Terminologie probabiliste et ensembliste.

probabiliste	**ensembliste**	**notation**
Evenement certain	*Espace entier*	Ω
Evenement impossible	*Partie vide*	$\emptyset$
Evenement contraire	*Partie complementaire*	$A^c(\bar{(}A), \not{(}A)$
Et	*Intersection*	$\cap$
Ou	*Union*	$\cup$
Evenements incompatibles	*Parties disjointes*	$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
Systeme exhaustif	*Partition*	$\cup A_i = \Omega, \ , A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$
Implication	*Inclusion*	$A \subseteq B$

(Ω est l'ensemble des épreuves.)

Définition.(Trubu, σ-algèbre.) Une classe T de parties de Ω est une tribu si elle satisfait à:

(i) $\Omega \in T$;

(ii)$A \in T \Rightarrow A^c \in T$;

(iii)$\forall n \in N, A_n \in T \Rightarrow \cup_{n \in N} A_n \in T$

La condition (iii) s'appelle le principe de σ-additivité, ou additivité si on considère une famille finie A_n, $n = 1, ..., p$ Une tribu s'appelle aussi σ-algèbre.

Définition. Une couple (Ω, T) formé d'un ensemble et d'un tribu sur cet ensemble est appelé espace probabilisable.

Définition. 1) Une probabilité P sur l'espace probabilisable (Ω, T) est une application $P : T \to [0, 1]$ telle que

(i)$\forall A \in T, 0 \leq P(A) \leq 1$,

(ii)$P(\Omega) = 1$,

(iii)Si $(A_n)_{n\in N}$ est une famille vérifiant: pour tous i, j dans N, $A_i, A_j \in T$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors

$$P(\cup_{n\in N} A_n) = \sum_{n\in N} P(A_n).$$

2) Lorsque Ω est dénombrable et que $T = \mathcal{P}(\Omega)$, on peut remplacer les conditions ci-dessus par $\forall \omega \in \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1, P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$ et $\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$, où $P(\omega)$ est une abréviation pour $P(\{\omega\})$. ($\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω.)

Probabilité uniforme. Si Ω est un espace fini et $T = \mathcal{P}(\Omega)$, on considère la probabilité uniforme sur Ω, qui attribue à chaque événement élémentaire ω la même probabilité $p = \frac{1}{|\Omega|}$.

L'événement presque sûr: $P(A) = 1$.

L'événement négligeable: $P(A) = 0$.

Formules Utiles

- Pour $A_1, ..., A_n$ événements deux à deux incompatibles,

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $\forall A, B \;\; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $\forall A,\; P(A^c) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \;\; A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $\forall A_1, ..., A_n, P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite croissante, c'est à dire $\forall n, A_n \subseteq A_{n+1}$, alors $P(\cup_{i\in N} A_i) = lim_{n\to\infty} P(A_n)$
- Soit $(A_n)_{n\in N}$ une suite décroissante, c'est à dire $\forall n, A_{n+1} \subseteq A_n$, alors $P(\cap_{i\in N} A_i) = lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Probabilités conditionnelles, indépendence etc.

Definition (Probabilité conditionnelle.) Soit (Ω, T, P) un espace de probabilités et A un événement non négligeable, la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant A est définie par

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Cette formule est souvent utilisée sous la forme $P(A\cap B) = P(B/A)P(A)$.

La formule plus générale est:

$$P(A_1 \cap .... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap .... \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilités et $(A_k)_{k\in N}$ un système exhaustif; soit B un événement, on a:

$$P(B) = \sum_{k\in N} P(B/A_k)P(A_k).$$

Formule de Bayes. Soit (Ω, T, P) un espace de probabilités, $(A_k)_{k\in N}$, et B un événement non négligeable, on a:

$$P(A_n/B) = \frac{P(A_n)P(B/A_n)}{\sum_{k\in N} P(A_k)P(B/A_k)}$$

Définition. (Evénements indépendentes.) Deux événements A, B de (Ω, T, P) sont indépendents si et seulement s'ils vérifient les conditions équivalentes suivantes:

(i) $P(B/A) = P(B)$,

(ii) $P(A/B) = P(A)$,

(iii) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Si A, B sont inépendants, les couples d'événements (A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c) son aussi indépendants.

Si A, B sont indépendants, on a: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B)$.

Définition. Soient $A_1, ..., A_n$ des événements de (Ω, T, P). $A_1, ..., A_n$ sont indépendants, si et seulement s'ils vérifient les conditions équivalentes suivantes:

(i) Pour toute suite $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ on a

$$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_1)...P(A_{i_k})$$

(ii) Pour toute suite $(i, i_1, ..., i_k)$ d'entiers 2 à 2 distincts de $\{1, ..., n\}$ on a $P(A_i/A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_i)$.

Il ne suffit pas de vérifier que les A_i sont 2 à 2 indépendants ou bien que $P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k} = P(A_1)...P(A_{i_k})$.

Tous qu'il faut savoir sur automates.

Un automate fini (deterministe) est defini par:

- un ensemble fini non vide Σ, l'alphabet de l'automate;

- un ensemblefini non vide E, l'ensemble des états de l'automate;
- un état particulier $I \in E$, l'état initial de l'automate;
- une partie R de E, appelée l'ensemble des états acceptants (ou états finaux), les états qui ne sont pas acceptants sont les états refusants;
- une application $\delta : E \times \Sigma \to E$, la fonction de transition de l'automate.

L'automate peut être decrit par son diagramme. Les sommets sont les états et de chaque état sortent les flèches correspondantes aux tous les éléments de l'alphabet Σ. La flèche qui correspond à $a \in \Sigma$ va de $e \in E$ à $\delta(e, a)$. L'état initialest signalé par la flèche $\Rightarrow$ et les états acceptants par un cercle double.

Exemple.

Le mot $a_1 a_2 ... a_n$ est accepté si et seulement si la chaîne correspondante des transitions (qui commence toujours à l'état initial) se termine à un état acceptant:

$$e_1 \xrightarrow{a_1} \delta(e_1, a_1) \xrightarrow{a_2} ... \xrightarrow{a_n} \delta(\delta(...(\delta(e_1, a_1)...), a_n)$$

(e_1 l'état initial).

Par exemple, si on prend l'automate A, et les mots $\omega \in \Omega$ sont les mots binaires de longueur 3, on a:

Mot	*transitions*	*resultat*
111	$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 1$	*refuse*
110	$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0} 2$	*accepte*
101	$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{1} 2$	*accepte*
100	$1 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 3$	*refuse*
011	$1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 2$	*accepte*
010	$1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{0} 3$	*refuse*
001	$1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 3 \xrightarrow{1} 1$	*refuse*
000	$1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 3 \xrightarrow{0} 3$	*refuse*