

Annexe A

Démonstrations des théorèmes de ST

A.1 Théorèmes du chapitre 4, section 3.2

La numérotation des théorèmes reprend celle du chapitre 4, préfixé par le numéro de l'annexe.

On montre d'abord les lemmes suivants :

Lemme 1 $x \subseteq_t y \rightarrow x \times x$

Preuve :

- 1 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall u (u \times x \rightarrow u \times y)$ (déf. de \subseteq_t)
- 2 $x \times x$ (Ax. 4.12)
- 3 $x \times y$ (avec (1) et (2)) \square

Lemme 2 $x \sigma y \rightarrow x \times y$

Preuve :

- 1 $x \sigma y \rightarrow \exists z (z \subseteq_t y \wedge z \subseteq_t x)$
- 2 $\forall u (u \times z \rightarrow u \times y)$ (1 et déf. de \subseteq_t)
- 3 $\forall u (u \times z \rightarrow u \times x)$ (1 et déf. de \subseteq_t)
- 4 $z \times z$ (Ax 4.11)
- 5 $z \times x$ (4 et 2)
- 6 $x \times y$ (Ax 4.12, 5 et 3) \square

Th A.3 $x < y \rightarrow \neg x \sigma y$

On montre la contraposée.

Preuve :

- 1 $x \sigma y \rightarrow x \times y$ (Lemme 2)
- 2 $\neg x < y$ (Ax 4.13 et 1) \square

Th A.4 $(x < y \wedge y \sigma z \wedge z < t) \rightarrow x < t$

Preuve :

- 1 $y \sigma z \rightarrow y \times z$ (Lemme 2)
- 2 $(x < y \wedge y \times z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 4.15)
- 3 $(x < y \wedge y \sigma z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (de 1 et 2) \square

Th A.5 $(x < y \wedge y \subseteq_t z \wedge z < t) \rightarrow x < t$

Preuve :

- 1 $y \subseteq_t z \rightarrow y \times z$ (Lemme 1)
- 2 $(x < y \wedge y \times z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 4.15)
- 3 $(x < y \wedge y \subseteq_t z \wedge z < t) \rightarrow x < t$ (de 1 et 2) \square

Th A.6 $(x \subseteq_t y \wedge y \subseteq_t z) \rightarrow x \subseteq_t z$

Preuve :

- 1 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall u (u \times x \rightarrow u \times y)$ (déf de \subseteq_t)
- 2 $y \subseteq_t z \rightarrow \forall u (u \times y \rightarrow u \times z)$ (déf de \subseteq_t)
- 3 $\forall u (u \times x \rightarrow u \times z)$ soit la définition de $x \subseteq_t z$ (de 1 et 2) \square

Th A.7 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall z (z \sigma x \rightarrow z \sigma y)$

Preuve :

- 1 $z \sigma x \rightarrow \exists u (u \subseteq_t x \wedge u \subseteq_t z)$ (déf de σ)
- 2 $(u \subseteq_t x \wedge x \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y$ (Th.)
- 3 $\exists u (u \subseteq_t y \wedge u \subseteq_t z) \rightarrow z \sigma y$ (1, 2 et déf de σ) \square

A.2 Théorèmes de la section 4 du chapitre 4

Th A.10 $Oxy \rightarrow x \sigma y$

Preuve :

- 1 $\exists z (Pzy \wedge Pzx)$ (Oxy)
- 2 $Pzy \rightarrow z \subseteq_t y$ (Ax 4.20 et 1)
- 3 $Pzx \rightarrow z \subseteq_t x$ (1)
- 4 $x \sigma y$ (déf de σ et 2 et 3) \square

Th A.11 $(x < y \wedge Pzx \wedge Pty) \rightarrow z < t$

Preuve :

- 1 $Pzx \rightarrow z \subseteq_t x$ (Ax. 4.20)
- 2 $(x < y \wedge z \subseteq_t x) \rightarrow z < y$ (Ax. 4.16)
- 3 $Pty \rightarrow t \subseteq_t y$ (Ax. 4.20)
- 4 $(z < y \wedge t \subseteq_t y) \rightarrow z < t$ (Ax. 4.16 et 1, 2, 3) \square

Th A.12 $(x \sigma y \wedge Pxz \wedge Pyt) \rightarrow z \sigma t$

Preuve :

- 1 $Pxz \rightarrow x \subseteq_t z$ (Ax. 4.20)
- 2 $Pyt \rightarrow y \subseteq_t t$ (Ax. 4.20)
- 3 $x \sigma y \rightarrow \exists u (u \subseteq_t x \wedge u \subseteq_t y)$ (déf de σ)
- 4 $(u \subseteq_t x \wedge x \subseteq_t z) \rightarrow u \subseteq_t z$ (Ax. 4.6)
- 5 $(u \subseteq_t y \wedge y \subseteq_t t) \rightarrow u \subseteq_t t$ (Ax. 4.6)
- 6 $(x \sigma y \wedge Pxz \wedge Pyt) \rightarrow z \sigma t$ (déf de σ et 1, 2, 3, 4, 5) \square

