Raisonnement spatial qualitatif : le cas du mouvement

Philippe Muller

IRIT
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex
muller@irit.fr

RÉSUMÉ. *Nous présentons dans cet article une théorie modélisant le mouvement d'un point de vue topologique dans une perspective symbolique. Partant d'un domaine incluant les « histoires » d'objets dans l'espace-temps, nous introduisons des relations topologiques et temporelles sur cet espace-temps qui permettent de caractériser des classes de changements spatiaux entre entités. Cette théorie peut ainsi rendre compte d'information spatiale qualitative au sens où elle opère à un certain niveau de sous-spécification (l'information topologique) qui permet de raisonner sur des informations symboliques imprécises ou incomplètes. On teste l'adéquation de ces structures au sens commun par la façon dont elles permettent de représenter des notions intuitives, notamment une partie de la sémantique du langage naturel lié au mouvement.*

ABSTRACT. *We present here a theory of motion from a topological point of view, in a symbolic perspective. Taking space-time histories of objects as primitive entities, we introduce temporal and topological relations on the thus defined space-time to characterise classes of spatial changes. The theory thus accounts for qualitative spatial information, dealing with underspecified, symbolic information when accurate data is not available or unnecessary. The adequation of these structures to commonsense is shown by the way they allow for the representation of intuitive concepts, among which is the semantics of the expression of motion in natural langage.*

MOTS-CLÉS : *Représentation des connaissances, raisonnement spatial et temporel, mouvement.*

KEY WORDS : *Knowledge representation, spatio-temporal reasoning, motion.*

1. Introduction

1.1. *L'espace, le mouvement et le sens commun*

Le travail présenté dans cet article est une étude du mouvement sous le double point de vue du raisonnement qualitatif et de la représentation de la connaissance spatiale humaine, à des fins computationnelles. Les connaissances spatiales sont centrales dans de nombreux domaines de l'intelligence artificielle, que ce soit en traitement du langage naturel, pour l'interaction homme-machine, pour le raisonnement automatique, en vision artificielle ou pour le traitement de l'information dans les bases de données géographiques. Un effort important a été mené depuis une dizaine d'années pour construire des modèles formels pour la manipulation d'informations spatiales diverses dans des contextes plus ou moins incertains et imprécis, et qui seraient plus facilement manipulables que les données quantitatives brutes, largement répandues en robotique par exemple. La masse de données est en effet un obstacle à une bonne exploitation dans d'autres contextes (bases de données, vision de haut niveau), et leur nature numérique, assez éloignée de la cognition humaine, est souvent une gêne dans les interactions homme-machine. Le « raisonnement spatial qualitatif » (RSQ) [COH 96], [VIE 97] est une branche récente en représentation des connaissances, qui s'est focalisée sur ces problèmes et dans laquelle nous situons nos travaux. Peu de travaux ont abordé le problème de la représentation du mouvement et de sa caractérisation dans le type d'approche plus cognitif qui est appliqué au traitement de l'information spatiale en RSQ. Nous nous intéressons ici justement au traitement du mouvement à la suite de ce courant. L'importance du mouvement est indéniable dans le traitement d'informations spatiales dans la mesure où la plupart des systèmes qui manipulent des données de ce type sont des systèmes évolutifs. La prise en compte du temps dans les systèmes d'informations géographiques est par exemple un point crucial, et la plupart des changements que ces systèmes doivent gérer sont liés à des propriétés spatiales (localisation, évolution de régions, etc.), [CLA 97], [FRA 95], [HIR 97] ; on peut mentionner aussi l'importance du mouvement dans les systèmes de vision artificielle, la prise en compte à un haut niveau nécessitant alors d'avoir des représentations du mouvement proches de l'opérateur humain [PIN 96]. Enfin, les bases de données multimédias, essentiellement vidéos, ont besoin de modèles qualitatifs du mouvement, pour l'indexation par exemple, cf. notamment [LI 97].

Notre objectif est donc ici la modélisation de certaines propriétés de l'espace et du temps dans un formalisme qui permet de représenter des relations entre entités en mouvement et de raisonner symboliquement sur ces informations dans des contextes sous-spécifiés.

