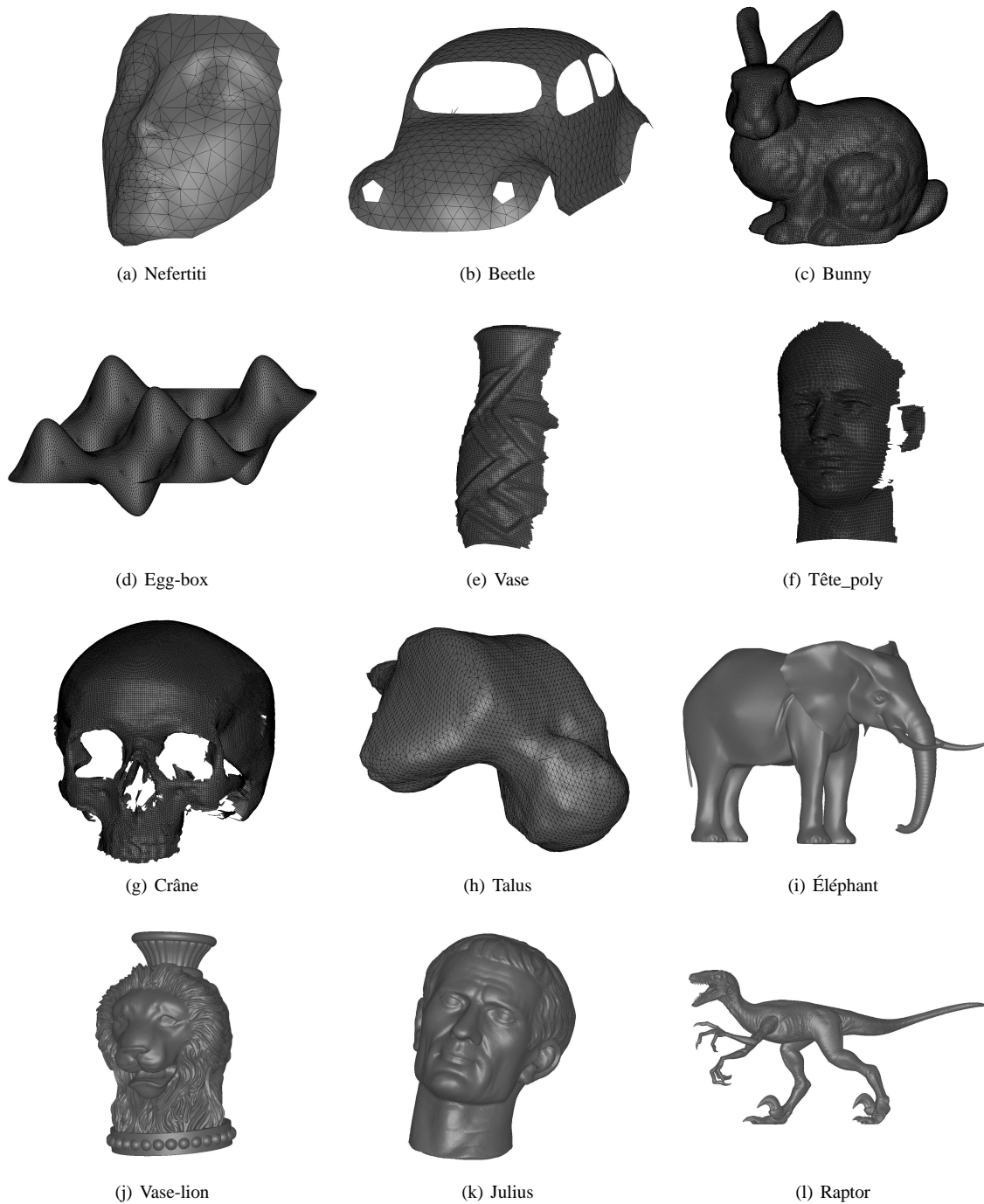
Modèles	Nombre de subdivisions	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de $\kappa_g$	Efficacité %	Temps sec
Nefertiti	0	299	860	2.481550	0.016063	17.7570	0.005189
	1	1721	5092	2.486600	0.014423	6.5972	0.011202
	2	10185	30416	2.485606	0.014720	2.5956	0.060145
Beetle	0	988	2760	0.284965	-0.002014	17.0732	0.010866
	1	5511	16098	0.284991	-0.002769	6.2315	0.036858
	2	32187	95664	0.284965	-0.002006	2.4194	0.205769
Bunny	0	35286	105852	0.098276	0.001823	17.5050	0.540905
	1	211706	635112	0.098267	0.001511	6.0543	2.207849
	2	1270226	3810672	0.098277	0.001823	2.3083	12.834398
Egg-box	0	18625	55488	10.355857	0.007844	15.5348	0.254311
	1	110977	332160	10.312085	-0.007646	5.3291	1.025179
	2	664321	1991424	11.164980	-0.003301	1.4361	6.358321
Vase	0	5736	16869	112.326856	0.001405	16.5902	0.070672
	1	33739	100542	112.714656	-0.000695	5.7961	0.062704
	2	201085	601908	112.486405	-0.000383	2.1964	0.483403
Tête_poly	0	16873	49814	194.022956	0.006935	16.0911	0.228808
	1	99631	297292	194.024739	0.007971	5.4872	0.923973
	2	594587	1780568	194.025073	0.007832	2.0686	5.767739
Crâne	0	46793	139170	193.361360	0.000246	17.9216	0.729475
	1	278311	832428	193.366257	0.000250	6.1407	2.799531
	2	1664827	4989384	193.373475	0.000180	2.3309	16.867488
Talus	0	6116	18342	38.220142	-0.000699	17.1289	0.091880
	1	36686	110052	38.220636	-0.000721	6.3482	0.361276
	2	220106	660312	38.222849	-0.000827	2.4613	2.038420