Th A.13 $(x + y) \sigma z \leftrightarrow x \sigma z \vee y \sigma z$

On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3 $u \subseteq_t (x + y) \rightarrow (u\sigma x \vee u\sigma y)$

Preuve :

- 1 $C(iu)u$ (déf. de l'intérieur)
- 2 $iu \times u$ (1 et ax. 4.19)
- 3 $iu \times (x + y)$ (hypothèse, déf. de \subseteq_t et 2)
- 4 $iu \times x \vee iu \times y$ (3 et ax.4.24)
- 5 $iu \times x \rightarrow u\sigma x$ (ax. 4.25)
- 6 $u \times x \vee u \times y$ (4 et 5) \square

On peut montrer alors le sens direct du théorème visé : Preuve :

- 1 $\exists u (u \subseteq_t (x + y) \wedge u \subseteq_t z)$ (hypothèse et déf de σ)
- 2 $u\sigma x \vee u\sigma y$ (1 et lemme 3)
- 3 $\exists v (v \subseteq_t u \wedge v \subseteq_t x) \vee \exists v (v \subseteq_t u \wedge v \subseteq_t y)$ (déf de σ et 2)
- 4 $(v \subseteq_t u \wedge u \subseteq_t z) \rightarrow v \subseteq_t z$ (th. 4.6)
- 5 $z\sigma x \vee z\sigma y$ (3 et 4) \square

Le sens réciproque du théorème est montré par : Preuve :

- 1 $Px(x + y) \rightarrow x \subseteq_t (x + y)$ (ax. 4.20)
- 2 $x\sigma z \rightarrow \exists u (u \subseteq_t x \wedge u \subseteq_t z)$ (déf de σ)
- 3 $u \subseteq_t (x + y)$ (de 1, 2 et th. 4.6)
- 4 $z\sigma(x + y)$ (de 1 et 2)
- 5 on prouve de même que $y\sigma z \rightarrow z\sigma(x + y)$. \square

Th A.14 $TSxx$

On a Pxx et $\forall z(Pzx \rightarrow Pzx)$ donc par définition de T, $\forall x Txx$.

Th A.15 $(TSxy \wedge TSyx) \rightarrow x = y$

Évident par la définition de T, car $Pxy \wedge Pyx \rightarrow x = y$.

Th A.16 $(TSxy \wedge TSyz) \rightarrow TSxz$

Preuve :

- 1 $TSxy \rightarrow Pxy$ (déf. de TS)
- 2 $TSyz \rightarrow Pyz$ (déf de TS)
- 3 $(Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz$ (transitivité de P)
- 4 $TSxy \rightarrow \forall u ((Puy \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux)$ (déf de TS)
- 5 $TSyz \rightarrow \forall u ((Puz \wedge u \subseteq_t y) \rightarrow Puy)$ (déf de TS)
- 6 $Pxy \rightarrow x \subseteq_t y$ (Ax 4.20)
- 7 $(u \subseteq_t x \wedge x \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y$ (4.6)
- 8 $(Puz \wedge u \subseteq_t y) \rightarrow Puy$ (5)
- 9 $(Puy \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux$ (4)
- 10 $(Puz \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux$ (6, 7, 8, et 9)
- 11 3 et 10 donnent $TSxz$ par définition de TS. \square

Th A.17 $(TSxy \wedge TSzy \wedge x \subseteq_t z) \rightarrow TSxz$

Preuve :

- 1 $TSxy \rightarrow Pxy$

- 2 $(Pxy \wedge x \subseteq_t z \wedge TSzy) \rightarrow Pxz$ (déf. de TS.)
- 3 $TSyz \rightarrow Pzy$ (déf de TS.)
- 4 $(Puz \wedge Pzy) \rightarrow Puy$ (transitivité de P)
- 5 $(Puy \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux$ (TSxy)
- 6 $(Puz \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux$ (4 et 5)
- 7 de 2 et 6 on tire par définition que $TSxz \square$

Th A.18 $\forall x, y(x\sigma y \rightarrow \exists u(TSux \wedge u \subseteq_t y))$

Preuve :

- 1 $x\sigma y \rightarrow \exists z(z \subseteq_t x \wedge z \subseteq_t y)$
- 2 $z \subseteq_t x \rightarrow \exists u(TSux \wedge z \equiv_t u)$ (Ax. 4.26)
- 3 $(z \equiv_t u \wedge z \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y \square$

Th A.19 $Pxy \rightarrow \exists z(TSzy \wedge z \equiv_t x)$

Preuve :

- 1 $Pxy \rightarrow x \subseteq_t y$ (Ax. 4.20)
- 2 $x\sigma y \rightarrow \exists z(TSzy \wedge z \equiv_t x)$ (Ax. 4.26) \square

Th A.20 $(TSxy \wedge TSzy \wedge x \equiv_t z) \rightarrow x = z$

Preuve :

