Le raisonnement spatial

Philippe Balbiani — Philippe Muller
Institut de recherche en informatique de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4
balbiani@irit.fr,muller@irit.fr

1 INTRODUCTION

Le problème de la représentation logique et du traitement algorithmique de l'espace occupe, en informatique, une grande place : compréhension du langage naturel, conception assistée par ordinateur, reconnaissance des formes, synthèse d'images, systèmes d'information géographique, etc. Pour résoudre ce problème, les modèles mathématiques de l'espace qui nous intéressent sont ceux de la géométrie. D'une part, destinés à la résolution du problème de l'analyse logique de notre perception de l'espace, il y a les modèles de la géométrie euclidienne qui ne laissèrent pas de fournir des sujets de méditation aux mathématiciens durant près de deux mille années. D'autre part, concernés par la question de la réduction de l'espace idéal révélé par Euclide à l'espace réaliste développé par Whitehead, il y a les modèles de la perception et des observations empiriques. Il s'ensuit que les modèles mathématiques de l'espace les plus connus sont issus de deux grandes traditions : la géométrie des mathématiciens et la géométrie du monde sensible. Ce sont principalement ces modèles que nous considérerons tout au long de cet article. La section 2 étudie certaines des solutions que les mathématiques et la logique ont apportées au problème de l'analyse logique de notre perception de l'espace, du point de vue de la géométrie des mathématiciens et du point de vue de la géométrie du monde sensible. Elle montrera que le langage du calcul des prédicats du premier ordre est propice à la représentation logique de l'espace, en considération de la grande quantité de logiques de l'espace que les mathématiques et la logique ont produite. La section 3 examine les solutions que les mathématiques et l'informatique ont apportées au problème de la mécanisation du raisonnement sur l'espace, du point de vue de la géométrie des mathématiciens et du point de vue de la géométrie du monde sensible. Elle décrira principalement les approches algébriques du raisonnement géométrique ainsi que les problèmes de satisfaction de contraintes spatiales.

2 REPRÉSENTATION

2.1 Géométrie des mathématiciens

La méthode euclidienne d'exposition de la géométrie a fait les premières logiques de l'espace. La recherche systématique des axiomes de la géométrie les a perpétuées. C'est que la logique de l'espace est l'ensemble des théories développées depuis Euclide dans le cadre du problème de l'analyse logique de notre perception de l'espace. Au commencement, l'observation y avait une grande part, tant le système d'axiomes à partir duquel Euclide a développé son projet orientait ses utilisateurs vers des problèmes d'analyse des figures géométriques. Qui plus est, la géométrie euclidienne était regardée par la majorité des mathématiciens grecs et par quantité de mathématiciens jusqu'au dix-huitième siècle comme le paradigme de la science. C'est que le système d'axiomes de la géométrie donné par Euclide pouvait servir de base à un système de déduction permettant à partir d'énoncés vrais d'en démontrer de nouveaux. L'invention des géométries non euclidiennes et l'obligation d'établir sur une base logique notre perception de l'espace firent devenir indispensable des fondements logiques de la géométrie, question de fond que les mathématiciens du dix-neuvième siècle examinèrent sérieusement [36].

2.1.1 Les géométries absolue, euclidienne et hyperbolique

Principe fondamental sur lequel reposent les géométries absolue, euclidienne et hyperbolique, le point est le concept théorique désignant la plus petite parcelle concevable d'espace. Les rapports logiques entre trois ou quatre points de l'espace se présentent sous des formes affines et métriques variées : "y est situé entre x et z", "x est aussi éloigné de y que z l'est de u", "x est plus près de y que de z", etc. Le langage d'une logique de l'espace est celui du calcul des prédicats du premier ordre, les variables de ce langage dénotant des points. Quant aux prédicats, ils varient selon les auteurs lesquels pourront adopter, tout comme Szmielew [56] et Tarski [58] le firent, les prédicats $B(x, y, z)$: "y est situé entre x et z" et $D(x, y, z, u)$: "x est aussi éloigné de

y que z l'est de u". Pour Szmielew et Tarski, un modèle de la géométrie est donc une structure relationnelle de la forme (W, B, D) dans laquelle B est une relation ternaire et D est une relation quaternaire entre les éléments de W, les points. Un autre prédicat a été considéré par Robinson [52], le prédicat $I(x, y, z)$: "x est plus près de y que de z". Pour Robinson, un modèle de la géométrie est donc une structure relationnelle de la forme (W, I) dans laquelle I est une relation ternaire, appelée relation de proximité relative, entre les éléments de W, les points. La présentation axiomatique d'une logique de l'espace est fondée sur un système d'axiomes indépendants, les axiomes duquel définissent la classe des modèles mathématiques de l'espace et déterminent l'ensemble des formules valides dans tous les modèles de cette classe. C'est ainsi que la géométrie absolue est une théorie axiomatique dont les espaces euclidiens ou hyperboliques sont les modèles. Les géométries euclidiennes et hyperboliques, quant à elles, ont pour présentations axiomatiques celles que l'on obtient en ajoutant l'axiome d'Euclide :

