

Splines PH quintiques pour l'interpolation C^2 sous contraintes de longueur

Mathieu Huard¹, Rida T. Farouki², Nathalie Sprynski¹ et Luc Biard³

¹CEA-LETI, MINATEC Campus, Grenoble, France

² Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University Of California, Davis

³Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Joseph Fourier, Grenoble, France

Résumé

Dans un contexte de reconstruction de courbes 3D à partir de données d'orientation issues de capteurs électroniques, on considère ici deux problèmes particuliers d'interpolation spline C^2 sous contraintes de longueurs pour chaque segment. Dans le premier problème les données initiales à interpoler sont des points tandis que dans le second problème nous considérons l'interpolation de vecteurs dérivés de l'espace (sans localisation spatiale). Pour cela nous considérons des courbes splines PH quintiques dont les propriétés algébriques permettent de contrôler la longueur des segments de la courbe spline. Dans chaque cas, la solution est obtenue par résolution d'un système quadratique sous contraintes quadratiques pour lequel on propose une initialisation efficace.

In order to achieve curve reconstruction methods thanks to electronic sensors, we adress in this paper two C^2 interpolation problems of spatial data. In addition to the classical ponctual interpolation data (points and derivative vectors), we also want our solutions to match a series of length constraints between consecutive data points. The problem is solved by the means of pythagorean hodograph spline curves (PH). These curves present a particular algebraic structure that allows control over the length of the spline segments. The solutions are obtained after solving quadratic systems subject to quadratic constraints, for which we provide an efficient initialization.

Mots clé : Modélisation géométrique, Interpolation, Splines, Pythagorean-Hodograph

1. Introduction

Le département Leti du CEA de Grenoble a récemment développé le Morphosense, un ruban physique instrumenté avec des micro-accéléromètres et des micro-magnétomètres dont on connaît la répartition [DS06]. Les données en chaque noeud de capteurs permettent de déterminer l'orientation spatiale complète du noeud (voir fig. (1)).

Le cadre général de cette activité consiste à reconstruire la géométrie du ruban Morphosense (et donc de la courbe 3D sous-jacente) à partir de ces données d'orientation spatiale et des distances inter-capteurs. On notera qu'en l'absence de toute localisation spatiale (même relative) de la position des capteurs, ce problème de reconstruction ne se ramène pas à un problème classique de Hermite. L'interpolation de telles données d'orientation est un problème mal posé qui n'admet pas de solution intrinsèque par nature, et seule l'information

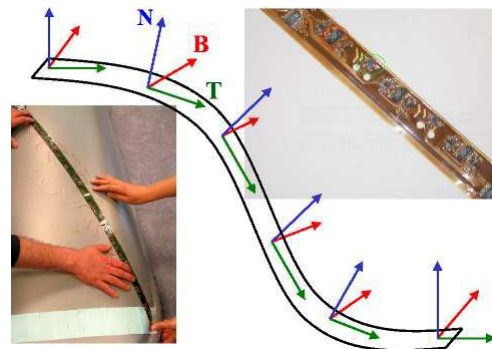


Figure 1: Le ruban Morphosense et son modèle géométrique

des distances inter-capteurs permet d'envisager des heuristiques et de développer des méthodes. L'approche consiste idéalement à déterminer une spline qui interpole des repères

de Serret-Frenet et dont les segments ont des longueurs prescrites.

Nous avons précédemment étudié ce problème à l'aide d'une paramétrisation par abscisse curviligne, qui permet de contrôler la longueur de la courbe interpolée [Spr07, Hua11]. Les méthodes développées visent à interpoler l'hodographe (dérivée) de la courbe sur la sphère unité. Cependant, de telles méthodes ne fournissent pas de solutions analytiques car elles dépendent d'une intégration numérique.

Nous proposons ici une approche globale qui s'appuie sur l'utilisation de courbes polynomiales à hodographes pythagoriciens (PH). La solution consistera en une spline PH quintique C^2 respectant les contraintes de longueur. Plus généralement, nous considérons ici deux méthodes d'interpolation PH quintique C^2 sous contraintes de longueur : une première méthode qui interpole des points donnés de l'espace et une seconde qui interpole des dérivées données. C'est le deuxième problème qui nous intéresse plus particulièrement dans le cadre de la reconstruction à l'aide du ruban Morphosense, mais le problème d'interpolation de points est très proche et plus répandu en pratique. Ainsi, on commence par étudier ce problème, puis on étudie le problème d'interpolation de vecteurs dérivés, relatif au Morphosense.

La structure algébrique qui régit l'hodographe des courbes PH a de nombreux avantages par rapport aux courbes paramétrées polynomiales classiques. Elles possèdent des offsets rationnels, et sont particulièrement efficaces pour l'interpolation en temps réel du mouvement des machines à commande numérique (CNC), dont la vitesse de déplacement est prédéterminée. L'interpolation spline C^2 à l'aide de courbes PH quintiques a fait l'objet de plusieurs travaux [FMS03, FMPS12]. Le problème récurrent de ces travaux consistait à fixer les degrés de liberté introduits par les segments de courbe PH de degré 5. La méthode la plus récente [FMPS12] présente un moyen de fixer tous ces degrés de liberté en optimisant la forme de la courbe. Dans notre cas, les contraintes de longueur entre les noeuds successifs fournissent un moyen cohérent physiquement et géométriquement pour fixer la plupart d'entre eux.

Le problème d'interpolation de points sous contraintes de longueur a déjà été étudié par plusieurs auteurs. Certains d'entre eux [VDW95, YWZ97] étudient des solutions C^1 non analytiques, issues d'algorithmes de subdivision. Roulier et Piper [Rou93, RP96a, RP96b] proposent des solutions analytiques, mais uniquement dans le cas de courbes planaires. De plus, il s'agit ici encore de solutions de continuité C^1 . A notre connaissance, les méthodes développées dans ces travaux sont les premières à proposer des solutions analytiques C^2 de \mathbb{R}^3 aux problèmes d'interpolation de données spatiales étudiés.

L'article est organisé comme suit. Les généralités sur les courbes PH et en particulier sur les splines PH quintiques sont présentées dans le paragraphe 2. Ces splines PH

sont ensuite utilisées au paragraphe 3 pour résoudre le problème d'interpolation d'une série de points sous contraintes de longueur. Le problème d'interpolation des dérivées sous contraintes de longueurs est traité dans le paragraphe 4. Des exemples seront fournis et en conclusion les limites et améliorations possibles de ces méthodes seront envisagées.

2. Courbes PH spatiales

On présente ici quelques généralités sur les courbes PH spatiales, en insistant sur les cas de courbes quintiques. Il s'agit de notions classiques sur les courbes PH, que l'on retrouve en particulier dans [Far08].

2.1. Généralités

Une courbe PH $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de \mathbb{R}^3 est caractérisée par le fait que son hodographe $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ satisfait la relation :

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = \sigma(t)^2, \quad (1)$$

où $\sigma(t)$ est un polynôme. La vitesse paramétrique $|\mathbf{r}'(t)|$ de la courbe s'exprime alors simplement sous forme polynomiale par $|\mathbf{r}'(t)| = \sigma(t)$. La relation (1) est satisfaite si et seulement si $x'(t)$, $y'(t)$ et $z'(t)$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \\ y'(t) &= 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)], \\ z'(t) &= 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

où $u(t), v(t), p(t), q(t)$ sont quatre polynômes, conduisant alors à l'expression suivante pour la vitesse paramétrique :

$$\sigma(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \quad (3)$$

De manière équivalente, les courbes PH peuvent être générées par un couple de polynômes complexes

$$\alpha(t) = u(t) + \mathbf{i} v(t), \quad \beta(t) = q(t) + \mathbf{i} p(t), \quad (4)$$

à l'aide de la représentation de Hopf

$$\mathbf{r}'(t) = (|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2, 2\operatorname{Re}(\alpha(t)\bar{\beta}(t)), 2\operatorname{Im}(\alpha(t)\bar{\beta}(t))) \quad (5)$$

où \bar{z} est le conjugué du complexe z , conduisant alors à l'expression de la vitesse paramétrique :

$$\sigma(t) = |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2. \quad (6)$$

On note enfin que la structure des courbes PH est invariante par isométrie. En particulier, pour les problèmes d'interpolation étudiés dans ces travaux, si les données subissent une transformation isométrique alors une solution du second problème se déduit explicitement de celle du problème initial [FAKMS02].

2.2. Cas cubique et quintique

Une courbe PH cubique de l'espace est générée par deux polynômes de degré un :

$$\alpha(t) = \alpha_0(1-t) + \alpha_1 t, \quad \beta(t) = \beta_0(1-t) + \beta_1 t, \quad (7)$$

exprimés dans la base de Bernstein, où $t \in [0, 1]$ et les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ et β_1 sont complexes. L'intégration de la forme (5) conduit bien à une courbe polynomiale cubique.