**Table 3:** Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des modèles synthétiques et reconstruits.

Modèles	#S	#A	Longueur mm	Linéarité Moy de $\kappa_g$	Efficacité %	Temps sec
Éléphant	78792	235948	25.883488	-0.003215	14.3979	1.278154
Vase-lion	200002	600000	0.510132	-0.000450	16.6533	3.598896
Julius	387900	1162063	100.079243	-0.001315	17.1828	7.318379
Raptor	1000080	3000000	0.239176	-0.001346	17.4877	19.717612

**Table 4:** Évaluation du calcul du chemin géodésique sur des modèles synthétiques volumineux.

- man & Hall / CRC, Boca Raton, FL, USA, 2005, ch. Geometric intersection, pp. 63.1–63.22.
- [AMS00] ALEKSANDROV L., MAHESHWARI A., SACK J. : Approximation algorithms for geometric shortest path problems. In *STOC* (2000), pp. 286–295.
- [BCD\*02] BAREQUET G., CHEN D., DAESCU O., GOODRICH M., SNOEYINK J. : Efficiently approximating polygonal paths in three and higher dimensions. *Algorithmica*. Vol. 33, Num. 2 (2002), 150–167.
- [BE97] BERN M., EPPSTEIN D. : Approximation algorithms for geometric problems. *8th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1997), 296–345.
- [BJ86] BESL P., JAIN R. : Invariant surface characteristics for 3d object recognition in range images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. Vol. 33, Num. 1 (1986), 33–80.
- [BNK02] BORODIN P., NOVOTNI M., KLEIN R. : Progressive gap closing for mesh repairing. In *Advances in Modelling, Animation and Rendering*, Vince J., Earnshaw R., (Eds.). Springer Verlag, July 2002, pp. 201–213.
- [CCD\*07] COQUEUGNIOT H., COUTURE C., DUTAILLY B., GUEORGUIEVA S., DESBARATS P., SYNAVE R. : Range image processing for paleoanthropology heritage preservation. In *The second International Workshop on Digital Media and its Application in Museum and Heritage* (Chongqing, China., 2007).