– $\forall txyzu(B(x, u, t) \wedge B(y, u, z) \wedge x \neq u \rightarrow \exists vw(B(x, z, v) \wedge B(x, y, w)$
$\wedge B(v, t, w)))$;

ou sa négation, à la présentation axiomatique de la géométrie absolue. Sur le plan métamathématique, les auteurs examinent leurs systèmes d'axiomes du point de vue des trois propriétés fondamentales suivantes : représentabilité, complétude et décidabilité. Propriété essentielle des logiques de l'espace, la représentabilité est la possibilité de donner une caractérisation algébrique de la classe des modèles définie par tel ou tel système d'axiomes. C'est ainsi que tout modèle de la géométrie euclidienne est isomorphe à un espace cartésien sur un corps réel clos et que tout modèle de la géométrie hyperbolique est isomorphe à un espace de Klein sur un corps réel clos. La complétude est la propriété des théories logiques selon laquelle l'ensemble des formules valides dans tous les modèles de la classe définie par tel ou tel système d'axiomes est maximal. C'est ainsi que les géométries euclidienne et hyperbolique sont les seules extensions complètes de la géométrie absolue. La décidabilité est la propriété des théories logiques selon laquelle l'ensemble des formules valides dans tous les modèles de la classe définie par tel ou tel système d'axiomes est récursif. L'axiomatisabilité de fait de la géométrie absolue et la complétude des géométries euclidienne et hyperbolique suffisent pour démontrer la décidabilité de ces logiques de l'espace.

2.1.2 La géométrie projective plane

Suivant l'exemple de Hilbert [36], nombreux sont les auteurs qui considèrent d'autres individus que les points pour formaliser la géométrie. Les individus traditionnellement considérés sont les droites, les plans, etc. Cette approche a quelques avantages dans le cadre de la géométrie projective plane [10] à l'intérieur duquel un principe de dualité donne aux points et aux droites des rôles symétriques. Les applications informatiques de la géométrie projective sont nombreuses, notamment dans le cadre de la synthèse d'images. C'est que la géométrie projective est à la règle ce que la géométrie euclidienne est au compas. En effet, pour l'élaboration de sa géométrie, Euclide utilise deux instruments : la règle et le compas. Depuis Mohr et Mascheroni, les mathématiciens savent que le compas seul suffit. La géométrie du compas est donc égale à toute la géométrie euclidienne. Dans une géométrie de la règle, il n'est plus question de "mesurer" un segment entre deux points ou un angle entre deux droites. Il n'est même plus possible de construire la droite euclidienne incidente à un point donné et parallèle à une droite donnée puisque cette construction exige l'utilisation du compas. La géométrie projective plane est constituée de deux types d'êtres : les points et les droites. La seule relation permise est : "le point X est incident avec la droite x". Deux points distincts définissent exactement une droite tandis que deux droites distinctes définissent exactement un point. Le langage d'une géométrie projective plane est celui du calcul des prédicats du premier ordre, les variables de ce langage dénotant des points ou des droites. Quant aux prédicats entre les points et les droites, les auteurs ont adopté le prédicat $in(X, x)$: "le point X est incident avec la droite x". Un modèle de la géométrie projective plane est donc une structure relationnelle de la forme (P, L, in) dans laquelle in est une relation binaire, appelée relation d'incidence, entre les éléments de P, les points, et les éléments de L, les droites. Dans la géométrie projective plane, la dualité entre les points et les droites apparaît nettement à la lecture des axiomes suivants :

- $\forall XY \exists x(in(X, x) \wedge in(Y, x))$;
- $\forall xy \exists X(in(X, x) \wedge in(X, y))$;
- $\forall XY \forall xy(in(X, x) \wedge in(Y, x) \wedge in(X, y) \wedge in(Y, y) \rightarrow X = Y \vee x = y)$.

A partir des axiomes de la géométrie projective plane, le théorème de Desargues n'est pas démontrable. Toutefois, du point de vue des fondements, la géométrie projective plane est intéressante pour ses rapports avec la théorie des anneaux ternaires qui est une théorie algébrique dont le langage est constitué des opérateurs binaires d'addition et de multiplication et dans laquelle le problème de l'unification est ouvert [4].

2.2 Géométrie du monde sensible

De nombreuses études ont mis en lumière l'importance, dans la cognition humaine, de capacités relevant d'un ensemble de connaissances partagées par tous et qui sont mises en jeu dans nos raisonnements sur le monde. Ce que l'on désigne comme "sens commun" sert alors à modéliser ces connaissances naturelles. La proposition de Hayes [34] vise à formaliser l'ensemble des connaissances intuitives que nous possédons sur le monde. Les approches concernées par la physique naïve dont Hayes fait à grands traits la description connaissent un essor prodigieux avec le développement des ontologies et pour lesquelles le problème central est celui du choix des êtres primitifs et des relations qui existent entre ces êtres. En raisonnement temporel, par exemple, cela concerne le choix des primitives temporelles à modéliser : instants, intervalles, événements. Ces approches représentent la connaissance par des relations qualitatives plutôt que par des grandeurs numériques mesurables. Hernández [35] caractérise la connaissance qualitative comme étant la connaissance pertinente essentielle à un agent pour réaliser une tâche. Il recense plusieurs raisons pour lesquelles les données numériques sont parfois inadaptées :

- L'utilisation de données numériques peut entraîner un coût plus important en calcul;
- Forcer des variables à prendre une valeur peut faire perdre une information qualitative comme l'égalité de deux variables;
- Les données numériques sont inadéquates pour communiquer avec l'utilisateur d'un système informatique.

Un effort important a donc été mené visant à produire des modèles formels pour la manipulation d'informations spatiales qualitatives qui seraient plus facilement manipulables que les données quantitatives dont elles proviennent. Le raisonnement spatial qualitatif (RSQ) est une branche récente en représentation des connaissances qui s'est focalisé sur ces problèmes. Les travaux récents en RSQ ont alors donné une nouvelle jeunesse à des travaux qui s'intéressaient à développer des bases pour la géométrie à partir de choix primitifs différents des mathématiques mieux établies. Les structures de connexion de Whitehead [64] sont un exemple, en topologie, de travaux basés sur des primitives non standards. Les travaux de Lesniewski [41] ont par ailleurs fourni le point de départ de ce qui était considéré à l'époque comme une alternative à la théorie des ensembles, la méréologie, et qui est maintenant vue comme une théorie de l'inclusion spatiale. A partir de ces théories on trouve des travaux d'ontologie formelle qui ont exploré les propriétés de ces structures pour finalement inspirer des travaux récents en RSQ. Cela démontre l'importance d'une réflexion ontologique sur les objets de notre perception courante, dont la spatialité et le mouvement sont des aspects essentiels.

