

# Répétition linéaire de primitives comme opérateur dans un graphe de construction d'objets B-REP

A. Johal<sup>1,2</sup> J-C. Léon<sup>1</sup> G-P. Bonneau<sup>1</sup> R. Marc<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Grenoble Universités, Laboratoire LJK – INRIA

<sup>2</sup>EDF R&D

---

## Résumé

*En CAO, la construction d'objets manufacturés s'appuie sur le concept d'arbre de construction comportant les primitives et opérateurs utilisés par l'utilisateur lors de la modélisation d'un objet. Néanmoins, cette structure performante comporte divers handicaps : elle ne peut être échangée entre divers logiciels CAO car ces arbres de construction sont spécifiques à chacun d'eux. Elle est difficilement réutilisable pour réaliser des modifications et transformations de formes comme nécessaire dans un processus de développement de produit. Sur la base d'une analyse morphologique d'un objet, nous proposons la génération d'un graphe de construction de cet objet qui permet de représenter un ensemble d'arbres de construction. Ici, nous adressons en particulier, la prise en compte d'opérateurs de haut niveau tels que des répétitions de primitives. Dans ce contexte, les propriétés de symétrie globales et locales d'un objet interagissent avec les opérateurs de répétitions de primitives et les opérateurs de combinaison de primitives car des séquences d'opérations de symétrie peuvent produire un objet de même forme que l'application d'un opérateur de répétition de primitives. Il y a donc équivalence entre ces opérations de modélisation et le graphe de construction doit incorporer ces variantes. Il s'agit donc d'analyser les interactions entre des opérations de symétrie et des répétitions de primitives afin de mettre en évidence ces équivalences.*

---

## Résumé

*Computer-aided design of manufactured objects extensively uses the concept of construction tree containing primitives and operators used by a designer during the object modelling process. However, this powerful datastructure exhibits some limitations : it cannot exchange between various CAD systems because their construction trees are specific to each of them, it is hardly reusable to perform shape modifications and transformations as needed during a product development process. Based on a morphological analysis of an object, it has been proposed to generate a construction graph of this object that contains a set of construction trees. Here, we particularly focus on high level operators like primitive repetition. Within this framework, the global as well as the local symmetry properties of an object interact with primitive repetition operators and the operators combining the primitives because modelling sequences using symmetries can produce an object having the same shape than applying a repetition of primitives. Consequently, the modelling operations are equivalent to each other and the construction graph must incorporate these variants. The purpose is to analyze the interactions between symmetry operations and repetition of primitives to characterize these equivalences.*

---

**Mots clé :** Modélisation géométrique, CAO, graphe de construction, analyse de symétrie, répétition de primitives

## 1. Introduction

Dans le contexte des objets manufacturés modélisés en CAO, les logiciels utilisés font appel au concept d'arbre de construction et de paramétrage pour faciliter les modifica-

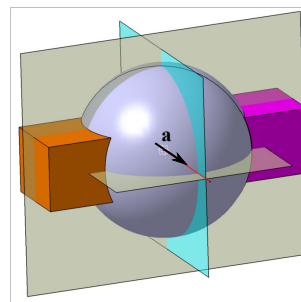
tions et les réutilisations des objets 3D générés. Le transfert de modèles, à l'aide de formats neutres, entre ces logiciels est une situation très fréquente au cours de processus de développement de produits (75% des échanges) [abe06] mais arbre de construction et paramétrage ne sont pas transférés car spécifiques à chaque logiciel. Cette situation conduit à une perte significative de l'efficacité des phases de modélisation contribuant à un processus de développement de pro-

duit car les ingénieurs remodelisent les objets pour disposer d'un arbre de construction et corriger des imperfections de modélisation dans 40% des cas [abe06].

L'existence d'un arbre de construction et du paramétrage associé n'est cependant pas une réponse générique vis-à-vis des besoins d'un processus de développement de produits. En effet, l'arbre de construction d'un objet n'est pas unique et le paramétrage de l'objet dépend de cet arbre. Cette situation peut rendre impossible certaines modifications de forme et transformations telles que la réduction dimensionnelle pratiquée lors de la préparation de modèles mécaniques pour le calcul de structures [RAM\*13, BLHF14]. Dans cet exemple, l'arbre de construction d'un objet n'est pas utilisable car il ne contient pas nécessairement les opérations de modélisation adaptées à la réduction dimensionnelle [BLHF14, BLHF13]. Afin de pouvoir conduire une analyse morphologique d'un objet, Bousuge et al. [BLHF14, BLHF13] proposent la génération d'un graphe de construction d'un objet B-Rep CAO qui représente un ensemble d'arbres de construction équivalents, i.e. produisant des objets de formes identiques, et constitue une base efficace pour des opérations de réduction dimensionnelle.

On observe également que l'arbre de construction d'un objet reflète rarement toutes ses symétries globales et locales. Ceci provient du fait que l'utilisateur se concentre sur un aspect fonctionnel de l'objet plutôt que sur sa structure morphologique. Mais cette situation est également due aux modifications successives de la forme d'un objet, par des utilisateurs différents, qui ne permettent pas de présumer d'une morphologie particulière d'un objet. L'analyse des propriétés de symétrie est également une source de structuration morphologique d'un objet [MPWC12, LLM10, MWZ\*13] qui interagit avec son processus de construction.

Lors du processus de modélisation d'objets en CAO, les modeleurs géométriques disposent tous de fonctions de génération de formes caractéristiques<sup>†</sup> permettant de générer un volume complexe par "ajout et/ou enlèvement de matière". Outre ces opérations de base, ces logiciels disposent également de fonctions de plus haut niveau permettant de générer des formes répétitives à partir de primitives ou d'objets plus élémentaires, par exemple : répétitions de perçages, de bossages, . . . . Selon les configurations, ces répétitions interagissent avec des propriétés de symétrie de l'objet et donc, également, avec son processus de construction. Ces interactions ne sont pas sans conséquence sur les possibilités de modification d'un objet comme l'indique l'exemple simple sur la Figure 1. En effet, l'objet représenté à la Figure 1 peut être modélisé comme une sphère fusionnée avec un parallélépipède rectangle (faces orange et magenta), i.e. sans aucune propriété de symétrie, ou bien en tenant compte de



**Figure 1:** Exemple d'objet et d'interactions entre processus de modélisation, symétrie et fonction de répétition.

ses symétries globales (plans de symétrie bleus et jaunes) ou bien en considérant que les parallélépipèdes rectangles visibles (faces oranges indépendantes des faces magenta) appartiennent à une répétition en rotation d'axe  $a$ , pour ne citer que certains des processus de construction possibles. L'équivalence de ces processus de construction par rapport à la morphologie de l'objet n'est pas sans impact sur l'édition de sa forme puisque l'utilisateur pourrait modifier cet objet sur la base de l'un quelconque de ces processus de modélisation, plus particulièrement adapté à un de ses besoins à un moment donné. Cette brève analyse justifie l'intérêt de considérer le processus de construction sous la forme d'un graphe de construction qui exprime l'équivalence morphologique des propriétés géométriques associées à chacun des processus de construction.

Ici, on s'intéresse plus particulièrement à l'analyse des interactions entre processus de construction, symétrie et opérateurs de répétitions pour identifier des opérations de répétition et structurer le graphe de construction correspondant. Il s'agit d'un complément aux travaux [BLHF14, BLHF13] qui ne prennent pas en compte de propriétés de symétrie des objets et qui ne considèrent que des primitives élémentaires. Les sections 2 et 3 précisent les objectifs adressés et les travaux antérieurs. Les sections 4 et 5 décrivent succinctement les principes de génération de graphe de construction et d'analyse de symétrie d'un objet. Les sections 6 et 7 analysent les paramètres de fonctions de génération de répétitions et analysent les interactions entre processus de construction, symétries et répétitions de primitives et la section 8 illustre des résultats obtenus.

## 2. Objectifs

On s'intéresse à identifier, aussi rapidement que possible, des configurations de répétition de primitives qui peuvent être considérées comme des opérations de modélisation et insérées dans le graphe de construction d'un objet. Ce processus opère une analyse morphologique de l'objet et comporte également une analyse des symétries locales et globales de l'objet. On entend par identification rapide de ré-

<sup>†</sup>. classiquement dénommées features ou form features et conduisant aux principes de modélisation par features.

pétitions de primitives, le fait que l'on cherche à déterminer les répétitions, chaque fois que possible, selon une approche globale. Dans ce cas, chaque répétition est directement instanciée avec un nœud du graphe de construction par opposition avec une démarche, moins efficace, où chaque primitive d'une répétition serait identifiée indépendamment des autres. Dans cette seconde démarche, les primitives de la répétition sont potentiellement instanciées dans des nœuds différents d'un graphe de construction puis une analyse de ce même graphe serait conduite pour le restructurer afin de mettre en évidence les répétitions de primitives.

L'analyse est conduite pour des objets manufacturés, c'est-à-dire dont la frontière est bornée par des surfaces planes, cylindriques, coniques, sphériques, toriques uniquement. De plus, on considère que les objets sont construits à partir de primitives d'extrusion et de révolution issues d'esquisses contenant des segments de droites et des arcs de cercles, uniquement. Dans le contexte d'objets manufacturés générés à partir de modeleurs volumiques, le cadre précédent n'est pas véritablement contraignant [BLHF14] car les opérateurs de modélisation de plus haut niveau : répétitions, nervures, peuvent se décomposer en opérations d'extrusion et de révolution. La prise en compte de certains rayons de raccordement est laissée à des développements futurs.

### 3. Travaux antérieurs

L'utilisation d'arbres de construction préexistants, i.e. dans le contexte d'un logiciel de CAO, a déjà fait l'objet de diverses applications pour la transformation de modèles par réduction dimensionnelle afin de répondre aux besoins des modèles éléments finis [RAM\*13], pour l'identification d'imperfections de modélisation [YH06], pour la détection de symétries dans des objets volumiques [JCH13]. Ces approches sont basées sur les arbres de construction fournis par les logiciels CAO, c'est-à-dire que les algorithmes correspondants n'examinent pas l'influence de variantes de construction d'un objet. De ce fait, les résultats obtenus sont influencés par les variantes de construction d'objets, ce qui constitue une limite importante pour traiter des configurations industrielles, dans les cas où un arbre de construction est disponible. [LLM10] a proposé une forme d'interaction entre processus de construction d'un objet et analyse de symétrie. Cette démarche s'appuie sur un arbre de description morphologique de l'objet, sélectionné par l'utilisateur. Cet arbre est ensuite soumis à une analyse de symétrie, ainsi découlée du processus de construction de l'objet.

La génération d'arbres CSG à partir de la représentation B-Rep d'un objet, où les feuilles sont des demi-espaces possiblement ouverts, a mis en évidence des limitations concernant la validité d'un volume [SV93, BC04]. Dans le contexte d'un arbre CSG basé sur des primitives volumiques ou d'approches par extraction de caractéristiques volumiques, cette limitation n'a plus lieu [BLHF14, Woo13].