- 1 $\forall u(Puy \wedge u \subseteq_t x) \rightarrow Pux$ (TSxy)
- 2 $TSzy \rightarrow Pzy$
- 3 $x \equiv_t z \rightarrow z \subseteq_t x$ (déf de \equiv_t)
- 4 Pzx (de 1, 2 et 3)
- 5 Les hypothèses étant symétriques par rapport à x et z , on tire de même que Pxz , d'où finalement $x = z$. \square

Th A.21 $TS(f(x), a)$

Preuve :

- 1 $Pf(x)a$ (déf de a)
- 2 $x < f(x)$ (th. 4.9)
- 3 $\forall u(u \subseteq_t f(x) \rightarrow x < u)$ (2 et th. 4.8)
- 4 $\forall u(x < u \rightarrow Puf(x))$ (déf. de $f(x)$)
- 5 $\forall u(Pua \wedge u \subseteq_t f(x) \rightarrow Puf(x))$ (4)
- 6 de 1 et 5 on tire $TS(f(x), a)$ par définition de TS. \square

On montre de façon similaire $TS(p(x), a)$.

Th A.22 $(x \equiv_t y \wedge \exists z(x < z)) \rightarrow f(x) = f(y)$

Preuve :

- 1 $x < f(x)$ (déf de $f(x)$)
- 2 $(x < f(x) \wedge y \subseteq_t x) \rightarrow y < f(x)$ (th. 4.8)
- 3 $y < f(x) \rightarrow Pf(x)f(y)$ (déf. de $f(y)$)
- 4 par symétrie des hypothèses vis à vis de x et y on tire aussi $Pf(x)f(y)$ d'où $f(x) = f(y)$. \square

On a de même $(x \equiv_t y \wedge \exists z(z < x)) \rightarrow p(x) = p(y)$

Th A.24 $BETWyx \rightarrow \exists y'(PMCTy'y \rightarrow \exists x_1 \exists x_2(x = x_1 + x_2 \wedge x_1 < y' < x_2))$

Ce théorème est en fait une réécriture de la définition de BETW.

Lemme 4 $ATx \rightarrow \neg BETWyx$

On montre la contraposée. Preuve :

- 1 $\exists y', x_1, x_2 (x = x_1 + x_2 \wedge x_1 < y' < x_2)$ (déf de BETW et th. 4.25)
- 2 $x_1 < y' < x_2 \rightarrow \neg Cx_1x_2$ (ax. 4.13 et ax. 4.19)
- 3 $\neg(x_1 = x_2)$ (2)
- 4 $(x = x_1 + x_2 \wedge \neg(x_1 = x_2)) \rightarrow \neg ATx$ (déf de AT) \square

Th A.25 $(ATx \wedge ATy) \rightarrow (ORD(x, y) \vee x \equiv_t y)$

On va montrer $(ATx \wedge ATy \wedge \neg ORD(x, y)) \rightarrow x \equiv_t y$.

Preuve :

- 1 $(ATx \wedge ATy \wedge \neg ORD(x, y)) \rightarrow x \not\asymp y$ (lemme précédent et ax. 4.28)
- 2 $ATx \rightarrow ix = x$ (déf. atome et $P(ix)x$)
- 3 $ix \not\asymp y$ (1 et 2)
- 4 $x \sigma y$ (3 et ax. 4.25)
- 5 $\exists u (u \subseteq_t x \wedge u \subseteq_t y)$ (4 et déf. de σ)
- 6 $\exists v_1, v_2 (v_1 = x/u \wedge v_2 = y/u \wedge v_1 \equiv_t v_2)$ (ax. 4.26 et 5)
- 7 $(ATx \wedge ATy) \rightarrow (v_1 = x \wedge v_2 = y)$ (déf. de AT et $P(x/u)x$ et $P(y/u)y$)
- 8 $x \equiv_t y$ (6 et 7) \square

Th A.26 $(CON_t x \wedge CON_t y) \rightarrow (x < y \vee x \asymp y \vee y < x)$

Ce théorème est une conséquence immédiate (par l'axiome 4.28) du lemme suivant dont nous allons prouver la contraposée :

Lemme 5 $CON_t x \rightarrow \neg BETWyx$

Preuve :

- 1
- 2 $\exists y', x_1, x_2 (x = x_1 + x_2 \wedge x_1 < y' < x_2)$ (déf de BETW et th. 4.25)
- 3 $x_1 < y' < x_2 \rightarrow \neg Ccx_1cx_2$ (ax. 4.13 et ax. 4.19)
- 4 $\neg CON_t x$ (déf de CON_t et 3) \square

Th A.27 $\neg f(x) = p(f(x))$

Preuve :

- 1 $\neg f(x) < f(x)$ (th. 4.29)
- 2 $P(\neg f(x), p(f(x)))$ (1 et déf. de $p(f(x))$)
- 3 $p(f(x)) < f(x)$ (déf. de $p()$)
- 4 $p(f(x)) < f(x) \rightarrow \neg f(x) \asymp p(f(x))$ (ax. 4.13)
- 5 $\neg f(x) \asymp p(f(x)) \rightarrow \neg C(f(x), p(f(x)))$ (ax. 4.19)
- 6 $P(p(f(x)), \neg f(x))$ (5 et déf. du complément)
- 7 $\neg f(x) = p(f(x))$ (2 et 6) \square

On montre de même $\neg p(x) = f(p(x))$.

