Chapitre 3

Temps et espace : approches qualitatives

Le vapeur grec Michaele-Embericos a envoyé un message sans fil disant qu'il était en train de couler à 20 milles au sud d'Oran

Le nouvelliste de Lyon, 23 novembre 1931.

Une heure était prise chaque jour pour ses soins ménagers. Une autre, plus brève, était consacrée à la toilette de la jeune femme.

Colette Yver, *Les Dames du palais*, 1909.

Nous avons vu au chapitre précédent les problèmes liés à l'utilisation de structures inadéquates pour modéliser le raisonnement sur le mouvement et le changement spatial. Nous avons tenté dndiquer les présupposés de ces approches qui les ont menées à un échec relatif, notamment une absence de remise en cause de l'ontologie standard du temps et de l'espace, et une caractérisation imprécise des concepts spatiaux. Dans une optique qualitative les travaux sur le mouvement sont assez rares et manipulent les concepts spatiaux et temporels séparément pour traiter du mouvement. Nous allons donc voir dans ce chapitre des alternatives de représentations pour les concepts du temps et de l'espace, dans une optique consciente de la nécessité d'une formalisation qualitative, au sens dont nous avons discuté au chapitre 1. A ce stade nous verrons des propriétés de modèles soit purement spatiaux, soit purement temporels et l'étude combinée des deux sera l'objet du chapitre suivant. Nous verrons alors également la pertinence de ces travaux par rapport à nos objectifs de départ.

3.1 Approches qualitatives de l'espace

Nous avons souligné l'intérêt des modèles qualitatifs par rapport au modèles numériques au chapitre 1. Essentiellement, la volonté de s'abstraire des représentations numériques a été le moteur d'approches de modélisation des concepts intuitifs liés à l'espace et au temps. Dans le cas de l'espace, après les obstacles rencontrés par la physique qualitative, certains auteurs ont remis en cause les présupposés ontologiques qui ont conduit à l'impasse. La comparaison de valeurs numériques de coordonnées cartésiennes pour des objets assimilés à des points ou à des ensemble de points a laissé place à la considération de propriétés plus globales sur des objets plus intuitifs. De nombreux modèles ont par exemple pris comme primitives des régions de l'espace sur lesquels portent quelques relations choisies dont on étudie les propriétés séparément des autres aspects.

Les caractéristiques de l'espace qui ont été étudiées de façon plus ou moins indépendante sont alors regroupables comme suit : tout d'abord la topologie, essentiellement la notion de contact et de connexité, souvent indissociable d'une théorie de l'inclusion spatiale ; ensuite les problèmes d'orientation : alignements d'objets, projections, positionnement qualitatif de plusieurs objets ; la distance entre objets d'un point de vue cognitif est aussi l'objet de recherches à part ; finalement la modélisation de la forme : convexité, courbures, tailles d'objets. Deux articles (Cohn, 1996; Vieu, 1997) présentent de façon plus détaillée ces différents aspects du raisonnement spatial d'un point de vue qualitatif, et nous n'allons pas insister sur tous les points souhaitables d'une théorie spatiale exhaustive vis à vis de toutes les propriétés de sens commun. Ce qui nous intéresse ici est plutôt la question suivante : dans la perspective d'une théorie qui serait non pas seulement spatiale, mais spatio-temporelle, quelle est la structure de base minimum qui doit être considérée pour pouvoir prétendre avoir formalisé des propriétés proprement spatiales et permettre l'incorporation des autres aspects à un stade ultérieur ? Il faut noter à ce stade que les aspects de l'espace mentionnés plus haut ne sont pas tout à fait indépendants ; la forme peut servir de base pour définir certains aspects de l'orientation des objets (Cohn, 1995; Borgo *et al.*, 1996) et réciproquement la combinaison de l'orientation et de la distance peut servir à retrouver les caractéristiques couvertes par le concept de forme. De même, distance et orientation ont été combinées par (Hernández, 1994; Frank, 1992; Freksa et Röhrig, 1993) dans ce qui se veut une théorie aboutie de la localisation spatiale. L'orientation peut aussi être définie en termes de distance (Tarski, 1969), et toute distance induit une topologie. Par ailleurs quelques travaux ont tenté la définition sur une même base ontologique (des régions) de propriétés topologiques et liées à l'orientation (Aurnague et Vieu, 1993; Galton, 1994). On peut encore citer des travaux conjoints de modélisation de la distance entre objets reliés à la taille de ces objets (Gerla, 1995; de Laguna, 1922).

Il faut noter qu'il est généralement admis qu'il existe une sorte de hiérarchie entre ces concepts par rapport à leur pouvoir expressif vis à vis des propriétés de l'espace : la topologie étant la structure la plus faible que l'on puisse encore considérer comme spatiale, une géométrie "métrique" étant la structure la plus expressive. Une autre façon d'ordonner ces aspects est d'observer comment ils sont manipulés par l'humain. Les travaux de Piaget sur l'apprentissage des concepts spatiaux et du raisonnement , notamment spatial (Piaget et Inhelder, 1948), cité par (Vieu, 1997), ont montré qu'un enfant maîtrise successivement les notions topologiques, puis les questions d'orientation, et finalement le problème des distances. Vieu y voit une justification d'une séparation de sa géométrie de l'espace en ces trois domaines, construits à partir d'une base topologique sur des régions de l'espace. L'étude du langage naturel montre généralement que ces trois grandes classes de concepts se retrouvent dans la sémantique des prépositions spatiales et des verbes de mouvement, mais généralement de façon interdépendante (Talmy, 1983; Frawley, 1992).

Une conséquence de cette hiérarchisation formelle et cognitive est l'importance des travaux sur la topologie, et un degré de maturité que ne peuvent revendiquer les travaux portant sur l'orientation ou la distance. On désigne par topologie en fait toutes les théories qui traitent de la notion de connexion spatiale, en incluant les questions d'inclusion spatiale (qui pourraient être considérée à part, bien que l'on s'accorde à considérer que l'inclusion seule ne soit pas une notion essentiellement spatiale, cf les sections suivantes). Les théories topologiques de l'espace présente en général les propriétés qualitatives de base que l'on peut espérer, dont une sous-spécification des relations entre régions que l'on peut raffiner au fur et à mesure que l'on obtient plus d'informations. On ne peut en dire autant des théories "qualitatives" de l'orientation ou de la distance. Celles-ci sont généralement des discrétisations de l'espace en régions qui se rapprochent des "quantity spaces" de la physique qualitative, et qui sont donc confrontés au mêmes problèmes expressifs. Leur apport est alors plutôt l'étude systématique des raisonnements que l'on peut faire en combinant des informations de cette nature.

En conclusion il semble que les propriétés topologiques constituent une base incontestable de la structure de l'espace et qu'elles doivent être le minimum d'une théorie spatiale ou spatio-temporelle. Bien que l'on doive prêter attention à l'intégration des questions d'orientation et de distance, il paraît raisonnable de ne pas se fixer comme premier objectif l'étude de ces problèmes pour une théorie du mouvement. Nous allons donc maintenant voir quelles sont les caractéristiques principales des théories topologiques dites qualitatives qui sont courantes en I.A..

3.1.1 Les approches à base de régions

Nous avons déjà mentionné le fait que beaucoup de travaux ont opéré une remise en question des fondements ontologiques de la physique naïve en considérant comme plus efficace le traitement d'objets primitifs directement assimilables aux objets de notre monde de tous les jours, sans passer par l'intermédiaire de points géométriques qui n'ont pas d'existence matérielle. Le besoin qui a émergé après les échecs de la physique qualitative a fait ressurgir une tradition logique et géométrique ancienne qui avait été bâtie sur des fondements ontologiques différents de ceux de la théorie des ensembles. La notion de base sur des régions de l'espace est celle de la relation de partie à tout entre deux régions, ce qui correspondrait à une théorie des ensembles où la seule relation serait l'inclusion entre des ensembles qui seraient tous au même "niveau" (rendant la notion d'ensemble dénuée de sens en fait). Cette théorie est la *méréologie*, développée pour la première fois par l'école polonaise de Lesniewski (Lesniewski, 1927 1931; Lesniewski, 1989). Cette théorie est en fait très faible du point de vue des structures qu'elle caractérise. Pour prétendre capturer des notions que l'on puisse un tant soit peu qualifier de spatiales, il semble (comme nous l'avons déjà remarqué précédemment) que la notion de connexion soit la notion la plus fondamentale que l'on puisse considérer (une notion minimum pour une théorie de l'espace, pourrait-on dire). Pour ce qui est des régions, la notion de connexion a été étudiée par le travail précurseur de Whitehead (Whitehead, 1929), de façon notoirement sous-spécifiée et non rigoureuse (on y trouve notamment une liste de formules dont on ne sait lesquelles sont des axiomes ou des théorèmes). L'intégration de la notion de connexion dans la méréologie a été ensuite à la base de plusieurs systèmes visant à décrire le réel sur la base primitive de régions spatiales servant de référent aux objets matériels, et l'on doit citer, Carnap (Carnap, 1958), Woodger (Woodger, 1937) et Leonard et Goodman (Leonard et Goodman, 1940) qui ont chacun à des degrés divers développé des théories formelles de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler la méréo-topologie. Plus récemment la théorie de Clarke (Clarke, 1981) a développé une version alternative de ces théories et ces travaux ont commencé à inspirer certains chercheurs en I.A. en fournissant une alternative ontologique à la représentation newtonienne qui avait échoué à fournir les résultats escomptés en modélisation du sens commun (il faut noter que la plupart des chercheurs actifs dans ce domaine dans les années 1980 étaient soit ignorants de cette branche de la philosophie analytique concernée par ces notions, soit ne voyaient pas le lien qu'ils pouvaient faire avec leurs propres objectifs). On doit à Randell et Cohn d'avoir jeté un pont entre l'IA "traditionnelle" et les travaux d'inspiration logique de Clarke, leur premier article sur le sujet datant de (Randell *et al.*, 1990). Nous allons présenter les caractéristiques de cette famille de théories qui présentent le point commun de vouloir formaliser les notions spatiales d'inclusion et de connexion, afin de pouvoir décider de celle qui se rapproche le plus de ce que l'on peut souhaiter pour une topologie du mouvement.

