

Estimation bayésienne du paramètre de multifractalité

Herwig Wendt¹, Nicolas Dobigeon¹, Jean-Yves Tourneret¹, Patrice Abry²

¹ IRIT - ENSEEIHT, CNRS UMR 5505, Université de Toulouse

² Laboratoire de Physique, CNRS UMR 5672, ENS Lyon

GRETSI, Brest
04 Septembre 2013



- ▶ Analyse multifractale
 - ▶ devenue un outil classique de traitement du signal et de l'image
 - ▶ utilisée dans nombre d'applications de natures très différentes
 - ▶ **estimation** pratique problématique pour **échantillon de petite taille**

- ▶ Objectif :
 - ▶ estimateur bayésien du paramètre de multifractalité

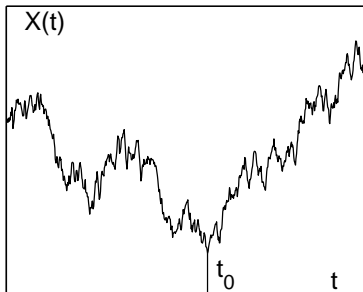
- ▶ Difficulté :
 - ▶ lois marginales fortement non gaussiennes
 - ▶ dépendances à longue mémoire

Régularité locale

- ▶ **régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

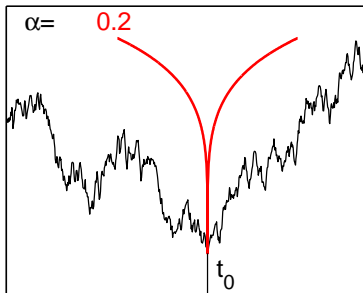


Régularité locale

- ▶ **régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$X \in C^\alpha(t_0)$ si $\exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

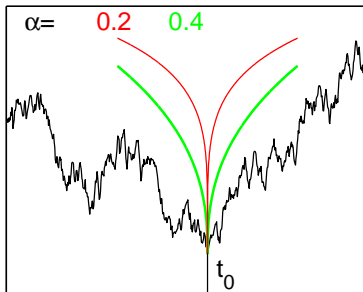


Régularité locale

- ▶ **régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$X \in C^\alpha(t_0)$ si $\exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha$:

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

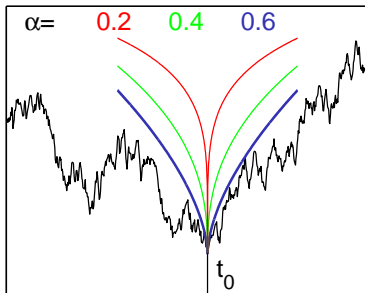


Régularité locale

- ▶ **régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$X \in C^\alpha(t_0)$ si $\exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha$:

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$



Régularité locale

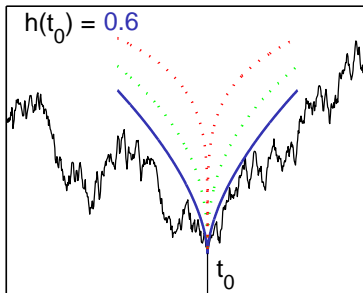
- ▶ **régularité locale** de $X(t)$ à t_0 :

$$X \in C^\alpha(t_0) \quad \text{si} \quad \exists C, \alpha > 0; P_{t_0}(t); \deg(P_{t_0}) < \alpha :$$

$$|X(t) - P_{t_0}(t)| < C|t - t_0|^\alpha$$

- ▶ **Exposant de Hölder** :

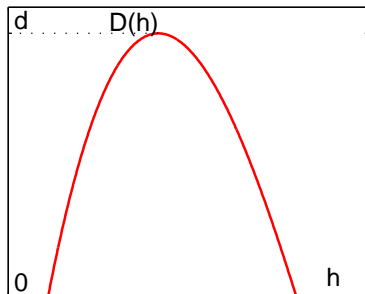
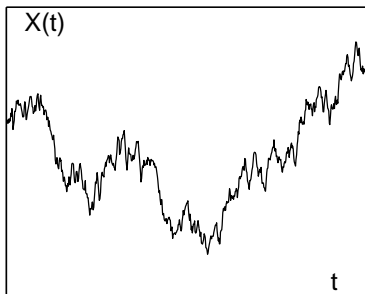
$$h(t_0) = \sup_{\alpha} \{ \alpha : X \in C^\alpha(t_0) \}$$