L'extraction de formes caractéristiques, développée par-

ticulièrement pour des processus de fabrication [VR93, HPR00, Woo03] mais aussi pour l'élaboration de modèles éléments finis comportant des réductions dimensionnelles [SSM\*10, CKL04, LAPL05, JG00, Woo13] s'appuient sur des définitions locales de formes caractéristiques où les interactions entre formes caractéristiques sont difficiles à décrire pour obtenir des approches suffisamment robustes. Ces démarches sont également indépendantes des propriétés de symétrie des objets.

L'analyse de symétrie d'un objet a été étudiée récemment [MPWC12, LLM08, JCH13, Li11, LFLT13], en particulier dans le cas où cet objet est représenté par une triangulation. Dans le cas de modèles B-Rep CAO, cette analyse doit prendre en compte la précision du modeleur [JCH13, Li11, LFLT13] pour permettre l'interaction avec un processus de construction de l'objet. En effet, dans le cas où un plan de symétrie est trouvé, sa position par rapport à l'objet doit permettre de réaliser un découpage de l'objet tel que l'application de la symétrie à une des parties de l'objet ainsi obtenue doit se raccorder à la partie initiale avec la même précision que celle utilisée par le modeleur pour tout autre opérateur. Les modeleurs industriels utilisent une précision relative de  $10^{-6}$  qui nécessite une discrétisation trop fine d'un objet CAO pour s'appuyer sur une représentation triangulée. Des approches faisant appel à des paramètres plus globaux sont donc nécessaires pour traiter des modèles CAO [LLM08, JCH13, Li11, LFLT13]. De plus, la détermination de symétries locales d'objets peut conduire à de très nombreux résultats, difficiles à exploiter [LLM10, MPWC12] en l'absence de critères complémentaires. Pour des modèles de type triangulation, utilisés en informatique graphique, différents critères ont été proposés pour structurer un objet et les propriétés de symétrie tendent à y être intégrées [MWZ\*13]. Cependant, toutes ces approches n'abordent pas la relation entre des propriétés de symétrie et un processus de construction d'un objet ni l'influence de variantes de processus de construction en relation avec les propriétés de symétrie locales d'un objet.

On observe donc que les travaux antérieurs ne prennent pas en compte les variantes de processus de construction et il existe peu de travaux qui s'intéressent spécifiquement à la détermination d'un processus de construction [BC04] en dehors de l'activité de reconnaissance de formes caractéristiques dans un objet. Les travaux concernant l'analyse des symétries d'un objet ne prennent pas en compte de lien avec un processus de construction de cet objet. L'approche proposée s'appuie sur une analyse morphologique utilisant la notion de primitive volumique similaire à celles disponibles dans des logiciels CAO et définit un ensemble d'arbres de construction exprimés sous la forme d'un graphe [BLHF14] ce qui étend l'approche proposée par Belaziz et al. [BBB00]. Dans [BLHF14], aucune propriété de symétrie n'est utilisée et seules des primitives d'extrusion élémentaires sont utilisées. Ici, on s'intéresse plus particulièrement aux interactions entre un processus de construction d'objet, ses proprié-

tés de symétrie globales et locales qui ont fait l'objet d'analyses théoriques [Ley01] mais disposent aussi d'algorithmes adaptés aux traitements de modèles CAO [Li11, LFLT13] et des fonctions de haut niveau telles que les répétitions de primitives. Les sections suivantes décrivent brièvement les principes de génération de graphes de construction et d'analyse de symétrie utilisés avant d'aborder les opérateurs de répétition de primitives et les interactions entre ces différents concepts.

#### 4. Principe de génération du graphe de construction d'un objet

Préalablement à la description de la génération du graphe, il convient de rappeler qu'un arbre de construction généré par un logiciel de CAO possède les caractéristiques suivantes. Un arbre de construction est toujours un arbre binaire qui, à chaque étape de construction, combine une primitive  $P_i$  et l'objet à cette même étape,  $M_i$  avec un opérateur qui a pour conséquence d'ajouter ou d'enlever de la matière à  $M_i$ . Ce principe correspond à la démarche incrémentale de construction d'un objet  $M$  afin de permettre à l'utilisateur d'évaluer l'évolution de forme après chaque opération. De plus, le principe général de création de  $P_i$  à partir d'esquisse plane repose sur l'utilisation de plans de  $M_{i-1}$  pour construire plus rapidement  $P_i$  sans avoir besoin de spécifier explicitement la position spatiale de  $P_i$  par rapport au repère de  $M_{i-1}$ . Cet arbre de construction exprime la démarche chronologique de construction de  $M$ .

Maintenant, les principales étapes de génération du graphe de construction d'un objet initial  $M$  sont énumérées ci-dessous et illustrées par la Figure 2 afin d'établir les liens nécessaires entre ces phases et les opérateurs de répétition de primitives ainsi que l'analyse des propriétés de symétrie de  $M$ . A partir de la description B-Rep de  $M$ , définie dans un fichier STEP [TS94], une première étape consiste en la préparation de la frontière de  $M$  afin que celle-ci soit intrinsèque à la forme de  $M$  (voir section 7.1).

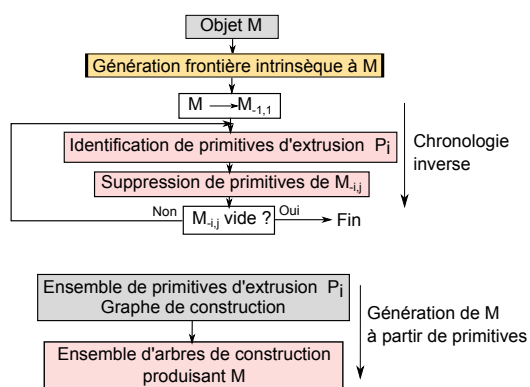
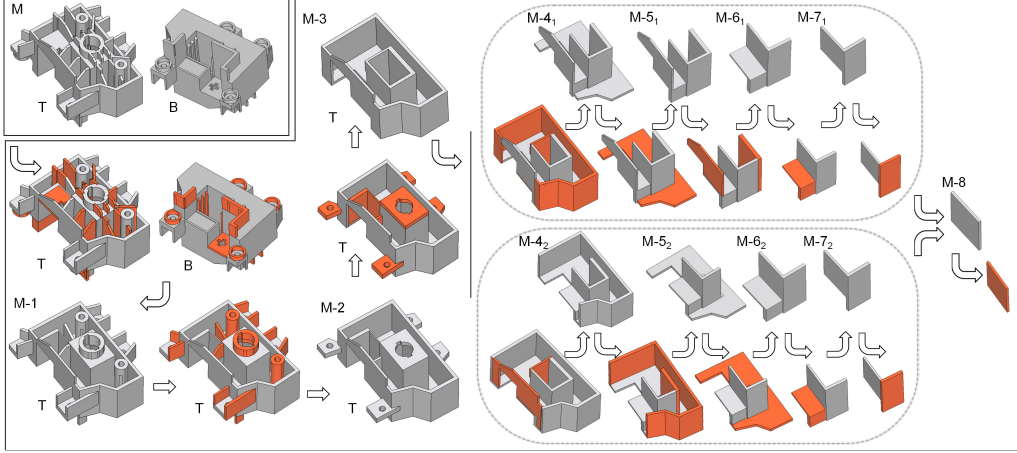


Figure 2: Principales étapes de génération d'un graphe de construction.

Le graphe  $G_D$  est généré itérativement à partir de  $M$ , selon une chronologie inverse des processus de construction de  $M$ , générant une succession de modèles  $M_{-i,j}$ ,  $i \in [1, t]$  où  $M_{-i}$  représente une ou un ensemble de primitives volumiques indépendantes les unes des autres et  $j$  identifie la  $j^{\text{ème}}$  variante de  $M$  à l'itération  $i$ . Ce principe est conforme à l'approche proposée par Bousuge et al. [BLHF14]. Chaque nœud de  $G_D$  contient un ensemble de primitives et ses arcs sont orientés afin de représenter la chronologie des opérations de modélisation en "remontant le temps". Les multiples primitives contenues dans un nœud expriment le fait qu'elles peuvent être ajoutées à l'objet à l'étape  $i$  dans n'importe quel ordre car elles produiront toujours la même forme à l'étape  $(i+1)$ . Cette représentation est plus compacte que les arbres de construction binaires utilisés dans les logiciels CAO. Lorsque des groupes différents de primitives peuvent être retirés de  $M_{-i}$ , des formes différentes peuvent être produites à l'étape  $M_{-i+1}$ . Des nœuds différents sont alors créés comme indiqué Figure 3 avec les variantes  $M_{-4,1}$  et  $M_{-4,2}$ . Par rapport à la configuration la plus simple de  $G_D$ , i.e. une chaîne, cette configuration conduit à un branchement. Au cours d'itérations ultérieures, deux variantes  $M_{-i,j}$  et  $M_{-k,l}$  peuvent réduire l'objet à une même forme. Ceci se traduit alors par le fait que deux branches distinctes de  $G_D$  fusionnent. La transition entre les étapes  $M_{-7,1}$  et  $M_{-7,2}$  vers  $M_{-8}$  de la Figure 3 est une illustration de cette configuration. Ceci illustre la nécessité d'une structure de graphe pour décrire un ensemble de processus de construction produisant le même objet  $M$ .

Actuellement,  $G_D$  est généré avec les hypothèses suivantes. Les primitives constitutives sont uniquement des extrusions et l'opérateur de combinaison entre chaque primitive  $P_k$  et l'objet  $M_{-i,j}$  à l'étape  $j$  est une union réalisant un ajout de matière. Ces configurations restreignent les formes d'objets pour lesquels un graphe complet peut être extrait mais elles constituent un point de départ suffisant pour analyser certaines interactions avec les propriétés de symétrie de  $M$  et des opérateurs de répétition. Préalablement à la description des principales phases de génération de  $G_D$ , il convient de préciser le concept de visibilité d'une primitive  $P_k$ . On note  $\partial M$  la frontière de  $M$ .  $\partial M$  contient les surfaces et les courbes qui bornent  $M$  et les faces, arêtes, sommets qui forment la représentation B-Rep de  $M$ .