Dans le cadre de la géométrie du monde sensible, les caractéristiques de l'espace peuvent être regroupées en plusieurs catégories. Il y a d'abord la topologie, c'est-à-dire les notions de contact et de connexité, souvent indissociables d'une théorie de l'inclusion spatiale. Il y a ensuite les problèmes d'orientation, c'est-à-dire les notions d'alignement, de projection et de positionnement de plusieurs objets. Puis vient la notion de distance entre objets qui est aussi le sujet d'une intense activité de recherche. Finalement, il y a la modélisation de la forme : convexité, courbure et dimension des objets. Cohn [22] et Vieu [61] présentent ces différents aspects du RSQ. Il faut noter que les aspects de l'espace mentionnés plus haut ne sont pas toujours indépendants. En effet, la forme peut servir de base pour définir certains aspects de l'orientation des objets, comme le montrent Borgo, Guarino et Masolo [11] et Cohn [21] et, réciproquement, la combinaison de l'orientation et de la distance peut servir à retrouver les caractéristiques couvertes par le concept de forme. De même, distance et orientation ont été combinées par Frank [27], Freksa et Röhrig [28] et Hernández [35] dans une théorie de la localisation spatiale. L'orientation peut aussi être définie en termes de distance, et toute distance induit une topologie. Par ailleurs quelques travaux ont tenté la définition sur une même base ontologique de propriétés topologiques liées à l'orientation des régions. Citons les travaux de Aurnague et Vieu [3] ainsi que ceux de Galton [29]. Citons également les travaux de modélisation de la distance entre objets en fonction de la dimension de ces objets : Gerla [32] et de Laguna [39]. Toutefois, il existe une hiérarchie entre ces concepts : la topologie étant la structure la plus faible, une géométrie métrique étant la structure la plus expressive. Une autre façon d'ordonner ces aspects est d'observer comment ils sont manipulés par les êtres humains. Les travaux de Piaget [46] sur l'apprentissage des concepts spatiaux et du raisonnement spatial, cités par Vieu [61], ont montré qu'un enfant maîtrise successivement les notions topologiques, puis les questions d'orientation, et finalement le problème des distances. Vieu y voit une justification d'une séparation de sa géométrie de l'espace en ces trois domaines, construits à partir d'une base topologique sur des régions de l'espace. L'étude du langage naturel montre généralement que ces trois classes de concepts se retrouvent dans la sémantique des prépositions spatiales et des verbes de mouvement, généralement de façon interdépendante [57]. Une conséquence de cette hiérarchisation est la maturité des travaux sur la topologie, une maturité que ne peuvent revendiquer les travaux portant sur l'orientation ou la distance.

De nombreux travaux ont remis en question les fondements ontologiques de la physique naïve, cela en considérant comme plus efficace le traitement d'objets primitifs directement assimilables aux objets de notre monde de tous les jours, sans passer par l'intermédiaire de points géométriques qui n'ont pas d'existence matérielle. Ceci a fait ressurgir une tradition logique et géométrique ancienne qui avait été bâtie sur des fondements ontologiques différents de ceux de la théorie des ensembles. Plus précisément, la notion de base sur des régions de l'espace est celle de la relation de partie à tout entre deux régions. Cette théorie est la méréologie, développée pour la première fois par l'école polonaise de Lesniewski [41]. Cette théorie est très faible du point de vue des structures qu'elle caractérise. Pour prétendre capturer des notions que l'on peut véritablement qualifier de spatiales, la notion de connexion est la notion la plus fondamentale que l'on peut considérer. Pour ce qui est des régions, la notion de connexion a été étudiée par Whitehead [64]. L'intégration de la notion de connexion dans la méréologie a été ensuite à la base de plusieurs systèmes visant à décrire le réel sur la base primitive de régions spatiales servant de référent aux objets matériels, on doit citer Carnap [13], Leonard et Goodman [40] et Woodger [65] qui ont développé des théories formelles de la méréo-topologie. Plus récemment Clarke [18] a développé une version alternative de ces théories et ces travaux ont commencé à inspirer certains chercheurs en IA. On doit à Randell, Cui et Cohn [50, 51] d'avoir jeté un pont entre l'IA traditionnelle et les travaux de Clarke. Le raisonnement spatial présenté dans cette section est un domaine très actif. Une présentation plus exhaustive en est faite par Cohn [22] et Stock [55]. Nous avons du laisser de coté notamment les travaux sur les espace discrets [33], et les travaux récents sur l'intégration du temps et de l'espace [30, 43, 44].

2.2.1 La méréologie

On doit à Simons [53] une étude détaillée des différentes versions modernes de la méréologie et à Varzi [60] une présentation complète des méréologies et méréo-topologies les plus récentes considérées en IA. Certains travaux en bases de données spatiales ont également proposé des modèles de représentation, qui recoupent certaines intuitions de ces théories méréologiques et méréo-topologiques sur des base mathématiquement plus classiques [25, 26]. La relation primitive la plus souvent choisie des théories méréologiques est la relation P de partie à tout entre deux entités. C'est en fait une relation de pré-ordre. En effet son axiomatisation est :

- Pxx; (P1)
- $Pxy \wedge Pyx \rightarrow x = y$; (P2)
- $Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz$. (P3)

On peut sur cette base définir les notions de partie propre (PP), de recouvrement (O, comme *overlap* en anglais), et de recouvrement partiel (PO) :

- $PPxy = Pxy \wedge \neg Pyx$;
- $Oxy = \exists z(Pzx \wedge Pzy)$;
- $POxy = Oxy \wedge \neg Pyx \wedge \neg Pxy$.