3.1.2 La méréologie

On doit à Simons (Simons, 1987) une étude poussée des différentes versions modernes de la méréologie et à Varzi (Varzi, 1996) une présentation quasi-exhaustive des versions les plus récentes des méréologies et méréo-topologies utilisées en IA. Il faut noter que certains travaux en bases de données spatiales ont également proposé des modèles de représentation, orientés vers ces applications, qui recoupent certaines intuitions de ces théories sur des base mathématiquement plus classiques (par exemple (Egenhofer et Franzosa, 1991; Egenhofer, 1991)). Ces théories sont généralement basées sur la théorie des ensembles et une topologie classique à base de points, et sont généralement moins expressives, sans pour autant présenter des propriétés plus intéressantes d'un autre point de vue, et on peut les considérer comme recoupant certains cas présentés ci-dessous ; nous les laisserons donc de côté dans ce qui suit.
La relation primitive la plus souvent choisie des théories méréologiques est la relation de partie à tout entre deux entités, notées P. C'est en fait une relation de pré-ordre ; en effet son axiomatisation de base est :

$$\mathrm{P}xx \tag{P1}$$

$$\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}yx \rightarrow \; x = y \tag{P2}$$

$$(\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}yz) \rightarrow \mathrm{P}xz \tag{P3}$$

La transitivité est parfois discutée dans des contextes non spatiaux de relations de partie à tout (les relations du type de l'exemple suivant : *L'Angleterre fait partie de la CEE*) mais elle est indiscutable si on ne considère que des étendues spatiales (P correspond alors à l'inclusion d'une région de l'espace dans une autre).
On peut sur cette base définir les notions de partie propre (PP) de recouvrement (O, comme *overlap* en anglais), et de recouvrement partiel (PO) :

$$\mathrm{PP}xy \triangleq \mathrm{P}xy \;\wedge\; \neg\mathrm{P}yx$$

$$\mathrm{O}xy \;\triangleq\; \exists z\ (\mathrm{P}zx \wedge \mathrm{P}zy)$$

$$\mathrm{PO}xy \triangleq \mathrm{O}xy \;\wedge\; \neg\mathrm{P}yx \;\wedge\; \neg\mathrm{P}xy$$

Alternativement on peut définir la méréologie en prenant O, PP ou DR ("discrete from") comme primitives [1]. Un autre principe propre à beaucoup de ces théories est le principe de supplémentation :

$$\neg\mathrm{P}xy \rightarrow \; \exists z\ (\mathrm{P}zx \;\wedge\; \neg\mathrm{O}zy) \tag{P4}$$

Il implique l'extensionalité de la relation O (et donc de PP) :

$$\text{P1,P2,P3,P4} \vdash (\forall z(\mathrm{O}xz \leftrightarrow \mathrm{O}yz)) \leftrightarrow x = y$$

1. On définit alors P respectivement par :

$\mathrm{P}xy \triangleq \forall z\ (\mathrm{O}xz \rightarrow \mathrm{O}zy)$

$\mathrm{P}xy \triangleq \mathrm{PP}xy \;\vee\; x = y$

$\mathrm{P}xy \triangleq \forall z\ (\mathrm{DR}yz \rightarrow \mathrm{DR}xz)$

C'est à dire que toutes les entités qui recouvrent les mêmes entités sont égales. Ce principe est remis en cause par certaines méréo-topologies (voir section suivante) et l'axiome de supplémentation n'est donc pas universellement admis.

On parle de conditions de "fermeture" de la méréologie quand les entités suivantes sont définies dans la théorie. Ces axiomes affirment l'existence de la somme d'entités, de leur intersection quand elle existe, de la différence de deux entités et d'un individu universel qui comprend tous les autres :

P5 : $(\exists z\ (\mathrm{P}xz \wedge \mathrm{P}yz)) \rightarrow\ (\exists u \forall v (\mathrm{O}vu \leftrightarrow (\mathrm{O}vx \vee \mathrm{O}vy)))$ (somme, notée $+$)

P6 : $\mathrm{O}xy \rightarrow\ \exists z \forall w (\mathrm{P}wz \leftrightarrow (\mathrm{P}wx \wedge \mathrm{P}wy))$ (intersection, notée $\cdot$)

P7 : $(\exists z (\mathrm{P}zx\ \wedge\ \neg \mathrm{O}zy)) \rightarrow\ (\exists u \forall w (\mathrm{P}wu \leftrightarrow (\mathrm{P}wx\ \wedge\ \neg \mathrm{O}wy)))$ (différence, notée $-$)

P8 : $\exists z\ \forall x \mathrm{P}xz$ (existence de l'univers, noté a)

On peut alors définir le complément comme :

$-x \triangleq a - x$ dans le cas où sont admis P8 et P7.

La plupart des méréologies [2] refusent l'équivalent de l'ensemble vide qui serait un individu nul vérifiant :

$$\exists z \forall x \mathrm{P}zx \qquad \text{(P9)}$$

En effet celui-ci est en opposition avec le refus d'entités abstraites qui caractérise la plupart de ces approches (le nominalisme étant une des raisons d'être de la méréologie, cf (Goodman, 1977)), et donc par exemple l'intersection de deux entités n'existe que si ces deux entités se recouvrent.
Généralisant les opérateurs précédents, certaines théories admettent cependant un principe de fusion généralisée (historiquement, il précède l'introduction des opérateurs précédents, qui en sont des cas particuliers) :

$$(\exists x \phi(x)) \rightarrow\ \exists z \forall y (\mathrm{O}yz \leftrightarrow \exists x (\mathrm{O}xy\ \wedge\ \phi(x))) \qquad \text{(P10)}$$

qui introduit un z qui est constitué de toutes les entités qui vérifient une propriété ϕ vérifiée par au moins une entité (x est libre dans ϕ, mais pas y et z) ; par exemple, en notant $\sigma x \phi(x)$ l'entité z dont l'existence est ainsi affirmée, on a :

P1-P4, P10 $\vdash u + v = \sigma x (\mathrm{P}xu \vee \mathrm{P}xv)$

Soit : la somme de deux entités est la fusion de leur parties. De plus P1-P4 et P10 impliquent P5-P8.

Nous avons vu ainsi les caractéristiques principales des théories méréologiques qui à ce stade n'ont pas une interprétation nécessairement spatiale. Il faut plutôt les voir comme une théorie générale, alternative à la théorie des ensembles, et qui sert donc à modéliser des propriétés abstraites sur des entités de même niveau ontologique. C'est par l'ajout de notions topologiques sur cette base que la plupart des auteurs commencent à parler de théories "spatiales". Dans la mesure où nous nous intéressons à la

2. A l'exception de (Martin, 1965; Bunge, 1966), cités par (Varzi, 1996).

combinaison méréologie et topologie, nous ne sommes pas entrés dans le détail des systèmes méréologiques et de leurs paternités. Pour une étude complète l'ouvrage de référence reste (Simons, 1987). Nous verrons, dans la section suivante, lesquels des principes précédents ont été repris, et par quels auteurs, pour former des méréo-topologies différentes.

3.1.3 Méréologie et topologie

Concepts topologiques

Nous avons affirmé plus haut l'aspect fondamental de la topologie pour une théorie de l'espace ; nous allons maintenant voir comment on peut formaliser ce concept d'un point de vue qualitatif. En mathématiques standard, une topologie est une structure de la forme $\mathcal{T} = \langle E, T \rangle$, où T est un ensemble de sous-ensembles de E, appelés les *ouverts* de la topologie $\mathcal{T}$, ces sous-ensembles vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall O_1 \in T \;\; \forall O_2 \in T \;\; (O_1 \cap O_2 \in T)$
L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

$\forall U \subseteq T \;\; (\bigcup_{O \in U} O) \in T$
L'union quelconque d'ouverts est un ouvert.

$E \in T$ et $\emptyset \in T$

Dans la topologie classique, la notion d'ouvert permet de définir la connexité d'une région en disant que x est connexe ssi il n'existe pas deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x = O_1 \cup O_2$.
Le type de propriétés topologiques que nous considérons ici est en fait l'équivalent de cette connexité dans un cadre où les entités primitives sont des régions, considérées dans un cadre méréologique. Par rapport à la méréologie, la topologie caractérise la notion de "tout" fait d'un seul morceau, une notion qu'on ne peut exprimer en méréologie pure, malgré la tentative de Whitehead (Whitehead, 1920). Celui-ci a défini une notion de "jointure" de deux entités, censée capturer la relation de deux entités connectées :

$$\mathrm{J}xy \triangleq \exists z\, (Oxz \;\wedge\; Oyz \;\wedge\; \forall u\, (Puz \rightarrow\; Oux \;\vee\; Ouy))$$

Ceci exprime que pour deux entités "jointes", il en existe une troisième qui les recouvrent toutes les deux et qui fait partie de la somme. Mais cette notion n'excluant pas les entités z qui peuvent être déconnectées, elle ne correspond pas à la connection : par exemple en considérant deux objets déconnectés x et y, la somme z de deux parties quelconques respectivement de x et y (donc déconnectée) vérifie la condition de la définition ci-dessus.
Il y a alors plusieurs façons d'introduire les concepts topologiques : la première est en introduisant, en plus de P, une primitive de connexion ayant au moins les propriétés suivantes.

$$\mathrm{C}xx \tag{C1}$$

$$\mathrm{C}xy \rightarrow \mathrm{C}yx \tag{C2}$$

$$\mathrm{P}xy \rightarrow\; \forall z(\mathrm{C}zx \rightarrow \mathrm{C}zy) \tag{C3}$$

Une solution alternative est de n'avoir que C comme primitive, en remplaçant (C3) par :

$$\forall x \forall y (\forall z (\mathrm{C}xz \leftrightarrow \mathrm{C}yz)) \rightarrow \ x = y \tag{C4}$$

Dans tous les cas, on peut alors définir les notions suivantes :

$$\mathrm{EC}xy \triangleq \mathrm{C}xy \ \wedge \ \neg \mathrm{O}xy \qquad \text{(connexion externe).}$$

$$\mathrm{TP}xy \triangleq \mathrm{P}xy \ \wedge \ \exists z \ (\mathrm{EC}zx \wedge \mathrm{EC}zy) \qquad \text{(partie tangentielle)}$$

$$\mathrm{NTP}xy \triangleq \mathrm{P}xy \ \wedge \ \neg \mathrm{TP}xy \qquad \text{(partie non tangentielle)}$$