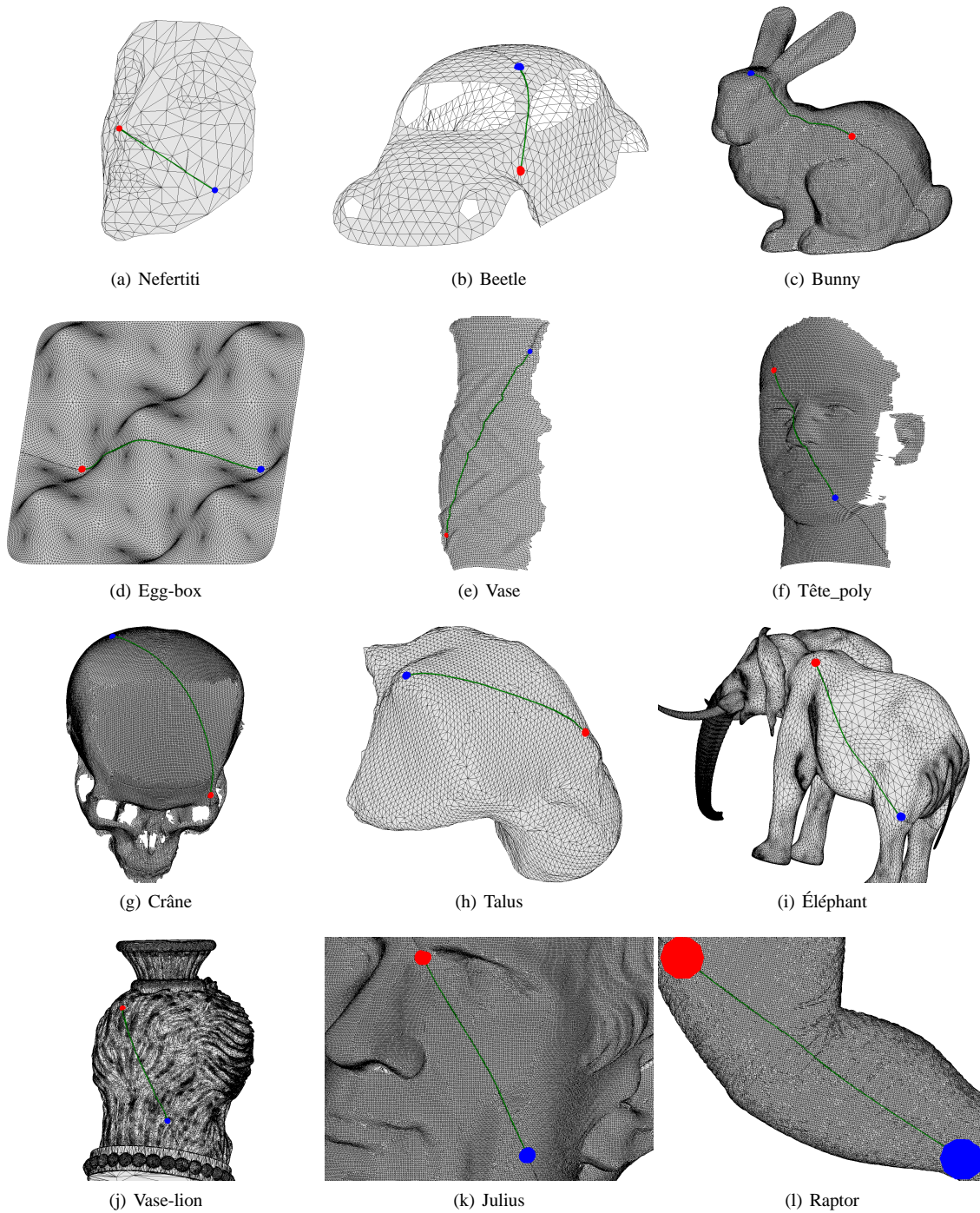
**Figure 18:** Ensemble des modèles illustrés.