**Visibilité d'une primitive.**  $P_k$  est définie par un ensemble de faces contenu dans  $\partial P_k$ . Si  $P_k$  est une primitive qui peut être retirée pour passer de  $M_{-i,j}$  à  $M_{-(i+1),j}$ , alors  $P_k$  est visible dans  $M_{-i,j}$  :  $\partial P_k \cap \partial M_{-i,j} = V \neq \emptyset$ .  $V$  représente l'ensemble de faces communes entre  $P_k$  et  $M_{-i,j}$ . Toutefois, la surface commune entre  $P_k$  et  $M_{-i,j}$  ne peut recouvrir entièrement  $P_k$  car  $V \neq \emptyset$  pour exprimer que  $P_k$  est insérée dans  $M_{-i,j}$ . La visibilité maximale de  $P_k$  est telle que le complémentaire de  $V$  dans  $\partial P_k$ ,  $cV$ , représente, au minimum, une partie d'une face dans  $\partial P_k$ . Toute configuration où  $cV$  serait réduit à une (ou des) parties d'arêtes ou un (ou des) point(s) de  $\partial P_k$  représenterait une configuration non-variété de liai-



**Figure 3:** Exemple de génération de graphe de construction  $G_D$ . Les primitives identifiées à chaque étape sont indiquées en orange. Les lettres T et B indiquent respectivement une vue de dessus et de dessous du même objet (d'après [BLHF14]).

son entre  $P_k$  et  $M_{-i,j}$ , ce qui contredirait le fait que  $M$  soit un volume. Les conditions de visibilité minimale de  $P_k$  dans  $M_{-i,j}$  s'apparentent aux critères de reconnaissance de formes caractéristiques et dépendent de ces dernières. Ils seront indiqués ci-dessous lorsque  $P_k$  est une extrusion.

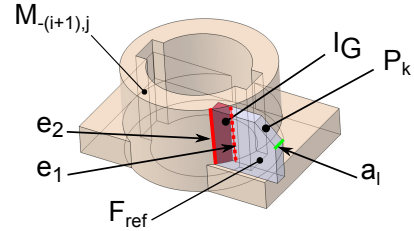
Dans le cadre de ces hypothèses, chaque itération de génération de  $G_D$  comporte les phases suivantes pour passer de  $M_{-i,j}$  à  $M_{-(i+1),j}$  :

- une phase d'identification des primitives  $P_k$  candidates à la suppression pour produire  $M_{-(i+1),j}$ . Cette phase fait référence au concept de visibilité et de validité de  $P_k$ . La visibilité minimale d'une primitive d'extrusion est basée, dans les configurations simples, sur l'existence d'une face plane  $F_{ref}$  dans  $\partial M$  et d'une arête rectiligne  $a_l$  connectée à  $F_{ref}$  telle qu'une, au moins, des deux arêtes frontière de  $F_{ref}$  connectées à  $a_l$  soit des arêtes convexes (voir Figure 4).  $F_{ref}$  définit le contour d'extrusion de  $P_k$  et  $a_l$  sa distance d'extrusion. La validité de  $P_k$  est exprimée par le fait que  $P_k$  fusionnée avec  $M_{-i,j}$  ne doit pas modifier  $\partial M_{-i,j}$ , ce qui s'exprime par :

$$(M_{-i,j} \cup^* P_k) -^* M_{-i,j} = \emptyset. \quad (1)$$

où les opérateurs sont de type Booléen régularisés. Cette condition exprime le fait que  $P_k$  doit être incluse dans  $M_{-i,j}$  avec toutefois des parties de  $\partial P_k$  qui peuvent coïncider avec des parties de  $\partial M_{-(i+1),j}$ , i.e.  $(\partial P_k \cap \partial M_{-(i+1),j}) - I_G \neq \emptyset$  avec  $I_G = P_k \cap \partial M_{-(i+1),j}$ .  $I_G$  est l'interface géométrique entre  $P_k$  et  $M_{-(i+1),j}$ ,

- une phase de suppression des primitives  $P_k$  valides afin de générer  $M_{-(i+1),j}$  à partir de  $M_{-i,j}$ . Cette phase est fonction de l'interface géométrique  $I_G$  entre  $P_k$  et  $M_{-(i+1),j}$ .  $I_G$  peut être de type surfacique ou volumique selon que la partie commune entre  $P_k$  et



**Figure 4:** Exemple de primitive d'extrusion  $P_k$  (en gris) et visibilité associée dans  $M_{-i,j}$  (en beige). L'arête  $a_l$  est indiquée en vert et est orthogonale à la face  $F_{ref}$ .  $I_G$  est l'interface géométrique entre  $P_k$  et  $M_{-(i+1),j}$ .

$M_{-(i+1),j}$  se réduit à des faces de  $P_k$  ou un volume commun entre  $P_k$  et  $M_{-(i+1),j}$ , respectivement.

Aux concepts de visibilité et de validité s'ajoute celui de primitive maximale, caractérisé par la condition selon laquelle, pour toute étape  $i$ , toute primitive  $P_k$  située à l'intérieur d'une autre primitive, est rejetée. Ceci justifie que les primitives  $P_k$  retenues soient aussi étendues que possible.

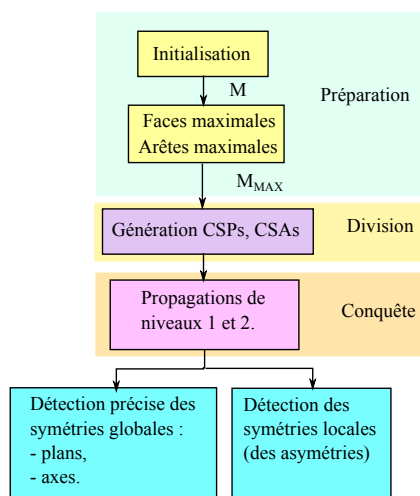
La Figure 3 fournit un exemple de graphe de construction où  $G_D$ . Outre les deux phases mentionnées précédemment, les critères importants contribuant à l'efficacité de l'approche concernent la sélection de primitives  $P_k$  garantissant que  $M_{-(i+1),j}$  soit de forme plus simple que  $M_{-i,j}$  et l'identification de primitives  $P_k$  qui soient également de forme simple. Chaque nœud de  $G_D$  exprime une étape non triviale du processus de construction de  $M$  :  $M_{-i,j}$ . Le groupe de primitives  $P_i$  contenu dans chaque nœud de  $G_D$  représente des séquences triviales du processus de construction de  $M$ , i.e. des séquences dérivant de propriétés exprimables algorithmiquement. Dans le cas présent, cette propriété exprime que

l'ordre de combinaison des  $P_i$  appartenant à un nœud peut être quelconque. Le graphe  $G_D$  est obtenu automatiquement et permet de trouver des solutions de décomposition d'objets entièrement constitués d'extrusions comme l'indique la Figure 3 comparativement à des logiciels tels que CATIA et SolidWorks qui possèdent des approches interactives, ne permettent que de déterminer un seul arbre de construction et n'ont pas trouvé de solution basée entièrement sur des extrusions dans ce cas.

Le travail proposé consiste à identifier de nouvelles propriétés et les prendre en compte dans la construction de  $G_D$ .

## 5. Principe d'analyse de symétrie globale et locale d'un objet

Tout comme l'analyse morphologique conduisant à la génération de  $G_D$ , l'analyse des propriétés de symétrie de  $M$  s'appuie sur une représentation B-Rep décrite en format STEP et une première étape de préparation de sa frontière afin que celle-ci soit intrinsèque à la forme de  $M$  (voir section 7.1). Dans le contexte de l'analyse de symétrie, cela signifie que la frontière de  $M$  devient intrinsèque à la forme de  $M$  et, en particulier, indépendante du paramétrage des faces et des arêtes de  $M$ . Cette indépendance comporte également l'indépendance vis-à-vis de l'origine du paramétrage des faces et des arêtes. Le modèle issu de cette transformation est  $M_{MAX}$ . Le principe de l'analyse de symétrie globale et locale de  $M$  est illustré à la Figure 5 et détaillé dans [Li11,LFLT13].



**Figure 5:** Principales étapes d'analyse de symétrie globale et locale de  $M$ .

### 5.1. Génération de $M_{MAX}$

Pour la génération de  $G_D$  comme pour l'analyse de symétrie de  $M$ , il apparaît que  $\partial M$  est soumise à un certain nombre

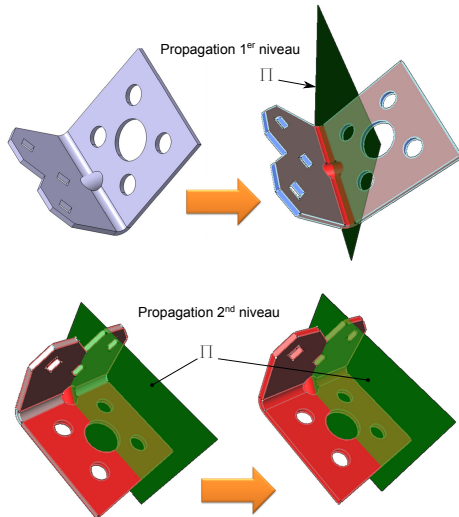
de contraintes afin de se conformer aux critères de décomposition et d'analyse de symétrie. Pour le premier cas, il s'agit de générer des primitives de formes simples et des modèles  $M_{-i,j}$  de forme de plus en plus simple. Pour le second cas, c'est l'indépendance de la décomposition de  $\partial M$  par rapport au paramétrage des surfaces qui importe.

Par rapport à un modèle  $M$  fournit en entrée, il est également nécessaire d'obtenir une décomposition de  $\partial M$  qui soit indépendante de tout modèleur et de tout processus de modélisation antérieure de  $M$ . Dans ce but, des opérations de transformation de  $\partial M$ , communément désignées par le terme "topologie virtuelle" [She01,FCF\*08], sont nécessaires pour satisfaire toutes les conditions précédentes. Dans le cas présent, cette nouvelle décomposition de  $\partial M$  constitue une représentation purement topologique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de modification de la représentation B-Rep initiale de  $M$  mais création d'une nouvelle structure de données liée à la structure de données du B-Rep initial de  $M$ . Les principaux critères de modification de la décomposition expriment le fait que toutes les faces adjacentes les unes aux autres, de même type et de mêmes paramètres, sont fusionnées, produisant ainsi des faces dites "maximales". Le même principe s'applique aux arêtes et celui-ci peut produire des arêtes sans sommet et des faces sans arête. Cette décomposition correspond également à des "c-faces" conformément aux définitions de faces proposées par Silva [Sil81]. La transformation de  $M$  en représentation à l'aide de faces et arêtes maximales produit le modèle  $M_{MAX}$ . Dans les sections suivantes, toute face ou arête mentionnée désigne une face et une arête maximale, respectivement.

Pour des raisons de compatibilité avec les modèleurs géométriques, la fusion de faces et d'arêtes produisant  $M_{MAX}$  s'appuie sur des tolérances de positionnement des faces dont la valeur est semblable à celle des tolérances internes de ces modèleurs afin de permettre la réutilisation de  $M$  dans des processus de construction d'objet. Pour les travaux effectués, l'ordre de grandeur de cette tolérance est de  $1.010^{-6}$ , représentant une précision relative.