On donne un exemple de construction pour des coefficients $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = \mathbf{i}$. On a alors $\alpha(t) = (1-t) + \mathbf{i}t$ et $\beta(t) = t + \mathbf{i}(1-t)$, et

$$\begin{aligned} |\alpha(t)|^2 &= |\beta(t)|^2 = (1-t)^2 + t^2, \\ \alpha(t)\bar{\beta}(t) &= 2t(1-t) + \mathbf{i}(2t^2 - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

On obtient dans ce cas $\mathbf{r}'(t) = (0, 2t(1-t), 2t^2 - 1)$ et après intégration la courbe cubique $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + (0, t^2 - \frac{2}{3}t^3, \frac{2}{3}t^3 - t)$, obtenue à une translation près.

De façon similaire, une courbe PH quintique s'obtient à partir de deux polynômes quadratiques complexes :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0(1-t)^2 + \alpha_1 2(1-t)t + \alpha_2 t^2, \\ \beta(t) &= \beta_0(1-t)^2 + \beta_1 2(1-t)t + \beta_2 t^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Considérant ensuite l'écriture $(x, y + \mathbf{i}z)$ pour les points (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , les points de contrôle $\mathbf{q}_k = (x_k, y_k + \mathbf{i}z_k)$ de la courbe PH quintique écrite sous la forme de Bézier

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (1-t)^{5-k} t^k \mathbf{q}_k, \quad (10)$$

sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + \frac{1}{5}(|\alpha_0|^2 - |\beta_0|^2, 2\alpha_0\bar{\beta}_0), \\ \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \frac{1}{5}(\operatorname{Re}(\alpha_0\bar{\alpha}_1 - \beta_0\bar{\beta}_1), \alpha_0\bar{\beta}_1 - \alpha_1\bar{\beta}_0), \\ \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + \frac{1}{15}(2(|\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2) \\ \quad + \operatorname{Re}(\alpha_2\bar{\alpha}_0 - \beta_2\bar{\beta}_0), 4\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_0\bar{\beta}_2 + \alpha_2\bar{\beta}_0), \\ \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 + \frac{1}{5}(\operatorname{Re}(\alpha_1\bar{\alpha}_2 - \beta_1\bar{\beta}_2), \alpha_1\bar{\beta}_2 - \alpha_2\bar{\beta}_1), \\ \mathbf{q}_5 = \mathbf{q}_4 + \frac{1}{5}(|\alpha_2|^2 - |\beta_2|^2, 2\alpha_2\bar{\beta}_2), \end{array} \right. \quad (11)$$

où le point $\mathbf{q}_0 = (x_0, y_0 + \mathbf{i}z_0)$ est libre et peut être vu comme la constante d'intégration. On précise à nouveau que cette écriture compacte des points de contrôle fait intervenir une coordonnée réelle et une coordonnée complexe, correspondant aux 3 coordonnées spatiales des points associés.

Remarque. Notons que pour $\alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_0 - 2\beta_1 + \beta_2 = 0$, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des polynômes de degré un, de sorte que la PH quintique générée est intrinsèquement une PH cubique.

2.3. Splines PH quintiques à dérivées première et seconde continues

Etant donnée une suite de coefficients complexes a_i et b_i , $i = 0, \dots, N+1$, on considère les N courbes PH quintiques

$\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ générées par les polynômes complexes $\alpha_i(t)$ et $\beta_i(t)$ écrits sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &= \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)(1-t)^2 + a_i 2(1-t)t + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})t^2, \\ \beta_i(t) &= \frac{1}{2}(b_{i-1} + b_i)(1-t)^2 + b_i 2(1-t)t + \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1})t^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Cette écriture fait clairement apparaître une interdépendance entre les segments PH adjacents. Précisément, on vérifie [FMPS12, Far08] que cette écriture conduit automatiquement à la continuité des dérivées première et seconde entre deux segments successifs, à savoir :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_i(1) &= \mathbf{r}'_{i+1}(0) = (\frac{1}{4}(|a_i + a_{i+1}|^2 - |b_i + b_{i+1}|^2), \\ &\quad \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})(\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1})), \\ \mathbf{r}''_i(1) &= \mathbf{r}''_{i+1}(0) = (|a_{i+1}|^2 - |a_i|^2 + |b_{i+1}|^2 - |b_i|^2, \\ &\quad 2(a_{i+1}\bar{b}_{i+1} - a_i\bar{b}_i)), \end{aligned} \quad (13)$$

de sorte que ce procédé génère une spline PH quintique à dérivées première et seconde continues.

Continuité C^0 . – Notons que la continuité C^0 entre les segments PH n'est pas réalisée a priori. La procédure d'intégration permet de choisir l'origine $\mathbf{r}_i(0)$ de chaque segment (11) mais pas l'extrémité $\mathbf{r}_i(1)$. Si l'on veut imposer la position de $\mathbf{r}_i(1)$ (cas de l'interpolation d'une série de points), cette contrainte est sujette à la résolution d'équations sur les coefficients a_i, b_i (voir paragraphe 3.1).

Longueur d'un segment. – Avec les notations précédentes, la longueur $L_i = \int_0^1 (|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2) dt$ de chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$ est définie par l'expression quadratique suivante en fonction des coefficients complexes a_i et b_i :

$$\begin{aligned} 120L_i &= 6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ &\quad + 6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ &\quad + 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ &\quad + 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ &\quad + a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ &\quad + b_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Notons que l'équation (14) est réelle même si elle est exprimée en fonction de nombres complexes.

3. Interpolation de points sous contraintes de longueur

On considère ici le problème de l'interpolation d'une suite de points \mathbf{p}_i par une spline PH quintique de classe C^2 , sous contraintes de longueur l_i pour chaque segment. Par souci de simplicité, notamment dans l'écriture des équations, chaque segment est paramétré sur $[0, 1]$, mais la méthode peut être étendue à une paramétrisation quelconque.

3.1. Description de la méthode

Précisément, étant donnée une suite de points $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N$, on cherche une spline PH quintique comme définie au paragraphe 2.3, composée de segments $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ telle que pour tout i :

$$(i) \quad \mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i+1}(0) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_N(1) = \mathbf{p}_N,$$

$$(ii) \quad \int_0^1 |\mathbf{r}'_i(t)| dt = l_i.$$

La première contrainte couplée avec l'utilisation des splines introduites au paragraphe 2.3 génère une spline PH quintique de classe C^2 .

(i) : interpolation des points \mathbf{p}_i – Cette contrainte revient à imposer $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_{i-1}$ et $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_i$ pour chaque segment. Avec l'intégration, nous choisissons $\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_{i-1}$ de sorte que la contrainte d'interpolation se traduit par l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^1 \mathbf{r}'_i(t) dt = \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}. \quad (15)$$

pour chaque segment $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. En utilisant (5) avec la notation $\Delta \mathbf{p}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i + \mathbf{i} \Delta z_i)$, l'équation vectorielle (15) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\alpha_i|^2 - |\beta_i|^2 dt &= \Delta x_i, \\ \int_0^1 2\alpha_i(t)\bar{\beta}_i(t) dt &= \Delta y_i + \mathbf{i} \Delta z_i, \end{aligned}$$

ce qui permet d'exprimer ces deux équations en fonction des nombres complexes a_i, b_i :

$$\begin{aligned} &6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ &- 6|b_{i-1}|^2 - 54|b_i|^2 - 6|b_{i+1}|^2 \\ &+ 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ &- 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ &+ a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ &- b_{i-1}\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 120\Delta x_i, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &6a_{i-1}\bar{b}_{i-1} + 54a_i\bar{b}_i + 6a_{i+1}\bar{b}_{i+1} \\ &+ 13(a_{i-1} + a_i + 1)\bar{b}_i + 13a_i(\bar{b}_{i-1} + \bar{b}_{i+1}) \\ &+ a_{i-1}\bar{b}_{i+1} + a_{i+1}\bar{b}_{i-1} = 60(\Delta y_i + \mathbf{i} \Delta z_i). \end{aligned} \quad (17)$$

Notons que les N équations (16) sont réelles. Finalement, l'ensemble des équations (16) et (17) pour chaque segment fournit $3N$ équations réelles pour l'interpolation des points \mathbf{p}_i .