Spectre multifractal

- ▶ **spectre multifractal** $D(h)$:
 - variabilité de la régularité locale
 - dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

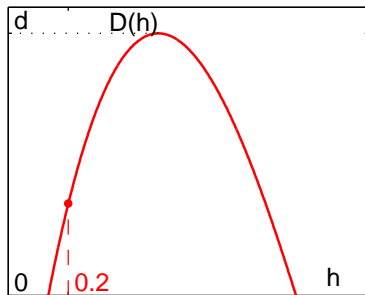
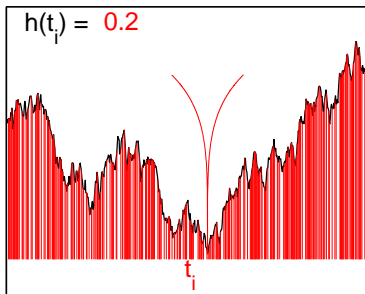
$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$



Spectre multifractal

- ▶ **spectre multifractal** $D(h)$:
 - variabilité de la régularité locale
 - dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

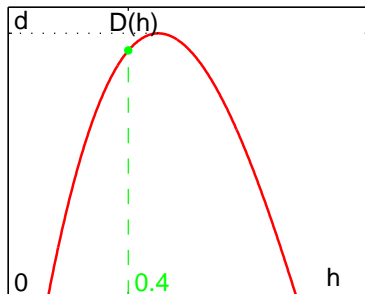
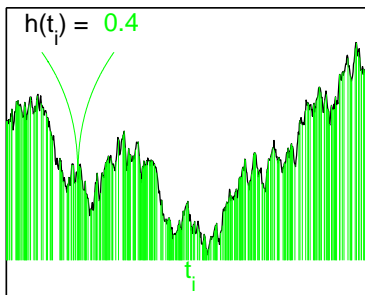
$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$



Spectre multifractal

- ▶ **spectre multifractal** $D(h)$:
 - variabilité de la régularité locale
 - dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

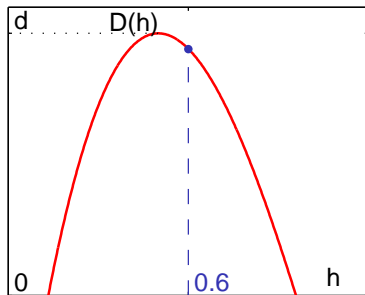
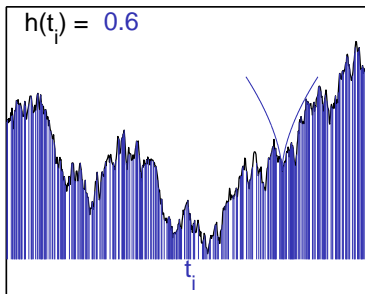
$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$



Spectre multifractal

- ▶ **spectre multifractal** $D(h)$:
 - variabilité de la régularité locale
 - dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$



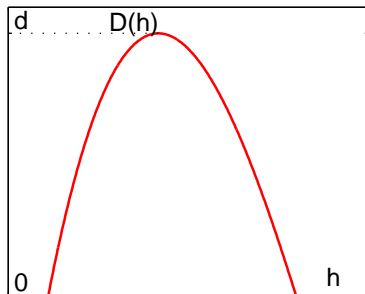
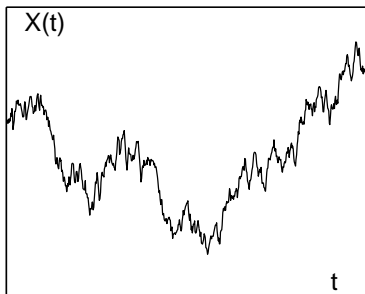
Spectre multifractal

- ▶ **spectre multifractal** $D(h)$:
 - variabilité de la régularité locale
 - dimension de Hausdorff des ensembles $\{t_i | h(t_i) = h\}$

$$D(h) = \dim_H \{t : h(t) = h\}$$

- ▶ en pratique : → **formalismes multifractals**

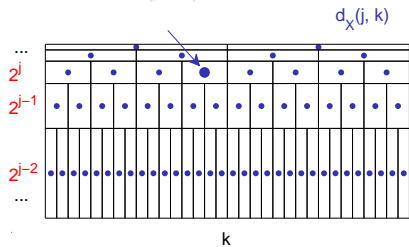
[Parisi Frisch 1985] et suivants



Formalisme multifractal : spectre de Legendre

- ▶ transformée en ondelettes $d_X(j, k) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$, $a = 2^j$
- ▶ coefficients dominants $L_X(j, k)$