L'ensemble des axiomes P1-P8 et C1-C3 caractérise par exemple la méréo-topologie de (Casati et Varzi, 1994). Les axiomes C1, C2 et C4 forment la base des méréo-topologies de (Clarke, 1981; Randell *et al.*, 1992; Asher et Vieu, 1995).
Dans cette dernière optique (C comme seule primitive) la relation P est définie comme suit :

$$\mathrm{P}xy \triangleq \forall z (\mathrm{C}xz \rightarrow \mathrm{C}yz)$$

La partie non tangentielle (NTP), aussi nommée "partie interne" (IP) par (Smith, 1996; Varzi, 1996), peut aussi servir de base à une méréo-topologie. Une autre alternative encore est celle de(Borgo *et al.*, 1996) ; à partir d'un prédicat exprimant qu'une région est connexe (SRx pour *simple region*, interprétée comme "l'intérieur de x est connexe"), la connexion particulière SC (*strong connection*) est alors définie par[3] :

$$\mathrm{SC}xy \triangleq \exists u \exists v \ (\mathrm{P}ux \wedge \mathrm{P}vy \wedge \mathrm{SR}(u + v)).$$

On peut aussi définir dans tous les formalismes de façon évidente les relations NTPP (partie propre non tangentielle) et TPP (partie propre tangentielle), et leurs relations inverses notées NTPPI (ou NTPP^{-1}) et TPPI (ou TPP^{-1}). Les huit relations DC, EC, PO, NTPP, TPP, NTPP^{-1}, TPP^{-1} et l'égalité forment un ensemble de relations exhaustives (entre deux régions une de ces relations est vérifiée) et incompatibles entre elles (voir figure 3.1 pour une illustration de ces relations dans le cas d'un espace 2D).
On peut aussi redéfinir les opérateurs méréologiques à partir de la connection, quand on adopte (C4) :

$$x + y \ \triangleq \iota z \forall w \ (\mathrm{C}wz \leftrightarrow (\mathrm{C}wx \vee \mathrm{C}wy))$$

$$x - y \ \triangleq \iota z \forall w \ (\mathrm{P}wz \leftrightarrow (\mathrm{P}wx \ \wedge \ \neg \mathrm{C}wy))$$

$$-x \ \triangleq \iota z \forall w \ (\mathrm{P}wz \leftrightarrow \neg \mathrm{C}wy)$$

Et avoir des axiomes d'existence de ces entités analogues à P5-P8 :

$$\text{(C5) :} \forall x \forall y \exists z \ \forall w \ (\mathrm{C}wz \leftrightarrow (\mathrm{C}wx \vee \mathrm{C}wy)) \qquad \text{(somme)}$$

$$\text{(C6) : } \mathrm{O}xy \rightarrow \exists z \ \forall w (\mathrm{C}wz \leftrightarrow \exists v \ (\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}vy \wedge \mathrm{C}vw)) \qquad \text{(intersection)}$$

$$\text{(C7) : } \forall x \exists y \ \neg \mathrm{C}yx \rightarrow \exists z \ \forall w (\mathrm{C}wz \leftrightarrow \exists v \ (\neg \mathrm{C}vx \ \wedge \ \mathrm{C}vw)) \qquad \text{(complément)}$$

3. Cette connexion est en fait différente de C, car elle correspond intuitivement à une connection par plus d'un "point", en fait le contact (la connexion externe) se fait suivant une entité de dimension n-1 dans un espace de dimension n. Par exemple en 3D elle correspond au contact par une surface.

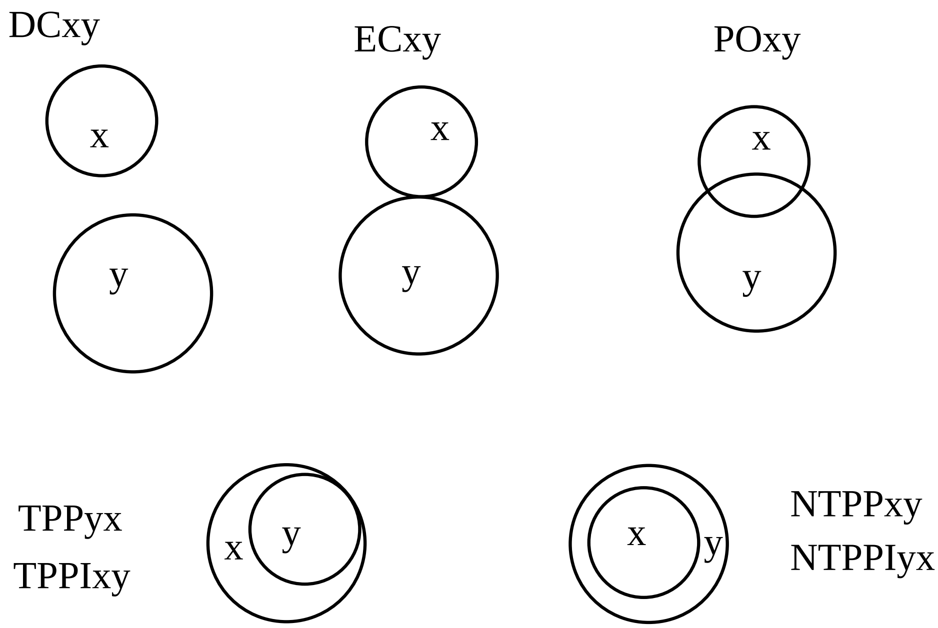

FIG. 3.1 - *Une interprétation 2D des relations méréotopologiques*

(C8) : $\exists x\ \forall z\ \ \mathrm{C}zx$ (univers)

La différence peut se définir par :

$x - y \triangleq x \cdot (-y)$

Les théories de (Clarke, 1981; Asher et Vieu, 1995) comprennent par exemple les axiomes C1-2, C4, C5-C8. Cette définition du complément a pour conséquence notable le théorème suivant :

C1,C2,C4,C7$\vdash\ \forall x \neg \mathrm{C}x(-x)$

Pour avoir une définition de la connexité qui ait un sens il faut donc la formuler ainsi :

$\mathrm{CON}(x) \triangleq \forall x_1\ \forall x_2\ (x = x_1 + x_2 \rightarrow \mathrm{C}(cx_1)(cx_2))$

La théorie de (Randell *et al.*, 1992) comprend les axiomes C1-2, C4, C5-6, C8, et définit autrement le complément pour avoir C$x(-x)$ (voir ci-dessous).

Toute théorie topologique est caractérisée par essence par un ensemble d'ouverts (ou de fermés) dotés des propriétés suivantes, reformulées ici dans un contexte méréologique (notamment on prend la notation courante OP(x) pour signifier que x est ouvert et CL(x) pour les fermés et on désigne l'intérieur de x par $i(x)$ ou ix et la fermeture par $c(x)$ ou cx plutôt que la notation habituelle en théorie ensembliste $\mathring{x}$ et $\overline{x}$) : L'intersection de deux ouverts est un ouvert, si elle existe puisqu'il n'y a pas d'individu nul , et la fusion quelconque d'ouverts est un ouvert (Varzi, 1996) :

$(\mathrm{OP}(y) \wedge \mathrm{OP}(x)) \rightarrow\ (z = x \cdot y \rightarrow \mathrm{OP}(z))$ (C9)

$$\forall x(\phi(x) \rightarrow \text{OP}(x)) \rightarrow \text{OP}(\sigma x\phi(x)) \tag{C10}$$

On pourrait poser des axiomes équivalents avec les fermés, en posant ensuite que $\text{OP}(x) \triangleq \text{CL}(-x)$: la somme finie de fermés est un fermé et l'intersection quelconque de fermés est un fermé (quand elle existe).
On peut en fait définir ces notions à partir des relations déjà introduites en définissant

$\text{OP}(x) \triangleq x = ix$ avec $ix \triangleq \sigma z(\text{NTP}zx)$ (intérieur de x).

$\text{CL}(x) \triangleq x = cx$ avec $cx \triangleq -i(-x)$.

Les axiomes C9 et C10 ou leurs contreparties avec la clôture permettent alors de retrouver l'axiomatisation classique de Kuratowski de la topologie avec une primitive de fermeture. On peut ajouter la notion de frontière comme $bx \triangleq -(ix+i(-x))$. Ces opérateurs peuvent ne correspondre à rien suivant les théories. En effet, l'axiome suivant :

$$\forall x \exists y \ \text{NTP}yx \tag{C11}$$

qui fait partie des théories de (Clarke, 1981; Asher et Vieu, 1995; Randell *et al.*, 1992), affirme l'existence d'un intérieur pour tout élément du domaine, ce qui exclut les frontières. Vieu et Asher affirment en fait l'existence et l'unicité d'une partie non tangentielle maximale qui est donc l'intérieur :

$$\forall x \exists y \ \forall u \ \ (\text{C}uy \leftrightarrow \exists v \ (\text{NTP}vx \wedge \text{C}vu)) \tag{C11'}$$

Ils ajoutent aussi C9 et une condition de fermeture de l'univers :

$$ca = a \tag{C12}$$

qui, ajoutée à leurs autres axiomes, permettent de retrouver les autres propriétés des opérateurs topologiques. Smith et Varzi proposent aussi de définir la topologie et les liens entre une entité et sa frontière en axiomatisant directement la notion de frontière comme suit (Smith et Varzi, 1997) : la relation Bxy se lit "x est une partie de frontière pour y". Ils rejettent donc C11. Ils se basent sur la méréologie formée par P1-P4+P8.