A.3 Tables de composition

On liste d'abord quelques théorèmes intermédiaires utilisés par la suite.

Lemme 6 $(e \subseteq_t e' \wedge e' \subseteq_t x) \rightarrow P(x/e)(x/e')$

Les hypothèses impliquent l'existence des tranches x/e et x/e' , avec $x/e \equiv_t e$ et $x/e' \equiv_t e'$ d'où $x/e \subseteq_t x/e'$ et x/e' étant une tranche de x , par définition d'une tranche on a bien $P(x/e)(x/e')$.

Lemme 7 $(\neg Cuv \wedge Pwu) \rightarrow \neg Cwv$

Par définition de P.

Lemme 8 $(\neg O(x/u)(y/u) \wedge u \subseteq_t v) \rightarrow \neg P(x/v)(y/v)$

Par l'absurde : supposons $P(x/v)(y/v)$. De $u \subseteq_t v$ on a $P(x/u)(x/v)$ d'où par transitivité de P, $P(x/u)(y/v)$. On considère la tranche de y/v correspondant à u , c'est y/u et on a alors $P(x/u)(y/u)$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Lemme 9 $(\text{TEMP_IN}(x/e)(y/e) \wedge e \subseteq_t e') \text{implik} \text{TEMP_IN}(x/e')(y/e')$

A.3.1 Composition mouvement et information temporelle

On compose $\text{Motion}_{e_1}xy$ avec $R_1e_2e_1$ et on cherche $R_2(x/e_2)(y/e_2)$. Pour les relations $<$ et son inverse on ne peut rien déduire, de même que pour MEETS_i dans le cas général. Dans le cas où l'on suppose la continuité des mouvements, on a les relations décrites au chapitre 5 pour MEETS et MEETS_i puisqu'ils correspondent à une suite de deux trajectoires. Pour la relation \equiv_t on ne compose pas d'information puisque $x/e_1 = x/e_2$, mais on a la relation spatio-temporelle induite par la définition de chaque classe (par exemple HIT implique EC). Pour les autres cas, on a suivant le type de relation de mouvement considéré :

External soit $\neg C(x/e_1)(y/e_1)$.

- Les cas de STARTS , DURING , \equiv_t et FINISHES impliquent tous $e_2 \subseteq_t e_1 \subseteq_t x$, d'où $P(x/e_2)(x/e_1)$ (d'après le lemme 6), et avec le lemme 7 appliqué à x/e_1 , y/e_1 et x/e_2 pour u , v et w , on a $\neg C(x/e_2)(y/e_1)$ puis, en l'appliquant à x/e_2 , y/e_1 et y/e_2 pour u , v et w , on a finalement $\neg C(x/e_2)(y/e_2)$.
- Les cas O_t , O_i , FINISHES_i , DURING_i et STARTS_i impliquent tous $\exists u(u \subseteq_t e_1 \wedge u \subseteq_t e_2)$. De là d'après le lemme 7, on a $\neg C(x/u)(y/u)$ Par le lemme 8, on a donc (car $u \subseteq_t e_2$) $\neg P(x/u)(y/e_2)$ et donc $\neg P(x/e_2)(y/e_2)$. Par symétrie on a aussi $\neg P(y/e_2)(x/e_2)$, les deux étant équivalents à :
 $\text{DC}(x/e_2)(y/e_2) \vee \text{EC}(x/e_2)(y/e_2) \vee \text{PO}(x/e_2)(y/e_2)$.

Internal motion $\text{INTERNAL}(e, x, y) \triangleq \text{PP}(x/e)(y/e)$

- Ce cas se ramène au cas externe en échangeant x avec $-x$ (puisque $\text{PP}xy \leftrightarrow \neg C(-x)y$) dans les cas STARTS , DURING , FINISHES et \equiv_t cela donne donc $\neg C(-x/e_2)(y/e_2)$ ce qui est équivalent à $\text{PP}(x/e_2)(y/e_2)$.
- Dans les cas de O_t , O_i , FINISHES_i , STARTS_i et D_i , on a $e_1 \sigma e_2$ soit $\exists u(u \subseteq_t e_1 \wedge u \subseteq_t e_2)$ et donc $P(x/u)(y/u)$, ce qui laisse comme possibilité PO , NTPP , TPP et =.