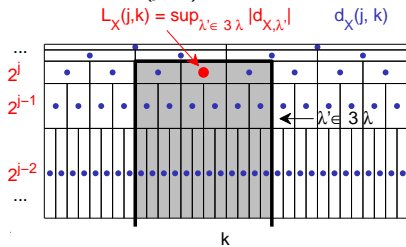
[Jaffard 2004]



- ▶ exposant d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ $q \in [q^-, q^+]$
- $$S(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q \simeq 2^{j\zeta(q)} \quad (1)$$
- ▶ spectre de Legendre $D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$

Formalisme multifractal : spectre de Legendre

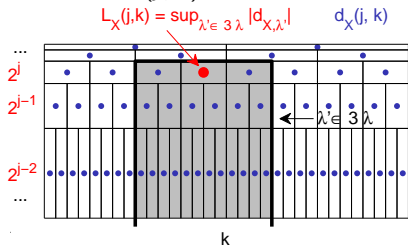
- ▶ transformée en ondelettes $d_X(j, k) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$, $a = 2^j$
- ▶ coefficients dominants $L_X(j, k)$ [Jaffard 2004]



- ▶ exposant d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ $q \in [q^-, q^+]$
- $$S(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q \simeq 2^{j\zeta(q)} \quad (1)$$
- ▶ spectre de Legendre $D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$

Formalisme multifractal : spectre de Legendre

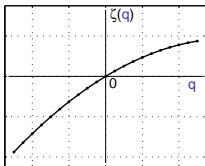
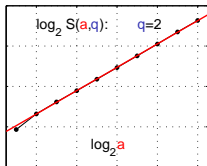
- ▶ transformée en ondelettes $d_X(j, k) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$, $a = 2^j$
- ▶ coefficients dominants $L_X(j, k)$ [Jaffard 2004]



- ▶ exposant d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ $q \in [q^-, q^+]$

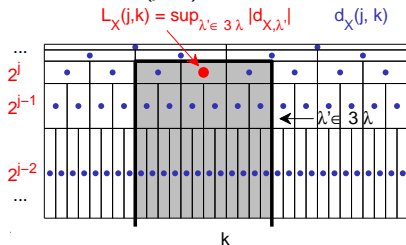
$$S(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q \simeq 2^{j\zeta(q)} \quad (1)$$

- ▶ spectre de Legendre $D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$



Formalisme multifractal : spectre de Legendre

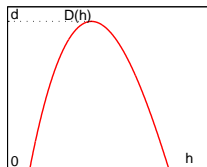
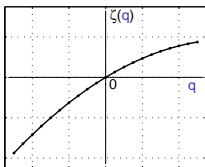
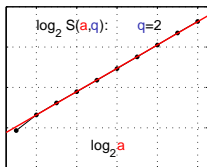
- ▶ transformée en ondelettes $d_X(j, k) = \langle X | \psi_{a,t} \rangle$, $a = 2^j$
- ▶ coefficients dominants $L_X(j, k)$ [Jaffard 2004]



- ▶ exposant d'invariance d'échelle $\zeta(q)$ $q \in [q^-, q^+]$

$$S(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} L_X(j, k)^q \simeq 2^{j\zeta(q)} \quad (1)$$

- ▶ spectre de Legendre $D(h) = \min_{q \neq 0} (d + qh - \zeta(q))$



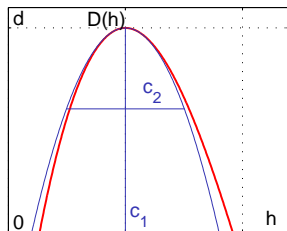
Formalisme multifractal : log-cumulants

- ▶ $\zeta(q) = c_1 q + c_2 q^2/2 + c_3 q^3/6 + \dots$
→ **log-cumulants** c_p [Castaing et al. 1993]

$$\text{Cum}_p[\ln L_X(j, k)] = c_p^0 + c_p \ln 2^j$$

- ▶ c_2 : **paramètre de multifractalité** / d'intermittence
 $c_2 \equiv 0$: $D(h)$ dégénéré

$$\text{Var}[\ln L_X(j, k)] = c_2^0 + c_2 \ln 2^j$$



-
- ▶ estimation classique → régression linéaire pondérée
 - ▶ **estimation pour échantillon de petite taille ?**
 - biais / variance trop élevé e.g. [Wendt et al. 2007]
 - alternatives : limitées aux modèles paramétriques e.g. [Lux 2007]
 - estimation bayésienne : limitée au mouvement brownien fractionnaire e.g. [Wornell et al. 1992, Beran 1994]