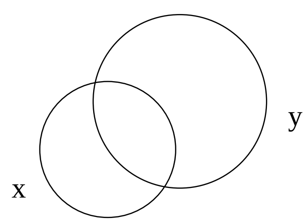

FIG. 1 - *Une interprétation en dimension* 2 *de la relation méréotopologique* PO.

Alternativement on peut définir la méréologie en prenant O, PP ou DR ("discrete from") comme primitives. On définit alors P respectivement par :

- $Pxy = \forall z(Oxz \rightarrow Ozy)$;

– $Pxy = PPxy \vee x = y$;

– $Pxy = \forall z(DRyz \rightarrow DRxz)$.

2.2.2 La topologie

En mathématiques, une topologie est une structure de la forme $\mathcal{T} = (E, T)$, dans laquelle T est un ensemble de sous-ensembles de E, appelés les *ouverts* de la topologie $\mathcal{T}$, ces sous-ensembles vérifiant les propriétés suivantes :

– L'intersection de deux ouverts est un ouvert;

– L'union quelconque d'ouverts est un ouvert;

– $E \in T$ et $\emptyset \in T$.

Dans la topologie classique, la notion d'ouvert permet de définir la connexité d'une région en disant que x est connexe lorsqu'il n'existe pas deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x = O_1 \cup O_2$. Le type de propriétés topologiques que nous considérons ici est l'équivalent de cette connexité dans le cas où les entités primitives sont des régions considérées dans un cadre méréologique. Par rapport à la méréologie, la topologie caractérise la notion de "tout" fait d'un seul morceau, une notion qu'on ne peut exprimer en méréologie pure, malgré la tentative de Whitehead [63]. Celui-ci a défini une notion de jointure de deux entités, censée capturer la relation de deux entités connectées :

– $Jxy = \exists z(Oxz \wedge Oyz \wedge \forall u(Puz \rightarrow Oux \vee Ouy))$.

Ceci exprime que pour deux entités jointes, il en existe une troisième qui les recouvrent toutes les deux et qui fait partie de la somme. Mais cette notion n'excluant pas les entités z qui peuvent être déconnectées, elle ne correspond pas à la connection. Il y a alors plusieurs façons d'introduire les concepts topologiques. La première consiste à introduire, en plus de P, une primitive de connexion ayant au moins les propriétés suivantes :

– Cxx; (C1)

– $Cxy \rightarrow Cyx$; (C2)

– $Pxy \rightarrow \forall z(Czx \rightarrow Czy)$. (C3)

Une solution alternative est de n'avoir que C comme primitive, en remplaçant (C3) par :

– $\forall z(Cxz \leftrightarrow Cyz) \rightarrow x = y.$ (C4)

Dans tous les cas, on peut alors définir les notions suivantes :

– $ECxy = Cxy \wedge \neg Oxy;$ (connexion externe)

– $TPxy = Pxy \wedge \exists zECzx \wedge ECzy);$ (partie tangentielle)

– $NTPxy = Pxy \wedge \neg TPxy.$ (partie non tangentielle)

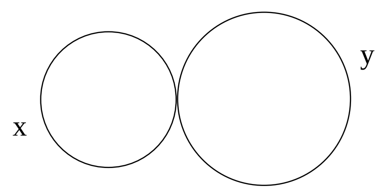

FIG. 2 - *Une interprétation en dimension* 2 *de la relation méréotopologique* EC.

Un ensemble d'axiomes contenant les axiomes P1-P3 et les axiomes C1-C3 caractérise par exemple la méréo-topologie de Casati et Varzi [14]. Les axiomes C1, C2 et C4 forment la base des méréo-topologies de Asher et Vieu [2], Clarke [18] et Randell, Cui et Cohn [51]. Dans le cas où C est la seule primitive, la relation P est définie comme suit :

– $Pxy = \forall z(Cxz \rightarrow Cyz).$

La relation "partie non tangentielle" (NTP), dénommée "partie interne" par Smith [54] et Varzi [60], peut aussi servir de base à une méréo-topologie. Une autre alternative encore est celle proposée par Borgo, Guarino et Masolo [11]. On peut aussi définir dans tous les formalismes les relations $NTPP$ (partie propre non tangentielle) et TPP (partie propre tangentielle), et leurs relations inverses notées $NTPPI$ et $TPPI$. Les 8 relations DC, EC, PO, $NTPP$, TPP, $NTPPI$, $TPPI$ et EQ, l'égalité, forment un ensemble de relations exhaustives (entre deux régions une de ces relations est vérifiée) et incompatibles entre elles. L'ensemble de ces 8 relations est souvent dénommé $RCC8$, en référence à la théorie RCC proposée par Randell, Cui et Cohn [51].

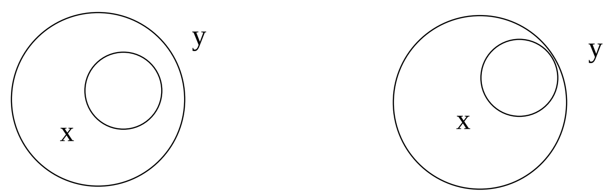

FIG. 3 - *Une interprétation en dimension* 2 *des relations méréotopologiques* $NTPP$ *et* TPP.