(ii) : contraintes de longueur l_i – Cette contrainte s'écrit avec la relation (14) sous la forme

$$\begin{aligned} &6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ &+ 6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ &+ 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ &+ 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ &+ \mathbf{a}_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} \\ &+ \mathbf{b}_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 120 l_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Synthèse – La réalisation des contraintes (i) et (ii) se traduit par les équations (16), (17) et (18). Afin de simplifier le système, on remplace les équations (16) et (18) par les équations $\frac{1}{2}((18)+(16))$ et $\frac{1}{2}((18)-(16))$:

$$\begin{aligned} &6|a_{i-1}|^2 + 54|a_i|^2 + 6|a_{i+1}|^2 \\ &+ 13(a_{i-1}\bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}a_i + a_i\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_i a_{i+1}) \\ &+ a_{i-1}\bar{a}_{i+1} + \bar{a}_{i-1}a_{i+1} = 60(l_i + \Delta x_i), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &6|b_{i-1}|^2 + 54|b_i|^2 + 6|b_{i+1}|^2 \\ &+ 13(b_{i-1}\bar{b}_i + \bar{b}_{i-1}b_i + b_i\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_i b_{i+1}) \\ &+ b_{i-1}\bar{b}_{i+1} + \bar{b}_{i-1}b_{i+1} = 60(l_i - \Delta x_i). \end{aligned} \quad (20)$$

Au final (17), (19) et (20) fournissent $4N$ équations pour les $4N + 8$ variables réelles du problème : $2(N + 2)$ nombres complexes a_i, b_i .

Discussion – En général, pour les problèmes d'interpolation spline classiques, les degrés de liberté résiduels sont fixés par le moyen de conditions aux bords pour le premier et le dernier segment. Plus spécifiquement pour les courbes PH, une méthode consiste à imposer aux courbes de bord d'être de degré dégénéré. Dans notre cas, on vérifie facilement que pour $a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} = b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1} = 0$, un segment $\mathbf{r}_i(t)$ est en réalité une courbe PH cubique. Ainsi, les contraintes

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, \\ b_0 - 2b_1 + b_2 = 0, \\ a_{N+1} - 2a_N + a_{N-1} = 0, \\ b_{N+1} - 2b_N + b_{N-1} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

conduisent à un système carré. Néanmoins, puisqu'il s'agit d'un système quadratique cela n'implique rien sur l'existence ou l'unicité d'une solution. En réalité, dans la plupart des cas il n'existe pas de solution pour lesquelles les segments aux bords puissent être écrits comme courbes PH cubiques (principalement à cause de la contrainte de longueur).

Nous considérons donc ici une approche similaire à celle développée dans [FMPS12], qui s'appuie également sur les bonnes propriétés et la nature plus simple des courbes PH cubiques. Idéalement, s'il existe une spline PH cubique solution du problème d'interpolation sous contraintes de longueur, on souhaite que notre solution PH quintique coïncide avec la solution cubique (modulo une élévation de degré), ce qui nous conduit à introduire l'énergie globale

$$F(a_0, b_0, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) = \sum_{i=1}^N |a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}|^2 + |b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1}|^2, \quad (22)$$

dont la minimisation contraindra la solution à s'approcher d'une spline PH cubique. Cette fonctionnelle est à l'heure actuelle la seule fonctionnelle simple, quadratique convexe ayant une signification géométrique à l'égard des coefficients complexes qu'elle implique [FMPS12]. Notre problème se résume ainsi à un problème d'optimisation quadratique sous les contraintes également quadratiques (17), (19) et (20). L'efficacité de l'implémentation dépend fortement de l'étape d'initialisation des coefficients.

3.2. Initialisation des coefficients

Afin de déterminer des valeurs initiales pour les coefficients a_i et b_i , nous commençons par simplifier les équations (17), (19) et (20). Pour cela, on note $\Delta a_i = a_i - a_{i-1}$, et $\Delta b_i = b_i - b_{i-1}$, de sorte qu'en substituant

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= a_i - \Delta a_i, & a_{i+1} &= a_i + \Delta a_{i+1}, \\ b_{i-1} &= b_i - \Delta b_i, & b_{i+1} &= b_i + \Delta b_{i+1}, \end{aligned}$$

dans les équations, et en ne retenant que les termes d'ordre 0 en Δa_i et Δb_i , les trois équations (17), (19) et (20) se sim-

plifient en

$$\begin{aligned} a_i \bar{b}_i &= \frac{1}{2}(\Delta y_i + \mathbf{i} \Delta z_i), \\ |a_i|^2 &= \frac{1}{2}(l_i + \Delta x_i), \\ |b_i|^2 &= \frac{1}{2}(l_i - \Delta x_i). \end{aligned} \quad (23)$$

Puis, afin d'assurer la condition de compatibilité

$$|a_i \bar{b}_i|^2 = |a_i|^2 |b_i|^2,$$

on modifie les équations (23) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_i \bar{b}_i &= \frac{1}{2} \gamma_i (\Delta y_i + \mathbf{i} \Delta z_i), \\ |a_i|^2 &= \frac{1}{2} \gamma_i (\Delta p_i + \Delta x_i), \\ |b_i|^2 &= \frac{1}{2} \gamma_i (\Delta p_i - \Delta x_i). \end{aligned} \quad (24)$$

en notant $\Delta p_i = |\Delta \mathbf{p}_i|$ et $\gamma_i = l_i / \Delta p_i \geq 1$.

Les solutions du système d'équations (24) s'écrivent sous la forme

$$a_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{2} (\Delta p_i + \Delta x_i)} e^{\mathbf{i}(\theta_i + \phi_i)}, \quad b_i = \sqrt{\frac{\gamma_i}{2} (\Delta p_i - \Delta x_i)} e^{\mathbf{i}\phi_i},$$

où ϕ_i est un paramètre libre et θ_i est défini par

$$(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = \frac{(\Delta y_i, \Delta z_i)}{\sqrt{(\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}}.$$

Pour déterminer les paramètres libres ϕ_1, \dots, ϕ_N on choisit $\phi_1 = 0$, puis pour $i = 2, \dots, N$ on détermine ϕ_i à partir de ϕ_{i-1} par minimisation de $|\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2$ relativement à $\Delta \phi_i$, avec

$$\begin{aligned} |\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2 &= \gamma_{i-1} \Delta p_{i-1} + \gamma_i \Delta p_i \\ &\quad - \sqrt{\gamma_{i-1} \gamma_i (\Delta p_{i-1} - \Delta x_{i-1})(\Delta p_i - \Delta x_i)} \cos(\Delta \phi_i) \\ &\quad - \sqrt{\gamma_{i-1} \gamma_i (\Delta p_{i-1} + \Delta x_{i-1})(\Delta p_i + \Delta x_i)} \cos(\Delta \theta_i + \Delta \phi_i), \end{aligned}$$

où $\Delta \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ et $\Delta \phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}$. Pour cela, on annule la dérivée de cette expression par rapport à $\Delta \phi_i$, ce qui revient à résoudre l'équation

$$\tan(\Delta \phi_i) = \frac{-\sin \Delta \theta_i}{\cos \Delta \theta_i + \sqrt{\frac{(\Delta p_{i-1} - \Delta x_{i-1})(\Delta p_i - \Delta x_i)}{(\Delta p_{i-1} + \Delta x_{i-1})(\Delta p_i + \Delta x_i)}}}.$$

On trouve alors deux valeurs $\Delta \phi_i \in]-\pi, \pi]$ associées à un minimum et un maximum de $|\Delta a_i|^2 + |\Delta b_i|^2$, qu'il faut ensuite séparer pour remonter aux valeurs de a_i et b_i .

La figure 2 (à gauche) montre un exemple de courbe correspondant aux coefficients obtenus à l'issue de cette initialisation. On peut comparer cette initialisation aux segments non initialisés issus de coefficients quelconques (figure 2, à droite).

L'intégration permet d'interpoler les points initiaux de chaque segment. La minimisation de F permet ensuite de satisfaire les contraintes de longueur et d'obtenir une solution C^2 interpolant les points \mathbf{p}_i (et donc continue).

3.3. Implémentation de la méthode

Les exemples présentés dans le paragraphe suivant sont tous obtenus à l'aide de l'algorithme "interior-point" de

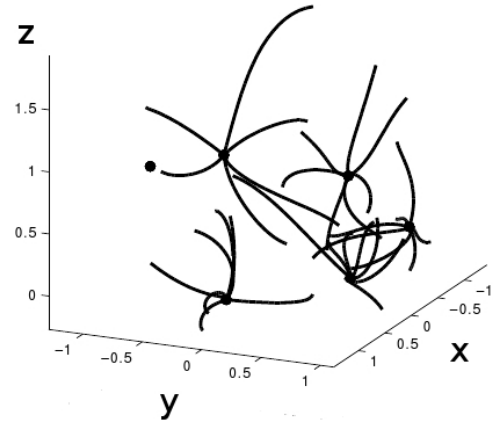
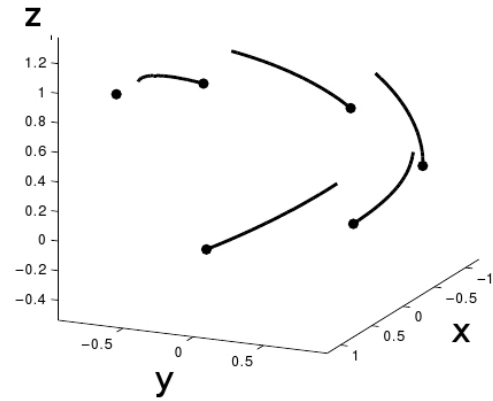


Figure 2: Segments de courbes issus de l'initialisation (en haut) et segments initiaux sans initialisation (en bas) dans le cas d'une hélice circulaire (voir figure 3)

la fonction d'optimisation sous contraintes "fmincon" de MATLAB. La fonction à minimiser (22) est quadratique et convexe en fonction des variables $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}$. Les contraintes (18) et (19)–(20) sont également quadratiques mais elles ne sont pas convexes. L'efficacité de la méthode est optimisée en exploitant le fait que les matrices Jacobienne et Hessienne de la fonction coût et des contraintes sont creuses et ont des expressions analytiques simples.