### 5.2. Analyse de symétries locales et globales

L'analyse porte sur la détermination de plans de symétrie globaux et locaux uniquement et utilise une approche de type "diviser pour conquérir".  $M$  étant un volume constitué d'une seule partition, tout plan de symétrie global de  $M$  coupe nécessairement  $M$ , donc certaines faces et certaines arêtes de  $\partial M_{MAX}$ , et contient certains sommets de  $\partial M_{MAX}$ . Cette observation est à la base de la phase de division où  $\partial M_{MAX}$  est parcourue pour analyser les propriétés de symétrie de ses faces et de ses arêtes. Pour les arêtes, l'analyse des propriétés de symétrie porte sur ses deux faces adjacentes et est fonction des positions relatives des surfaces définissant les faces pour caractériser des configurations de symétrie valides pour une arête ou bien pour deux arêtes adjacentes d'une même face de  $\partial M_{MAX}$ . Une analyse similaire permet d'initier des



**Figure 6:** Principes des processus de propagation contribuant à l'analyse de symétrie de  $M$ . Propagation de niveau 1 : les faces rouges indiquent des faces et leur contour bénéficiant de la propriété de symétrie par rapport au plan de symétrie candidat  $\Pi$  (en vert), les faces roses bénéficient de la propriété de symétrie mais pas leur contour, les faces bleues ne sont pas symétriques par rapport à  $\Pi$ . Propagation de niveau 2 : par rapport au plan candidat  $\Pi$ , le résultat de la propagation de niveau 1 est propagé de part et d'autre de  $\Pi$  pour déterminer l'étendue de la propriété de symétrie.

configurations axisymétriques. Ainsi, des plans de symétrie candidats (CSP) (voir Figure 6) sont affectés à certaines faces, certaines arêtes et certains sommets de  $\partial M_{MAX}$  selon les propriétés de symétrie locales de ceux-ci. Une approche similaire est appliquée pour des axes de symétrie candidats (CSA). A l'issue de cette phase de division, tous les CSP et les CSA en interaction géométrique avec  $\partial M_{MAX}$  ont été déterminés et attachés aux entités correspondantes.

Ensuite, la phase de conquête permet d'étendre le domaine de validité d'une zone symétrique. Ce processus est illustré par la Figure 6. La conquête est organisée à partir de deux mécanismes de propagation. La propagation de niveau 1, dans le cas simplifié de plans de symétrie locaux uniquement, a pour objectif d'étendre les zones de symétrie rattachées à chaque plan candidat (CSP)  $\Pi$  en recherchant d'autres CSP voisins confondus avec un CSP initial, arbitrairement choisi (faces rouges et roses sur la Figure 6 et CSP en vert). La propagation s'établit à partir de faces adjacentes de  $\partial M_{MAX}$  par rapport aux faces associées au CSP initial. La propagation de niveau 2 reprend les zones de symétrie issues de la propagation de niveau 1 et les étend de part et d'autre du plan de symétrie candidat (CSP). Ce mécanisme de propagation prend son sens pour les plans de symétrie uniquement et n'interagit pas avec les CSA. La propagation

est conditionnée par la position relative de faces et d'arêtes disposées symétriquement par rapport à  $\Pi$ . Le mécanisme de propagation de front associé procède donc de manière simultanée, de part et d'autre de  $\Pi$  et de la zone de symétrie issue de la propagation de niveau 1 (nouvelles faces rouges situées de part et d'autre de  $\Pi$  sur la Figure 6). Les arêtes candidates sont identifiées sur le front courant et, à travers les relations d'adjacence de  $\partial M_{MAX}$ , permettent d'identifier les faces adjacentes, hors de la zone de symétrie, qui vont être évaluées pour déterminer si le front peut être étendu. Si la propagation de front associée à  $\Pi$  recouvre entièrement  $\partial M_{MAX}$ ,  $\Pi$  est un plan de symétrie global.

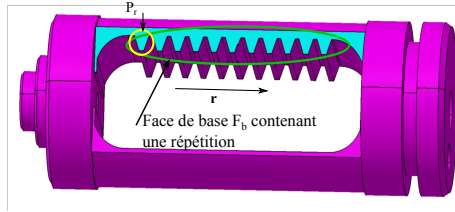
La description ci-dessus exprime les principes généraux et ne tient pas compte des configurations où les faces de  $\partial M_{MAX}$  sont bornées par des contours multiples : une configuration nécessairement prise en compte pour traiter des modèles B-Rep CAO. Une dernière observation importante concernant cette analyse adresse les arêtes de  $\partial M_{MAX}$ . Celles-ci sont utilisées tout au long du processus d'analyse mais du seul point de vue topologique, i.e., il n'est jamais fait référence à leur représentation géométrique. La disposition symétrique d'arêtes est déduite de celle de leurs faces adjacentes, ce qui confère une grande robustesse à cette analyse en ne faisant pas référence à la tolérance d'un modèleur CAO pour la définition des frontières de carreaux adjacents.

Les résultats d'analyse de symétrie sont illustrés par la Figure 15. Les faces rouges indiquent des faces symétriques par rapport à un plan de symétrie. Les contours de ces faces sont également symétriques par rapport à ce plan. Les faces roses sont des faces symétriques par rapport au même plan mais une arête au moins de leur contour ne vérifie pas la condition de symétrie. Les faces bleues ne vérifient pas la propriété de symétrie. Il en est de même pour les arêtes bleues. Ceci illustre les informations disponibles dans des configurations de symétries locales.

La complexité algorithmique mesurée pour cette analyse est de  $O^{2,11}$  dans le cas le plus défavorable mesuré sur des séries de cas tests de modèles B-Rep atteignant jusqu'à 11500 ou 23000 faces selon les cas.

## 6. Analyse de fonctions de répétition de primitives, hypothèses

Les fonctions de répétition de primitives et, plus généralement, de sous-ensembles d'opérations de modélisation d'un objet, sont communément disponibles dans des logiciels de CAO et sont assimilables à des fonctions de haut niveau participant à la modélisation d'un objet. Il est donc important de les prendre en compte dans un processus de construction de  $M$ , donc dans  $G_D$ . L'objectif de cette section est donc d'analyser les paramètres utilisés par ces fonctions et les propriétés géométriques correspondantes, en particulier les isométries qui sont en interactions avec les propriétés de symétrie locale de  $M$ . Ces interactions conduisent à des équivalences semblables à celles mentionnées dans l'exemple de



**Figure 7:** Exemple de répétition linéaire. La zone entourée en vert localise la répétition dans l'objet. La zone entourée en jaune localise le profil de la primitive répétée.

la Figure 1. Elles doivent être identifiées pour être prises en compte dans  $G_D$  et définir des alternatives d'arbres de construction de  $M$ .

Les logiciels de CAO distinguent deux catégories de répétitions : celles soumises à des isométries représentant des translations et celles correspondant à des rotations. Pour des raisons de concision et pour tenir compte des limites de l'analyse de symétrie décrite à la section 5, l'analyse des fonctions est restreinte aux répétitions linéaires qui expriment des isométries de type translation. Le cas de répétitions en rotation correspondant à des isométries de même type se déduit par une analyse similaire. La Figure 7 illustre un exemple de cette fonction. Les fonctions des logiciels sont basées sur deux directions indépendantes de répétition, pour les plus générales. Toutefois, l'étude proposée ici peut se ramener à une seule direction de répétition, dans un premier temps. Dans ce cas, la direction de répétition  $\mathbf{r}$  est nécessairement rectiligne.

On considère donc une répétition linéaire type associée à une primitive d'extrusion ou de révolution que l'on peut définir brièvement comme suit. **Répétition linéaire.** Soit une primitive d'extrusion  $P_r$ , définie à partir de contours fermés plans, extrudés dans la direction  $\mathbf{d}$  d'une longueur  $\|\mathbf{d}\|$ . Une répétition linéaire de  $P_r$  est définie dans une direction  $\mathbf{r}$  par des translations successives de  $P_r$  répétées  $n$  fois. Chaque volume ainsi obtenu constitue une occurrence de  $P_r$ .

La taxonomie des configurations correspondante est illustrée à la Figure 8 et s'énumère :

1. Si  $\mathbf{d} = \mathbf{r}$  où  $\mathbf{d}$  représente la direction d'extrusion de  $P_r$ , les faces latérales de  $P_r$  sont contenues dans un même plan ou un même cylindre (voir Figure 8a) selon les segments de droite ou arcs de cercles contenus dans la face de base  $F_b$  de  $P_r$ . Si la répétition est basée sur une primitive de révolution, l'axe de rotation  $\mathbf{d}$  de  $P_r$  est identique à  $\mathbf{r}$ , donc seules les faces cylindriques de  $P_r$  sont contenues dans un même cylindre (voir Figure 8b). Les axes des surfaces de révolution sont tous co-axiaux,
2. Si  $\mathbf{d} \perp \mathbf{r}$ , les faces de base  $F_b$  de  $P_r$  et de ses répétitions sont contenues dans un même plan, certaines

faces latérales planes de  $P_r$  sont contenues dans un même plan (voir Figure 8c). Pour une répétition basée sur une primitive de révolution d'axe de rotation  $\mathbf{d}$ , les segments de l'esquisse de  $P_r$ , orthogonaux à  $\mathbf{d}$ , génèrent des faces planes contenues dans un même plan. Les axes de rotation des primitives sont coplanaires et orthogonaux à  $\mathbf{r}$  (voir Figure 8d),

3. Si  $\mathbf{r}$  occupe une direction quelconque par rapport à la direction d'extrusion  $\mathbf{d}$ , certaines faces latérales planes peuvent être situées dans un même plan si  $(\mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$  où  $\mathbf{s}$  est la direction d'un segment de l'esquisse définissant le contour de  $F_b$  de  $P_r$  (voir Figure 8e). Cette disposition est donc fonction du contour de  $F_b$ . Pour une primitive de révolution  $P_r$ , la configuration est caractérisée par :  $\mathbf{d}, \mathbf{r} = \text{cte} \neq 0$ ,
4. outre les configurations particulières précédentes, la configuration la plus générale où  $P_r$  n'est pas axisymétrique et  $\mathbf{r}$  ne procure aucune invariance de face par rapport à cette primitive, se traduit par un ensemble de sommets situés sur un segment de direction  $\mathbf{r}$ . Pour une primitive  $P_r$  axisymétrique, les propriétés ont déjà été mentionnées et sont indépendantes du paramétrage de  $P_r$ . Toutefois, si  $P_r$  se réduit à une face sphérique, il n'y a plus d'axe de symétrie défini et la propriété caractéristique de cette configuration se ramène à ensemble de centre de sphères alignés sur un segment de direction  $\mathbf{r}$  pour être indépendant de tout paramétrage.

Il apparaît que les propriétés énumérées s'appuient sur des propriétés de symétrie des primitives (axisymétrie), des propriétés d'invariance de la position de certaines surfaces de  $P_r$  par rapport à  $\mathbf{r}$ . On observe que, compte tenu de la morphologie des primitives utilisées dans  $G_D$ , seules les surfaces planes et les surfaces cylindriques possèdent des propriétés d'invariance. Les répétitions impliquant des surfaces de révolution ( $P_r$  axisymétrique) sont caractérisées par la distribution coplanaire des axes ou linéaire des centres de sphères, selon le cas.