$\text{b}(x) \triangleq \sigma z(\text{B}(z, x))$
(la frontière est la fusion des parties frontières)

$\text{b}(x) = b(-x)$

$\text{b}(\text{b}(x)) = \text{b}(x)$

$\text{b}(x \cdot y) + \text{b}(x + y) = \text{b}(x) + \text{b}(y)$

Et en définissant dans ce cadre la fermeture comme la somme d'une entité et de sa frontière, on peut aussi définir la connection :

$\text{c}(x) = x + \text{b}(x)$

$\text{C}xy \triangleq \text{O}(\text{c}(x), y) \vee \text{O}(\text{c}(y), x)$

La place des frontières

Une conséquence très controversée des axiomatisation de la méréotopologie avec C4 et C11 est la disparition des frontières comme éléments du domaine d'étude. Il n'y a pas en effet d'individu frontière et donc il n'y a pas de différence entre un individu et sa fermeture ou son intérieur d'un point de vue méréologique : le principe de supplémentation disparaît et les entités $x - ix$ ou $cx - x$ n'existent pas. Cette caractéristique est en effet l'objet d'un débat d'origine philosophique : les frontières d'objets ont elles une existence propre où ne doivent elles être considérées que comme des entités "parasites" qui dépendent des régions existantes (d'intérieur non nul) ? Parmi ceux qui admettent le côté parasite des frontières, il y a ceux qui préfèrent les garder comme éléments du domaine, quitte à ajouter une relation de dépendance entre entités (une frontière dépend d'une autre entité de dimension supérieure) et ceux qui préfèrent les laisser de côté et faire les distinctions correspondantes en termes de relations de connexion. Pour (Aurnague et Vieu, 1993) les frontières topologiques sont en effet un artefact qui ne correspond pas à la notion de frontière comme on l'entend intuitivement : ces dernières ont bien une existence concrète et correspondent à une portion de matière, et elles doivent donc être définies différemment de la frontière topologique. En fait cela ne correspond pas seulement au rejet de la notion de point sans dimension, mais plus généralement au rejet de supposer l'existence d'entités de dimension inférieure aux régions de l'espace.
Dans la théorie RCC, où la propriété $\forall x\ \mathrm{C}x(-x)$ est forcée par une définition du complément un peu différente :

$$-x \triangleq \iota y\, \forall z((\mathrm{C}zy \leftrightarrow \neg \mathrm{NTPP}zx)\ \wedge\ (\mathrm{O}zy \leftrightarrow \neg \mathrm{P}zx))$$

on a des conséquences un peu différentes pour la nature des frontières. Cette définition a pour conséquence de rendre la théorie non-atomique d'une part, et d'autre part d'avoir pour théorème le principe de supplémentation. En l'absence d'éléments frontières ce principe rend alors extensionnelle la relation d'overlap (deux régions qui recouvrent les mêmes régions sont égales) ce qui implique à son tour d'abandonner les notions d'ouverts et de fermés. L'interprétation standard de la relation de connection dans RCC est alors que deux régions sont connectés si et seulement si leurs clôtures partagent un point. En conclusion, cette axiomatisation de la méréotopologie présente des caractéristiques qui la rendent peut- être un peu trop contrainte dans l'absolu. Dans la pratique, tout dépend évidemment de la tâche que l'on considère. Il est assez naturel de représenter les objets physiques par des régions topologiquement fermées et si on ne raisonne jamais sur leurs compléments, RCC peut rester à l'abri des inconvénients mentionnés plus haut. Nous verrons que la distinction ouvert/fermé joue un rôle important dans les raisonnements présentant des aspects temporels et il est sans doute souhaitable de vouloir la conserver au niveau spatial. Nous y reviendrons quand nous nous pencherons sur les interactions entre temps et espace au chapitre 4. Il faut noter que les arguments des auteurs qui dénient la place centrale de la distinction ouvert/fermé dans le raisonnement topologique la considère comme "non-naturelle" et non intuitive.

Parmi les théories qui poussent jusqu'au bout le choix d'exclure les frontières du domaine de la théorie, la théorie de Asher et Vieu présente quelques caractéristiques supplémentaires. Elle affirme en effet l'existence des entités intersection de deux régions se recouvrant, la somme de deux régions, le complément des régions autre que l'univers, et l'intérieur de toute région. Les auteurs ont montré que la théorie reste cohérente dans ce contexte. Ils définissent par ailleurs une définition de contact faible (WC, comme *weak contact*) entre deux régions : deux régions sont en contact faible si elles ne sont pas connectées mais qu'aucun ouvert contenant l'une des régions ne peut être déconnectée de l'autre (grossièrement cela veut dire qu'elles sont aussi près que possible sans se toucher).

$nx \triangleq \iota y(\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{OP}(y) \ \wedge \ \forall z\ ((\mathrm{P}xz \wedge \mathrm{OP}(z)) \rightarrow \mathrm{P}yz))$
nx, "voisinage" de x est le plus petit ouvert contenant x.

$\mathrm{WC}xy \triangleq \neg\mathrm{C}xy \wedge \mathrm{C}x(cny)$
Le contact faible revient à la connection avec la clôture du voisinage.

Par exemple, trivialement $\forall x\ \mathrm{WC}x(-x)$. Les auteurs ont le souci de régler les problèmes intuitifs liés à la connection topologique en introduisant une deuxième connection qui doit capturer la notion de contact physique entre deux objets distincts, alors que la connection topologique capture la notion d'intégrité physique d'un objet (ma main est en Weak Contact avec mon clavier, alors qu'elle est connectée (C) avec mon bras). Cette distinction recoupe largement ce que Smith (Smith, 1994) ou Varzi (Varzi, 1995) nomment les frontières *fiat* (que l'on pourrait qualifier de conceptuelles) qui existe dans le cas de connection topologique et les frontières *bona fide*, qui correspondent à des contacts faibles où à des frontières d'objets physiques. Malheureusement le seul moyen d'avoir des entités closes en contact faible est d'avoir un modèle discret de l'espace, ce que bien peu d'auteurs sont prêts à accepter (et qui rend peut-être caduque la distinction ouvert/fermé d'une manière différente de RCC). Les auteurs ont prouvé que leur théorie est cohérente et complète par rapport à certaines classes de modèles, mais n'affirme rien quand à l'existence de contacts faibles entre deux fermés. Il nous paraît raisonnable à ce stade de laisser de côté cette notion de contact physique qui nous paraît difficilement réductible à des concepts topologiques.
Le grand avantage de cette théorie cependant est d'être une version de Clarke dont les modèles sont bien caractérisés. Notamment les correspondances que l'on peut faire entre cette théorie et un modèle topologique classique à base de points sera présenté à la section 3.3.2.

Enfin il faut mentionner une approche combinant explicitement des entités de dimension différentes (régions et points) qui a recours à un typage des entités. La connection est alors une relation portant uniquement sur des régions. C'est le cas des travaux de (Eschenbach et Heydrich, 1993) et, d'une manière beaucoup moins bien définie, de (Galton, 1993). L'intérêt principal d'utiliser des régions étant de se dispenser des entités peu intuitives que sont les points, nous laissons un peu de côté ces approches hybrides dont le domaine d'application n'est pas très clair.

Le rôle des atomes et de la granularité

Une propriété qu'on a seulement mentionnée jusqu'ici est liée à la propriété d'atomicité des régions, autrement dit le fait de ne pas être décomposable ; formellement on définit le fait d'être atomique pour une région par :

$At(x) \triangleq \neg\exists y\ \mathrm{PP}yx$

Certaines théories prennent parti en imposant l'une des deux propositions suivantes :

$\forall x \exists y\ \mathrm{PP}yx$ (atomicité)

$\forall x \exists y \ (\mathrm{P}yx \ \wedge \ At(y))$(non-atomicité)

Pour RCC par exemple la non-atomicité est une obligation pour préserver la cohérence de la théorie. La question de l'atomicité est importante si on veut pouvoir considérer une théorie qualitative avec un nombre fini d'éléments : en présence de la donnée de trois régions de base on peut vouloir se restreindre aux seules entités pertinentes en contexte, ce qui topologiquement concerne leurs compléments, leurs sommes, leurs intersections éventuelles et les intérieurs et fermetures. La propriété de non-atomicité introduit un ensemble infini et arbitraire de régions en plus qui va alourdir le raisonnement à un moment ou à un autre. D'une certaine façon cela revient à empêcher tout raisonnement à granularité variable. Au contraire une théorie qui force l'atomicité va bloquer la granularité de la représentation et n'autorise pas de raffinement ultérieur. Une théorie comme celle de Asher et Vieu permet quant à elle de raisonner avec un ensemble d'entités variable et correspondant à un niveau de granularité approprié. Cela les a d'ailleurs conduit à une formalisation de la notion de représentation à granularité variable dans (Asher et Vieu, 1995). L'étude de cette formalisation dépasse le cadre de notre travail, mais il est important de remarquer qu'on veut éviter d'avoir à imposer des contraintes injustifiées pour le niveau d'analyse où l'on se place pour ne pas bloquer des développements ultérieurs. Nous avons là une autre raison d'adopter une théorie proche de celle de Clarke/Vieu pour une théorie topologique de l'espace-temps.

En résumé, une théorie topologique de l'espace ou de l'espace-temps doit se positionner surtout par rapport aux choix suivants :

– la connexion est-elle extensionnelle (a-t-on besoin de deux primitives, P et C par exemple, ou d'une seule, C par exemple) ?

– quelles entités sont admises dans le domaine (par rapport à la dimension, notamment par rapport à la question des frontières) ?

– la théorie admet-elle des atomes ou non ?

3.2 Le temps d'une théorie qualitative

Le chapitre 2 a montré en partie les options de représentation pour le temps et l'espace plus ou moins simultanément. Nous revenons ici plus en détail sur le temps et la notion de changement d'une façon plus générale. Il faut distinguer ontologiquement plusieurs sortes d'entités "temporelles" centrales à toute théorie du changement. Nous avons d'une part des "temps" absolus (instants ponctuels ou intervalles de temps ayant une durée) qui permettent de dater et d'autre part des "états" (situation du monde stable par rapport à une propriété) et des événements (qui provoquent un changement de la situation du monde). Cette distinction est l'analogue de la différence entre espace absolu et objets occupant l'espace.

On peut distinguer alors trois grandes méthodes pour la modélisation du temps et du changement d'un point de vue logique : il existe d'une part une tradition de logique temporelle qui considère des opérateurs temporels au niveau de la logique et le temps est ainsi introduit généralement au moyen d'opérateurs modaux : par exemple l'opérateur F est interprété comme suit : Fp signifie "il existe un moment dans le futur où p est vrai" ; les propriétés de la relation d'accessibilité des mondes dans les modèles de Kripke détermine alors la structure temporelle résultante sur l'ordre sous-jacent.