Formalisme multifractal : log-cumulants

▶ $\zeta(q) = c_1 q + c_2 q^2/2 + c_3 q^3/6 + \dots$

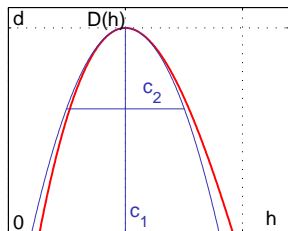
→ **log-cumulants** c_p [Castaing et al. 1993]

$$\text{Cum}_p[\ln L_X(j, k)] = c_p^0 + c_p \ln 2^j$$

▶ c_2 : **paramètre de multifractalité** / d'intermittence

$c_2 \equiv 0$: $D(h)$ dégénéré

$$\text{Var}[\ln L_X(j, k)] = c_2^0 + c_2 \ln 2^j$$



▶ estimation classique → régression linéaire pondérée

▶ **estimation pour échantillon de petite taille ?**

→ biais / variance trop élevé

e.g. [Wendt et al. 2007]

→ alternatives : limitées aux modèles paramétriques

e.g. [Lux 2007]

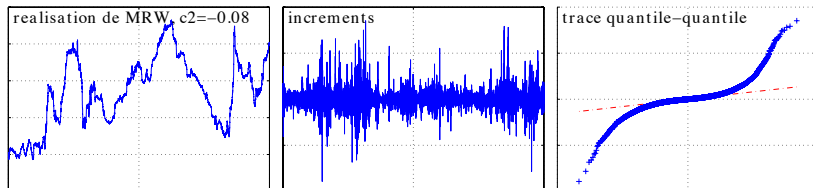
→ estimation bayésienne : limitée au mouvement brownien fractionnaire

e.g. [Wornell et al. 1992, Beran 1994]

Processus multifractals : cascades multiplicatives

- ▶ processus multifractals construits à partir de cascades multiplicatives
 - ▶ résultats sur statistiques : \sim limité aux lois de puissance Eq. (1)
 - ▶ fort écart à la loi gaussienne
 - ▶ structure de dépendance à longue mémoire
 - ▶ idem pour $d_X(j, k)$ et $L_X(j, k)$ des processus

Multifractal Random Walk (MRW) [BacryMuzy, 2001]



Processus multifractals : cascades multiplicatives

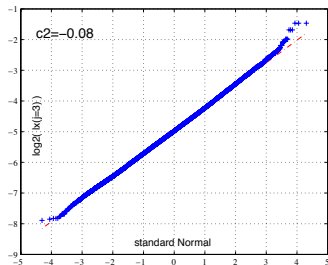
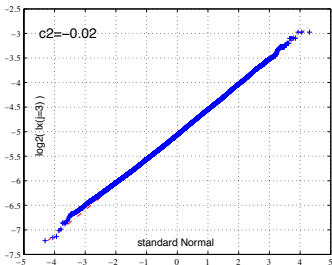
- ▶ processus multifractals construits à partir de cascades multiplicatives
 - ▶ résultats sur statistiques : \sim limité aux lois de puissance Eq. (1)
 - ▶ fort écart à la loi gaussienne
 - ▶ structure de dépendance à longue mémoire
 - ▶ idem pour $d_X(j, k)$ et $L_X(j, k)$ des processus