Outre la direction de répétition  $\mathbf{r}$ , les fonctions de modélisation sont également caractérisées par le nombre d'occurrences de  $P_r$  et par la distance entre deux occurrences successives selon  $\mathbf{r}$ . La distance entre deux occurrences successives de  $P_r$  peut être constante, le cas le plus fréquent, ou bien arbitrairement variable, le cas le moins fréquent.

L'invariance des faces correspond à des configurations où les faces concernées de  $\partial M$ , ou plus précisément de  $\partial M_{MAX}$ , sont différentes les unes des autres. Elles ne sont donc pas adjacentes les unes aux autres et représentent une configuration permettant de caractériser certains cas fréquents de dispositions de faces pouvant participer à des répétitions de  $P_r$ . C'est l'objet de la section suivante que d'analyser plus précisément les interactions entre ces observations, les propriétés de symétrie et le processus de construction de  $M$  à travers le graphe de construction de  $M$ .



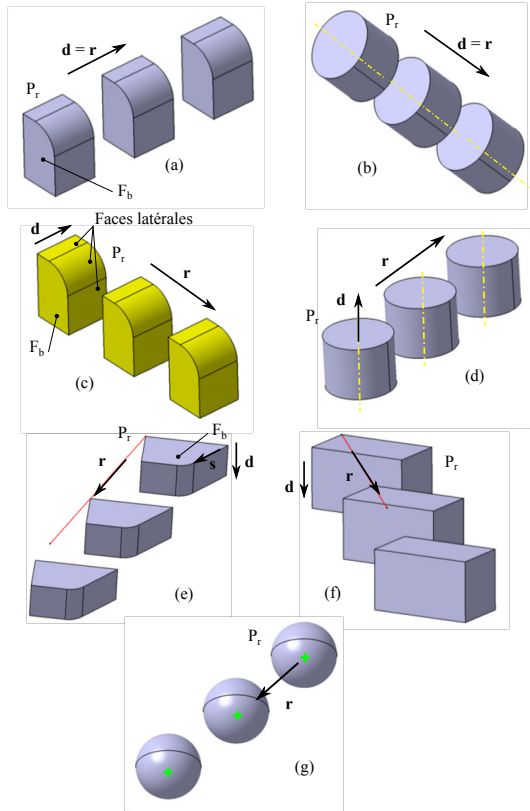


Figure 8: Taxonomie de répétitions linéaires.

## 7. Analyse des interactions : processus de construction, symétrie, répétitions

A l'issue de la description succincte des principes de génération de graphe  $G_D$ , de l'analyse de symétrie de  $M$  et des fonctions de répétition de primitives, l'objectif est maintenant d'analyser certaines interactions entre ces différentes opérations participant à la construction d'un objet afin d'identifier, a priori et rapidement, des fonctions de répétition pouvant être insérées à une étape  $i$  de génération de  $G_D$ .

### 7.1. Génération d'une frontière adaptée à l'analyse morphologique

Au-delà de la génération de  $M_{MAX}$  décrite à la section 5.1, les invariances de surfaces mises en évidence à la section 6 caractérisent également des faces coïncidant avec une même surface et possédant une même orientation, celles-ci correspondent également à des "m-faces" selon la classification de Silva [Sil81]. La propriété d'invariance associée à ces faces est intéressante pour accroître l'efficacité de l'identification de faces maximales pouvant participer à des répétitions de primitives. De même, une répétition de primitives peut comporter plusieurs de ces faces dont

les faces maximales les composant seront adjacentes, ceci conduit à un concept d'arête exprimant l'adjacence entre ces "m-faces". Collectivement, ces arêtes et "m-faces" sont dénommées arêtes et faces "super maximales" et représentées, comme les faces et arêtes maximales, à l'aide d'hypergraphes [FCF\*08, Li11, LFLT13].

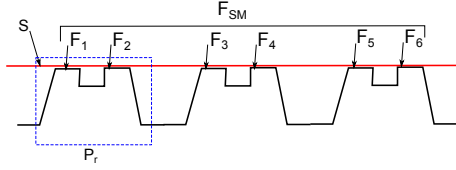
**Face super maximale.** Soit  $F_i \in \partial M_{MAX}$ ,  $F_i$  est incluse dans une surface  $S$  de l'un quelconque des types plan, cylindre, cône, tore ou sphère :  $F_i \subset S$ .  $S$  n'est pas bornée par un contour. L'orientation de  $F_i$  dans  $M_{MAX}$  est définie par l'orientation des arêtes de son contour  $O_{F_i} = \pm 1$  selon que cette orientation est directe ou inverse. Deux faces  $F_i, F_j$  adjacentes dans  $\partial M_{MAX}$  sont notées :  $F_i \top F_j$ . Une face super maximale associée à une surface  $S$  qui borne  $M_{MAX}$  est définie par l'ensemble de faces maximales  $F_{SM} : \{(F_i, F_j) \in \partial M_{MAX}, i \neq j, (F_i, F_j) \subset S, F_i \top F_j\}, Card(F_{SM}) > 1$ .

Les résultats correspondants sont illustrés à la Figure 14.

### 7.2. Visibilité d'une répétition dans un objet

Le concept de visibilité d'une primitive a déjà été introduit à la section 4. Ce concept caractérise la trace du processus d'insertion d'une primitive de répétition dans la frontière d'un objet,  $\partial M_{MAX}$ . En terme de nombre de faces, on considère que  $P_r$  possède un nombre maximal de faces visibles, i.e. une seule face de  $P_r$  n'appartient pas à  $\partial M_{MAX}$ . En complément de ce critère, la visibilité d'une répétition à partir de critères portant sur la disposition de ses primitives constitutives et de leurs faces. Ce sont ces critères qui sont définis ci-dessous. Conformément aux primitives utilisées à la section 4, on se place dans une configuration où la répétition est définie à partir de primitives réalisant un ajout de matière. De même, on fait appel au concept de primitive maximale (voir section 4) pour déterminer chaque occurrence de  $P_r$ . Une primitive  $P_k$  est maximale lorsqu'elle satisfait la condition de validité (voir section 4) et lorsqu'elle ne peut être totalement incluse dans aucune autre primitive  $P_q$  de  $G_D$ , i.e.  $P_k \not\subset P_q, \forall q \neq k$ . De ce fait, on définit des *répétitions visibles* où  $P_r$  est visible et maximale comme domaine d'étude actuel.

Par la suite, une première étape consiste donc à déterminer si une répétition est intégrée à une primitive (voir Figure 7 la face bleue dont le contour comporte la répétition du profil de denture et qui représente une possible face de base d'une primitive d'extrusion) ou bien si elle est nécessairement constituée de primitives indépendantes (voir Figure 12 où chaque dent du profil est définie par une face différente, ce qui implique la définition de différentes primitives d'extrusion). Ceci caractérise une catégorie d'interactions avec les opérateurs de construction. Afin de se placer dans une configuration simple illustrant également des interactions avec les propriétés de symétrie de  $M_{MAX}$ , on prend comme point de départ une configuration de répétition illustrée par la Figure 8c. Egalement pour illustrer la visibilité



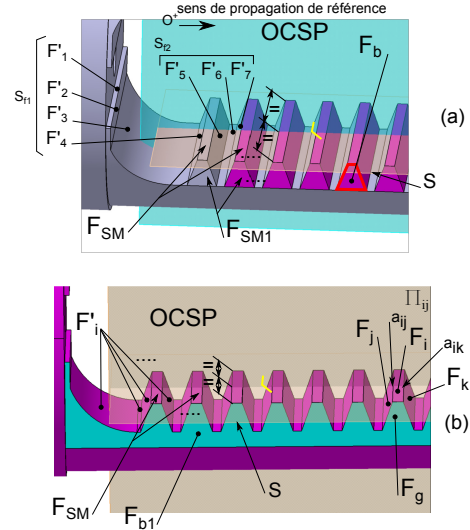
**Figure 9:** Exemple de répétition, représentée de profil, où chaque occurrence de  $P_r$  possède deux faces  $F_i \in F_{SM}$ .

d'une répétition dans une configuration simple, on considère des répétitions telles qu'au moins une face plane latérale de  $P_r$ , de normale  $\mathbf{n}_f$ , soit telle que :  $\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{r} = 0$ . Cette condition garantit le fait que cette face engendre nécessairement une face "super maximale",  $F_{SM}$ , au moins dans  $\partial M_{MAX}$ . Toutes les conditions suivantes sont établies afin de déterminer des critères de visibilité maximale de cette répétition ainsi que ses paramètres : nombres d'occurrences de  $P_r$ , direction  $\mathbf{r}$ , faces constitutives de  $P_r$ , distance entre les occurrences de  $P_r$ . De plus, on indique si des propriétés de symétrie peuvent contribuer à déterminer tout ou partie de ces paramètres.

Dans la configuration de la Figure 8c, l'existence de  $F_{SM}$  est associée soit à la face  $F_b$  de  $P_r$ , soit à une face latérale de  $P_r$ . Dans tous les cas, on suppose que ces faces sont entièrement visibles, i.e. elles appartiennent à  $\partial M_{MAX}$ . On se restreint à la configuration où chaque face  $F_i \in F_{SM}$  comporte un contour afin de simplifier la présentation des critères. Le contour de chaque  $F_i$  comporte le même nombre d'arêtes  $n_a$  (voir Figure 14). Pour que  $F_{SM}$  contienne des faces latérales de  $P_r$ , et de ses occurrences, on a nécessairement  $n_a = 4$  pour chaque face  $F_i \in F_{SM}$  puisque  $F_i$  est obtenue par une extrusion d'un segment ou d'un arc de cercle. Toute face  $F_i \in F_{SM}$  ne satisfaisant pas ces conditions ne peut contribuer à la définition d'une répétition. Si  $n$  est le nombre de faces contenues dans  $F_{SM}$  qui satisfont toutes les conditions précédentes et si les critères qui suivent sont également satisfaits, la répétition pourra être définie avec  $n$  occurrences. Cette disposition suppose que toute face contenue dans  $F_{SM}$  participe à une et une seule occurrence, ce qui correspond à une hypothèse utilisée pour simplifier l'analyse réalisée (voir Figure 9 un exemple qui ne respecte pas cette condition). Dans ce qui suit, on peut donc se ramener au seul cas où  $n = \text{Card}(F_{SM})$  afin de simplifier l'exposé puisque les autres faces  $F_i \in F_{SM}$  ne contribuent pas à la définition de la répétition.

La configuration étudiée interagit également avec des propriétés de symétrie. Ainsi, pour que  $F_{SM}$  contienne des faces latérales, il doit exister un plan de symétrie, OCSP, orthogonal aux faces latérales de  $P_r$  et donc à  $F_{SM}$  (voir Figure 15a). Cette condition définit une propriété de symétrie locale, portant sur  $P_r$  et sa répétition, qui peut donc être utilisée dans la définition de la répétition comme suit.