[CDS01] CHEN D., DAS G., SMID M. : Lower bounds for computing geometric spanners and approximate shortest paths. *Discrete Applied Mathematics*. Vol. 110, Num. 2-3 (2001), 151–167.

[CH96] CHEN J., HAN Y. : Shortest paths on a polyhedron ; part i : computing shortest paths. *Int. J. Comput. Geom. & Appl.* Vol. 6, Num. 2 (1996), 127–144.

[CK97] COHEN L., KIMMEL R. : Global minimum for





**Figure 19:** Ensemble des chemins géodésiques calculés.

active contour models : A minimal path approach. *Int. J. Comput. Vision. Vol. 24, Num. 1 (1997), 57–78.*

[Coh05] COHEN L. : Minimal paths and fast marching

methods for image analysis. In *Mathematical Models in Computer Vision : The Handbook*, N. Paragios Y. C., O. Faugeras E., (Eds.). Springer, New-York, USA, 2005.



- [CR87] CANNY J., REIF J. : New lower bound techniques for robot motion planning problems. In *FOCS* (1987), pp. 49–60.
- [dBKvdSV97] DE BERG M., KATZ M., VAN DER STAPPEN A. F., VLEUGELS J. : Realistic input models for geometric algorithms. In *SCG '97 : Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 1997), ACM, pp. 294–303.
- [DCDS97] DUCHAMP T., CERTAIN A., DE ROSE A., STUETZLE W. : Hierarchical computation of pl harmonic embeddings. preprint, July 1997.
- [DGS\*09] DESBARATS P., GUEORGUIEVA S., SYNAVE R., COQUEUGNIOT H., DUTAILLY B. : *Strasbourg Juvenile Collection : Computer Assisted Anthropology for the Anterior Fontanelle Reconstruction and Size Evaluation*. Rr-1454-09, 21p, LaBRI, UMR 5800, Université Bordeaux 1, 2009.
- [Dij71] DIJKSTRA E. W. : Ewd316 : A short introduction to the art of programming, August 1971. T. H. Eindhoven, The Netherlands.
- [DKL\*05] DYN N., KOBBELT L., LEVIN D., REIF U., SABIN M., SCHRODER P. : Subdivision schemes in geometric modelling : Theory and applications. In *European Mathematical Society Summer School* (2005).
- [DMSB99] DESBRUN M., MEYER M., SCHRÖDER P., BARR A. : Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. In *SIGGRAPH* (1999), pp. 317–324.
- [DRB\*09] DEVIR Y., ROSMAN G., BRONSTEIN A., BRONSTEIN M., KIMMEL R. : *Shape reconstruction with intrinsic priors*. Tech. Rep. CIS-2009-03, Israel Institute of Technology, Department of Computer Science Technion, March 2009.
- [FB81] FISCHLER M., BOLLES R. : Random sample consensus : a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Commun. ACM*. Vol. 24, Num. 6 (1981), 381–395.
- [FH05] FARAG A., HASSOUNA M. : Theoretical foundations of tracking monotonically advancing fronts using fast marching level set method. Tech. Report, Computer Vision and Image Processing Lab., Depart. of Electrical and Computer Engineering, University of Louisville, 2005.