2.2.3 L'orientation et la distance

La notion d'orientation est associée à l'existence d'une direction. Plus précisément, orienter un objet consiste à choisir une direction spécifique à cet objet, qui lui donne un haut et un bas, un avant et un arrière. Une direction en géométrie classique est définie simplement par deux points O et E (l'origine et l'extrémité). Certains travaux, peu nombreux, ont cherché à définir la direction à partir des relations entre les régions. Plusieurs solutions ont été envisagées : d'une part, reconsidérer la notion de point en la définissant à partir des régions, afin de redéfinir les notions géométrique usuelles ; d'autre part, introduire de nouvelles régions qui représentent des parties privilégiées des objets (des extrémités), et préciser leurs propriétés. Dans la première tendance, Tarski [59] a proposé de définir le point comme un ensemble de régions imbriquées. Une autre méthode à été donnée sur un ensemble de régions quelconques par Aurnague et Vieu [3], à la suite de Clarke [19], par construction d'ultra-filtres. Ayant défini la notion de point, on peut recontruire la géométrie classique par une axiomatisation sur ces points ; on a alors des théories du second ordre sur le langage de départ des régions. La deuxième méthode est de définir la notion de frontière dans la théorie topologique, soit comme fonction primitive [60], soit en introduisant des entités supplémentaires pour les fermés [3], les limites, définies comme des parties tangentielles dotées d'un intérieur vide (n'ayant pas de régions fermées comme parties). Une solution voisine de celle-ci est de reconsidérer les objets à partir d'objets primitifs particuliers. Tarski [59] a proposé une méréologie basée sur les sphères. Ces formes ont des propriétés particulières qui permettent des définitions intéressantes de positions relatives de régions. En définissant axiomatiquement l'alignement des sphères, on peut aussi redéfinir des propriétés géométriques sur des corps. Guarino, Borgo et Masolo [11] definissent en fait la sphère à partir d'une relation de congruence CG ($CGxy$ voulant dire x et y sont congruents). Il est alors assez simple, à l'aide de la congruence et de la notion de sphère, de construire un ordre strict sur n'importe quel ensemble de sphères : si une sphère x est congruente à une sphère z qui fait partie d'une sphère y, alors x est plus petite que y. On peut utiliser ceci pour définir alors des notions métriques , et prendre comme primitive S (Sx voulant dire x est une sphère), et redéfinir la congruence. Ensuite, il faut reconstruire les notions de distance et d'angle. Par exemple on peut considérer la distance entre deux sphères comme donnée par la sphère alignée entre les deux.

3 RAISONNEMENT

3.1 Géométrie des mathématiciens

Ce sont majoritairement les problèmes d'analyse de figure qui ont préoccupé les mathématiciens. Ces problèmes consistent à montrer qu'une figure donnée possède telle ou telle propriété. Ils peuvent être résolus par trois types d'approches différentes : les approches algébriques, les approches logiques et les approches heuristiques. Les approches algébriques consistent à traduire un problème d'analyse en un problème algébrique équivalent. Pour effectuer cette traduction, un point est représenté par un couple de coordonnées, une droite est représentée par une équation linéaire, etc. Une figure géométrique est un ensemble d'êtres géométriques dans une certaine relation. Elle est donc traduite en un ensemble fini de polynômes, chacun d'eux exprimant la relation entre ces êtres. Les approches logiques consistent à traduire un problème d'analyse en une formule du calcul des prédicats du premier ordre. Des techniques de déduction automatique comme le principe de résolution établissent la preuve de l'énoncé géométrique traduit [16, 20, 49]. Les approches heuristiques, enfin, cherchent à simuler les règles expertes utilisées par un individu lors de la résolution d'un problème géométrique. Elles sont souvent utilisées pour définir des systèmes automatiques pour l'enseignement de la géométrie, cf. les systèmes construits par Bernat [9], Desmoulins [24] et Py [47, 48]. Il existe plusieurs types d'approches heuristiques. L'approche par métaconnaissance cherche à isoler des sous-figures de la figure représentative du problème afin de faire apparaître des propriétés [7]. L'approche par analogie cherche un problème similaire au problème courant afin d'en tirer un modèle de preuve [37]. D'autres approches sont basées sur des techniques de

raisonnement à partir de cas [17]. Nous n'examinerons ici que les approches algébriques du raisonnement géométrique.
Résoudre un problème d'analyse de la géométrie euclidienne équivaudrait à démontrer qu'une expression de la forme :

– $\forall x_1 \ldots x_i (H_1 \wedge \ldots \wedge H_j \rightarrow C)$;

et composé d'un ensemble de variables $\{x_1, \ldots, x_i\}$ dénotant des points et d'un ensemble de relations $\{H_1, \ldots, H_j\}$ entre ces variables, qui sont des parties de l'ensemble des formes affines et métriques variées sous lesquelles se présentent les rapports logiques entre trois ou quatre points de l'espace, est un théorème de la géométrie euclidienne si des conditions de non-dégénérescence ne venaient jeter la confusion, qui éliminent les cas particuliers du fait de l'influence desquels telle ou telle figure donnée n'est plus conforme à ce qu'elle doit être le plus souvent. C'est que la faiblesse du raisonnement direct sur les figures tient à la grande variété de ces cas particuliers qui doivent être considérés pour mener à bien une démonstration, par exemple dans le plan euclidien où l'intersection de deux droites est vide, réduite à un point ou égale à une droite selon que les deux droites sont parallèles, sécantes ou confondues. A l'inverse, la force du raisonnement algébrique sur des polynômes réside dans l'absence de tels cas particuliers, seul le problème de la division par 0 devant être pris en compte. L'efficacité des approches algébriques du raisonnement géométrique élaborées par Chou [15] et Kapur [38] repose en partie sur cette absence de cas particuliers. De fait, elles produisent en quelques secondes la solution de certains problèmes d'analyse parmi les plus difficiles de la géométrie euclidienne : théorème de Desargues, propriété de Pappus, etc. Comment ? En traduisant, dans une première étape, une expression logique de la forme $\forall x_1 \ldots x_i (H_1 \wedge \ldots \wedge H_j \rightarrow C)$ en une expression polynomiale de la forme :