Leave $\text{LEAVE}(e, x, y) \triangleq \text{TEMP} \in (x/e, y/e) \wedge \text{STARTS}(x/e \cdot y/e, e)$

- Le cas le plus simple: FINISHES_i , STARTS_i , DURING_i , car alors $e_1 \subseteq_t e_2$ et donc $\text{TEMP_IN}(x, y, e_1)$ implique $\text{TEMP_IN}(x, y, e_2)$ et donc $\text{PO}(x/e_2)(y/e_2)$.
- Cas de DURING : toutes les relations sont possibles.
- Cas de O_t et STARTS : dans les deux cas $\exists u (u \subseteq_t e_2 \wedge \text{STARTS}ue_1)$ d'où $\text{O}(x/e_2)(y/e_2)$, soit PO , NTPP , TPP , NTPP^{-1} , TPP^{-1} ou $=$.
- Pour FINISHES et O_i on a dans les deux cas $\exists u (u \subseteq_t e_2 \wedge \text{FINISHES}ue_1)$ d'où $\neg \text{C}(x/u)(y/u)$ et donc d'après le lemme 8 on a $\neg \text{P}(x/e_2)(y/e_2)$ et $\neg \text{P}(y/e_2)(x/e_2)$ et on ne peut avoir que EC , DC ou PO .

Reach $\text{REACH}(e, x, y) \triangleq \text{TEMP_IN}(x/e, y/e) \wedge \text{FINISHES}(x/e \cdot y/e, e)$

Cas symétrique de LEAVE par rapport à l'orientation temporelle, on utilise donc les symétries suivantes par rapport à cette orientation: $\text{FINISHES}/\text{STARTS}$, O_t/O_i , et les résultats sont alors similaires. Les résultats pour STARTS_i , FINISH_i , DURING_i , DURING et \equiv_t ne changent pas (les relations sont symétriques).

Cross $\text{CROSS}(e, x, y) \triangleq \exists e_1, e_2 (\text{MEETS}(e_1, e_2) \wedge \text{REACH}(e_1, x, y) \wedge \text{LEAVE}(e_2, x, y))$

- Pour DURING on ne peut rien déduire.
- Pour O_t et STARTS , puisque CROSS “commence” par un REACH on a les mêmes résultats que pour REACH .
- Pour FINISHES et O_i , puisque CROSS “finit” par un LEAVE on a les mêmes résultats que pour LEAVE .
- Pour FINISHES_i , STARTS_i et DURING_i , on a $e_1 \subseteq_t e_2$ et donc $\text{PO}(x/e_2)(y/e_2)$ comme pour REACH et LEAVE .

Hit $\text{HIT}(e, x, y) \triangleq \text{EC}(x/e)(y/e) \wedge \forall x_1, y_1 [(x_1 \subseteq_t e \wedge y_1 \subseteq_t e \wedge \text{EC}x_1y_1) \rightarrow (\text{FINISHES}(x_1, e) \wedge \text{FINISHES}(y_1, e))]$

- Par définition de HIT , on a immédiatement que la relation résultante dans le cas de FINISHES est EC , et que pour DURING et STARTS le résultat est DC .
- Pour O_t , $\exists u (u \subseteq_t e_2 \wedge \text{STARTS}ue_1)$ et $\text{DC}(x/u)(y/u) \vee \text{EC}(x/u)(y/u)$. D'où $\neg \text{P}(x/e_2)(y/e_2)$ et $\neg \text{P}(y/e_2)(x/e_2)$. Il reste donc EC , DC et PO .
- Pour FINISHES_i , DURING_i , STARTS_i , on a $e_1 \subseteq_t e_2$ et de $\text{EC}(x/e_1)(y/e_1)$ on tire d'une part $\text{C}(x/e_2)(y/e_2)$ et d'autre part $\neg \text{P}(x/e_2)(y/e_2)$ et réciproquement. Il reste donc EC et PO .
- Pour O_i , $\exists u (u \subseteq_t e_2 \wedge \text{FINISHES}ue_1)$ et par définition de HIT , $\text{EC}(x/u)(y/u)$ et donc $\text{C}(x/e_2)(y/e_2)$ et $\neg \text{P}(x/e_2)(y/e_2)$ et réciproquement. Il reste donc EC et PO .

A.3.2 Composition d'un mouvement et d'une information statique

A partir des entrées $\text{R}_1 y/uz/u$ et $\text{Mvt}(u, x, y)$, on peut déduire une relation R_2 telle que $\text{R}_2 x/uz/u$. Les relations R_1 sont des relations purement spatiales, Mvt est une classe de mouvement parmi LEAVE ,

REACH, HIT, CROSS, INTERNAL ou EXTERNAL ; R_2 est une des relations DC, EC, PO, TPP, TPP^{-1} , NTPP, $NTPP^{-1}$ ou l'égalité ou bien une disjonction de ces relations¹. On considère les entrées pour chaque relation purement spatiale :