Il est important de noter que les solutions n'existent pas toujours pour des données arbitraires. En particulier, quand les points $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_N$ sont échantillonnés depuis une courbe analytique lisse, les expériences montrent que les longueurs prescrites l_1, \dots, l_N doivent être suffisamment proches des longueurs de la courbe sous-jacente pour assurer l'existence d'une solution. Le problème étant non linéaire, il est difficile de formuler un critère analytique qui garantisse l'existence d'une solution.

Pour un ensemble de points et de longueurs admissible (ie une solution existe), le processus d'optimisation est robuste et converge rapidement vers une solution (à précision aussi grande que voulue). En l'absence de l'étape d'initialisation des coefficients, l'algorithme converge aussi la plupart du temps, mais cette étape est fortement conseillée car d'une part la convergence est beaucoup plus rapide, et d'autre part on garantit mieux la convergence vers le minimum global plutôt qu'un minimum local (voir figure 8).

3.4. Exemples numériques

On distingue au moins deux types d'exemples d'applications et donc de données initiales.

a) Dans un premier cas, les données (points \mathbf{p}_i de l'espace et longueurs l_i des segments) sont issues de mesures et correspondent donc à une courbe réelle. Les données sont donc physiquement ou géométriquement cohérentes. Il s'agit alors d'un problème de reconstruction pour lequel on peut espérer une solution proche de la courbe initiale. De telles données initiales peuvent par exemple être issues d'un système d'acquisition analogue au ruban Morphosense. On déduit de l'analyse des exemples les deux points suivants.

◊ Si les données sont intrinsèquement contraintes par une structure sous-jacente forte (on montre que le ruban Morphosense suit une courbe géodésique de la surface sous-jacente [SLDB08]), la méthode donne de bons résultats pour les longueurs réelles entre les noeuds. Si les contraintes de longueur sont modifiées, même légèrement, les courbes interpolées présentent des variations souvent difficiles à contrôler (voir figure 3).

La table 1 détaille, pour cet exemple, le nombre d'itérations et le temps CPU d'exécution résultant du processus d'optimisation vers les solutions, avec et sans la procédure d'initialisation. Même si l'optimisation converge souvent dans le cas d'une initialisation aléatoire, le tableau montre clairement le gain de l'initialisation au niveau des performances. La table 2 illustre l'évolution du nombre d'itérations et du temps CPU d'exécution en fonction du nombre de points échantillonnés sur la même hélice circulaire, en utilisant la procédure d'initialisation.

Table 1: Nombre d'itérations et temps d'exécution des exemples de la figure 3.

	avec initialisation		sans initialisation	
	itérations	temps CPU	itérations	temps CPU
$l_i = 0.99L_i$	30	0.24 s	130	0.85 s
$l_i = 1.00L_i$	49	0.29 s	135	0.67 s
$l_i = 1.01L_i$	24	0.17 s	124	0.73 s

◊ L'interpolation d'une courbe analytique à partir de données exactes permet une reconstruction plus fidèle que par une méthode classique d'interpolation. Comme le montre la

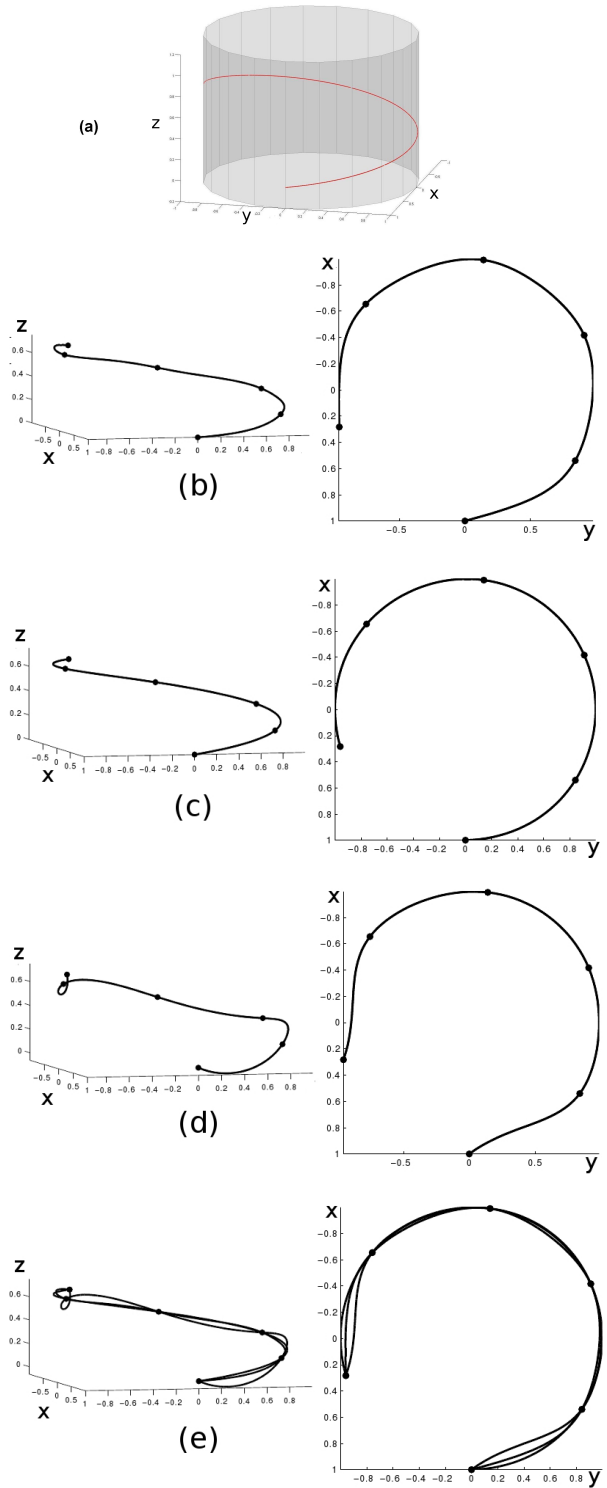


Figure 3: (a) : Hélice cylindrique avec des segments de longueurs L_i . (b) : Reconstruction avec $l_i = 0.99 L_i$. (c) : Reconstruction avec $l_i = L_i$. (d) : Reconstruction avec $l_i = 1.01 L_i$. (e) : Superposition des trois reconstructions.

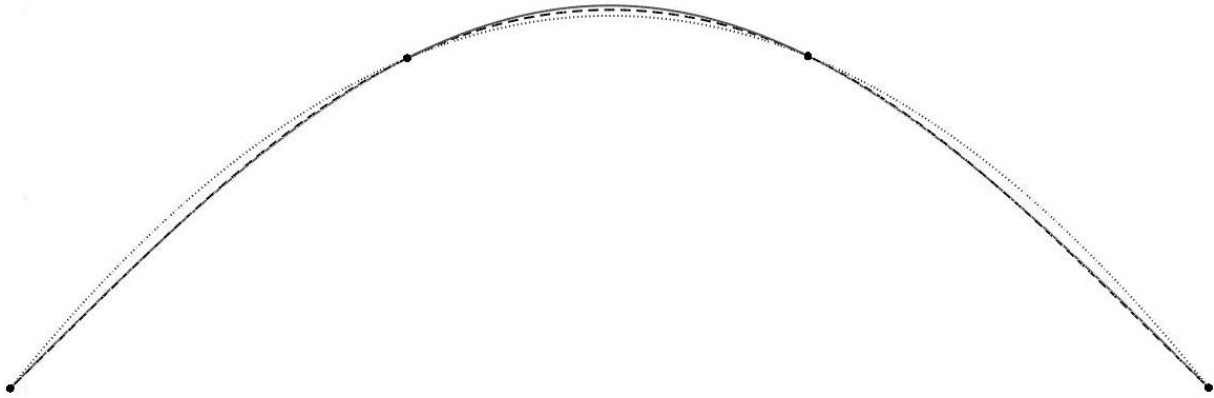


Figure 4: Approximation d'un sinus (trait plein) par une spline cubique (pointillés) et par une spline PH quintique sous contraintes de longueur (tirets). Les points d'interpolation sont les points $(\sin(x), x) \in [0, \pi/3, 2\pi/3, \pi]$. Les longueurs des différents segments sont ajustées de sorte à rendre la spline PH plane.