Un courant assez populaire en planification est par contre de réifier les instants ou les intervalles de temps sur lesquels des propositions logiques sont valides ; c'est le cas du calcul des situations (McCarthy et Hayes, 1969), de la théorie de l'action de (Allen, 1984) et de ses successeurs. Par exemple, le langage utilisé est formé d'expression du type $\mathsf{Holds}(champion(france, coupe\_du\_monde), I_{98})$ pour indiquer que la proposition $champion(france, coupe\_du\_monde)$ est valide sur l'intervalle I_{98}. Cette imbrication d'une logique dans une autre, qui implique une forme de quantification sur des propositions, caractérise aussi les approches du changement de McDermott (McDermott, 1982) et dans une moindre mesure celle du calcul des événements de Kowalski et Sergot (Kowalski et Sergot, 1986), et a été critiquée notamment par (Galton, 1991) pour la complexité qu'elle introduit dans le raisonnement.
Un autre genre d'approche qui évite les reproches faites à l'approche précédemment citée est caractérisée par une réification des entités temporelles en les introduisant comme arguments des prédicats dans une théorie du premier ordre. On peut alors traduire "le but en or a été marqué à la 114e minute par Laurent Blanc" par $marque(LB, but, t)$ où t correspond à l'instant où le but a été marqué. On pourrait aussi introduire des intervalles de temps sur lesquels une proposition est vraie, ou même une réification des événements que l'on veut caractériser, à la façon de Davidson. Dans un article classique (Davidson, 1967) propose en effet de représenter la phrase :

John buttered a toast at midnight with a knife.

Par la formule $buttered(john, toast, e) \wedge at(midnight, e) \wedge with(knife, e)$ ce qui permet d'inférer séparément les caractéristiques de l'événement, par exemple que *John buttered a toast at midnight.* Cette dernière approche à l'avantage d'introduire explicitement des individus ayant une extension temporelle et de rester dans un cadre de logique du premier ordre, et nous nous focaliserons par la suite plus sur ce genre d'approches.
La caractérisation des événements est une source de débat bien au-delà de la communauté I.A., et nous ne prendrons partie que sur les événements décrivant des mouvements dans l'espace. Nous allons donc voir ici dans un premier temps quelles sont propriétés du temps qui nous paraissent nécessaires avant de voir comment on peut représenter le changement d'un point de vue spatial au chapitre suivant.
Comme il existe un grand nombre de théorie temporelles différentes, nous verrons les éléments essentiels que l'on doit prendre en compte dans l'optique d'une théorie du mouvement : choix ontologiques et choix des relations pertinentes, le tout dans une approche en logique du premier ordre. Nous verrons également les ponts qui existent entre les diverses approches, sans rentrer dans les détails. Pour plus de précisions, les articles qui offrent un panorama sur les théories du temps sont nombreux, tant d'un point de vue plutôt logique (Landman, 1991; van Benthem, 1995; van Benthem, 1983) que d'un point de vue I.A. (Galton, 1995a). Les aspects liés à la référence temporelle dans le langage naturel ne seront pas étudiés ici (voir (Bras, 1991; Kamp et Reyle, 1993; Steedman, 1997)) mais il est évident que les liens sont étroits entre les préoccupations des communautés logique, linguistique et IA.

3.2.1 Intervalles et instants

Les débats sur l'ontologie de l'espace et sur le choix des primitives adéquates ont un pendant évident dans le domaine de la représentation du temps. L'opposition entre points et régions correspond quand il s'agit du temps au choix entre *instants* (points temporels) et *périodes* ("régions" temporelles). Il n'est pas question de dire ici quelle est "la" représentation adéquate du temps, mais de présenter les alternatives possibles et de voir comment elles se positionnent vis à vis du sens commun. Les aspects importants sont essentiellement : quelle sorte d'entité est intuitivement primaire dans notre conception du temps ? quelles structures sont les plus appropriées à la représentation des propriétés temporelles ? Il faut noter aussi que la question du choix des entités temporelles a des conséquences computationelles, certaines structures ayant des propriétés calculatoires plus intéressantes que d'autres. Nous avons vu jusqu'ici qu'il paraît plus intéressant de considérer des entités étendues, du moins dans l'espace, et il paraît également approprié de considérer des structures similaires pour le temps dans une perspective de sens commun.

3.2.2 Logiques temporelles d'instants

Pour pouvoir comparer les structures temporelles pour entité étendues dans le temps (événements ou intervalles) nous allons présenter les propriétés courantes des ordres caractérisant diverses théories temporelles à base d'instants. On parlera d'ordre sous-jacent à une représentation d'intervalles en parlant de la structure d'instants isomorphe si l'on considère un intervalle de temps comme un ensemble de points. On verra en fait précisément dans la section suivante 3.3 quels sont les liens que l'on peut faire entre les diverses représentations. Les structures d'instants sont des structures du type $\mathcal{I} = \langle T, < \rangle$ où T est un ensemble d'instants et où $<$ est un ordre partiel (irréflexif, transitif) qui peut avoir les propriétés supplémentaires suivantes :

Linéarité

$$\forall x \forall y \quad (x < y \ \vee \ y < x \ \vee \ y = x)$$

Succession

$$(\forall x \exists y \ \ y < x) \ \wedge \ (\forall x \exists y \ \ x < y)$$ (correspond à l'infinité vers le passé et le futur)

Densité

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \ \exists z \ x < z < y)$$

Ordre Discret

$$\forall x \forall y \ ((x < y \rightarrow \ \exists z (x < z \ \wedge \ \neg \exists u (x < u < z)))$$
$$\wedge \ (x < y \rightarrow \ \exists z (z < y \ \wedge \ \neg \exists u (z < u < y))))$$

Les deux derniers axiomes sont évidemment incompatibles. L'axiome de succession est généralement admis pour toutes les théories de sens commun du temps. Un bon nombre de celles-ci supposent la linéarité de l'ordre sous-jacent, sauf les approches qui considèrent le futur comme indéterminé et modélisable par une structure munie de branches représentant les alternatives possibles à partir d'un point (le calcul des situations est un exemple typique). Nous nous plaçons quant à nous dans une optique où on considère que le temps est linéaire, même si on n'a que des connaissances incomplètes sur les événements qui y prennent place. Il faut noter que la théorie des ordres munis de la linéarité, la succession et la densité d'une part, et les théories des ordres munis de la linéarité, la succession et la discrétion d'autre part sont syntaxiquement complètes (tout ce que l'on peut énoncer dans ces théories est soit un théorème, soit la négation d'un théorème). Un modèle canonique de la première est l'ensemble des rationnels, un modèle canonique de la seconde est l'ensemble des entiers relatifs [4]. Dans la limite des ordres linéaires il faut noter que les réels sont aussi un modèle des ordres denses, mais qu'ils ne sont pas complètement caractérisés par un tel ordre, ni par aucune théorie du premier ordre.

4. cf. (van Benthem, 1983).

3.2.3 Logiques d'intervalles

Quand on passe aux représentations temporelles à base d'intervalles le choix devient bien plus vaste que pour les instants. Nous allons présenter brièvement les propriétés possibles pour l'ordre temporel, en gardant en mémoire ce que nous cherchons à représenter et les conséquences au niveau temporel déjà mentionnées.

Structures basées sur inclusion ou recouvrement

D'après (van Benthem, 1983) une structure d'intervalle est de la forme $\mathcal{T} = \langle I, \sqsubseteq, < \rangle$. Les relations d'inclusion ($\sqsubseteq$) et de précédence peuvent avoir les propriétés suivantes (les noms des axiomes sont repris et traduits de van Benthem) :

Transitivité $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z \rightarrow x \sqsubseteq z$

Réflexivité $x \sqsubseteq x$

Antisymétrie $x \sqsubseteq y \sqsubseteq x \rightarrow x = y$

Liberté1 $(\forall z\ (z \sqsubseteq x \rightarrow z\sigma y)) \rightarrow x \sqsubseteq y$

en définissant le recouvrement temporel comme suit
$x\sigma y \triangleq \exists u\ (u \sqsubseteq x \ \wedge\ u \sqsubseteq y)$

Orientation $\forall x \forall y \exists u\ (x \sqsubseteq u \ \wedge\ y \sqsubseteq u)$

Remarquons que l'inclusion d'intervalles est un cas de méréologie et que les axiomes pour l'inclusion temporelle se rapprochent de ce que l'on peut trouver pour la relation P (cf. section 3.1.2) [5]. On peut donc définir les opérateurs d'union et d'intersection et poser leur existence dans les mêmes cas que pour la méréologie spatiale [6]. De même, on peut se poser la question de l'atomicité ou non des intervalles. Dans notre cas, cela est lié au choix qui aura été fait au niveau spatio-temporel (s'il y a des atomes spatio-temporels, ils seront également temporellement atomique ; et si une entité est temporellement non-atomique, alors elle sera spatio-temporellement non atomique).
La relation de précédence $<$ peut avoir des propriétés analogues à la précédence portant sur des instants : transitivité, irréflexivité, et succession. La linéarité ne peut s'exprimer de façon similaire mais on peut la modifier pour obtenir quelque chose d'analogue. De même la notion de densité doit être revue :

Linéarité* $x < y \ \vee\ y < x \ \vee\ x\sigma y$

5. L'axiome de "liberté" de van Benthem correspond en fait au principe de supplémentation, si on considère sa contraposée :

$$\neg x \sqsubseteq y \rightarrow \exists z\ (z \sqsubseteq x \ \wedge\ \neg z\sigma y)$$

C'est à dire que si pour x et y, x n'est pas inclus dans y, alors il existe un intervalle qui permet de "faire la différence", étant inclus dans x mais n'intersectant pas y.

6. Curieusement, van Benthem considère que l'union doit être l'union convexe des intervalles, alors même que la convexité est posée à part des autres axiomes. En fait il semble partager avec la plupart des représentations ayant cours à l'époque le postulat que les intervalles ne sont manipulables pratiquement que s'ils sont convexes.