- DC_{sp}**
- Pour LEAVE, on a $POxy$ et avec $DCyz$ on tire $DC(x \cdot y)z$ et donc $\neg Pxz$. On a aussi $DC(z/(x \cdot y))x$ d'où $\neg Pzx$. Il reste comme possibilité DC, EC ou PO.
 - Pour HIT on peut exclure P (et donc =, TPP et NTPP) par composition de $DC(y/u)(z/u)$ et $EC(x/u)(y/u)$.
 - Pour REACH et CROSS, on a $\exists e \subseteq_t u \ P(x/e)(y/e)$ et donc $\neg C(x/e)(z/e)$, ce qui implique $\neg P(z/u)(x/u)$ et $\neg P(x/u)(z/u)$. Cela exclut donc comme résultat les relations d'égalité, TPP, NTPP, TPP^{-1} et $NTPP^{-1}$.
 - Pour INTERNAL, on a immédiatement $DC(x/u)(z/u)$ de $P(x/u)(y/u)$ et $DC(y/u)(z/u)$.
 - Pour EXTERNAL, on ne peut rien dire.

- EC_{sp}**
- Pour LEAVE, on raisonne comme pour DC_{sp} avec les intérieurs pour trouver $\neg P(ix)(iz)$ et $\neg P(iz)(ix)$. On a donc comme possibilité DC, EC ou PO.
 - Pour HIT on peut exclure NTPP par définition ($NTPPxy \triangleq \neg \exists z(ECzx \wedge ECzy)$).
 - Pour REACH et CROSS, on a $\exists e \subseteq_t u \ P(x/e)(y/e)$ et donc $\neg C(x/e)(z/e)$ ou $EC(x/e)(z/e)$, ce qui implique $\neg P(z/u)(x/u)$ et $\neg P(x/u)(z/u)$. Cela exclut donc comme résultat les relations d'égalité, TPP, NTPP, TPP^{-1} et $NTPP^{-1}$.
 - Pour INTERNAL, on a immédiatement $EC(x/u)(z/u) \vee DC(x/u)(z/u)$ de $P(x/u)(y/u)$ et $DC(y/u)(z/u)$.
 - Pour EXTERNAL, on ne peut rien dire.

- PO_{sp}**
- pour LEAVE, REACH, HIT, CROSS et EXTERNAL, $\exists e \subseteq_t u \ (\neg C(x/e)(y/e))$. Comme $(PO_{sp}y/uz/u \wedge e \subseteq_t u) \rightarrow POy_ez/e$, on a donc $\neg C(x/e)((z \cdot y)/e)$ ce qui implique que $\neg P(z/u)(x/u)$. Cela exclut donc comme résultat les relations d'égalité, TPP^{-1} et $NTPP^{-1}$.
 - pour les autres, toutes les relations sont possibles.

TPP_{sp} et NTPP_{sp} En fait il suffit de considérer ensemble ces relations qui impliquent PP_{sp} :

- pour LEAVE, REACH et CROSS, HIT et INTERNAL, on a $\exists e \subseteq_t u \ P(x/e)(y/e)$ et donc $PP(x/e)(z/e)$. Cela exclut comme résultat possible les relations DC, EC, TPP_{sp}^{-1} $NTPP_{sp}^{-1}$ et =. Pour INTERNAL la relation PO est de plus trivialement impossible.
- Pour EXTERNAL, on ne peut rien exclure.

TPP_{sp}^{-1} et NTPP_{sp}^{-1}}} En fait il suffit de considérer ensemble ces relations qui impliquent PP^{-1} :

- pour LEAVE, REACH et CROSS, HIT et EXTERNAL, on a $\exists e \subseteq_t u \ (\neg C(x/e)(y/e))$. Comme on a $PP(z_e y_e)$, on a aussi $\neg C(x/e)(z/e)$ ce qui implique $\neg P(z/u)(x/u)$ et

1. Pour chaque entrée nous montrons les relations impossibles. Il n'est a priori par exclu que les disjonctions apparaissant dans le tableau ne puissent être réduites, dans la mesure où l'on a pas construit un modèle possible pour chaque cas pour vérifier la cohérence de chaque relation séparément.

- $\neg P(x/u)(z/u)$. Cela exclut donc comme résultat les relations d'égalité, TPP, NTPP, TPP^{-1} et $NTPP^{-1}$. De plus pour EXTERNAL on a en plus $\neg C(z/u)(x/u)$ (soit DC), et pour HIT, on a aussi $\neg PO(x/u)(y/u)$ (car $EC(x/u)(y/u)$).
- Pour INTERNAL, on ne peut rien exclure.

Annexe B

Liste des verbes de déplacement considérés

Polarité I : initial, F : final, M : médian.

Relation de localisation I : interne, C : contact, S : spécifique, N : neutre.

Télicité + : téléique, - : atélique

Transitionnel + : transitionnel, - : non transitionnel.