- [Gar04] GARLAND M. : Notes on differential geometry. Notes, 2004.
- [GH89] GUIBAS L., HERSHBERGER J. : Optimal shortest path queries in a simple polygon. *J. Comput. Syst. Sci.* Vol. 39, Num. 2 (1989), 126–152.
- [GH05] GOLDBERG A. V., HARRELSON C. : Computing the shortest path : A search meets graph theory. In *SODA '05 : Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (Philadelphia, PA, USA, 2005), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 156–165.
- [GKK02] GROSSMANN R., KIRYATI N., KIMMEL R. : Computational surface flattening : A voxel-based approach. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* Vol. 24, Num. 4 (2002), 433–441.
- [Ham92] HAMANN B. : Curvature approximation for triangulated surfaces. In *Geometric Modelling* (1992), pp. 139–153.
- [HPSV96] HAR-PELED S., SHARIR M., VARADARAJAN K. R. : Approximating shortest paths on a convex polytope in three dimensions. In *Symposium on Computational Geometry* (1996), pp. 329–338.
- [HPW06a] HILDEBRANDT K., POLTHIER K., WARDETZKY M. : On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geometriae Dedicata*. Vol. 123, Num. 1 (December 2006), 89–112.
- [HPW06b] HILDEBRANT K., POLTHIER K., WARDETZKY M. : On the convergence of metric and geometric properties of polyhedral surfaces. *Geometriae Dedicata*. Vol. 123 (December 2006), 89–112(24).
- [HS95] HERSHBERGER, SURI : Practical methods for approximating shortest paths on a convex polytope in  $R^3$ . In *SODA : ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (A Conference on Theoretical and Experimental Analysis of Discrete Algorithms)* (1995).
- [HS99] HERSHBERGER J., SURI S. : An optimal algorithm for Euclidean shortest paths in the plane. *SIAM Journal on Computing*. Vol. 28, Num. 6 (1999), 2215–2256.
- [JC98] JOHNSON D. E., COHEN E. : A framework for efficient minimum distance computations. In *ICRA* (1998), pp. 3678–3684.
- [JK98] JONAS A., KIRYATI N. : Length estimation in 3-d using cube quantization. *J. Math. Imaging Vis.* Vol. 8, Num. 3 (1998), 215–238.
- [KAB95] KIMMEL R., AMIR A., BRUCKSTEIN A. : Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 17, Num. 6 (June 1995), 635–640.
- [Kap99] KAPOOR S. : Efficient computation of geodesic shortest paths. In *STOC '99 : Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1999), ACM, pp. 770–779.
- [KK94] KIMMEL R., KIRYATI N. : Finding shortest paths on surfaces by fast global approximation and precise local refinement. *Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*. Vol. 10, Num. 6 (1994), 643–656.
- [KK95] KIRYATI N., KÜBLER O. : Chain code probabilities and optimal length estimators for digitized three-dimensional curves. *Pattern Recognition*. Vol. 28, Num. 3 (1995), 361–372.