Conformément à l'analyse de symétrie de la section 5, la propriété de symétrie locale de  $P_r$  permet de caractériser (voir Figure 10a et b partie gauche) :



**Figure 10:** a) propriété de symétrie locale de  $P_r$  par rapport à OCSP et relation avec  $F_{SM} \subset S$ ,  $F_{SM1}$  ( $F_{SM2}$  étant cachée). La polygone en jaune marque l'orthogonalité entre  $S$  et OCSP, b) (partie gauche) variante de la configuration précédente où les faces  $F_{SMi}$  sont remplacées par  $F_i$ . (partie droite) ensemble d'entités autour de  $F_i$  utilisées dans la définition d'un super rectangle.

- P1. la présence de deux faces, adjacentes aux faces latérales de  $P_r$ . Il s'agit donc de faces  $F_b$  de  $P_r$ , qui sont nécessairement des faces planes parallèles à OCSP et représentant  $F_b$ . Ces faces planes appartiennent à deux faces  $F_{SM1}$  et  $F_{SM2}$  situées de part et d'autre de OCSP (voir Figure 12) ou bien chaque face  $F_{SMi}$  se réduit à une face maximale  $F_{bi}$  (voir Figure 7) et ces deux séries de faces maximales expriment, dans tous les cas, une distance constante par rapport à OCSP représentant la demi-distance d'extrusion de  $P_r$ ,
- P2. que les faces de  $F_{SM}$  soient des faces latérales, c'est-à-dire que les arêtes orthogonales à OCSP doivent être rectilignes et adjacentes, soit à une face plane, soit à une face cylindrique d'axe orthogonal à OCSP (voir Figure 15a). Ces conditions s'appliquent également aux extrémités de la répétition puisque celle-ci possède une visibilité maximale,
- P3. les faces latérales de  $P_r$ , autres que celles contenues dans  $F_{SM}$ . Ces faces,  $F'_i$ , sont donc adjacentes aux faces de  $F_{SM}$  et vérifient les conditions P1 et P2 ci-dessus ou bien elles sont adjacentes à des faces telles que les faces  $F_{bi}$  vérifient les conditions P1 et P2. Toutes ces faces sont bornées par un seul contour avec  $n_a = 4$ ,

De telles conditions sont évaluées lors de l'analyse de symétrie et, plus particulièrement lors de la propagation de ni-

veau 1. L'existence de ces propriétés doit donc être transmise à la phase d'analyse de visibilité d'une répétition.

Afin que la primitive  $P_r$  et sa répétition définissent un ajout de matière s'ajoute la condition telle que les arêtes communes entre  $F_{SM}$  et la répétition de  $F_b$  sont nécessairement des arêtes convexes.

Si la condition P1 précédente définit des faces qui sont identiques pour toutes les faces latérales identifiées, ceci indique que la répétition appartient à une seule primitive d'extrusion : il s'agit donc d'une répétition de courbes dans un contour de face de base  $F_b$  (voir Figure 7) et non une répétition de primitives (voir Figure 12). Ces différences de configurations sont conformes au principe de génération de primitive maximale puisque la répétition est rattachée au contour de la primitive dans le premier cas plutôt que de définir un ensemble de primitives indépendantes.

Les propriétés précédentes permettent de déterminer le nombre d'occurrences  $n$  de  $P_r$ . Afin de poursuivre l'analyse des interactions entre répétitions et propriétés de symétrie, des propriétés de symétrie complémentaires peuvent être ajoutées pour caractériser certaines répétitions de la même catégorie afin de mettre en évidence les paramètres de ces répétitions qui peuvent être ainsi déterminés (voir Figure 10a) :

P4. En complément de P3, on désigne par  $n_{1j}$ , le nombre de faces latérales satisfaisant P3 et formant une séquence de faces  $F'_i, S_{fj}$ , ne contenant aucune face de  $F_{SM}$  et dont une seule face de  $S_{fj}$  est adjacente à une face  $F_j \in F_{SM}$ . Toutes les faces de  $S_{fj}$  étant identifiées à partir de la propagation de niveau 1 relative au plan OCSP, le sens de propagation déterminant une orientation directe de référence  $O^+$ , on peut définir le nombre de faces latérales  $F'_i$  pouvant participer à la répétition et situées d'un même côté des faces  $F_j \in F_{SM}$ . Pour ce faire, on considère une face  $F_j \in F_{SM}$  comme face de référence et on détermine la séquence  $S_{fj}$  telle que  $F'_i \in S_{fj}$  soit une face terminale de  $S_{fj}$ , i.e.  $F'_i \top F_j$ . Ainsi,  $S_{fj}$  est associée à une face de  $F_{SM}$ ,  $S_{fj} \top F_j$  et à une orientation (directe ou inverse) selon que  $S_{fj}$  est parcourue, à partir de la face terminale  $F'_i$ , dans le sens  $O^+$  ou bien  $O^-$ . Il est alors possible de scinder les  $S_{fj}$  en deux groupes correspondant aux sens  $O^+$  et  $O^-$  respectivement. Pour le sens  $O^+$ , soit  $n_1 = \min_{j=1, \dots, n} n_{1j}$ ,  $n_1$  définit le nombre de faces de  $S_{fj}$  pouvant participer à la répétition. De même pour  $O^-$ ,  $n_2 = \min_{j=1, \dots, n} n_{2j}$  définit le nombre de faces latérales situées de l'autre côté des faces  $F_j \in F_{SM}$  qui peuvent également participer à la répétition,

P5. P4 peut être associée à une propriété de symétrie concernant le contour de  $P_r$ , i.e. plans de symétrie locaux orthogonaux au plan OCSP précédent et à  $F_{SM}$  et attachés à chaque face  $F_j \in F_{SM}$  (voir Figure 11). Préalablement, il convient de remarquer que  $S_{fj}$  possède une ou deux faces terminales  $F'_i$ . Dans le pre-

mier cas,  $S_{fj}$  est située à l'extrémité de la répétition (voir  $S_{f1}$  dans l'exemple de la Figure 10a) ou bien  $S_{fj}$  est située entre deux faces consécutives  $(F_j, F_k) \in F_{SM}$  et rencontre une face ne satisfaisant pas la condition P3. Dans le second cas,  $S_{fj}$  contient toutes les faces situées entre deux faces consécutives  $(F_j, F_k) \in F_{SM}$ . Dans le cas où  $n_1$  et  $n_2$  sont tous les deux définis à partir de séquences  $S_{fj}, S_{fk}$  qui possèdent chacune deux faces terminales, alors  $S_{fj} \equiv S_{fk}$  et le contour de  $P_r$  pourra satisfaire une condition de symétrie avec un nombre de faces  $n_r$  défini par :  $n_1 = n_2 = (n_r - 1)/2$  si  $n_i$  est pair (dans ce cas les occurrences de  $P_r$  sont juxtaposées) ou bien  $(n_1 - 1) = (n_2 - 1) = (n_r - 1)/2$  si  $n_i$  est impair (les occurrences de  $P_r$  sont séparées par une face comme dans l'exemple de la Figure 10a). Dans le cas où  $n_1$  ou  $n_2$  est défini à partir d'une séquence  $S_{fj}$  qui ne possède qu'une seule face terminale, alors  $\min(n_1, n_2) = (n_r - 1)/2$ . La détermination de  $n_r$  permet d'exprimer la condition nécessaire de symétrie que doit vérifier chaque occurrence de la répétition. Cette symétrie implique la symétrie de la face  $F_b$  de chaque occurrence de  $P_r$  (voir Figure 11a) selon une direction orthogonale au plan OCSP défini en P2. Cette symétrie locale est définie par un plan orthogonal à  $F_b$  attaché à chaque face  $F_j \in F_{SM}$  et doit être valide sur un nombre de faces au moins égal à  $n_r$  et générée par la propagation de niveau 2 décrite à la section 5 (voir Figure 11b). Dans ces circonstances, l'analyse de symétrie peut donc produire les informations nécessaires à la caractérisation de la propriété de symétrie locale de chaque occurrence de la répétition et donc de la visibilité de chacune d'entre elle (voir Figure 15c),

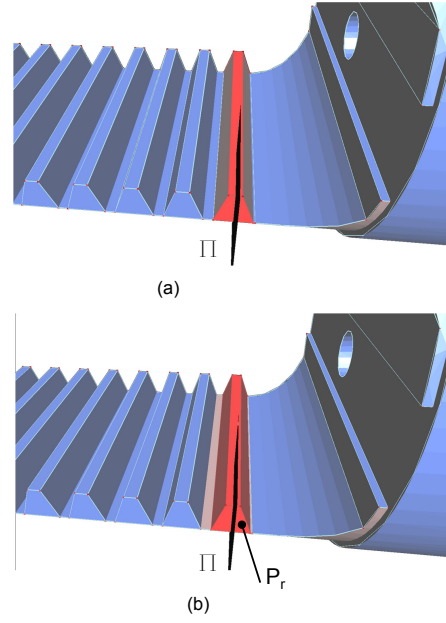
P6. La propriété P5 a permis de définir les conditions de symétrie locale permettant de valider la symétrie de chaque occurrence de  $P_r$ . Afin de déterminer complètement la répétition de  $P_r$  en faisant appel uniquement à des propriétés de symétrie, il reste à vérifier que la distance entre chaque occurrence de  $P_r$  est constante et correspond à la distance entre deux occurrences successives de  $P_r$ . Cette propriété est valide pour des répétitions où les occurrences de  $P_r$  sont juxtaposées ou bien lorsque qu'elles sont séparées par une face plane (voir Figure 10a). Dans ce cas, il existe  $(n - 1)$  séquences  $S_{fj}$  possédant deux faces terminales  $F'_i$ . Dans ce cas, la répétition sera constituée de  $n$  profils équidistants si des symétries locales permettent de générer l'ensemble de la répétition à partir de la symétrie définie en P5 pour chaque occurrence de  $P_r$ . Le nombre de symétries locales nécessaires est défini comme suit. Une première symétrie locale doit exister qui couvre l'ensemble de la répétition (voir Figure 15b). Si  $n$  est impair cette symétrie locale est attachée à la face  $F_j \in F_{SM}$  qui définit l'occurrence  $(n - 1)/2$ . Si  $n$  est pair, cette symétrie est attachée à une face  $F'_i$  de la séquence  $S_{fj}$  qui lie les occurrences  $n/2$  et  $(n + 1)/2$ .