Verbe	Polarité	Rel. de Loc.	Télicité	Transitionnel
abandonner	I	N	+	+
aborder	F	N	+	+
accoster	F	C	+	+
accrocher	M	C	+	
agripper	F	C	+	+
approcher	M	S	-	+
arpenter	M	I	-	-
atteindre	F	N	+	+
balayer	M	I	+	-
battre	M	I	-	-
brûler	M	S	+	+
cerner	M	S	+	+
contourner	M	S	+	+
courir	M	I	-	-
croiser	M	S	+	+
dépasser	M	S	+	+
descendre	M	S	+	-
désertier	I	I	+	+
desservir	M	S		-

Verbe	Polarité	Rel. de Loc.	Télicité	Transitionnel
dévaler	M	S	+	-
distancer	M	S	+	+
doubler	M	S	+	+
emboutir	F	C	+	+
embrasser	F	C	+	+
emplafonner	F	C	+	+
empoigner	F	C	+	+
emprunter	F	I	+	+
encadrer	F	C	+	+
enfiler	M	I	-	-
enfourcher	M	S	+	+
enjamber	M	S	+	+
enserrer	M	S	+	-
entourer	M	S	+	-
envahir	F	I	+	+
escalader	M	S	+	-
évacuer	I	I	+	+
faucher	M	S	+	+
franchir	M	S	+	+
frapper	F	C	+	+
frôler	M	S	+	-
fuir	M	S	+	-
gagner	M	S	+	-
gratter	M	S	-	-
gravir	M	S	+	-
griller	M	S	+	-
grimper	M	S	+	-
heurter	F	C	+	+
investir	F	I	+	+
lâcher	M	S	+	+
larguer	M	S	+	+
libérer	I	I	+	+
longer	M	S	-	-
monter	M	S	+	-
parcourir	M	I	-	-
passer	M	S	+	+
patrouiller	M	I	-	-
pénétrer	F	I	+	+
percer	F	I	+	+
percuter	F	C	+	+
pourchasser	M	S	-	-
poursuivre	M	S	-	-

Verbe	Polarité	Rel. de Loc.	Télicité	Transitionnel
prendre	M	S	+	-
quadriller	M	I	-	-
quitter	I	S	+	+
rallier	F	S	+	+
raser	M	S	+	-
ratisser	M	I	-	-
rattraper	M	S	+	-
reconnaître	M	I	-	-
redescendre	M	S	+	-
regagner	F	I	+	+
réintégrer	F	I	+	+
rejoindre	F	N	+	+
remonter	M	S	+	
rencontrer	F	N	+	+
repérer	M	S	+	-
sauter	M	S	+	+
serrer	M	S	-	-
sillonner	M	I	-	-
suivre	M	S	-	-
survoler	M	S	+	-
tamponner	F	C	+	+
télescoper	F	C	+	+
transpercer	M	S	+	+
traverser	M	S	+	+
vider	I	I	+	+
virer	M	S	+	+
visiter	M	I	-	-

Annexe C

Mise en oeuvre expérimentale

Pour tester les hypothèses émises au cours de ce chapitre nous avons étudié un petit exemple sur un cas pratique. Nous ne prétendons pas avoir développé une application directement utilisable, mais plutôt une plate-forme d'expérimentation pour évaluer certaines réponses apportées ici au problème de l'observation. Cette plate-forme traite des itinéraires dans un environnement donné comportant quelques voies de communication reliés par des carrefours et quelques repères dotés de certaines caractéristiques particulières. Nous avons pris comme exemple de test un plan d'un quartier de Toulouse sur le serveur de France Telecom¹, plan montré figure C.1. que nous avons traité manuellement pour obtenir une représentation numérique de certains objets : segments de rues, jonctions, bâtiments, auxquels sont associés des listes de propriétés (c'est à dire au moins leur type, leur nom et une éventuelle orientation intrinsèque). Chaque objet est représenté par un polygone 2D dans ce cas particulier. On peut voir figure C.2 le résultat de l'opération. Les relations topologiques entre segments et jonctions sont alors calculées pour stocker les connections segments/jonctions, et donc avoir le graphe du réseau routier. Au niveau des voies de communication, la connection correspond à l'intersection des polygones qui les représentent. Les informations à conserver sont aussi les associations entre repères et les segments pour lesquels le repère détermine un tronçon lexical (cette opération a été faite à la main pour l'exemple mais on pourrait le calculer).

Les données lexicales sont entrées dans une base de données sous forme de structure de traits². On peut alors définir certaines intentions d'observation par une liste d'intentions de base définies comme ci-dessus, en précisant pour chacune éventuellement les types des arguments ou leur identité, et les restrictions sur les prédicats voulus. Des liens temporels ou spatio-temporels pourraient être également entrés pour former une intention complexe.

L'entrée du système est constitué d'une part par un ensemble d'objets fixes correspondant à l'environnement de descriptions, et d'un ensemble de prises de vues constitué pour chaque mobile de son extension numérique à chaque date de prise de vue (un polygone et un temps) et d'autre part de l'intention descriptive choisie par l'opérateur. La figure C.3 résume l'interaction des différentes parties du système proposé. Comme indication pour tester l'architecture globale, nous avons rentré quelques informations qui ne traitent qu'un ensemble très réduit de cas possibles. En particulier, la complexité

1. <http://www.annua.com>.