D'un point de vue méthodologique, nous avons essayé de prendre en compte certains aspects cognitifs liés aux concepts dont nous visons la modélisation, afin d'assurer une certaine pertinence pour la représentation symbolique. Pour cela nous avons considéré certains aspects liés à l'expression et à la représentation du mouvement en langage naturel (cf. section 8).

1.2. *Représentations classiques du mouvement*

Nous allons dans cette section examiner les différentes façons dont le mouvement a été appréhendé classiquement en IA et dans certains domaines pertinents pour nos préoccupations.

La conception newtonienne issue de la physique a été prédominante même en dehors de sa discipline d'origine. La plupart des théories qui se rapprochent de nos préoccupations (formaliser les aspects qualitatifs du mouvement) s'écartent de façons variables de cette vue classique où le mouvement est une fonction continue du temps (assimilé à la droite réelle) vers un espace isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Les différentes approches peuvent être distinguées par rapport à quelques choix ontologiques clés vis-à-vis de l'espace en général et donc du mouvement :

1. Le choix d'un espace absolu (qui existe et persiste à travers le temps indépendamment des objets qu'il contient) contre un espace relatif, où seuls les objets physiques ont une existence et sont repérés les uns par rapport aux autres à l'aide de relations spatiales.

2. Le choix d'objets étendus (régions de l'espace ou objets physiques) contre le choix de points comme entités primitives, et le choix correspondant pour le temps (la combinaison étant indépendante, certains auteurs adoptent une approche hybride).

3. Le choix d'un mouvement relatif (par rapport à d'autres entités) ou absolu (par des coordonnées dans un repère), indépendamment du choix effectué pour l'espace.

4. Le choix d'un espace et/ou d'un temps discret ou dense (ce qui altère la nature du mouvement, notamment du point de vue de sa continuité ; de ce point de vue, les cas explicitement discrets sont plutôt rares, [FOR 95b]).

5. Le choix d'un espace-temps primitif contre le maintien du temps et de l'espace comme deux dimensions bien distinctes.

La plupart de ces choix peuvent être faits indépendamment les uns des autres, comme l'atteste la variété des approches recensées. Le choix d'un espace absolu combiné avec le choix d'un espace euclidien et d'un temps isomorphe aux réels est la base de la physique prérelativiste (l'espace et le temps sont alors denses, et les primitives sont des points). On retrouve cette conception dans la plupart des approches en robotique, et dans les travaux se retrouvant sous la bannière de la « physique qualitative » [FOR 87], [FOR 95a], [FAL 90].

La nature relative de l'espace est par contre défendue dans la plupart des approches linguistiques et cognitives ([TAL 75], [HER 82], [ASH 95a], bien que cela n'entraîne pas toujours que le mouvement dans un tel espace soit considéré purement en termes de relations (cf. [ASH 95a]).

Parmi les approches prenant des régions comme primitives, on trouve aussi bien des tenants de l'existence d'un espace absolu [GAL 97], [BOR 96] que des tenants d'un espace relatif [ASH 95b], [CLA 81], [RAN 92]. Certaines de ces approches sont par ailleurs hybrides, incluant des points dans leur domaine d'étude [GAL 97], [ESC 93], [CLA 97], [CLA 81].

Pour le dernier point, la plupart des approches du mouvement modélisent séparément le temps et l'espace, si l'on excepte [HAY 85a] qui traite d'histoires spatiotemporelles d'objets, considérées d'ailleurs comme des modèles possibles des théories de [CLA 81], [VIE 91], et défendues comme base ontologique par [HEL 90].