Densité* $\forall x \exists y_1 \exists y_2\ (x = y_1 + y_2)$ (avec la définition méréologique de la somme)

Dans l'absolu, la somme est une somme méréologique standard, mais pour le temps elle est souvent remplacé par la fermeture convexe de la somme.
Les liens entre $<$ et $\sqsubseteq$ peuvent maintenant être précisés :

Incompatibilité
$x < y \to \neg x \sigma y$

Monotonie
$(x < y \to \forall u\ (u \sqsubseteq x \to u < y))$ (monotonie gauche)
$(x < y \to \forall u\ (u \sqsubseteq y \to x < u))$ (monotonie droite)

Ordre sur l'union
$(x < y \to \forall z\ (z < y \to x + z < y)) \wedge (y < x \to \forall z\ (y < z \to y < x + z))$

Convexité
$x < y < z \to \forall u\ ((x \sqsubseteq u \wedge z \sqsubseteq u \to y \sqsubseteq u$

Liberté2
$(\neg x < y) \to \exists u \exists v\ (u \sqsubseteq x \wedge v \sqsubseteq y \wedge (\forall z \forall w((z \sqsubseteq u \wedge w \sqsubseteq v) \to \neg z < w)))$

La convexité a été longtemps une propriété supposée nécessaire à une théorie temporelle, avant que l'on commence à l'abandonner pour modéliser des entités plus générales (cf section 3.2.3). Le dernier axiome exprime que deux intervalles qui ne se précédent pas l'un l'autre peuvent avoir des sous-intervalles qui se précédent mais qu'ils doivent avoir des sous-intervalles qui n'ont plus cette propriété. Les axiomes de "liberté" sont appelés axiomes "témoins" (witness) par Landman (Landman, 1991), car ils affirment l'existence d'intervalles qui permettent de faire le liens entre une structure d'intervalle et une structure de points correspondantes à un ordre sous-jacent (cf section 3.3).
Il faut enfin noter que des axiomatisations presque équivalentes (à l'exception de la convexité des périodes temporelles) peuvent être obtenues à partir de la relation de recouvrement et de celle de précédence, en posant (cf (Kamp, 1979; Aurnague et Vieu, 1993))

Symétrie de σ :	$x \sigma y \to y \sigma x$	
Réflexivité de σ :	$x \sigma x$	
Incompatibilité :	$x < y \to \neg x \sigma y$	
Transfert :	$(x < y \wedge y \sigma z \wedge z < t) \to x < t$	
Linéarité :	$x < y \vee x \sigma y \vee y < x$	(seulement chez Kamp)
L'inclusion :	$x \sqsubseteq y \triangleq \forall z\ ((z \sigma x \to z \sigma y) \wedge (z < y \to z < x) \wedge (y < z \to x < z))$	

Cette axiomatisation retrouve alors pour l'inclusion les propriétés d'ordre partiel et de monotonie.

Structures de Allen

Les structures du temps de Allen (Allen, 1983; Allen et Hayes, 1985; Allen et Ferguson, 1994) sont des théories de sens commun très populaires en IA et ont été développées dans l'ignorance de la tradition logique des logiques d'intervalles (comme l'a noté Galton, elles sont à rapprocher de la logique

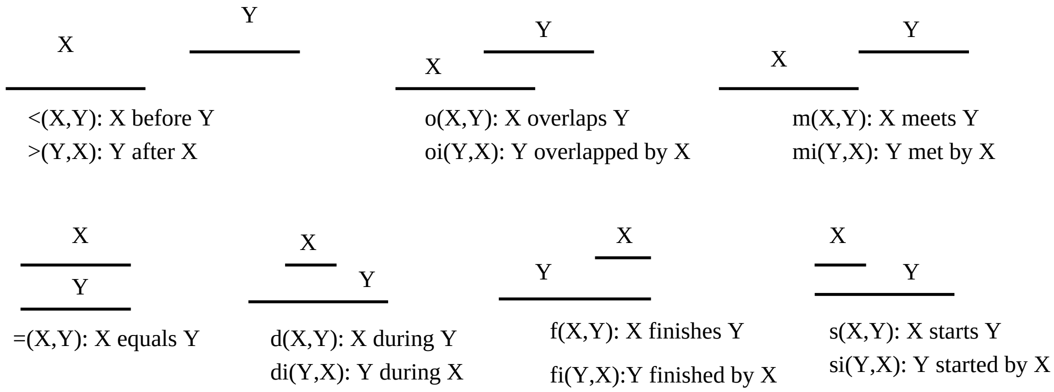

FIG. 3.2 - *Les relations de Allen pour le temps.*

de (Hamblin, 1971)). Ce calcul d'intervalles a pour origine la nécessité de raisonner sur des processus ayant une certaine durée, ce qui n'était pas permis par les théories de l'action de l'époque en I.A. (le calcul des situations ou les formalismes dédiés à la planification comme STRIPS). Dans cette optique Allen ne considère que des intervalles et ignore les instants comme étrangers au sens commun (cette opinion se nuancera par la suite dans (Allen et Hayes, 1989)). Toutes les relations intuitives souhaitables pour pouvoir parler d'ordre temporel sont dérivées d'une unique primitive "meets" qui exprime que deux intervalles se touchent sans se recouvrir. Cette relation est axiomatisée comme suit (nous citons les axiomes de (Allen et Ferguson, 1994), en notant $x||y$ pour $meets(x,y)$ et $x||y||z$ pour $meets(x,y) \;\wedge\; meets(y,z)$) :

- $(x||y \;\wedge\; x||z \;\wedge\; t||y) \rightarrow \; t||z$
  Les intervalles définissent une classe d'équivalence des intervalles qui les rencontrent.

- $[\forall x \forall z (x||y||z \;\wedge\; x||u||z)] \rightarrow \; u = y$
  Deux intervalles qui rencontrent les mêmes intervalles sont égaux.

- $\forall x \exists y \exists z \; (x||y \;\wedge\; z||x)$
  Le temps est infini et les intervalles sont finis.

- $x||y||z||t \rightarrow \; \exists u \; (x||u||t)$
  Ceci introduit des intervalles "sommes" de deux intervalles y et z qui se rencontrent.

- $(x||y \;\wedge\; u||v) \rightarrow \; (x||v \oplus \exists z \; (x||z||v) \oplus \exists z \; (u||z||y))$
  Cet axiome exprime la linéarité de l'ordre sous-jacent : pour deux paires d'intervalles qui se rencontrent, soit le "point" de rencontre est le même, soit il existe un intervalle entre ces deux points de rencontre (et l'un de ces points est avant l'autre).

A partir de là, il est possible de définir un ensemble exhaustif de relations entre des intervalles convexes, qui sont illustrées figure 3.2. Cet ensemble de relations constitue un "standard" en I.A., et est utilisé dans de nombreux domaines (traitement du temps en langage naturel, planification, raisonnements temporels divers). La complexité du raisonnement sur l'ensemble des 13 relations (qui forme une algèbre) a été étudié de façon intense (Ligozat, 1990; Ladkin, 1987) et ce modèle est un bon point de comparaison pour tout formalisme temporel. Sa caractéristique principale par rapport aux logiques temporelles présentées précédemment est (en dehors de son économie de primitives) l'indétermination par rapport à la densité. Cette théorie est en effet incomplète, et c'est pour cela que les raisonnements automatiques sur cette base sont restreints à quelques types d'inférences, comme la cohérence d'un ensemble de relations, ou la composition limitée de relations de base. Cette théorie est aussi la base d'une théorie plus générale de l'action et du changement très utilisé, mais également soumis à de nombreuses critiques, qui ont conduit leurs auteurs à ajouter la notion d'instant à la notion de période temporelle.

Structures hybrides

Certains auteurs ont en effet noté certains inconvénients du modèle de Allen. En premier lieu, l'impossibilité de représenter des événements "instantanés" (un choc par exemple) qui semblent constituer une partie importante des événements physiques que nous pouvons observer. L'expression des actions via des intervalles de Allen les forcent en effet à prendre un certain temps, et ne peuvent exprimer un état de transition entre intervalles. L'objectif avoué des auteurs est justement de ne pas avoir à décider des valeurs de vérité de propositions au moment de la transition entre deux états. Parmi les auteurs qui ont critiqué la théorie vis à vis de ces situations, on peut noter (Vila, 1994; Ma *et al.*, 1994; Galton, 1990), et leur proposition a été alors d'incorporer des instants aux intervalles, et de définir une théorie de l'action hybride. Dans (Allen et Hayes, 1989), Allen et Hayes proposent de représenter certains événements par des intervalles indivisibles qui correspondraient à de tels événements instantanés. Cette façon de faire paraît assez peu intuitive dans certains cas ; prenons l'exemple suivant, adapté d'un exemple de Galton : on considère une balle lancée en l'air, et qui touche un plafond avant de redescendre. On peut représenter la situation on disant que la balle monte sur un intervalle I_1, descend sur un intervalle I_2 et que les deux sont en relation $meet$, mais alors on perd l'information que la balle touche le plafond. Et il paraît assez peu intuitif de dire que la balle touche le plafond pendant un intervalle de temps, même indivisible. Ce qui est en jeu ici, c'est une conception *continue* des phénomènes physiques. Galton prend aussi un autre exemple : si on admet que les objets en mouvement occupent des positions dans l'espace, on ne peut pas affirmer que les objets occupent ces positions successives sur des intervalles de temps. Soit on rejette la notion de position instantanée, soit on admet que ces positions sont occupées pendant un instant.

Intervalles et connexité

Un autre point important pour la représentation de situations spatio-temporelles est le problème de la connexité des entités que l'on considère. Au niveau spatial on a vu qu'il y avait peu de raisons de se restreindre à des régions de l'espace connexe, si ce n'est pour des raisons d'efficacité de calcul dans certains cas particuliers. La plupart des modèles temporels portant sur des intervalles fait cependant l'hypothèse de convexité, ce qui dans le cas du temps revient à la connexité. L'ensemble des treize relations de Allen notamment, n'est exhaustif que pour des intervalles convexes. Cette restriction a été levée par de nombreux travaux qui s'attachent à la modélisation de phénomènes essentiellement éparpillés d'un point de vue temporel, soit des processus informatiques (dont on veut synchroniser l'alternance, cf (Ladkin, 1987)), soit des phénomènes itératifs tels que l'on peut en trouver en langage naturel, comme *Davidson se beurre une tartine tous les soirs à minuit*, cf par exemple (Pianesi et Varzi, 1996), soit des processus non continus, comme la lecture d'une thèse. On peut alors exprimer une foule de relations entre événements non convexes (cf. (Ladkin, 1987) pour une typologie) et certaines propriétés computationelles ont été étudiées sur quelques classes de relations (Ligozat, 1990; Ligozat, 1991), (Morris et Al-Khatib, 1991). Il est important pour nous de considérer les structures les plus générales du point de vue de l'expressivité, et la non-convexité temporelle paraît un élément indispensable à un modèle de l'espace-temps à partir du moment où les entités ne sont pas forcément connexes spatialement. Il reste alors la question du genre de précision que l'on peut souhaiter dans l'axiomatisation.