1. lois marginales du logarithme $l_X(j, k) = \ln L_X(j, k)$

$$l_X(j, k) \sim \mathcal{N}(\mu(j, c_1, c_1^0), \sigma^2(j, c_2, c_2^0))$$

$$\sigma^2(j, c_2, c_2^0) = c_2^0 + c_2 \ln 2^j \quad (2)$$

MRW : tracés “quantile-quantile” de $l_X(j = 3, \cdot)$



Covariance intra-échelle

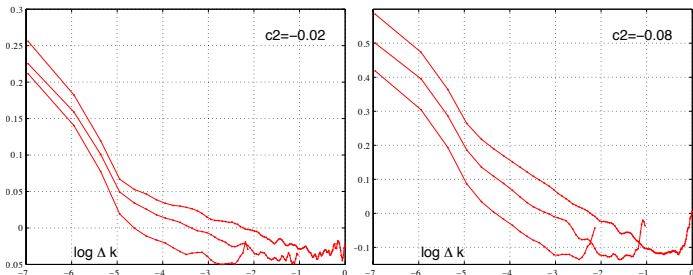
- ▶ cascades d'ondelettes aléatoires [Arneodo et al., 1998]
 covariance asymptotique du logarithme des coefficients d'ondelette
linéaire en $\log(\Delta k)$

- $I_X(j, k) = \ln L_X(j, k)$ de cascades multiplicatives multifractales
 → modèle empirique générique

$$\text{Cov}[I_X(j, k), I_X(j, k + \Delta k)] \approx \nu(c_2) + c_2(\log_2(\Delta k) + j) \ln 2$$

$$3 < \Delta k \ll 2^{-j} N \quad (3)$$

variance-covariance empirique de $I_X(j = 3, \cdot)$ pour MRW



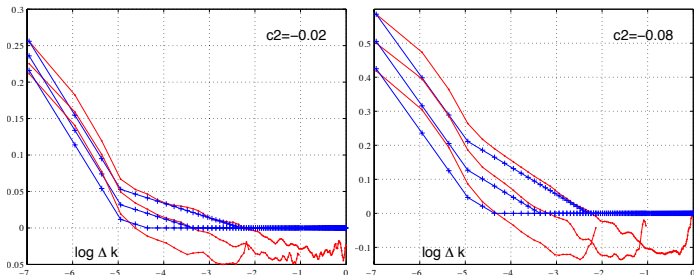
Modèle variance - covariance

1+2 modèle linéaire par morceaux en $\log_2(\Delta k)$

$$\Sigma(j, \Delta k; c_2; c_2^0) = \begin{cases} c_2^0 + j c_2 \ln 2, & \Delta k \equiv 0 \\ \max(0, \Lambda(j, \Delta k; c_2)), & 3 \leq \Delta k \leq 2^{-j} N \end{cases}$$

$$\Lambda(j, \Delta k; c_2) = \nu(c_2) + c_2(\log_2(\Delta k) + j) \ln 2$$

variance-covariance empirique de $I_X(j=3, \cdot)$ pour MRW et modèle proposé



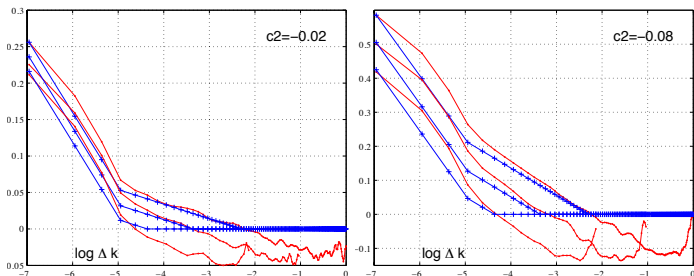
Modèle variance - covariance

1+2 modèle linéaire par morceaux en $\log_2(\Delta k)$

$$\Sigma(j, \Delta k; c_2; c_2^0) = \begin{cases} c_2^0 + jc_2 \ln 2, & \Delta k \equiv 0 \\ \frac{\log_2(\Delta k)}{\log_2(3)} (\Lambda(j, 3; c_2) - c_2^0 - jc_2 \ln 2) \\ \quad + c_2^0 + jc_2 \ln 2, & 1 \leq \Delta k \leq 2 \\ \max(0, \Lambda(j, \Delta k; c_2)), & 3 \leq \Delta k \leq 2^{-j}N \end{cases}$$