- [KO00] KANEVA B., O'ROURKE J. : An implementation of Chen & Han's shortest paths algorithm. In *CCCG* (2000).
- [KO08] KANAI T., OHTAKE Y. : Discrete shortest paths on smooth surface representations. In *Shape Modeling International* (2008), pp. 283–284.
- [Kob00] KOBBELT L. : Sqrt3 subdivision. In *Proceedings of SIGGRAPH 2000, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series* (2000).
- [KS98] KIMMEL R., SETHIAN J. : Computing geodesic paths on manifolds. In *Proceedings of National Academy of Sciences* (1998), vol. 95, pp. 8431–8435.
- [KS01] KANAI T., SUZUKI H. : Approximate shortest path on a polyhedral surface and its applications. *Computer-Aided Design*. Vol. 33, Num. 11 (2001), 801–811.
- [LHL06] LEE S., HAN J., LEE H. : Straightest paths on meshes by cutting planes. In *4th International Conference on Geometric modeling and processing* (2006), pp. 609–615.
- [LKMD01] LEE H., KIM L., MEYER M., DESBRUN M. : Meshes on fire. In *Eurographics, Computer Animation and Simulation* (2001).
- [LMS97] LANTHIER M., MAHESHWARI A., SACK J. : Approximating weighted shortest paths on polyhedral surfaces. In *Symposium on Computational Geometry* (1997), pp. 274–283.
- [Loo87] LOOP C. : *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Master's thesis, University of Utah, 1987.
- [LSC06] LI S., SUN G., CHEN G. : Improved algorithm for finding next-to-shortest paths. *Inf. Process. Lett.* Vol. 99, Num. 5 (2006), 192–194.
- [LTD05] LEE H., TONG Y., DESBRUN M. : Geodesics-based one-to-one parameterization of 3d triangle meshes. *IEEE MultiMedia*. Vol. 12, Num. 1 (2005), 27–33.
- [Mit98] MITCHELL J. : Geometric shortest paths and network optimization. In *Handbook of Computational Geometry*. Elsevier Science, Amsterdam, 1998.
- [MM97] MATA C., MITCHELL J. : A new algorithm for computing shortest paths in weighted planar subdivisions (extended abstract). In *Symposium on Computational Geometry* (1997), pp. 264–273.
- [MMP87] MITCHELL J., MOUNT D., PAPADIMITRIOU C. : The discrete geodesic problem. *SIAM J. Comput.* Vol. 16, Num. 4 (1987), 647–668.
- [MMSB02] M. MEYER, M. DESBRUN, SCHRÖDER P., BARR A. : Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *VisMath* (2002).
- [Mou85] MOUNT D. : *On Finding Shortest Paths on Convex Polyhedra*. Tech. Rep. ADA166246, MARYLAND UNIV COLLEGE PARK CENTER FOR AUTOMATION RESEARCH, May 1985.
- [Mou97] MOUNT D. : Geometric intersections. In *Handbook of discrete and computational geometry*, Goodman J. E., O'Rourke J., (Eds.). CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1997, ch. Geometric intersection, pp. 615–630.
- [MVC05] MARTINEZ D., VELHO L., CARVALHO P. : Computing geodesics on triangular meshes. *Computers & Graphics*. Vol. 29, Num. 5 (2005), 667–675.
- [NK01] NOVOTNI M., KLEIN R. : A geometric approach to 3D object comparison. In *Shape Modeling and Applications* (2001), pp. 167–175.
- [NK02] NOVOTNI M., KLEIN R. : Computing geodesic paths on triangular meshes. In *WSCG* (2002), pp. 341–348.
- [O'R99] O'ROURKE J. : Computational geometry column 35. *International Journal of Computational Geometry and Applications*. Vol. 9, Num. 4/5 (1999), 513–.
- [PBCG09] POTAMIAS M., BONCHI F., CASTILLO C., GIONIS A. : Fast shortest path distance estimation in large networks. In *18th ACM Conference on Information and Knowledge Management* (2009), pp. 867–876.
- [PC06] PEYRÉ G., COHEN L. : Geodesic remeshing using front propagation. *Int. J. Comput. Vision*. Vol. 69, Num. 1 (2006), 145–156.
- [PP93] PINKALL U., POLTHIER K. : Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experiment. Math.* Vol. 2, Num. 1 (1993), 15–36.
- [PP03] POLTHIER K., PREUS E. : Identifying vector field singularities using a discrete hodge decomposition. In *Visualization and Mathematics III* (2003), pp. 113–134.
- [PS99] POLTHIER K., SCHMIES M. : Geodesic flow on polyhedral surfaces. In *IEEE Symp. on Sci. Visualization* (1999).
- [PS06] POLTHIER K., SCHMIES M. : Straightest geodesics on polyhedral surfaces. In *SIGGRAPH '06 : ACM SIGGRAPH 2006 Courses* (New York, NY, USA, 2006), ACM, pp. 30–38.
- [Sch07] SCHREIBER Y. : Shortest paths on realistic polyhedra. In *SCG '07 : Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2007), ACM, pp. 74–83.
- [SDG08] SYNAVE R., DESBARATS P., GUEORGUEVA S. : Toolkit for registration and evaluation for 3d laser scanner acquisition. In *WSCG'2008* (Plzen : University of West Bohemia, February 2008), pp. 199–204.
- [Set96] SETHIAN J. : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. In *Proc. Nat. Acad. Sci.* (1996), vol. 93(4), pp. 1591–1595.
- [SGD08] SYNAVE R., GUEORGUEVA S., DESBARATS P. : Constraint shortest path computation on polyhedral