– $\forall X_1 \ldots X_m (h_1 = 0 \wedge \ldots \wedge h_n = 0 \rightarrow c = 0)$;

et en démontrant, dans une seconde étape, par des techniques de réécriture l'appartenance du polynôme c à l'idéal engendré par la famille de polynômes $\{h_1, \ldots, h_n\}$. Ces techniques de réécriture sont basées sur la méthode de Wu [66] et l'algorithme de Buchberger [12].
Les approches algébriques du raisonnement géométriques sont d'une grande efficacité. Elles ont toutefois quelques défauts que nous énumérons maintenant. En premier lieu, qu'elles soient définies à partir de la méthode de Wu ou à partir de l'algorithme de Buchberger, les approches algébriques du

raisonnement géométrique ne permettent pas une lecture et une interprétation en termes purement géométriques des preuves produites. En deuxième lieu, à proprement parler, les approches algébriques du raisonnement géométrique démontrent que toute racine complexe de la famille de polynômes $\{h_1, \ldots, h_n\}$ est une racine du polynôme c. Or, les modèles de la géométrie euclidienne sont isomorphes à des espaces cartésiens sur des corps réels clos. Les approches algébriques du raisonnement géométrique sont donc incomplètes, qui savent résoudre le problème de l'existence de racines complexes d'une famille de polynômes $\{h_1, \ldots, h_n\}$ qui ne sont pas des racines d'un polynôme c mais qui demeurent impuissantes à trancher la question de l'appartenance de ces racines à la droite des nombres réels. En troisième lieu, il existe d'autres questions fondamentales de géométrie examinée par les utilisateurs du système d'axiomes d'Euclide : les problèmes de synthèse qui consistent à déterminer quelles figures possèdent telle ou telle propriété donnée, ou plutôt qui consistent à construire quelles figures possèdent telle ou telle propriété donnée, à la règle et au compas. Résoudre un problème de synthèse, les approches algébriques du raisonnement géométrique en sont incapables. C'est principalement pour corriger ces défauts que les approches logiques et les approches heuristiques ont été considérées.

3.2 Géométrie du monde sensible

Les méréo-topologies sont des théories logiques du premier ordre construites avec le prédicat P de partie à tout et le prédicat C de connexion. Pour la plupart, ces théories sont indécidables. Par suite, la question est posée de l'existence de fragments décidables de ces théories. Nous l'avons dit, les relations DC, EC, PO, $NTPP$, TPP, $NTPPI$, $TPPI$ et EQ forment un ensemble de relations exhaustives et incompatibles entre elles. Randell, Cui et Cohn [51] proposent de représenter la connaissance imprécise qu'on a sur une famille d'objets par un problème de satisfaction de contraintes dans l'algèbre relationnelle qu'ils définissent à partir de ces relations. Un tel problème de satisfaction de contraintes est un couple (n, R) dans lequel $n \geq 1$ et $R_{ij} \subseteq \{DC, EC, PO, NTPP, TPP, NTPPI, TPPI, EQ\}$, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Le problème (n, R) est consistant lorsqu'il existe, dans un certain espace topologique, des parties régulières fermées $x_1, \ldots, x_n$ telles que x_i et x_j vérifient une des relations de R_{ij}, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. En traduisant de tels problèmes de satisfaction de contraintes dans la logique intuitionniste, Bennett [8] montre que le problème de leur consistance est décidable. En montrant que la question de la consistance de ces problèmes de satisfaction de contraintes devient traitable en temps polynomial lorsque tous les R_{ij} sont des singletons, Nebel [45] prouve que le sujet de la consistance de ces problèmes de satisfaction de contraintes est NP-complet en général. L'intérêt des relations DC, EC, PO, $NTPP$, TPP, $NTPPI$, $TPPI$ et EQ est évident pour qui considèrent les rapports entre les parties intérieures et les frontières de deux parties régulières fermées dans un espace topologique. Or, dans les systèmes d'information géographique par exemple, certaines relations comme "être au nord de" ou "être au sud-ouest de" sont essentielles pour décrire les positions respectives d'un groupe d'objets, des relations qu'on ne peut exprimer avec les relations de $RCC8$. En conséquence, la question de la définition de nouvelles algèbres relationnelles pour le raisonnement spatial a été considérée. Ligozat [42], par exemple, considère l'algèbre des relations cardinales qu'il définit à partir des 9 relations possibles qu'on peut définir entre les points du plan lorsqu'on ne peut comparer que les positions respectives de leurs projections sur des axes horizontal et vertical. Ces 9 relations possibles sont les couples qu'on peut définir à partir des 3 relations atomiques de l'algèbre des points introduites par Vilain et Kautz [62]. Balbiani, Condotta et Fariñas del Cerro [5, 6], autre exemple, ont introduit l'algèbre des rectangles sur la base des 169 relations qu'on définit entre deux rectangles isothétiques du plan lorsqu'on ne peut comparer que les positions respectives de leurs projections sur des axes horizontal et vertical. Ces 169 relations possibles sont les couples qu'on peut former sur la base des 13 relations atomiques de l'algèbre des intervalles proposées par Allen [1]. D'autres algèbres relationnelles pour le raisonnement spatial ont été proposé [23, 27, 28, 31].