$$\Lambda(j, \Delta k; c_2) = \nu(c_2) + c_2(\log_2(\Delta k) + j) \ln 2$$

variance-covariance empirique de $I_X(j=3, \cdot)$ pour MRW et modèle proposé



Modèle bayésien

- ▶ log des coefficients dominants $l_X(j, k)$ **centrés**

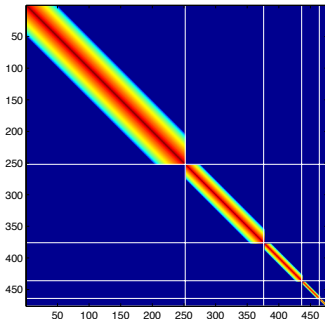
$$(j = j_1, \dots, j_2)$$

$$\ell_X = [\ell_X(1), \dots, \ell_X(n)]^T$$

- ▶ gaussien avec covariance

$$\Sigma(\gamma_2) = \mathbb{E}[\ell_X \ell_X^T]$$

paramétrée par $\gamma_2 \triangleq [c_2, c_2^0]^T$



Modèle bayésien

- ▶ vraisemblance gaussienne

$$f(\ell_X | \gamma_2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\det \Sigma(\gamma_2)]^{-1/2} \times \exp \left[-1/2 \ell_X^T \Sigma(\gamma_2)^{-1} \ell_X \right]$$

- ▶ loi a priori pour γ_2

- ▶ contrainte de positivité des variances $[\Sigma(\gamma_2)]_{j,j} > 0$

- ▶ ensemble admissible $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_2^+) \cap \mathcal{C}_2^m$

$$\mathcal{C}_2^- = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 < 0 \text{ and } c_2 j_2 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^+ = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 > 0 \text{ and } c_2 j_1 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^m = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid |c_2| < c_2^m, |c_2^0| < c_2^{0,m}\}$$

$(c_2^m, c_2^{0,m})$ – plus grandes valeurs admissible pour (c_2, c_2^0)

- ▶ sans information a priori supplémentaire sur (c_2, c_2^0) : prior uniforme

- ▶ loi a posteriori pour γ_2

$$f(\gamma_2 | \ell_X) \propto f(\ell_X | \gamma_2) f(\gamma_2)$$

→ estimateur du maximum a posteriori (MAP)

→ estimateur d'erreur quadratique minimale (MMSE)

dépend de façon non triviale des paramètres (c_2^0, c_2)

Modèle bayésien

- ▶ vraisemblance gaussienne

$$f(\ell_X | \gamma_2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\det \mathbf{\Sigma}(\gamma_2)]^{-1/2} \times \exp \left[-1/2 \ell_X^T \mathbf{\Sigma}(\gamma_2)^{-1} \ell_X \right]$$

- ▶ loi a priori pour γ_2

- ▶ contrainte de positivité des variances $[\mathbf{\Sigma}(\gamma_2)]_{j,j} > 0$

- ▶ ensemble admissible $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_2^+) \cap \mathcal{C}_2^m$

$$\mathcal{C}_2^- = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 < 0 \text{ and } c_2 j_2 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^+ = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 > 0 \text{ and } c_2 j_1 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^m = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid |c_2| < c_2^m, |c_2^0| < c_2^{0,m}\}$$

$(c_2^m, c_2^{0,m})$ – plus grandes valeurs admissible pour (c_2, c_2^0)

- ▶ sans information a priori supplémentaire sur (c_2, c_2^0) : prior uniforme

$$f(\gamma_2) \propto \mathbf{1}_{\mathcal{C}_2}(\gamma_2)$$

- ▶ loi a posteriori pour γ_2

$$f(\gamma_2 | \ell_X) \propto f(\ell_X | \gamma_2) f(\gamma_2)$$

→ estimateur du maximum a posteriori (MAP)

→ estimateur d'erreur quadratique minimale (MMSE)

dépend de façon non triviale des paramètres (c_2^0, c_2)

Modèle bayésien

- ▶ vraisemblance gaussienne

$$f(\ell_X | \gamma_2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} [\det \Sigma(\gamma_2)]^{-1/2} \times \exp \left[-1/2 \ell_X^T \Sigma(\gamma_2)^{-1} \ell_X \right]$$

- ▶ loi a priori pour γ_2

- ▶ contrainte de positivité des variances $[\Sigma(\gamma_2)]_{j,j} > 0$

- ▶ ensemble admissible $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_2^- \cup \mathcal{C}_2^+) \cap \mathcal{C}_2^m$

$$\mathcal{C}_2^- = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 < 0 \text{ and } c_2 j_2 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^+ = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid c_2 > 0 \text{ and } c_2 j_1 + c_2^0 > 0\}$$

$$\mathcal{C}_2^m = \{(c_2, c_2^0) \in \mathbb{R}^2 \mid |c_2| < c_2^m, |c_2^0| < c_2^{0,m}\}$$