A l'intérieur de  $S_{fj}$ , si le nombre  $n_j$  de faces  $F_i^l$  est impair, les occurrences de la répétition étant séparées par une face, la propriété de symétrie sera attachée à la face  $(n_j + 1)/2$  et le plan de symétrie sera de type orthogonal à la face correspondante (OCSP). Si  $n_j$  est pair, les occurrences de la répétition étant juxtaposées, la propriété de symétrie sera attachée à l'arête commune entre les faces  $n_j/2$  et  $(n_j + 1)/2$ , le plan de symétrie correspondant sera de type bissecteur de ces deux faces. Par la suite, on ajoute les conditions de symétrie suivantes de façon récursive. Si  $n$  est impair, on décompose la répétition en  $(n + 1)/2$  répétitions pour définir une autre symétrie locale. Si  $n$  est pair, la nouvelle décomposition utilise  $n/2$  répétitions. Cette réduction de la décomposition est récursivement appliquée jusqu'à obtenir  $n = 2$ , ce qui détermine le nombre de symétries locales qui permettent de caractériser complètement une catégorie de répétitions linéaires avec une distance constante entre les primitives  $P_r$ . Si toutes les propriétés de symétrie correspondantes sont vérifiées, alors la répétition correspondante possède des occurrences dont la distance est déterminée par la distance entre deux plans de symétrie successifs associés aux deux faces correspondantes de  $F_{SM}$  et à pour valeur  $o_r$ .

L'ensemble des propriétés précédentes permet de définir tous les paramètres de la répétition :  $P_r$ ,  $n$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{d}$  et  $o_r$  la distance entre deux occurrences successives de la répétition. Ces paramètres sont établis à partir de faces visibles de  $\partial M_{MAX}$ . Les conditions P1 à P6 définissent donc les critères de visibilité de la répétition dans  $\partial M_{MAX}$ .

De plus, la visibilité d'une classe de répétitions appartenant à la catégorie de la Figure 8c, i.e. tous les paramètres de la répétition, est déduite des propriétés de symétries partielles de  $\partial M_{MAX}$  et de propriétés des primitives d'extrusion. Ceci montre également la compatibilité de l'approche proposée avec l'analyse de symétrie décrite à la section 5.2 où les principes de propagation de propriétés de symétries locales vers des propriétés globales sont compatibles avec la formulation du critère de visibilité de la catégorie de répétitions traitée. La visibilité ainsi définie, si elle correspond à un ensemble de primitives indépendantes, permet de définir un attachement de chacune des primitives  $P_r$  à travers une interface  $I_G$  de type surfacique (voir section 4), les primitives  $P_r$  étant nécessairement placées dans une face plane ou bien une face super maximale plane (voir Figure 12) car le contour de la répétition ainsi définie est un contour rectangulaire donc délimité par une face plane ou une face super maximale contenant des faces planes.

Les propriétés P1 à P6 montrent que les faces participant à ces propriétés sont directement disponibles dans les phases de propagation de niveaux 1 et 2. Il n'y a donc pas d'accroissement significatif de la complexité algorithmique pour l'identification de répétitions visibles par rapport à l'analyse de symétrie de  $M$ .



**Figure 11:** a) exemple de plan de symétrie local  $\Pi$  associé à une face  $F_j \in F_{SM}$  et orthogonal au plan OCSP de la Figure 10. La coloration des faces correspond aux propriétés de symétrie obtenues après la propagation de niveau 1, b) configuration identique avec coloration des faces selon les propriétés de symétrie obtenues après la propagation de niveau 2.

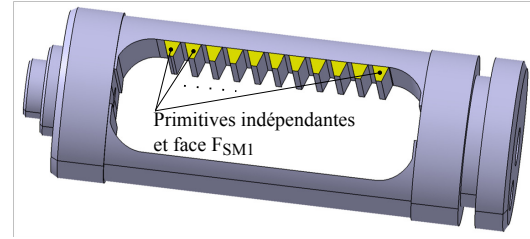
Outre ces résultats, les propriétés P1 à P3 mettent en évidence l'intérêt de caractériser un ensemble de faces déterminant des faces latérales d'une ou plusieurs primitives d'extrusion possédant la même distance d'extrusion et étant adjacentes les unes aux autres. Ces propriétés et les relations d'adjacences associées contribuent à structurer le contenu de  $F_{SM}$  dont les faces ne possèdent pas de relation d'adjacence ni de relations spatiales pour la structurer. Le concept ainsi défini est dénommé "super rectangle" et contient un ensemble de faces cylindriques et de faces planes liées à un plan OCSP et adjacentes à des faces planes. Un exemple de ce concept est représenté à la Figure 16. Ces entités sont directement générées pendant la phase d'analyse de symétrie et permettent d'accroître l'efficacité du processus d'identification de primitives et de répétitions, comme l'indique la définition suivante d'un super rectangle.

**Super rectangle.** Soit  $(F_i, F_j, F_k) \in \partial M_{MAX}$ , on suppose que  $F_i$  est une face plane ou une face cylindrique et  $F_i$  est bornée par un seul contour constitué de quatre arêtes (voir Figure 10b, partie droite). De plus, on suppose que  $F_i \perp F_j$  le long d'une arête  $a_{ij}$  et  $F_j$  est une face satisfaisant les mêmes conditions que  $F_i$ . On suppose également que  $(F_i, F_j)$  ont une position spatiale relative qui permet de disposer d'une pro-

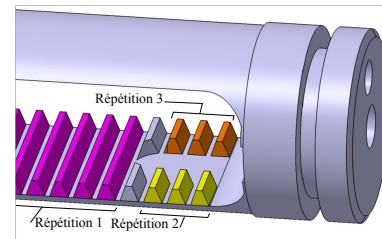
priété de symétrie représentée par le plan  $\Pi_{ij}$  valide pour  $S_i, F_i \subset S_i$ , et  $S_j, F_j \subset S_j$  et l'arête commune entre  $F_i$  et  $F_j$  où  $S_i$  et  $S_j$  désignent les surfaces non bornées contenant  $F_i$  et  $F_j$ , respectivement. On suppose également que  $\Pi_{ij} \perp a_{ij}$  car  $a_{ij}$  est nécessairement un segment de droite dans le cas présent. On suppose que  $F_k$  bénéficie des propriétés que  $F_j : F_i \top F_k \rightarrow a_{ik}, \exists \Pi_{ik} \perp a_{ik}$ . Dans le contexte de l'analyse de symétrie et de la propagation de niveau 1, on suppose que  $\Pi_{ij}$  coïncide avec  $\Pi_{ik}$ , ce qui indique que  $a_{ij} \parallel a_{ik}$ . Soient  $a_{ig}$  et  $a_{ih}$  les deux autres arêtes du contour de  $F_i$ , ces deux arêtes résultent de l'adjacence de  $F_i$  avec  $F_g$  et  $F_h$ , respectivement. On suppose que  $F_g$  et  $F_h$  sont des faces planes. Dans ce cas,  $a_{ig}$  et  $a_{ih}$  sont opposées et intercalées entre  $a_{ij}$  et  $a_{ik}$ , sinon le contour de  $F_i$  serait dégénéré. Alors si  $S_g, F_g \subset S_g$  et  $S_h, F_h \subset S_h$ , sont disposées symétriquement et parallèlement à  $\Pi_{ij}$  et si toutes les conditions précédentes sont satisfaites,  $F_i$  est une face candidate pour initier un super rectangle.  $F_g$  et  $F_h$  constituent des faces de base d'une primitive d'extrusion. Partant de  $F_i$ , la face  $F_j$  peut maintenant être évaluée pour vérifier si elle satisfait les mêmes conditions que  $F_i$ . Le mécanisme de propagation correspondant s'arrête lorsque la face  $F_p$  évaluée ne satisfait plus les conditions nécessaires ou bien que  $F_p = F_i$ . Si ce dernier critère d'arrêt de propagation n'est pas utilisé, le super rectangle peut être étendu en considérant l'arête  $a_{ik}$  et la face  $F_k \top F_i$  comme nouvelle direction de propagation. L'ensemble de faces ainsi obtenu constitue un super rectangle défini à partir de propriétés de symétries locales de  $\partial M_{MAX}$ .

Cette analyse d'interactions entre diverses propriétés permet de mettre en évidence des équivalences entre la définition de certaines opérations de modélisation, certaines répétitions de primitives dans le cas présent, et des propriétés géométriques, plus particulièrement les propriétés de symétrie, qui vont influencer sur l'identification de primitives dans  $G_D$  et sur les propriétés qui vont pouvoir être associées à ces primitives, donc aux différents processus de construction de  $M$  qui peuvent être dérivés de  $G_D$ .

La généralisation de cette approche à toutes les configurations de la taxonomie de la Figure 8 s'opérera en identifiant les propriétés  $P_i$  qui disparaissent au profit de traitements requis pour ces autres configurations. Le processus de généralisation nécessite également de prendre en compte des interfaces  $I_G$  de type volumique entre une répétition de primitives et le reste de l'objet. Si l'identification de répétitions de primitives est un moyen de renforcer la génération d'une structure de  $M$  décrite dans  $G_D$ , l'identification de répétitions n'est pas nécessairement un traitement a priori vis-à-vis de la génération de  $G_D$ . La mise en évidence de certaines répétitions peut nécessiter une analyse de  $G_D$  pour déterminer celles pour lesquelles la symétrie ou la visibilité de ces primitives ne permettent pas une génération a priori. De même, la détermination de répétitions peut interagir avec d'autres répétitions comme l'indique la Figure 13 où la forme locale de  $M$  peut être vue comme une configuration de plusieurs répétitions par ajout de matière ou bien comme l'interac-



**Figure 12:** Version sensiblement différente de l'objet de la Figure 7. Les faces indiquées en jaune définissent la face de base de chaque occurrence de la répétition. Ces faces sont indépendantes les unes des autres. Dans la Figure 7, ces mêmes faces appartiennent toutes à une seule et même face de base d'une seule primitive d'extrusion.



**Figure 13:** Interactions entre des répétitions et des primitives.

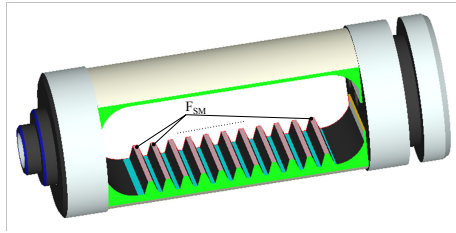
tion d'une répétition par ajout de matière avec une primitive d'enlèvement de matière.

## 8. Résultats

Les différents algorithmes utilisés ont été développés dans un environnement logiciel basé sur OpenCascade. Ils mettent en évidence les résultats de génération d'entités "super maximales", de super rectangles, définissant des séries de faces latérales d'extrusions, de symétries locales qui participent à la définition de visibilité d'une primitive de répétition telle que présente dans l'objet de la Figure 7.

Comme l'indique l'analyse de symétrie décrite à la section 5.2, la visibilité d'une répétition repose également sur l'utilisation de tolérances géométriques du même ordre de grandeur que celle d'un modèleur géométrique. Il s'agit d'une condition nécessaire de compatibilité de la détermination de primitives avec l'utilisation d'un graphe de construction dans un modèleur géométrique particulier pour décrire un arbre de construction répondant à un besoin spécifique. La tolérance utilisée est donc de  $1.0 \cdot 10^{-6}$ .