RÉFÉRENCES

[1] **J. Allen.** *Maintaining knowledge about temporal intervals.* Communications of the ACM **26,** 832–843, 1983.

[2] **N. Asher, L. Vieu** *Towards a geometry of common sense: a semantics and a complete axiomatisation of mereotopology.* IJCAI-95, Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann, 1995.

[3] **M. Aurnague, L. Vieu** *A three-level approach to the semantics of space.* Zelinski-Wibbelt (éditeur), Semantics of Prepositions in Natural Language Processing, 393–439, Mouton de Gruyter, 1993.

[4] **P. Balbiani.** *Mécanisation de la géométrie : incidence et orthogonalité.* Revue d'intelligence artificielle **11,** 179–211, 1997.

[5] **P. Balbiani, J.-F. Condotta, L. Fariñas del Cerro.** *A model for reasoning about bidimensional temporal relations.* A. Cohn, L. Schubert, S. Shapiro (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Sixth International Conference (KR'98), 124–130, Morgan Kaufmann, 1998.

[6] **P. Balbiani, J.-F. Condotta, L. Fariñas del Cerro.** *A new tractable subclass of the rectangle algebra.* IJCAI-99, Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, 442–447, Morgan Kaufmann, 1999.

[7] **J.-M. Bazin.** *Représentation des connaissances et des objets dans un résolveur de problèmes de géométrie : le système GEOMUS.* 9ème congrès reconnaissance des formes et intelligence artificielle, Volume 2, 657–662, 1994.

[8] **B. Bennett.** *Spatial reasoning with propositional logic.* Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Fourth International Conference (KR'94), 51–62, Morgan Kaufmann, 1994.

[9] **P. Bernat.** *Conception et réalisation d'un environnement interactif d'aide à la résolution de problèmes. CHYPRE : un exemple pour la démonstration en géométrie.* Thèse de l'université de Nancy, France, 1994.

[10] **L. Blumenthal.** *A Modern View of Geometry.* Freeman, 1961.

[11] **S. Borgo, N. Guarino, C. Masolo.** *A pointless theory of space based on strong connection and congruence.* L. Carlucci-Aiello, S. Shapiro (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Fifth International Conference (KR'96), 220–229, Morgan Kaufmann, 1996.

[12] **B. Buchberger.** *A critical-pair completion algorithm for finitely generated ideals in rings.* Logic and Machines: Decision Problems and Complexity, Lecture Notes in Computer Science 171, 137–161, Springer-Verlag, 1983.

[13] **R. Carnap.** *Introduction to Symbolic Logic and its Applications.* Dover, 1958.

[14] **R. Casati, A. Varzi.** *Holes and Other Superficialities.* The MIT Press, 1994.

[15] **S.-C. Chou.** *Mechanical Geometry Theorem Proving.* Reidel, 1988.

[16] **S.-C. Chou, X. Gao, J. Zhang.** *A deductive database approach to automated geometry theorem proving and discovering.* Journal of Automated Reasoning, à paraître.

[17] **E. Chouraqui, C. Inghilterra.** *A model of case-based reasoning for solving problems of geometry in a tutoring system.* J.-M. Laborde (éditeur), Intelligent Learning Environments: the Case of Geometry, 1–16, Springer, 1996.

[18] **B. Clarke.** *A calculus of individuals based on "connection".* Notre Dame Journal of Formal Logic **22,** 204–218, 1981.

[19] **B. Clarke.** *Individuals and points.* Notre Dame Journal of Formal Logic **26,** 61–75, 1985.

[20] **H. Coelho, L. Pereira.** *Automated reasoning in geometry theorem proving with Prolog.* Journal of Automated Reasoning **2,** 329–390, 1986.

[21] **A. Cohn.** *A hierarchical representation of qualitative shape based on connection and convexity.* A. Frank, W. Kuhn (éditeurs), Spatial Information Theory, 311–326, Springer, 1995.

[22] **A. Cohn.** *Calculi for qualitative spatial reasoning.* J. Calmet, J. Campbell, J. Pfalzgraf (éditeurs), Artificial Intelligence and Symbolic Mathematics, Lecture Notes in Computer Science 1138, 124–143, Springer, 1996.

[23] **M. Cristani.** *The complexity of reasoning about spatial congruence.* Journal of Artificial Intelligence Research **11,** 361–390, 1999.

[24] **C. Desmoulins.** *Etude et réalisation d'un système tuteur pour la construction de figures géométriques.* Thèse de l'université Joseph-Fourier, France, 1994.

[25] **M. Egenhofer.** *Reasoning about binary topological relations.* O. Gunther, H. Schek (éditeurs), Advaces in Spatial Databases - SSD'91 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science 525, 143-160, Springer-Verlag, 1991.

[26] **M. Egenhofer, R. Franzosa.** *Point-set topological spatial relations.* Int. J. Geographical Information Systems **5,** 161-174, 1991.

[27] **A. Frank.** *Qualitative spatial reasoning about distances and directions in geographic space.* Journal of Visual Languages and Computing **3,** 343–371, 1992.

[28] **C. Freksa, R. Röhrig.** *Dimensions of qualitative spatial reasoning.* P. Carreté, M. Singh (éditeurs), Qualitative Reasoning and Decision Technologies, 482–492, CIMNE, 1993.

[29] **A. Galton.** *Lines of Sight.* M. Keane, P. Cunningham, M. Brady, R. Byrne (éditeurs), AI and Cognitive Science '94, Proceedings of the Seventh Annual Conference, 103–113, Dublin University Press, 1994.

[30] **A. Galton.** *Space, time and movement.* O. Stock, (éditeur), Spatial and Temporal Reasoning. Kluwer, 1997.

