Examen (DEA) - 2000

Les λ-termes construites de variables typées et constantes.
Exercice 1.

- Est-ce que l'expression

  $$(\lambda x^{a\to(a\to a)}.((\lambda x^{a\to a}.(x^{a\to a}(x^{a\to a}y^a)))\lambda y^a.(x^{a\to(a\to a)}y^a y^a)))(\lambda x^a.\lambda y^a.z^a)$$

  est un terme? (Prendre en compte que certaines parenthèses peuvent être omises selon les règles.)

- Si "oui", trouver son type.

- Trouver $FV(t)$ (les variables libres de t).

- Est-ce que t est β-normal? Essayez d'obtenir le terme normal via β-reductions.

Solution. (a) Il faut d'abord reconstituter les parnethèses manquantes dans notre terme. $\lambda y^a.(x^{a\to(a\to a)}y^a y^a)$ est l'abréviation de $(\lambda y^a.(((x^{a\to(a\to a)})y^a)y^a))$; on voit que c'est un terme bien formé. C'est pareil pour $(\lambda x^a.\lambda y^a.z^a)$ qui représente $(\lambda x^a.(\lambda y^a.z^a))$. On peut écrire l'arbre toute entière (de processus de construction), mais il nous suffit d'effectuer le controle de types. Je ne montre que des étapes principaux. C'est clair que

$$t = (\lambda x^{a\to a}.(x^{a\to a}(x^{a\to a}y^a)))$$

est un terme bien typé de type $(a \to a) \to a$. De même,

$$s = (\lambda y^a.(((x^{a\to(a\to a)})y^a)y^a))$$

est un terme de type $(a \to a)$. Alors $(t)s$ est un terme bien formé de type a et l'abstraction $(\lambda x^{a\to(a\to a)}.((t)s))$ est un terme bien formé de type $(a \to (a \to a)) \to a$. Il est appliqué au terme $(\lambda x^a.(\lambda y^a.z^a))$ de type $a \to (a \to a)$ ce que donne un terme bien formé. (Et c'est l'expression en question.)

(b) Son type est a.

(c) Les variables libres de ce terme sont: y^a (l'ocurrence qui provient de la partie t, les autres occurrences de y^a sont liées), et z^a.

(d) Le terme n'est pas β-normal. On obtient le terme normal comme suit (par exemple):

$$(\lambda x^{a\to(a\to a)}.((\lambda x^{a\to a}.(x^{a\to a}(x^{a\to a}y^a)))\lambda y^a.(x^{a\to(a\to a)}y^a y^a)))(\lambda x^a.\lambda y^a.z^a) =$$

$$= ((\lambda x^{a\to a}.(x^{a\to a}(x^{a\to a}y^a)))\lambda y^a.((\lambda x^a.\lambda y^a.z^a)y^a y^a)) =$$

$$= ((\lambda x^{a\to a}.(x^{a\to a}(x^{a\to a}y^a)))(\lambda y^a.z^a)) =$$

(deux occurrences de y^a disparaissent parce que les variables de $\lambda x^a.\lambda y^a.$ ne correspondent pas aux occurrences dans z^a)

$$= ((\lambda y^a.z^a)((\lambda y^a.z^a)y^a)) = ((\lambda y^a.z^a)z^a) = z^a$$

Exercice 2. Soit N le type des entiers, et $m{:}N \to (N \to N)$ une constante. Est-ce qu'il existe les types A, B tels que

- l'expression
$$z^{A\to B}(m^{N\to(N\to N)}y^A)$$
est un terme,
- l'expression
$$z^{B\to A}(m^{N\to(N\to N)}y^A)$$
est un terme,
- l'expression
$$z^{A}(m^{N\to(N\to N)}y^B)$$
est un terme?

Dans les cas ou la reponse est "oui", est-ce que A, B sont uniques?

Solution. (a) Pour que la partie intérieure soit bien formée il est necéssaire que $A = N$. Alors le type de cette partie est $N \to N$. Pour que l'application extérieure soit correcte, il est necéssaire que $A = N \to N$. Contradiction. (Reponse: non.)

(b) $A = N, B = N \to N$ (solution unique).

(c) $B = N, A = (N \to N) \to C$ avec C arbitraire. B est unique, A non.

Les λ-termes avec contexte et déductions.

Exercice 3. Soit $\Gamma = x{:}N \to N, y{:}N, u{:}\tau \to N, v{:}N \to \tau$. Soit Rec une constante de type $N \to (N \to (N \to N)) \to (N \to N)$.

- On considère les expressions $t_1 = (Rec\ y)(\lambda z^N.x), t_2 = \lambda z{:}\tau.(v(uz)), t_3 = v(uz), t_4 = \lambda z{:}\tau.(vuz), t_5 = \lambda s^{(N\to N)\to\tau}(s((Rec\ y)\lambda z^N.x))$. Indiquer lesquels d'entre eux sont les termes par rapport à Γ? (Prendre en compte la possibilite d'omission de parenthèses selon les règles.)

- Trouver les types de ceux des t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 qui sont les termes.
- Le jugement $\Gamma \vdash t_1{:}N \to N$ est-il vrai? Et le jugement $\Gamma \vdash t_5{:}\tau$?
- Trouver une déduction du jugement qui est vrai.