2. Nous avons utilisé une bibliothèque Prolog destiné au traitement de structures de traits pour des applications au langage, the Attribute Logic Engine (Ale), disponible sur <http://www.sfs.nphil.uni-tuebingen.de/gpenn/ale.html>.

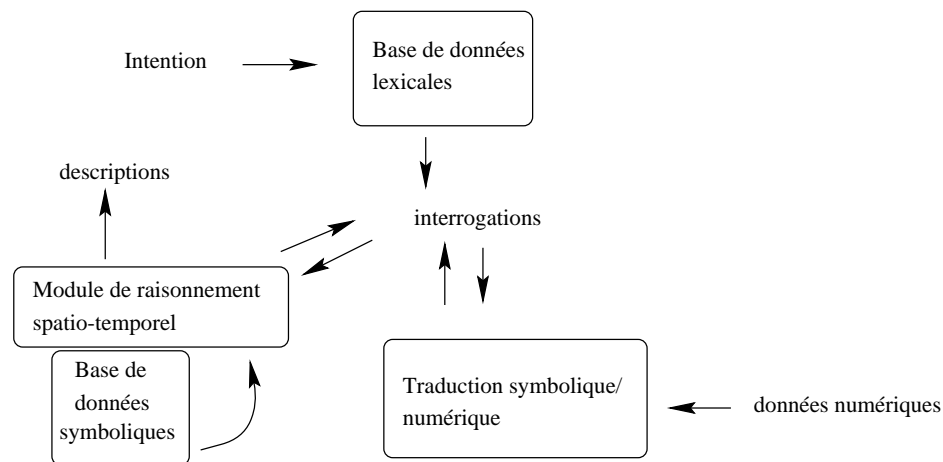


FIG. C.3 - Organisation des différents modules mis en jeu pour l'observation.

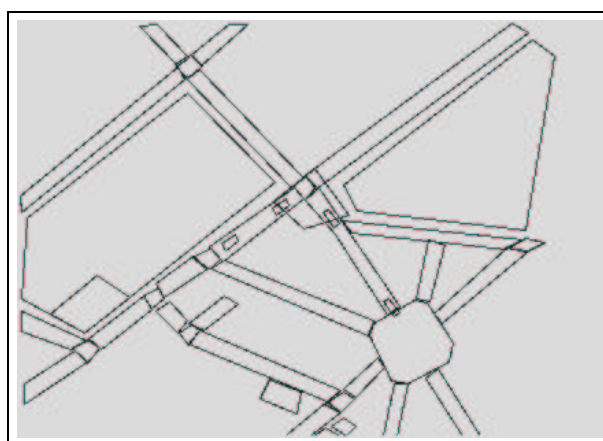


FIG. C.4 - Trajet d'un mobile dans le quartier.

liée au nombre de descriptions possibles n'a pas été étudiée. Par contre le pré-traitement de l'information pertinente liée aux structures d'itinéraires (association de repères et de segments, graphe du réseau, etc.) permet de réduire ces possibilités aux cas réellement pertinents pour un environnement constitué par des voies de communication, et l'utilisation de procédures géométriques éprouvées pour les traductions entre la représentation numérique et les concepts symboliques nécessaires garantit la rapidité de cette étape³, à partir du moment où on a isolé ce processus de traduction des autres modes de représentation.

Si on considère l'exemple d'un mobile dénoté "r5" qui se déplace dans l'environnement spécifié ci-dessus (cf. figure C.4). On peut alors tester certaines requêtes en spécifiant des objets, des types de

3. Les bibliothèques de procédures prêtes à l'emploi sont légion sur le web, en particulier sur le Geometry Center – <http://www.geom.umn.edu/> – et le Computational Geometry Algorithms Library – <http://www.cs.ruu.nl/CGAL> – qui nous ont fourni la base du module de traduction des informations numériques.

descriptions ou des types d'objets à surveiller. Nous avons testé ceci avec des requêtes simples, les descriptions possibles étant alors de la forme :

`desc(<predicat>, <argument1>, <argument2>, <instant>)` et on peut spécifier les types d'entités à surveiller.

La requête :

```
setof((X,Z,Y,a,T), desc(Z,X,Y,T), L_r).
```

produit par exemple la réponse :

```
L_r =
[(r5,a_hauteur,place_r_schuman,a,t_2),
(r5,a_hauteur,place_r_schuman,a,t_3),
(r5,atteindre,place_r_schuman,a,t_2),
(r5,sur,rue_bayard4,a,t_1),
(r5,sur,rue_bayard4,a,t_2),
(r5,sur,rue_cafarelli1,a,t_3),
(r5,sur,rue_cafarelli1,a,t_4)]
```

Les constantes "rue_xxxn" sont de type "segment" (ce sont des portions des rues nommées). Dans ce cas particulier on a codé par exemple "x est sur y à l'instant t" par le fait que le polygone correspondant à un mobile x est inclus dans le polygone correspondant à un segment y à l'instant t. Cette représentation est alors la seule dépendant de la nature des données numériques.