Table 2: Nombre d'itérations et temps d'exécution en fonction du nombre de points à interpoler dans le cas de l'hélice.

point interpolés	itérations	temps cpu
4	15	0.12 s
6	37	0.33 s
8	45	0.47 s
10	62	0.80 s
15	69	1.03 s
20	141	3.14 s

figure 4, la méthode est en effet une alternative possible à un coûteux rééchantillonnage plus fin ; en contraignant les longueurs à se rapprocher des longueurs réelles de la courbe initiale, notre méthode donne une solution spline C^2 plus fidèle que la spline cubique naturelle. On note cependant que la contrainte de longueur peut entraîner des solutions non planes, malgré les données initiales planes dans ce cas. La fonctionnelle privilégie en effet une solution plus lisse dans l'espace qu'une solution présentant de fortes variations de courbure (voire des boucles ou des inflexions) dans le plan.

b) Dans un cadre différent, on peut ne disposer que de données ponctuelles \mathbf{p}_i et introduire des longueurs l_i pour les différents segments comme paramètres de tension ou de design. Dans ce cas, le choix de ces longueurs l_i doit être réalisé avec soin. En particulier, ces longueurs doivent respecter la borne inférieure évidente $l_i \geq |\Delta \mathbf{p}_i|$. Des longueurs trop importantes induisent des comportements indésirables (boucles...).

La figure 5 montre une courbe spline pour laquelle on impose deux longueurs différentes pour le deuxième segment, ce qui résulte en deux solutions potentiellement très diffé-

rentes pour la courbe, y compris sur les segments adjacents qui gardent pourtant la même longueur.

La figure 6 montre l'interpolation de la série de points

$$\mathbf{p}_0 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{p}_1 = (0, 4, 3), \quad \mathbf{p}_2 = (2, 1, 1), \quad (25)$$

$$\mathbf{p}_3 = (2, 4, 2), \quad \mathbf{p}_4 = (3, 3, 3),$$

pour laquelle trois différentes splines PH quintiques sont calculées, avec trois différentes contraintes de longueur pour le premier segment mais des longueurs égales $l_2 = 5.0, l_3 = 3.9$ et $l_4 = 2.75$ dans les trois cas. Cet exemple souligne l'intérêt du paramètre longueur comme outil de design. La table 3 donne le nombre d'itérations et le temps cpu d'exécution pour les différents cas de cet exemple.

Table 3: Nombre d'itérations et temps d'exécution des exemples de la figure 6.

	avec initialisation		sans initialisation	
	itérations	temps CPU	itérations	temps CPU
$l_i = 0.85L_i$	31	0.16 s	90	0.48 s
$l_i = 1.00L_i$	27	0.14 s	99	0.51 s
$l_i = 1.15L_i$	25	0.12 s	91	0.50 s

On rappelle que des solutions n'existent pas nécessairement quand les longueurs prescrites l_i sont grandes en comparaison de l'espacement Δp_i des points à interpoler – et si elles existent ces solutions ont généralement un aspect visuel peu satisfaisant. La figure 7 illustre ceci dans le cas de quatre points équidistants

$$\mathbf{p}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{p}_1 = (0, 1, 0), \quad (26)$$

$$\mathbf{p}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{p}_3 = (1, 1, 1),$$

où un ou plusieurs ratios $\gamma_i = l_i / \Delta p_i$ sont grands par rapport à 1. Pour comparaison, la solution dans le cas où $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) =$

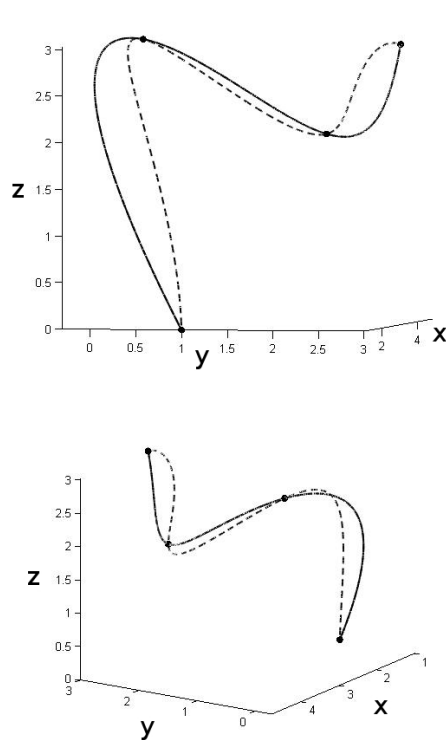


Figure 5: Deux vues d'un exemple interpolant les points $p_0 = (1, 1, 0)$, $p_1 = (0, 4, 3)$, $p_2 = (2, 4, 2)$ et $p_3 = (3, 3, 3)$ avec des longueurs égales $l_1 = 4.9$ et $l_3 = 2.0$ pour les deux courbes. La longueur du segment central vaut $l_2 = 2.9$ pour la courbe en pointillés et $l_2 = 2.5$ pour la courbe en trait plein (16% de différence).

(1.15, 1.08, 1.15) est aussi montrée en figure 7 – elle correspond à la solution du problème d'optimisation quand les contraintes de longueur sont relaxées.

Enfin, on montre un exemple de configuration où plusieurs minima locaux existent pour la fonction (22) en figure 8. Les 4 points de cet exemple sont les mêmes que sur la figure 5, mais les longueurs prescrites ont pour valeurs $l_1 = 9.25$, $l_2 = 4.75$ et $l_3 = 3.70$. Quand l'initialisation est effectuée, l'optimisation converge vers le minimum global, mais en l'absence d'initialisation elle peut également converger vers un minimum local.

4. Interpolation C^2 de dérivées sous contraintes de longueur

On considère ici le problème de l'interpolation d'une suite de vecteurs dérivés \mathbf{d}_i associés à des noeuds t_i par une spline PH quintique de classe C^2 , sous contraintes de longueur l_i pour chaque segment.

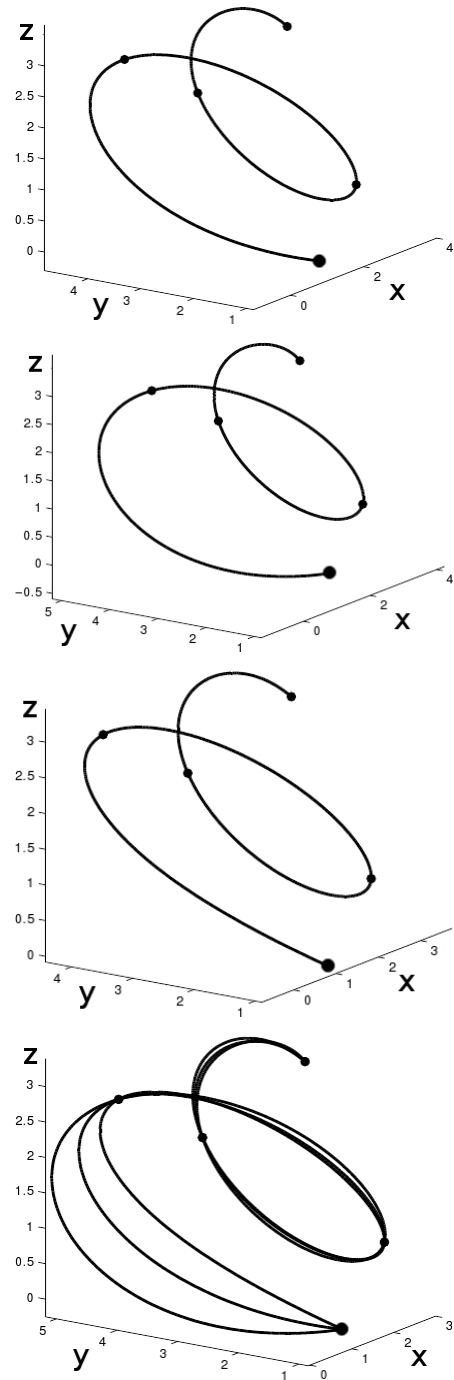


Figure 6: Suite de points (25). Les contraintes de longueur l_2, l_3 et l_4 sont fixées et on considère différentes longueurs pour le premier segment. La courbe (b) a un premier segment de longueur $l_1 = 6.3$. Dans l'exemple (a), on augmente cette longueur de 15% ($l_1 = 7.24$) et dans l'exemple (c) elle est diminuée de 15% ($l_1 = 5.35$). On superpose les différentes courbes en (d).