Solution. (a) $(Rec\ y){:}(N \to (N \to N)) \to (N \to N)$, $(\lambda z^N.x){:}(N \to (N \to N))$, donc les types sont en accord et l'application est correcte. (t_1 est un terme.) On peut aussi ecrire une déduction:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash Rec{:}N \to (N \to (N \to N)) \to (N \to N) \quad \Gamma \vdash y{:}N}{\Gamma \vdash (Rec\ y){:}(N \to (N \to N)) \to (N \to N)} \quad \dfrac{\Gamma, z{:}N \vdash x{:}N \to N}{\Gamma \vdash (\lambda z{:}N.x){:}N \to (N \to N)}}{\Gamma \vdash (Rec\ y)(\lambda z{:}N.x){:}N \to N};$$

t_2 est un terme de type $\tau \to \tau$; t_3 non, parce que z est libre dans t_3 et z n'est pas dans Γ; t_4 est une expression où on doit reconstituer les parenthèses, $(\lambda z{:}\tau.((vu)z))$ et on voit tout de suite que l'application vu n'est pas correcte. Dans le cas de t_5 nous avons déjà deduit $\Gamma \vdash ((Rec\ y)\lambda z^N.x){:}N \to N$. On peut rajouter à la déduction la-haut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{\Gamma, s{:}(N \to N) \to \tau \vdash s{:}(N \to N) \to \tau} \quad \dfrac{\Gamma \vdash ((Rec\ y)\lambda z^N.x){:}N \to N}{\Gamma, s{:}(N \to N) \to \tau \vdash ((Rec\ y)\lambda z^N.x){:}N \to N}(wkn)}{\Gamma, s{:}(N \to N) \to \tau \vdash (s((Rec\ y)\lambda z^N.x)){:}\tau}}{\Gamma \vdash \lambda s{:}(N \to N) \to \tau.(s((Rec\ y)\lambda z^N.x)){:}((N \to N) \to \tau) \to \tau}$$

(b) Voir la-haut.
(c) Oui; non (voir la-haut).
(d) Voir la-haut.

Exercice 4. Donné la déduction logique suivante:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax}{\sigma, \tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \sigma \to (\tau \to \tau)} \quad \dfrac{ax}{\sigma, \tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \sigma}}{\sigma, \tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \tau \to \tau} \quad \dfrac{ax}{\sigma, \tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \tau}}{\sigma, \tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \tau}}{\tau, \sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \sigma \to \tau}}{\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \tau \to (\sigma \to \tau)}$$

Trouver un terme correspondant.

Solution.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax}{x{:}\sigma, y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash z{:}\sigma \to (\tau \to \tau)} \quad \dfrac{ax}{x{:}\sigma, y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash x{:}\sigma}}{x{:}\sigma, y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash (zx){:}\tau \to \tau} \quad \dfrac{ax}{x{:}\sigma, y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash y{:}\tau}}{x{:}\sigma, y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash ((zx)y){:}\tau}}{y{:}\tau, z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash \lambda(x{:}\sigma.((zx)y)){:}\sigma \to \tau}}{z{:}\sigma \to (\tau \to \tau) \vdash (\lambda y{:}\tau.(\lambda x{:}\sigma((zx)y))){:}\tau \to (\sigma \to \tau)}$$

Exercice 5. Soit $\Gamma = x{:}\sigma, y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma$. Essayez de trouver un terme t tel que $\Gamma \vdash t{:}\sigma \to \sigma$ et t ne contient que y comme une variable libre.

Solution. Il faut se rappeler que la recherche n'est pas deterministe. La condition que y est la seule variable libre suggère que x est rajouté par wkn. Donc il faut déduire $y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma \vdash t{:}\sigma \to \sigma$. Cosidérons l'hypothèse que la dernière règle était l'abstraction. $t = \lambda z{:}\sigma.t'$

$$\dfrac{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash t'{:}\sigma}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma \vdash \lambda z{:}\sigma.t'{:}\sigma \to \sigma}$$

Parce que le type de t' est σ, t' ne commence pas par l'abstraction, alors c'est une application. Supposons que c'est l'application de y à t'', alors

$$\dfrac{\dfrac{axiome}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma} \quad y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash t''{:}\sigma \to \sigma}{(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash (yt''){:}\sigma}$$

Il est raisonnable de chercher maintenant la déduction de $y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash t''{:}\sigma \to \sigma$ en supposant qu'il n'y a pas de variables libres dans t''. On arrive alors à la déduction où y et z sont introduites par wkn, et il ne reste que de trouver une déduction de $\vdash t''{:}\sigma \to \sigma$ Le terme t'' le plus simple est $t'' = \lambda x{:}\sigma.x$. Enfin

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{axiome}{x{:}\sigma \vdash x{:}\sigma}}{\vdash (\lambda x{:}\sigma.x){:}\sigma \to \sigma}}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma \vdash (\lambda x{:}\sigma.x){:}\sigma \to \sigma}}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash (\lambda x{:}\sigma.x){:}\sigma \to \sigma}}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma, z{:}\sigma \vdash y(\lambda x{:}\sigma.x){:}\sigma}}{y{:}(\sigma \to \sigma) \to \sigma \vdash \lambda z{:}\sigma.(y(\lambda x{:}\sigma.x)){:}\sigma \to \sigma}$$