Autres propriétés liées aux événements et aux intervalles

Parmi les propriétés associées à des intervalles ou à des événements, certains travaux se préoccupent de l'incorporation d'informations sur les durées des intervalles. De même que nous laissons de côté les aspects métriques au niveau spatial, la métrique temporelle dépasse les objectifs que l'on s'est fixé ici.
Par ailleurs, les travaux sur l'action se préoccupent beaucoup des liens entre événements comme la causalité, qui permet des inférences sur des situations où le simple ordonnancement dans le temps est insuffisant à expliquer l'évolution du système étudié. Ceci dépasse notre cadre également, bien qu'il nous faille citer dans cette optique les travaux de Pianesi et Varzi (Pianesi et Varzi, 1996) dans lesquels ce lien de causalité est introduit par une relation de connexion similaire à celle de la méréo-topologie. Les auteurs isolent alors des "diviseurs", des événements qui séparent topologiquement l'espace des événements en deux, et qui servent ensuite à orienter cet espace pour définir un futur et un passé et donc un ordre temporel. Nous signalons ces travaux car c'est la seule exception que nous avons relevée à la modélisation de l'ordre temporel par une relation primitive d'ordre. De plus on pourrait réinterpréter la connexion causale comme une connexion spatio-temporelle et s'approcher d'une méréologie de l'espace-temps ; il nous semble cependant que l'intérêt d'une construction à partir d'une classe d'événements particuliers donnés *a priori* n'est pas évident par rapport à la simplicité d'une relation d'ordre primitive.

3.3 Liens entre les différentes structures

Nous avons vu rapidement les grandes options que l'on peut prendre quand on cherche à représenter qualitativement le temps et l'espace, et nous avons marqué une certaine préférence pour les structures étendues (régions, intervalles) ; nous allons voir dans cette section quels sont les liens formels que l'on peut faire entre les structures à base de points ou d'instants et les structures de régions ou d'intervalles. Le but de ceci est double :

- D'une part les axiomatisations de structures d'entités étendues sont souvent faites avec en arrière pensée l'équivalence d'une structure sous-jacente d'entités ponctuelles qui forme le modèle de ces structures (ne serait-ce que parce que les structures ponctuelles ont nourri notre éducation mathématique et physique). Expliciter le lien est un moyen d'indiquer les modèles que l'on capture d'une autre façon ; c'est ce que signifient les isomorphismes entre structures montrés par des "théorèmes de représentation" (van Benthem, 1983), que nous allons présenter par la suite.

- D'autre part, si nous avons jusqu'ici placé la discussion du choix des primitives ontologiques sur le terrain de l'expressivité et de la commodité de représentation, les structures ponctuelles ont souvent des propriétés calculatoires plus intéressantes ou au moins mieux étudiées que les structures à base d'entités étendues. Notamment la théorie de Allen retraduite en considérant les points limites des intervalles diminue le nombre de disjonctions présente dans les compositions d'informations temporelles : par exemple si i_1, i_2 et f_1, f_2 sont les instants initiaux et finaux des intervalles I_1, I_2, l'expression $i_1 < i_2 \wedge f_1 < f_2$ correspond à $I_1 meets I_2 \ \vee \ I_1 overlap I_2 \ \vee \ I_1 before I_2$. Il est donc important de montrer comment on peut passer d'un type de représentation à un autre

Pour cela, il existe certaines constructions classiques et d'autres moins classiques. La construction d'entités étendues à partir d'entités ponctuelles est généralement évidente, nous la verrons en premier avant de passer aux constructions moins connues qui font le chemin inverse.

3.3.1 Liens entre instants et intervalles

Des points vers les intervalles

Soit une structure d'instants $\mathcal{I} = \langle T, < \rangle$. La relation $<$ est une relation d'ordre sur T, donc irréflexive et transitive. On peut construire une structure d'intervalles de façon simple à partir de la structure de points : soit I, l'ensemble des ensembles convexes d'instants construits sur T. On définit les deux relations suivantes, $\forall i \in I, \forall j \in I$:

$$i \sqsubseteq j \ \triangleq \ \forall t \ (t \in i \rightarrow \ t \in j)$$
$$i < j \ \triangleq \ \forall t \in i, \ \forall t' \in j \quad t < t'$$

et la structure résultante $\mathcal{T} = \langle \mathcal{I}, \sqsubseteq, < \rangle$ est une structure d'intervalles. On a alors une correspondance entre les propriétés des deux structures, si on se restreint à des intervalles non nuls et convexes ; la relation $<$ entre intervalles est bien un ordre, la relation $\sqsubseteq$ est réflexive, antisymétrique et transitive, et vérifie les propriétés suivantes : incompatibilité avec $<$, existence de l'union et de l'intersection, orientation, liberté et liberté2, atomicité, monotonie, convexité, et ordre sur l'union.

Des intervalles vers les points

La traduction précédente est assez naturelle, alors que le sens inverse l'est beaucoup moins, le point étant plus souvent l'élément primitif de tout système du temps et de l'espace. On doit pourtant à Russell et Wiener (Wiener, 1914; Russell, 1914) la construction de "points" comme ensemble d'intervalles, ceux-ci étant les structures primitives considérées. Russell considère les points comme ensembles d'intervalles convergents (le point est la limite d'une telle suite). Partant de l'idée que le point est une abstraction représentant l'élément minimum d'une représentation on peut considérer qu'un point dans une structure d'intervalles est un élément indécomposable, ce qui peut correspondre à un intervalle atomique par exemple. Pour recouvrir la notion générale même en l'absence d'intervalles atomiques, on peut construire les points comme des ensembles d'intervalles se recouvrant deux à deux comme l'indique la figure 3.3. Dans cet exemple, les points sont définis comme les ensembles d'intervalles joints par les traits pointillés menant à chaque point. La structure utilisée correspondant à ces ensembles d'intervalles est celle d'un *ultra-filtre*. Un filtre $\mathcal{U}$ est un ensemble non vide de parties d'un ensemble $\mathcal{F}$ ayant les propriétés suivantes :

- $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{U} \ \forall \mathcal{B} \in \mathcal{U} \ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathcal{U}$
- $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{U} \ \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \rightarrow \ \mathcal{B} \in \mathcal{U}$ (on a donc $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$).

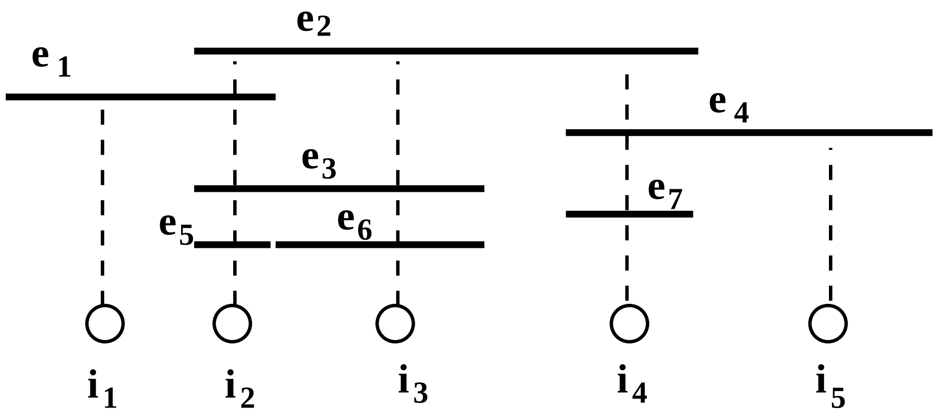

FIG. 3.3 - *La construction de points à partir d'intervalles*

Un ultra-filtre ou filtre maximal $\mathcal{U}_1$ est un filtre qui est maximal par rapport aux propriétés ci-dessus :
si $\mathcal{U}_2$ est un filtre et $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ alors $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$

Sur une structure d'intervalles temporels $\mathcal{T} = \langle I, \subseteq, < \rangle$, où σ désigne l'overlap on peut définir des ultra-filtres de la façon suivante :
t est un ultra-filtre si

– $\forall u \in t \ \forall v \in t \quad u \sigma v$ et l'intersection $u \cap v$ appartient à t

– $\forall u \in t \ \ (u \subseteq v \rightarrow \ v \in t)$

– t est maximal

On peut alors définir une relation d'ordre sur les ultra-filtres de la façon suivante :

$$t_1 \prec t_2 \triangleq \exists u \in t_1 \ \exists v \in t_2 \quad u < v$$

Cette relation est en effet trivialement irréflexive et transitive (par la transitivité de $<$). On peut donc construire une structure d'instants $\mathcal{I} = \langle T, \prec \rangle$ où T est l'ensemble des ultra-filtres construits sur $\mathcal{T}$, et $\prec$ la relation défini ci-dessus. Cette dernière hérite de plus de certaines propriétés de $<$; ces liens sont étudiés précisément dans (van Benthem, 1983) et nous ne nous étendrons pas sur toutes les axiomatisations possibles. Il est cependant très important de voir à quelle condition on peut prétendre avoir une structure de points "équivalents" à la structure d'intervalles de départ. Pour cela on voit que l'on peut définir un intervalle comme ensemble des instants construits par ultra-filtres à partir de lui-même. Nous noterons cette opération comme suit :

$$u^* = \{ \ t \mid \ u \in t \ \}$$

Soit T^* l'ensemble des intervalles construits de cette manière à partir des ultra-filtres de T, $\sqsubseteq$ l'inclusion sur T^*, et $<$ un ordre sur les intervalles induits par $\prec$[7] On note alors $\mathcal{T}^* = \langle T^*, \sqsubseteq, < \rangle$ (note :

7. De la même façon qu'au paragraphe "Des points vers les intervalles".

cette construction retourne la définition classique d'un intervalle comme l'ensemble des points qu'il contient en ensemble des points le contenant). On peut parler d'isomorphisme de structure entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$ si les conditions suivantes sont vérifiées (cf. (van Benthem, 1983) ou (Landman, 1991)) :

– la fonction f définie par $f(u) = u^*$ est bijective

– $u < v$ si et seulement si $u^* < v^*$

– $u \subseteq v$ si et seulement si $u^* \sqsubseteq v^*$

Il y a alors effectivement isomorphisme si la structure d'intervalles satisfait les propriétés de monotonicité, de conjonction (l'existence de l'intersection), de convexité, et les axiomes de liberté 1 et 2, pour les relations d'ordre partiel strict $<$ et d'ordre partiel $\subseteq$.