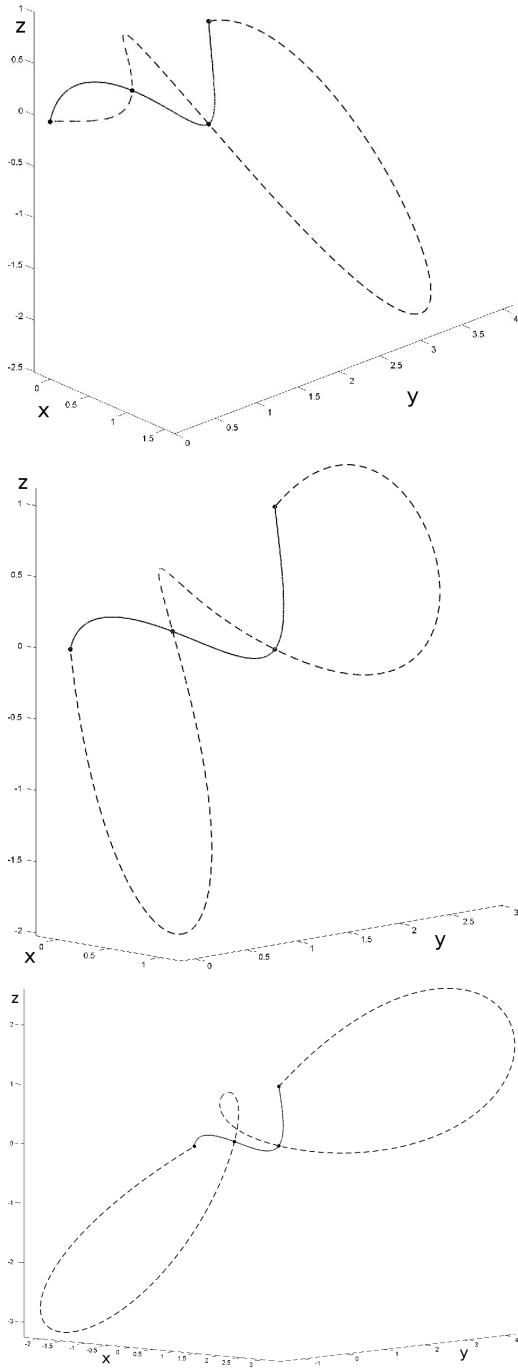


Figure 7: Exemples de splines PH C^2 quintiques interpolant les points (26) avec des longueurs prescrites l_i très grandes en comparaison de l'espace Δp_i des points adjacents (courbe en pointillés). Les ratios $\gamma_i = l_i/\Delta p_i$ ont les valeurs $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1.1, 2, 10)$ à gauche, $(5, 2, 5)$ au milieu et $(10, 3, 10)$ à droite. La courbe en trait plein correspond au cas $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1.15, 1.08, 1.15)$.

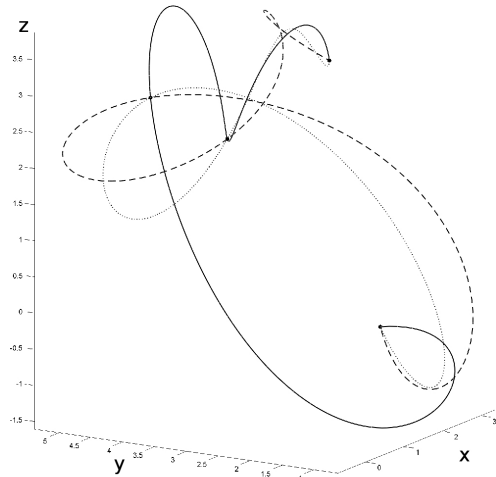


Figure 8: Courbes solutions correspondant au minimum global (trait plein) et d'autres minima locaux de la fonction (22). La procédure d'initialisation assure la convergence vers le minimum global.

4.1. Description de la méthode

Précisément, étant donnée une suite de vecteurs dérivés $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_N$ associés à des noeuds t_0, \dots, t_N , ainsi que des contraintes de longueur l_1, \dots, l_N , on cherche une spline PH quintique comme définie dans le paragraphe 2.3, composée de segments $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ telle que pour tout i :

- (i) $\mathbf{r}_i(1) = \mathbf{r}_{i+1}(0)$,
- (ii) $\mathbf{r}'_i(0) = \mathbf{d}_0$, $\mathbf{r}'_i(1) = \mathbf{d}_i = \mathbf{r}'_{i+1}(0)$ et $\mathbf{r}'_N(1) = \mathbf{d}_N$,
- (iii) $\int_0^1 |\mathbf{r}'_i(t)| dt = l_i$.

Comme dans la première méthode, on note que la première contrainte couplée avec l'utilisation des splines introduites au paragraphe 2.3 génère automatiquement une spline PH quintique de classe C^2 .

(i) : continuité C^0 – Dans le cas présent, (i) traduit simplement la continuité de la spline à reconstruire. Il suffit pour cela de raccorder chaque segment $\mathbf{r}_{i+1}(t)$ au segment précédent $\mathbf{r}_i(t)$ en choisissant $\mathbf{r}_{i+1}(0) = \mathbf{r}_i(1)$ lors de l'intégration. Ainsi, seule la première constante d'intégration $\mathbf{r}_1(0)$ est libre, de sorte que la spline solution sera reconstruite à une translation près.

(ii) : interpolation des vecteurs dérivés \mathbf{d}_i – Les courbes PH étant définies à partir de leur hodographe, cette contrainte d'interpolation s'écrit directement à partir de l'équation (13) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(|a_i + a_{i+1}|^2 - |b_i + b_{i+1}|^2) &= dx_i, \\ \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})(\bar{b}_i + \bar{b}_{i+1}) &= dy_i + i dz_i, \end{aligned} \quad (27)$$

en notant $\mathbf{d}_i = (dx_i, dy_i, dz_i)$ pour $i = 0, \dots, N$. Comme pré-

cédemment, la première équation de (27) est une équation réelle exprimée en fonction des nombres complexes a_i, b_i . Les relations (27) fournissent $3(N+1)$ équations, trois pour chaque vecteur dérivé interpolé.

(iii) : contraintes de longueur l_i – Aux équations précédentes, on ajoute à nouveau les N équations des contraintes de longueur (18), qui sont en tout point identiques à celles du paragraphe 3.

Synthèse – Le système comporte ainsi $4N+3$ équations, à satisfaire par les $4N+8$ coefficients a_i, b_i . Cette méthode est donc plus contrainte : les 3 équations supplémentaires par rapport à la méthode précédente viennent du premier noeud d'interpolation car dans le paragraphe 3, le premier point peut être choisi arbitrairement lors de l'intégration. Dans le cas présent, le premier vecteur dérivé est contraint comme les autres par 3 équations.

Comme pour l'interpolation de points, c'est-à-dire la méthode du paragraphe 3, la méthode consiste ensuite à minimiser la fonctionnelle (22) sous les contraintes (27) et (18).

4.2. Initialisation des coefficients

On utilise ici une méthode d'initialisation similaire à celle de la méthode d'interpolation de points. En substituant $a_{i-1} = a_i - \Delta a_i$, $a_{i+1} = a_i + \Delta a_{i+1}$, et $b_{i-1} = b_i - \Delta b_i$, $b_{i+1} = b_i + \Delta b_{i+1}$ dans les équations (27) et (18) et en ne retenant que les termes d'ordre 0, on obtient le système d'équations simplifiées

$$\begin{aligned} |a_i|^2 - |b_i|^2 &= dx_i, \\ a_i \bar{b}_i &= \frac{1}{2}(dy_i + i dz_i), \\ |a_i|^2 + |b_i|^2 &= l_i. \end{aligned} \quad (28)$$

En combinant les première et troisième lignes on obtient

$$\begin{aligned} a_i \bar{b}_i &= \frac{1}{2}(dy_i + i dz_i), \\ |a_i|^2 &= \frac{1}{2}(l_i + dx_i), \\ |b_i|^2 &= \frac{1}{2}(l_i - dx_i). \end{aligned} \quad (29)$$

Ce système est identique au système d'équations simplifiées (23) de la méthode précédente, et peut être vu comme sa version "continue" où les vecteurs des différences progressives $(\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$ sont respectivement remplacés par les vecteurs dérivés (dx_i, dy_i, dz_i) . On présente un exemple de courbe issue de l'initialisation en figure 9.

4.3. Exemples numériques

L'implémentation utilisée dans le cas de cette méthode est, au-delà des modifications appropriées, en tout point similaire à celle de la méthode précédente décrite au paragraphe 3.3.