- surfaces. In *ICVGIP'08, Proc. of the 6th Indian Conference on Computer Vision, Graphics and Image Processing* (2008).
- [SJC09] SEONG J., JEONG W., COHEN E. : Curvature-based anisotropic geodesic distance computation for parametric and implicit surfaces. *Visual Computer*. Vol. 25, Num. 8 (2009), 743–755.
- [SS84] SHARIR M., SCHORR A. : On shortest paths in polyhedral spaces. In *STOC '84 : Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1984), ACM, pp. 144–153.
- [SS06] SCHREIBER Y., SHARIR M. : An optimal-time algorithm for shortest paths on a convex polytope in three dimensions. In *SCG '06 : Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry* (New York, NY, USA, 2006), ACM, pp. 30–39.
- [SSG03] SIFRI O., SHEFFER A., GOTSMAN C. : Geodesic-based surface remeshing. In *IMR* (2003), pp. 189–199.
- [SSK\*05] SURAZHSKY V., SURAZHSKY T., KIRSANOV D., GORTLER S., HOPPE H. : Fast exact and approximate geodesics on meshes. *ACM Trans. Graph.* Vol. 24, Num. 3 (2005), 553–560.
- [SW04] SHIH F., WU Y.-T. : Three-dimensional euclidean distance transformation and its application to shortest path planning. *Pattern Recognition*. Vol. 37, Num. 1 (2004), 79–92.
- [Syn09] SYNAVE R. : *Reconstruction de solides à partir d'acquisitions surfaciques*. PhD thesis, Université Bordeaux1, 351 Cours de la Libération, F-33405 Talence cedex, Décembre 2009.
- [Tho97] THORUP M. : Undirected single source shortest path in linear time. In *FOCS* (1997), pp. 12–21.
- [TWZZ07] TANG J., WU G., ZHANG F., ZHANG M. : Fast approximation geodesic paths on triangle mesh. *International Journal of Automation and Computing*. Vol. 4, Num. 1 (2007), 8–13.
- [VA97] VARADARAJAN K., AGARWAL P. : Approximating shortest paths on a nonconvex polyhedron. In *FOCS* (1997), pp. 182–191.
- [WDB\*08a] WEBER O., DEVIR Y., BRONSTEIN A., BRONSTEIN M., KIMMEL R. : Parallel algorithms for approximation of distance maps on parametric surfaces. *ACM Trans. Graph.* Vol. 27, Num. 4 (2008), 1–16.
- [WDB\*08b] WEBER O., DEVIR Y. S., BRONSTEIN A. M., BRONSTEIN M. M., KIMMEL R. : Parallel algorithms for approximation of distance maps on parametric surfaces. *ACM Trans. Graph.* Vol. 27, Num. 4 (2008), 1–16.
- [WKL03] WINDREICH G., KIRYATI N., LOHMANN G. : Voxel-based surface area estimation : from theory to practice. *Pattern Recognition*. Vol. 36, Num. 11 (2003), 2531–2541.
- [WPS00] WANG Y., PETERSON B., STAIB L. : Shape-based 3D surface correspondence using geodesics and local geometry. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (2000), pp. 2644–2651.
- [WPS03] WANG Y., PETERSON B., STAIB L. : 3d brain surface matching based on geodesics and local geometry. *Computer Vision and Image Understanding*. Vol. 89, Num. 2-3 (2003), 252–271.
- [WS89] WOLFSON E., SCHWARTZ E. : Computing minimal distances on polyhedral surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. Vol. 11 (1989), 1001–1005.
- [XW09] XIN S.-Q., WANG G.-J. : Improving Chen and Han's algorithm on the discrete geodesic problem. *ACM Trans. Graph.* Vol. 28, Num. 4 (2009).
- [ZDL\*00] ZORIN D., DEROSE T., LEVIN A., SCHRÖDER P., KOBBELT L., SWELDENS W. : Subdivision for modeling and animation. In *SIGGRAPH Course Notes* (2000), pp. 1–116.
- [ZSS96] ZORIN D., SCHRÖDER P., SWELDENS W. : Interpolation subdivision for meshes with arbitrary topology. In *SIGGRAPH* (1996), pp. 189–192.