Les points dans la théorie de Allen

Allen et Hayes ont indiqué dans (Allen et Hayes, 1989) une façon de construire une structure de points à partir de leur structure d'intervalle. La construction par ultra-filtre ne peut suffire dans la mesure où l'on veut introduire l'ensemble des lieux de contact entre intervalle mis en relation par la relation $meet$. Les points sont alors définis comme des classes d'équivalence ce paires d'intervalles reliés par la relation $meet$. Si a est un point :

$$\forall \langle i, j\rangle \in a \; \forall k, l \; ((k||j \;\wedge\; i||l) \rightarrow \; \langle k, l\rangle \in a)$$
$$\forall \langle i_1, j_1\rangle \in a \; \forall \langle i_2, j_2\rangle \in a \quad (i_1||j_2 \;\wedge\; i_2||j_1)$$

Cette construction garantit que les points sont des classes d'équivalence grâce à l'unicité des points de rencontre d'intervalles. Cette construction ne considère que les points de contact entre intervalles. Au cas où il existe des chaînes infinies d'intervalles inclus les uns dans les autres cette construction laisse de côté la limite éventuelle d'un telle série, et on ne retrouvera pas une structure de points équivalente (il manquera ce point limite).

3.3.2 Liens entre points et régions de l'espace

De la même façon que les intervalles sont naturellement considérés comme des ensembles d'instants, les régions de l'espace sont facilement considérées comme des ensembles de points spatiaux (c'est l'approche euclidienne classique de la physique, telle qu'on l'a vue au chapitre 1). On peut également définir les points comme des entités du second-ordre à partir de régions de l'espace primitives. Plusieurs méthodes permettent de retrouver une structure ponctuelle à partir de régions, suivant le type de structure que l'on prend au départ. Par exemple, dans la géométrie de Tarski (Tarski, 1969; Tarski, 1972), les points sont définis comme des ensembles de sphères concentriques. Pour les structures spatiales qui nous intéressent ici, la méréologie et la topologie combinées, si on peut remonter à Whitehead (Whitehead, 1929) ou de Laguna (de Laguna, 1922) pour l'idée de la construction, Clarke a le premier proposé une structure combinant les points liés à la connexion et une construction par ultra-filtre. Cette construction comportait cependant une erreur, comme l'ont noté (Biacino et Gerla, 1991; Vieu, 1991). Vieu a corrigé la définition des points dans une telle théorie et nous la verrons par la suite. Cette définition combine en fait les deux types de construction que nous avons vues à propos des structures temporelles : la construction par ultra-filtres et celle par paires d'entités en contact. Par ailleurs, il existe une autre définition d'un point méréo-topologique due à (Eschenbach, 1994), pour qui un point est seulement une entité dépourvue de structure topologique (par opposition aux régions) ; c'est-à-dire qu'un point peut avoir des parties, mais il ne peut recouvrir partiellement une région : il en est une partie ou rien. Cette définition a en fait pour but de modéliser des représentations avec différents niveaux de granularité, un point pouvant être considéré comme une région à un niveau de granularité plus précis, mais pas l'inverse. Cette définition de point ne recouvre donc pas tout à fait ce qui nous intéresse dans cette section, à savoir une représentation à base de points équivalente à une représentation à base de régions.

Les points dans la méréotopologie de Clarke

A la suite de son article "A Calculus of Individuals Based on Connection", Clarke publie dans "Individuals and Points" (Clarke, 1985) une étude des liens entre sa théorie basée sur des régions et une structure de points définis à partir de ces régions. Elle diffère de la construction par ultra-filtre car la relation de connection est différente d'un recouvrement et induit une différence entre les points correspondant d'une part à des connexions externes et d'autre part à des emboîtements classiques de régions se recouvrant partiellement ou non. Sa définition en est la suivante (on a changé sa notation pour l'harmoniser avec le reste de l'exposé), α est un point ($PT(\alpha)$) si et seulement si il vérifie les conditions suivantes (les variables x, y, z... dénotant des régions) :

1. $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow\ (ECxy\ \vee\ (Oxy\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha)))$
2. $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ Pxy) \rightarrow\ y \in \alpha)$
3. $\forall x \forall y\ ((x+y \in \alpha \rightarrow\ (x \in \alpha\ \vee\ y \in \alpha)))$
4. $\alpha \neq \emptyset$

Clarke impose de plus l'existence des points avec l'axiome suivant :

$$\forall x \forall y\ (Cxy \rightarrow\ \exists \alpha (PT(\alpha)\ \wedge\ x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha))$$

L'idée de Clarke était d'introduire, en plus des points construits comme ultra-filtres, les points qui correspondent aux connexions externes (les points de contact en fait entre des régions en connexion externe). En voulant faire une définition unifiée logiquement, il a malheureusement rendu la définition de point inconsistante avec l'existence d'une connexion externe, ce qui ramène sa topologie à une simple méréologie.

Les points dans la méréotopologie de Asher et Vieu

Comme on l'a vu section 3.1.3, la méréotopologie de Asher et Vieu est une version corrigée de la méréotopologie de Clarke, enrichie d'une notion de contact "naturel" définie en termes topologiques. L'axiomatisation de Asher et Vieu permet de retrouver une structure de points isomorphe à la structure sur les régions, par une construction qui corrige celle de Clarke, et dont ils ont fait la preuve (contrairement à leur prédécesseur) de consistance et de complétude. Ils ont en fait distingué, à la suite de (Vieu, 1991) deux sortes de points : ceux introduits par une connexion externe (nommés "points frontières") et ceux introduits par des recouvrements (nommés “points intérieurs”). Leurs définitions respectives sont les suivantes :

Point intérieur α est un point intérieur (IP(α)) si et seulement si :

(a) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow\ (Oxy\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha)))$

(b) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ Pxy) \rightarrow\ y \in \alpha)$

(c) $\alpha \neq \emptyset$

(d) α est maximum par rapport aux conditions précédentes.

Point frontière α est un point frontière (BP(α)) si et seulement si :

(a) $\exists x \exists y\ (x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha\ \wedge\ ECxy)$

(b) $\forall x \forall y\ [(x \in \alpha\ \wedge\ y \in \alpha) \rightarrow\ ((Oxy\ \wedge\ x \cdot y \in \alpha) \vee$
$\exists t \exists z (z \in \alpha\ \wedge\ t \in \alpha\ \wedge\ Pzx\ \wedge\ Pty\ \wedge\ ECzt))]$

(c) $\forall x \forall y\ ((x \in \alpha\ \wedge\ Pxy) \rightarrow\ y \in \alpha)$

(d) α est maximum par rapport aux conditions précédentes.

Et on peut alors faire correspondre à une région l’ensemble des points qui la contiennent. On peut alors induire une topologie sur cette nouvelle structure, qui a les propriétés de la structure de départ (c’est d’ailleurs ainsi que ces auteurs prouvent la complétude sémantique de leur théorie, nous y revenons chapitre 4). Nous illustrons figure 3.4 la correspondance points/régions suivant cette construction : supposons seulement l’existence de deux régions de base x et y, fermées toutes les deux, et telles que $ECxy$, et l’existence du complément de $(x + y)$. Par les divers axiomes de la théorie, il existe aussi les régions $i(x)$, $i(y)$, $x + y$ et les sommes de deux régions ainsi que leurs compléments et leurs fermetures ou intérieurs. Au total on peut donc construire les points suivants (pour simplifier la lecture, on n’indique que les régions qui définissent minimalement chaque point et pas ceux qui contiennent des éléments du point, comme par exemple l’individu universel, qui appartient à tous les points ; ceci rend d’ailleurs compte plus intuitivement de la définition de points, les régions que l’on garde sont en effet celles qui différencient les points entre eux) :
$p_1 = \{-(x + y), ...\}$, et IP(p_1), $p_2 = \{x, c(-(x + y)), ...\}$, et BP$(p_2)$, $p_3 = \{ix, ...\}$, et IP(p_3), $p_4 = \{x, y, ...\}$, et BP(p_4), $p_5 = \{iy, ...\}$, et IP(p_5), $p_6 = \{y, c(-(x + y)), ...\}$, et BP$(p_6)$.
Si on définit x^* et y^* comme l’ensemble des points qui contiennent respectivement x et y, on voit bien, par exemple, que $x^* \cap y^* = \{p_4\}$, ce qui respecte l’interprétation voulue de EC. Il faut noter que nous avons pris un exemple avec un nombre de régions fini pour simplifier ; dans ce cas les points intérieurs correspondent bijectivement aux atomes. La définition du point est cependant plus générale et avec des régions sans atomes, un point intérieur correspond à une suite de régions emboîtées les unes dans les autres, convergeant vers la notion habituelle de point.

Conclusion La question qui se pose à ce stade, est : comment exploiter ces travaux sur l’espace et le temps pour une théorie du mouvement ? Peut-on se contenter de combiner une théorie de l’espace et une théorie du temps ? Quelles sont les interactions à prendre en compte ? Quelles sont les choix dont on dispose pour rendre compte de propriétés spatio-temporelles ? Nous allons voir au chapitre suivant quelques tentatives d’intégrer temps et espace d’un point de vue qualitatif et nous proposerons une théorie particulière de l’espace-temps pour répondre aux insuffisances constatées.

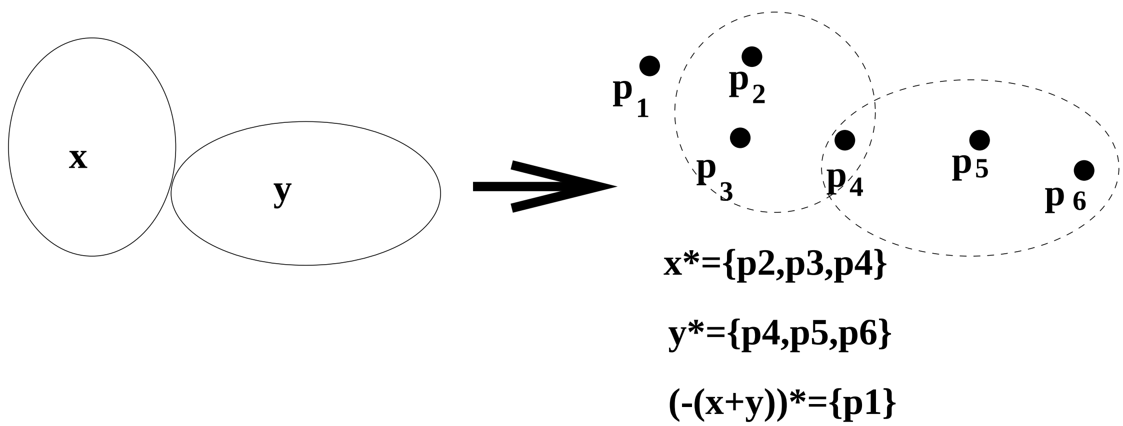

FIG. 3.4 - *La construction de points à partir d'intervalles*