On distingue à nouveau les contextes de reconstruction et de design. La méthode d'interpolation des dérivées présentée ici s'inscrit dans le contexte de notre application liée

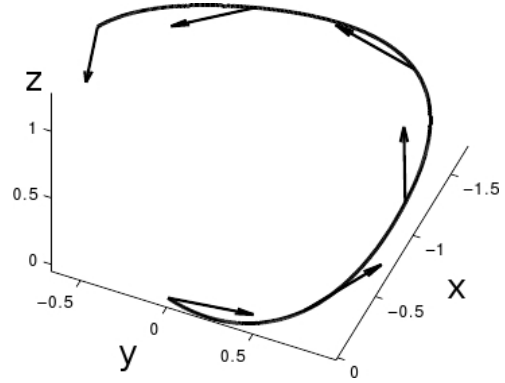


Figure 9: Courbe issue de l'initialisation (cas d'une hélice circulaire - voir figure 11)

au ruban Morphosense. Cependant, les données fournies par celui-ci sont normalisées (vecteurs unitaires), ce qui pose le problème du choix des normes des vecteurs dérivés à interpoler. Plusieurs heuristiques sont actuellement à l'étude concernant cette question. On se référera en particulier aux résultats obtenus à partir de données réelles (brutes non débruitées) de la figure 10. Ces résultats ont été obtenus à partir des vecteurs dérivés unitaires (bruités) fournis par les capteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= (0.3862, -0.0315, 0.9219), \\ \mathbf{d}_1 &= (0.3775, -0.1613, 0.9118), \\ \mathbf{d}_2 &= (0.4077, -0.1947, 0.8921), \\ \mathbf{d}_3 &= (0.4444, -0.3071, 0.8415), \\ \mathbf{d}_4 &= (0.3224, -0.4485, 0.8336), \\ \mathbf{d}_5 &= (0.3913, -0.4889, 0.7797), \\ \mathbf{d}_6 &= (0.2771, -0.5945, 0.7548), \\ \mathbf{d}_7 &= (0.1710, -0.7053, 0.6880), \end{aligned} \quad (30)$$

et les distances mesurées entre les capteurs successifs sont $l_1 = 170.05, l_2 = 169.50, l_3 = 168.26, l_4 = 169.33, l_5 = 169.53, l_6 = 168.82$ et $l_7 = 170.10$. Pour la reconstruction, on multiplie la norme des vecteurs \mathbf{d}_i par $\frac{1}{2}(l_i + l_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, 6$ et par l_0 (resp. l_7) pour \mathbf{d}_0 (resp. \mathbf{d}_7). Après initialisation, la solution converge en 31 itérations et 0.28 secondes. Ces valeurs sont représentatives de tous les exemples suivants du paragraphe.

On présente en figure 11 une reconstruction à partir de données (vecteurs dérivés et longueurs) issues d'une courbe analytique (hélice circulaire). Comme dans la méthode d'interpolation de points, on note une grande sensibilité aux longueurs. Dès qu'elles diffèrent des longueurs réelles de la courbe initiale, les résultats présentent d'importantes oscillations.

La reconstruction à partir de données quelconques comme dans les figures 12 et 13 souligne à nouveau l'influence des contraintes de longueur sur les solutions obtenues. Dans la

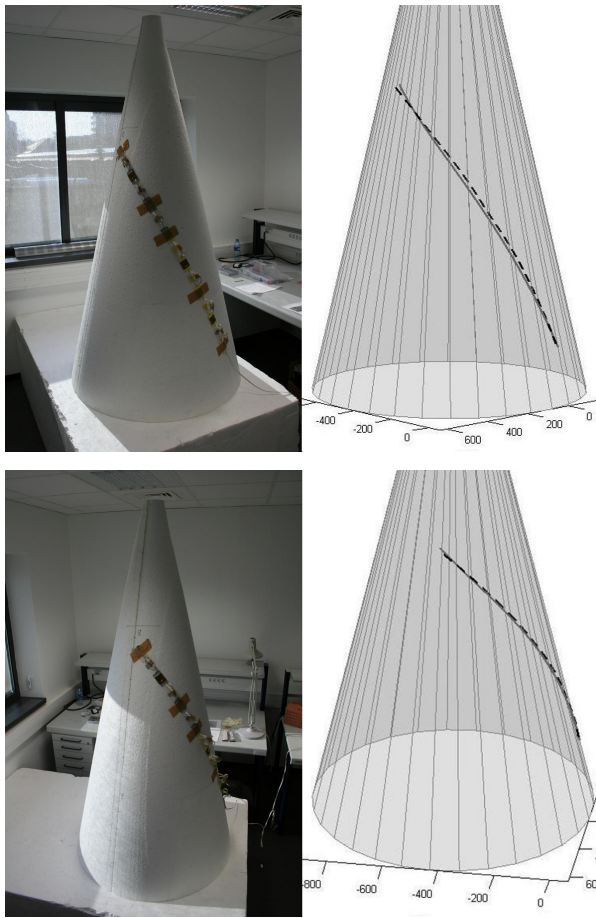


Figure 10: Acquisition et reconstruction d'une courbe sur un cône à l'aide du ruban Morphosense. En trait plein, la courbe analytique acquise par le ruban, et en pointillés sa reconstruction.

figure 12, les dérivées interpolées sont $\mathbf{d}_0 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{d}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{d}_2 = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{d}_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Les longueurs utilisées pour le premier segment varient tandis qu'on a $l_2 = 1.4$ et $l_3 = 1.0$ pour toutes les courbes. Dans la figure 13, les dérivées interpolées sont $\mathbf{d}_0 = (-2, -1, -1)$, $\mathbf{d}_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mathbf{d}_2 = (0, 1, \frac{1}{2})$ et $\mathbf{d}_3 = (0, -1, -\frac{1}{2})$. Les longueurs utilisées pour le deuxième segment varient tandis qu'on a $l_1 = 1.2$ et $l_3 = 0.7$ pour toutes les courbes.

Ainsi, comme dans la méthode d'interpolation de points, la longueur apparaît à nouveau comme un paramètre efficace de tension pour des applications en design géométrique.

Enfin, la figure 14 illustre le comportement des courbes solutions dans le cas de longueurs prescrites grandes comparées aux normes des vecteurs dérivés à interpoler. Dans

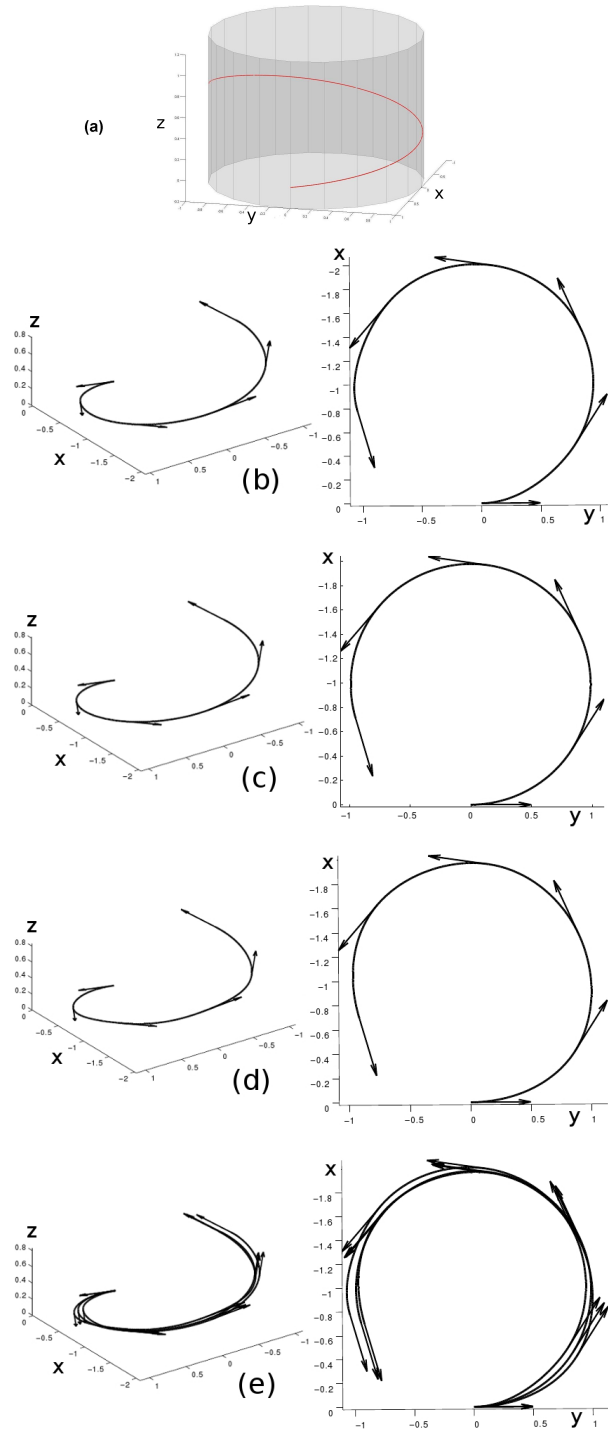


Figure 11: (a) : Hélice cylindrique avec des segments de longueurs L_i . (b) : Reconstruction avec $l_i = 0.99 L_i$. (c) : Reconstruction avec $l_i = L_i$. (d) : Reconstruction avec $l_i = 1.01 L_i$. (e) : Superposition des trois reconstructions.