$(c_2^m, c_2^{0,m})$ – plus grandes valeurs admissible pour (c_2, c_2^0)

- ▶ sans information a priori supplémentaire sur (c_2, c_2^0) : prior uniforme

$$f(\gamma_2) \propto \mathbf{1}_{\mathcal{C}_2}(\gamma_2)$$

- ▶ loi a posteriori pour γ_2

$$f(\gamma_2 | \ell_X) \propto f(\ell_X | \gamma_2) f(\gamma_2)$$

→ estimateur du maximum *a posteriori* (MAP)

→ estimateur d'erreur quadratique minimale (MMSE)

dépend de façon non triviale des paramètres (c_2^0, c_2)

Echantillonneur de Gibbs

- ▶ échantillonnage consécutif suivant les lois conditionnelles

$$f(c_2 | c_2^0, \ell_X) \text{ et } f(c_2^0 | c_2, \ell_X)$$

associées à

$$f(c_2, c_2^0 | \ell_X)$$

- ▶ échantillonnage suivant $f(c_2 | c_2^0, \ell_X)$

- ▶ vecteur d'état $\gamma_2^{(t)} = [c_2^{(t)}, c_2^{0(t)}]$
- ▶ candidat $c_2^{(*)} \sim q(c_2^{(*)} | c_2^{(t)}) = \mathcal{N}(c_2^{(t)}, \eta^2)$
- ▶ $\gamma_2^{(*)} = [c_2^{(*)}, c_2^{0(t)}]$ accepté avec probabilité $\rho_{c_2} = \min(1, \rho_{c_2})$

$$\begin{aligned} \rho_{c_2} &= \frac{f(\gamma_2^{(*)} | \ell_X)}{f(\gamma_2^{(t)} | \ell_X)} \frac{q(\gamma_2^{(t)} | \gamma_2^{(*)})}{q(\gamma_2^{(*)} | \gamma_2^{(t)})} = \left[\frac{\det \Sigma(\gamma_2^{(t)})}{\det \Sigma(\gamma_2^{(*)})} \right]^{1/2} \mathbf{1}_{c_2}(\gamma_2^{(*)}) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \ell_X^T \left(\Sigma^{-1}(\gamma_2^{(*)}) - \Sigma^{-1}(\gamma_2^{(t)}) \right) \ell_X \right] \end{aligned}$$

rapport d'acceptation de Metropolis-Hastings

- ▶ échantillonnage suivant $f(c_2^0 | c_2, \ell_X)$: similaire

Echantillonneur de Gibbs

- ▶ échantillonnage consécutif suivant les lois conditionnelles

$$f(c_2 | c_2^0, \ell_X) \text{ et } f(c_2^0 | c_2, \ell_X)$$

associées à

$$f(c_2, c_2^0 | \ell_X)$$

- ▶ échantillonnage suivant $f(c_2 | c_2^0, \ell_X)$

- ▶ vecteur d'état $\gamma_2^{(t)} = [c_2^{(t)}, c_2^{0(t)}]$
- ▶ candidat $c_2^{(*)} \sim q(c_2^{(*)} | c_2^{(t)}) = \mathcal{N}(c_2^{(t)}, \eta^2)$
- ▶ $\gamma_2^{(*)} = [c_2^{(*)}, c_2^{0(t)}]$ accepté avec probabilité $\rho_{c_2} = \min(1, \rho_{c_2})$

$$\begin{aligned} \rho_{c_2} &= \frac{f(\gamma_2^{(*)} | \ell_X)}{f(\gamma_2^{(t)} | \ell_X)} \frac{q(\gamma_2^{(t)} | \gamma_2^{(*)})}{q(\gamma_2^{(*)} | \gamma_2^{(t)})} = \left[\frac{\det \Sigma(\gamma_2^{(t)})}{\det \Sigma(\gamma_2^{(*)})} \right]^{1/2} \mathbf{1}_{c_2}(\gamma_2^{(*)}) \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \ell_X^T \left(\Sigma^{-1}(\gamma_2^{(*)}) - \Sigma^{-1}(\gamma_2^{(t)}) \right) \ell_X \right] \end{aligned}$$

rapport d'acceptation de Metropolis-Hastings

- ▶ échantillonnage suivant $f(c_2^0 | c_2, \ell_X)$: similaire

Echantillonneur de Gibbs

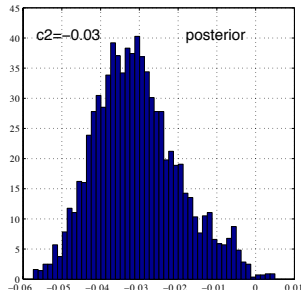
→ N_{mc} échantillons $\{\gamma_2^{(t)}\}_{t=1}^{N_{mc}}$