Les résultats présentés ont déjà fait l'objet de certaines illustrations au cours des sections précédentes afin de montrer comment les entités de type face super maximale et super rectangle contribuent à l'identification de répétitions et



**Figure 14:** Résultats de l'identification d'entités "super maximales". Les faces noires n'ont pas de statut "super maximal". Les différentes couleurs indiquent différentes faces "super maximales".

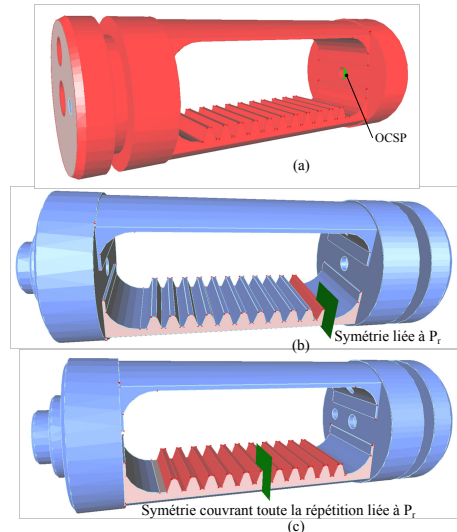
comment le critère de visibilité permet de distinguer les répétitions présentes dans une primitive d'extrusion de configurations où une répétition est une opération strictement nécessaire dans un processus de construction.

La Figure 16 représente le résultat de l'identification d'un super rectangle où la face de base associée contient l'ensemble de la denture de l'objet. Cette configuration indique que la denture constitue une répétition incluse dans une seule primitive dont la face de base est représentée en bleu à la Figure 7. La Figure 15a montre le résultat de l'analyse de symétrie avec un plan OCSP orthogonal à la face super maximale  $F_{SM}$  indiquée à la Figure 14. La partie de l'objet, symétrique par rapport à cet OCSP (zone rouge), recouvre effectivement la totalité de la denture contenue dans le super rectangle de la Figure 16, ce qui est conforme au concept de super rectangle.

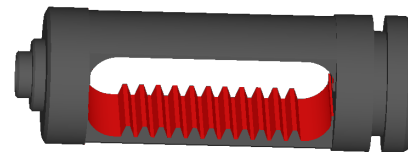
Les Figures 15b, c montrent deux résultats d'analyse de symétrie qui illustrent la propriété P6 permettant de déterminer si les occurrences de  $P_r$  sont uniformément réparties selon une distance constante  $o_r$ . La Figure 15b montre que le plan de symétrie situé au milieu de la denture (nombre d'occurrences impair) est bien associé à une propriété de symétrie qui recouvre entièrement la répétition. La Figure 15c montre que le plan de symétrie situé sur la dernière occurrence de la répétition, qui correspond à la dernière itération du processus récursif de P6, possède une propriété de symétrie qui recouvre complètement cette occurrence. Cette figure valide la détermination de  $o_r$  à partir du processus d'analyse de symétrie.

## 9. Conclusion

La génération de graphes de construction pour des objets manufacturés est un moyen de pouvoir éditer la forme de cet objet pour lui appliquer différentes modifications en élargissant les possibilités par rapport au seul arbre binaire issu d'un processus de construction en CAO, lorsque celui-ci est disponible. Le processus correspondant nécessite une analyse morphologique de l'objet pour déterminer les primitives qui vont constituer ce graphe et les opérateurs qui vont



**Figure 15:** Analyse de symétrie. a) symétrie locale permettant de caractériser les faces latérales d'une répétition. b) symétrie locale permettant de caractériser la symétrie locale du profil répété. c) symétrie locale permettant de caractériser la symétrie de la zone de répétition et, en combinaison avec la symétrie du profil et des symétries intermédiaires, l'équidistance entre les profils.



**Figure 16:** Résultats de l'identification de faces latérales constituant un super rectangle.

décrire les interactions entre les primitives pour générer progressivement cet objet.

Cette analyse morphologique porte sur des aspects caractéristiques des primitives constitutives du graphe, sur les propriétés de symétrie globales et locales de l'objet et sur des propriétés de fonctions de modélisation de haut niveau telles que les fonctions de répétition de primitives qui sont couramment utilisées dans les processus de modélisation et les logiciels CAO. Tous les aspects précédents interagissent dans certaines configurations et ont donc un impact sur le processus de génération du graphe, pour déterminer si une répétition se place au niveau du contour d'une primitive ou bien s'il s'agit de répétition effective de primitives, par exemple.

Certaines des interactions ont été analysées et présentées dans une démarche d'identification, a priori, de répétitions

de primitives. Ainsi, le concept de faces "super maximales" est apparu comme un complément utile à la détermination de certaines répétitions de primitives, en lien avec les propriétés de symétries locales de l'objet et le concept de "super rectangle" afin de déterminer plus efficacement les primitives participant à une fonction de répétition et, dans tous les cas, de caractériser plus efficacement la visibilité de primitives à une étape donnée de la génération du graphe de construction.

Ces interactions montrent la nécessité de s'appuyer sur une notion de structure d'un objet, à laquelle participe ses propriétés de symétrie et la spécification de fonctions de modélisation de haut niveau, pour contribuer à la détermination d'un graphe de construction d'un objet qui permette de produire une représentation compacte à partir de laquelle des variantes peuvent être générées efficacement en s'appuyant sur les propriétés identifiées.

## Références

- [abe06] *Multi-CAD Design Chain Benchmark Report : Insulating Engineering from Today's Multi-CAD Environment*. Tech. rep., Aberdeen group, 2006.
- [BBB00] BELAZIZ M., BOURAS A., BRUN J.-M. : Morphological analysis for product design. *CAD*. Vol. 32, Num. 5-6 (2000), 377–388.
- [BC04] BUCHELE S. F., CRAWFORD R. H. : Three-dimensional halfspace constructive solid geometry tree construction from implicit boundary representations. *CAD*. Vol. 36 (2004), 1063–1073.
- [BLHF13] BOUSSUGE F., LÉON J.-C., HAHMANN S., FINE L. : Idealized models for FEA derived from generative modeling processes based on extrusion primitives. In *22<sup>nd</sup> Int. Meshing Roundtable, Orlando, USA, Oct. 13–16* (2013), Verlag S., (Ed.), vol. 22, pp. 127–145.
- [BLHF14] BOUSSUGE F., LÉON J.-C., HAHMANN S., FINE L. : Extraction of generative processes from B-Rep shapes and application to idealization transformations. *CAD*. Vol. 46 (2014), 79–89.
- [CKL04] CHONG C. S., KUMAR A. S., LEE K. H. : Automatic solid decomposition and reduction for non-manifold geometric model generation. *CAD*. Vol. 36, Num. 13 (2004), 1357–1369.
- [FCF\*08] FOUCAULT G., CUILLIÈRE J.-C., FRANCOIS V., LÉON J.-C., MARANZANA R. : Adaptation of CAD model topology for finite element analysis. *CAD*. Vol. 40, Num. 2 (2008), 176–196.
- [HPR00] HAN J., PRATT M., REGLI W. C. : Manufacturing feature recognition from solid models : A status report. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. Vol. 16 (2000), 782–796.
- [JCH13] JIANG J., CHEN Z., HE K. : A feature-based method of rapidly detecting global exact symmetries in CAD models. *CAD*. Vol. 45 (2013), 1081–1094.
- [JG00] JHA K., GURUMOORTHY B. : Multiple feature interpretations across domains. *Computers in Industry*. Vol. 42 (2000), 13–32.
- [LAPL05] LEE K. Y., ARMSTRONG C. G., PRICE M. A., LAMONT J. H. : A small feature suppression/unsuppression system for preparing B-Rep models for analysis. In *Proceedings of the 2005 ACM symposium on Solid and physical modeling* (2005), SPM '05, pp. 113–124.
- [Ley01] LEYTON M. : *A Generative Theory of Shape*. Lecture Notes in Computer Science LNCS 2145. Springer-Verlag, 2001.
- [LFLT13] LI K., FOUCAULT G., LÉON J.-C., TRILIN M. : Fast global and partial reflective symmetry analyses using boundary surfaces of mechanical components. *CAD*. Vol. (soumis) (2013).
- [Li11] LI K. : *Shape Analysis of B-Rep CAD Models to Extract Partial and Global Symmetries*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2011.
- [LLM08] LI M., LANGBEIN F., MARTIN R. : Detecting approximate symmetries of discrete point subsets. *CAD*. Vol. 40, Num. 1 (2008), 76–93.
- [LLM10] LI M., LANGBEIN F., MARTIN R. : Detecting design intent in approximate CAD models using symmetry. *CAD*. Vol. 42 (2010), 183–201.
- [MPWC12] MITRA N. J., PAULY M., WAND M., CEYLAN D. : Symmetry in 3D geometry : Extraction and applications. In *STAR of Eurographics conference* (2012), pp. 29–51.
- [MWZ\*13] MITRA N., WAND M., ZHANG H., COHEN-OR D., BOKELOH M. : Structure-aware shape processing. *STAR of Eurographics conference* (2013).
- [RAM\*13] ROBINSON T. T., ARMSTRONG C. G., MCS-PARRON G., QUENARDEL A., OU H., MCKEAG R. M. : Automated mixed dimensional modelling for the finite element analysis of swept and revolved CAD features. In *ACM SPM'06* (2013), pp. 117–128.
- [She01] SHEFFER A. : Model simplification for meshing using face clustering. *CAD*. Vol. 33, Num. 13 (2001), 925–934.
- [Sil81] SILVA C. E. : *Alternative definitions of faces in Boundary representations of solid objects*. Tech. rep., Carnegie Mellon University, 1981.
- [SSM\*10] SHEEN D.-P., SON T.-G., MYUNG D.-K., RYU C., LEE S. H., LEE K., YEO T. J. : Transformation of a thin-walled solid model into a surface model via solid deflation. *CAD*. Vol. 42, Num. 8 (2010), 720–730.
- [SV93] SHAPIRO V., VOSSLER D. L. : Separation for boundary to CSG conversion. *ACM Trans. Graph.* Vol. 12, Num. 1 (1993), 35–55.

- [TS94] TC184-SC4 I. : *ISO-10303 Part 203 - Application Protocol : Configuration controlled 3D design of mechanical parts and assemblies*. ISO, 1994.
- [VR93] VANDENBRANDE J. H., REQUICHA A. G. : Spatial reasoning for the automatic recognition of machinable features in solid models. *IEEE PAMI*. Vol. 15, Num. 12 (1993), 1269–1285.
- [Woo03] WOO Y. : Fast cell-based decomposition and applications to solid modeling. *CAD*. Vol. 35 (2003), 969–977.
- [Woo13] WOO Y. : Abstraction of mid-surfaces from solid models of thin-walled parts : A divide-and-conquer approach. *CAD* (2013).
- [YH06] YANG J., HAN S. : Repairing CAD model errors based on the design history. *CAD*. Vol. 38 (2006), 627–640.