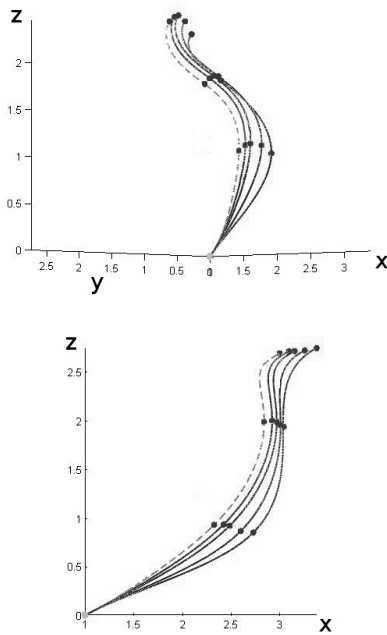


Figure 12: Suite de points quelconques. Les contraintes de longueur des deuxième et troisième segments sont fixées et on considère différentes longueurs pour le premier segment. La courbe en pointillés a pour longueur $l_1 = 2$ et on augmente cette longueur de 1% pour chacune des courbes suivantes.

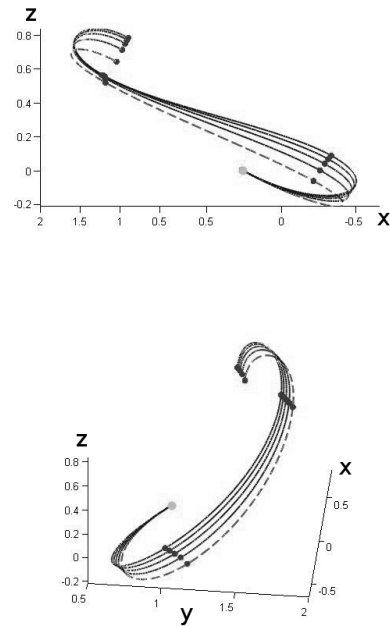


Figure 13: Suite de points quelconques. Les contraintes de longueur des premier et troisième segments sont fixées et on considère différentes longueurs pour le deuxième segment. La courbe en pointillés a pour longueur $l_2 = 1.4$ et on augmente cette longueur de 1% pour chacune des courbes suivantes.

cet exemple, les vecteurs dérivés \mathbf{d}_i sont

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0 &= (1, 0, 0), & \mathbf{d}_1 &= (0, 1, 0), \\ \mathbf{d}_2 &= (0, 0, 1), & \mathbf{d}_3 &= (1, 0, 0). \end{aligned} \quad (31)$$

En trait plein, on trace une courbe de référence pour laquelle les longueurs prescrites sont $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Si l'on augmente les longueurs sans changer la norme des vecteurs dérivés, on obtient une courbe relativement "plate" entre les noeuds, alors qu'en augmentant également leur norme avec le même facteur on obtient une courbe isométrique à la courbe de référence.

5. Conclusion

On a considéré ici deux problèmes d'interpolation originaux, motivés par des applications dans le domaine de la reconstruction de courbes à partir d'informations issues de capteurs micro-électroniques. La principale caractéristique des méthodes développées est le contrôle de la longueur des solutions obtenues.

Les exemples considérés montrent que la longueur influence significativement la forme des courbes reconstruites.

Ainsi, dans un contexte de design géométrique, la longueur peut s'interpréter comme un paramètre de forme ou de tension. Ces longueurs peuvent aussi être déterminées afin de satisfaire à certains critères physiques ou géométriques pour des applications en modélisation géométrique.

Dans le contexte de la reconstruction, la connaissance de la longueur des différents segments contribue à améliorer la précision de la courbe reconstruite, en particulier dans le cas d'un échantillonnage insuffisant. Notons que la solution développée dans le paragraphe 4 ne répond pas exactement aux exigences des contraintes liées à la reconstruction du ruban Morphosense. En effet, les données d'orientation fournies par le ruban Morphosense en chaque noeud capteur consistent en des repères de Serret-Frenet (composés de vecteurs unitaires).

Le choix de la norme des vecteurs dérivés à interpoler a été discuté ci-dessus au paragraphe 4.3. La méthode développée dans le paragraphe 4 permet d'interpoler des vecteurs dérivés de normes quelconques mais ne permet pas actuellement d'interpoler un repère de Serret-Frenet. L'interpolation de tels repères de Serret-Frenet n'est pas possible par les splines PH quintiques développées ci-dessus. Une solution

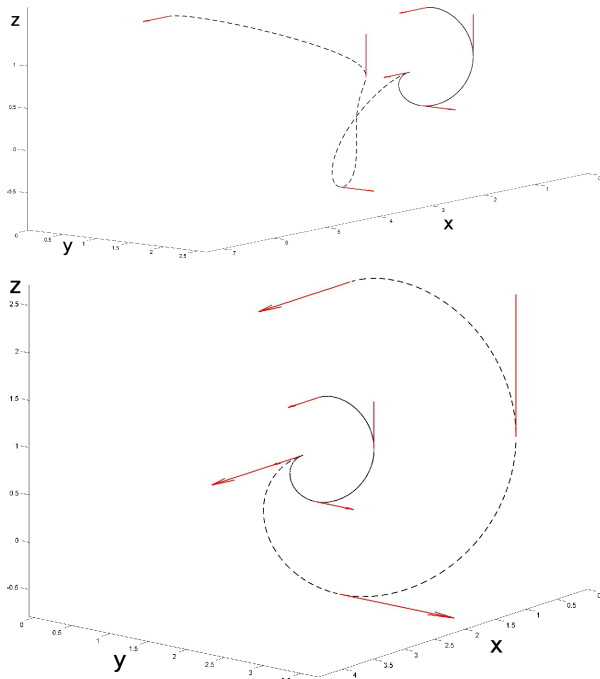


Figure 14: Dans les deux cas, la courbe en trait plein a pour longueurs $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, et la courbe en pointillés vérifie $l_1 = l_2 = l_3 = 3$. En haut, les vecteurs dérivés de la courbe en pointillés sont de norme 1, alors qu'en bas les vecteurs sont de norme 3.

pourrait consister à relâcher les contraintes C^2 en contraintes uniquement géométriques.

Références

- [DoC76] DO CARMO M. P. : *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [DS06] DAVID D., SPRYNSKI N. : Method and device for acquiring a geometric form. Patent Application, 09 2006. WO 2006/095109 A1.
- [FAKMS02] FAROUKI R., AL-KANDARI M., MANNI C., SAKKALIS T. : Structural invariance of spatial Pythagorean hodographs. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 19 (2002), 395–407.
- [Far02] FARIN G. : *Curves and surfaces for CAGD (5th Edition)*. Academic Press, 2002.
- [Far08] FAROUKI R. : *Pythagorean–Hodograph Curves : Algebra and Geometry Inseparable*. Springer, Berlin, 2008.
- [FGMS08] FAROUKI R., GIANNELLI C., MANNI C., SESTINI A. : Identification of spatial PH quintic Hermite interpolants with near optimal shape measures. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 25 (2008), 274–297.
- [FMPS12] FAROUKI R., MANNI C., PELOSI F., SAMPOLI M. : Design of C^2 spatial Pythagorean-hodograph quintic splines by control polygons. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 6920 (2012), 253–269.
- [FMS03] FAROUKI R., MANNI C., SESTINI A. : Spatial C^2 ph quintic splines. In *Curve and Surface Design : Saint Malo 2002* (2003).
- [Hua11] HUARD M. : Serret-frenet frame interpolation under length constraints for surface reconstruction. In *Actes des journées du GTMG* (2011).
- [Rou93] ROULIER J. : Specifying the arc length of Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 10 (1993), 25–56.
- [RP96a] ROULIER J., PIPER B. : Prescribing the length of parametric curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 13 (1996), 3–22.
- [RP96b] ROULIER J., PIPER B. : Prescribing the length of rational Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 13 (1996), 23–43.
- [SLDB08] SPRYNSKI N., LACOLLE B., DAVID D., BIARD L. : Surface reconstruction via geodesic interpolation. *Computer Aided Geometric Design*. Vol. 40 (2008), 480–492.
- [Spr07] SPRYNSKI N. : *Reconstruction de Courbes et Surfaces à partir de données tangentielles*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2007.
- [VDW95] VAN DAMME R., WANG R. : Curve interpolation with constrained length. *Computing*. Vol. 54 (1995), 69–81.
- [Wan97] WANG J. : Curve interpolation with constrained length in $S_2^1(\delta)$. *Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities*. Vol. 1 (1997), 7–12.
- [YWZ97] YU R., WANG J., ZHU C. : Curve interpolation with length constraint in a discrete manner. *Journal of Information & Computational Science*. Vol. 8 (1997), 859–868.