[31] **A. Gerevini, J. Renz.** *Combining topological and qualitative size constraints for spatial reasoning.* M. Maher, J.-F. Puget (éditeurs), Principles and Practice of Constraint Programming – CP98, Lecture Notes in Computer Science 1520, 220–234, Springer, 1998.

[32] **G. Gerla.** *Pointless Geometries.* Handbook of Incident Geometry, Elsevier Science, 1995.

[33] **J. Glasgow et D. Papadias.** *Computational imagery.* Cognitive Science **16,** 355–394, 1992.

[34] **P. Hayes.** *The second naive physics manifesto.* J. Calmet, J. Campbell, J. Pfalzgraf (éditeurs), Formal Theories of the Commonsense World, 1–36, Ablex, 1985.

[35] **D. Hernández.** *Qualitative Representation of Spatial Knowledge.* Lecture Notes in Artificial Intelligence 804, Springer, 1994.

[36] **D. Hilbert.** *Foundations of Geometry.* Open Court, 1971.

[37] **C. Inghilterra.** *Apport de la représentation orientée objet et du raisonnement analogique dans la conception d'un tutoriel de géométrie.* Thèse de l'université d'Aix-Marseille III, France, 1992.

[38] **D. Kapur.** *Using Gröbner bases to reason about geometry problems.* Journal of Symbolic Computation **2,** 399–408, 1986.

[39] **T. de Laguna.** *Point, line and surface as sets of solids.* Journal of Philosophy **19,** 1922.

[40] **H. Leonard, N. Goodman.** *The calculus of individuals and its uses.* Journal of Symbolic Logic **5,** 45–55, 1940.

[41] **S. Lesniewski.** *Sur les fondements des mathématiques.* Hermès, 1989.

[42] **G. Ligozat.** *Reasoning about cardinal directions.* Journal of Visual Languages and Computing **9,** 23–44, 1998.

[43] **P. Muller.** *A qualitative theory of motion based on spatio-temporal primitives.* A. Cohn, L. Schubert, S. Shapiro (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Sixth International Conference (KR'98). Morgan Kaufmann, 1998.

[44] **P. Muller.** *Raisonnement spatial qualitatif : le cas du mouvement.* Revue d'intelligence artificielle **13,** 325–353, 1999.

[45] **B. Nebel.** *Computational properties of qualitative spatial reasoning: first results.* I. Wachsmuth, C.-R. Rollinger, W. Brauer (éditeurs), KI-95: Advances in Artificial Intelligence, Lecture Notes in Computer Science 981, 233–244, Springer-Verlag, 1995.

[46] **J. Piaget, B. Inhelder.** *La représentation de l'espace chez l'enfant.* PUF, 1948.

[47] **D. Py.** *Aide à la démonstration en géométrie : le projet Mentoniezh.* Sciences et techniques éducatives **3,** 1996.

[48] **D. Py.** *Exploration guidée dans un tuteur intelligent*. 12ème congrès reconnaissance des formes et intelligence artificielle, Volume III, 141–149, 2000.

[49] **A. Quaife.** *Automated development of Tarski's geometry.* Journal of Automated Reasoning **5,** 97–118, 1989.

[50] **D. Randell, A. Cohn, Z. Cui.** *Naive Topology: Modelling the Force Pump.* B. Faltings, P. Struss (éditeurs), Recent Advances in Qualitative Physics, 177–192, The MIT Press, 1990.

[51] **D. Randell, Z. Cui, A. Cohn.** *A spatial logic based on regions and connections.* B. Nebel, C. Rich, W. Swartout (éditeurs), Principles of Knowledge Representation and Reasoning : Proceedings of the Third International Conference (KR'92), 165–176, Morgan Kaufmann, 1992.

[52] **R. Robinson.** *Binary relations as primitive notions in elementary geometry.* L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (éditeurs), The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics, 68–85, North-Holland, 1959.

[53] **P. Simons.** *Parts - A Study in Ontology.* Oxford University Press, 1987.

[54] **B. Smith.** *Mereotopology: a theory of parts and boundaries.* Data and Knowledge Engineering **20,** 287–304, 1996.

[55] **O. Stock** (ed.). *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer, 1997.

[56] **W. Szmielew.** *Some metamathematical problems concerning elementary hyperbolic geometry.* L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (éditeurs), The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics, 30–52, North-Holland, 1959.

[57] **L. Talmy.** *How language structures space.* H. Pick, L. Acredolo (éditeurs), Spatial Orientation: Theory, Research and Application, 225-282, Plenum Press, 1983.

[58] **A. Tarski.** *What is elementary geometry ?* L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (éditeurs), The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics, 16–29, North-Holland, 1959.

[59] **A. Tarski.** *Logique, sémantique, métamathématique.* Armand Colin, 1972.

[60] **A. Varzi.** *Parts, wholes, and part-wholer elations: the prospects of mereotopology.* Data and Knowledge Engineering **20,** 259–286, 1996.

[61] **L. Vieu.** *Spatial representation and reasoning in AI.* O. Stock (éditeur), Spatial and Temporal Reasoning, 3–40, Kluwer, 1997.

[62] **M. Vilain, H. Kautz.** *Constraint propagation algorithms for temporal reasoning.* Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence, 377–382, 1986.

[63] **A. Whitehead.** *The Concept of Nature.* Cambridge University Press, 1920.

[64] **A. Whitehead.** *Process and Reality.* Cambridge University Press, 1929.

[65] **J. Woodger.** *The Axiomatic Method in Biology.* Cambridge University Press, 1937.

[66] **W.-T. Wu.** *Mechanical Theorem Proving in Geometries.* Springer-Verlag, 1994.