→ asymptotiquement distribués suivant $f(c_2, c_2^0 | \ell_X)$

- ▶ approximation des estimateurs bayésiens

$$\hat{\gamma}_2^{\text{MMSE}} \approx \frac{1}{N_{mc} - N_{bi}} \sum_{t=N_{bi}+1}^{N_{mc}} \gamma_2^{(t)}$$

$$\hat{\gamma}_2^{\text{MAP}} \approx \underset{t=1, \dots, N_{mc}}{\text{argmax}} f(\gamma_2^{(t)} | \ell_X)$$



Simulations numériques

- ▶ Multifractal Random Walk (MRW) [BacryMuzy, 2001]
 - ▶ non gaussien, incréments stationnaires
 - ▶ propriétés multifractales \sim cascade multiplicative log-normale de Mandelbrot
 - ▶ $\zeta(q) = (H + c_2)q - c_2 q^2/2$ (Eq. (1)) pour $q \in [-\sqrt{2/c_2}, \sqrt{2/c_2}]$
- ▶ (fbm en temps multifractal [Mandelbrot 1999, Bacry et al. 2002])

- ▶ simulations:
 - ▶ $N = \{256, 512\}$
 - ▶ $N_{\text{real}} = 200$
 - ▶ $N_{\text{bi}} = 300, N_{\text{mc}} = 700$
 - ▶ ondelette de Daubechies $N_\psi = 2$
 - ▶ $c_2 \in [-0.01, -0.16]$

Simulations numériques

- ▶ ECT = écart-type
- ▶ REQ = racine carrée d'erreur quadratique moyenne
 - ▶ RLP : régression linéaire ponderée
 - ▶ MMSE : estimateur d'erreur quadratique minimale
 - ▶ MAP : estimateur du maximum *a posteriori*

		$N = 2^8$			$N = 2^9$		
c_2		-0.02	-0.04	-0.08	-0.02	-0.04	-0.08
ECT	RLP	0.064	0.077	0.106	0.037	0.056	0.066
	MMSE	0.018	0.020	0.024	0.012	0.016	0.015
	MAP	0.020	0.022	0.025	0.014	0.016	0.017
REQ	RLP	0.064	0.077	0.107	0.037	0.056	0.066
	MMSE	0.021	0.021	0.025	0.015	0.017	0.016
	MAP	0.021	0.023	0.025	0.016	0.018	0.017
gain		~ 3	~ 3.5	~ 4	~ 2.5	~ 3	~ 4

temps de calcul : plusieurs ordres de grandeur plus grand

- ▶ première **procédure d'estimation bayésienne en analyse multifractale**
→ paramètre de multifractalité
- ▶ **modèle statistique** simple et générique pour le **log des coefficients dominants** de processus multifractals construits à partir de cascades multiplicatives
- ▶ **amélioration significative de performance d'estimation** par rapport aux estimateurs classiques reposant sur des régressions linéaires (au prix d'un coût de calcul élevé)

- ▶ incorporation d'information à priori sur c_2
- ▶ covariances jointes temps-échelles
- ▶ approximation du rapport des vraisemblances : réduction du coût de calcul
- ▶ extension aux dimensions supérieures

- ▶ première **procédure d'estimation bayésienne en analyse multifractale**
→ paramètre de multifractalité
- ▶ **modèle statistique** simple et générique pour le **log des coefficients dominants** de processus multifractals construits à partir de cascades multiplicatives
- ▶ **amélioration significative de performance d'estimation** par rapport aux estimateurs classiques reposant sur des régressions linéaires (au prix d'un coût de calcul élevé)

- ▶ incorporation d'information à priori sur c_2
- ▶ covariances jointes temps-échelles
- ▶ approximation du rapport des vraisemblances : réduction du coût de calcul
- ▶ extension aux dimensions supérieures