2. Représentation du mouvement sur une base qualitative

Dans la perspective d'une modélisation du mouvement nous devons donc nous demander quel genre de structures nous pensons être utile par rapport aux possibilités mentionnées dans la section précédente. Nous faisons les choix suivants, reflétant une méthodologie assez répandue en RSQ :

1. notre approche de la représentation est une approche axiomatique : les concepts étudiés sont modélisés via une théorie logique du premier ordre dont on étudie les propriétés expressives et inférentielles ;

2. par souci d'économie ontologique, on tente, d'une part, de limiter autant que possible les différents types d'entités introduites (idéalement, on cherche un domaine homogène avec un seul type d'entités) et, d'autre part, de motiver l'introduction d'entités (une théorie à base de régions suppose un ensemble de régions avec des lois de composition interne, comme la somme, mais ne présuppose pas l'existence de régions de l'espace arbitraires) ;

3. les approches de modélisation ont souvent des niveaux de formalisation, partant de relations abstraites éventuellement raffinables, et l'on essaie de formaliser d'abord les notions qui semblent les plus « élémentaires » (pour l'espace et le temps, la notion d'inclusion, puis éventuellement des notions topologiques, etc.).

Si on suit ces principes, il semble assez naturel de considérer l'espace-temps comme un domaine homogène composé d'« histoires » (des régions de l'espace-temps), comme le proposait [HAY 85b], plutôt que de chercher à combiner des théories de l'espace et du temps séparées (comme par exemple [GAL 93]). Il faut alors formaliser les propriétés structurelles méréologiques et topologiques au moins (suivant en cela les propositions de Clarke [CLA 85] ou Vieu [VIE 91]). L'intérêt principal d'une telle approche est de permettre un niveau de sous-spécification des propriétés de l'espace-temps qui autorise l'expression de contraintes globales d'une façon simple. Certains problèmes liés à l'identité des objets au cours du temps sont ainsi réglés de façon intrinsèque, comme le montre notamment [HEL 90]. Nous pouvons alors résumer nos choix ainsi :

1. Les entités primitives de la théorie sont étendues, à la fois dans le temps et l'espace.

2. La connaissance liée à ces entités est exprimée de façon relationnelle.

Pour mettre en œuvre ces choix, nous présentons maintenant la théorie qui rend compte des propriétés des référents spatiotemporels des objets que nous considérons pour la théorie du sens commun. En partant d'une méréo-topologie sur des entités étendues dans la tradition de Clarke [CLA 81], nous introduisons des relations primitives temporelles aux propriétés voisines des logiques d'événements et nous construisons les liens entre les primitives, afin d'introduire les notions nécessaires à l'expression des propriétés de l'espace-temps.

3. Topologie de l'espace-temps

La théorie topologique qui sert de base à notre théorie des entités spatiotemporelles est reprise en partie de Asher et Vieu [ASH 95b]. Les objets de cette théorie sont considérés comme les référents spatio-temporels d'objets physiques ou d'événements. Nous n'en avons gardé que la partie concernant les notions méréo-topologiques dont nous nous servirons, en laissant de côté la définition du contact « faible » donnée par les auteurs. Cette théorie a l'avantage d'être cohérente et complète pour une classe de modèles présentée dans [ASH 95b] ; nous verrons comment les ajouts que nous y apportons contraignent ces modèles. Les relations exprimables dans cette théorie [1] sont généralement interprétées comme des relations entre régions du plan ou de l'espace à trois dimensions, même si la dimension du domaine est quelconque en toute généralité (ce qui implique que la théorie ne soit pas syntaxiquement complète). Clarke [CLA 85] puis Vieu [VIE 91] ont proposé de considérer les individus de leurs théories comme des régions de l'espace-temps, en ajoutant certaines relations pour traiter du temps, mais avec des caractérisations insuffisantes. La figure 2 montre l'interprétation intuitive spatio-temporelle de la relation d'overlap. L'axe horizontal correspond à la dimension spatiale et l'évolution temporelle est montrée le long de l'axe vertical. L'espace n'est ici unidimensionnel que par commodité, il pourrait aussi bien être de dimension 2, 3, ... n, ce qui serait difficilement représentable graphiquement.

La théorie topologique de [ASH 95b] admet comme seule primitive une relation de connexion C, ici interprétée entre histoires spatio-temporelles. Nous adopterons par la suite les conventions de notation suivantes dans un souci de lisibilité : les quantificateurs universels de tête seront omis, les parenthèses de prédication seront omises quand il n'y a pas d'ambiguïté possible. Les variables sont dénotées par des lettres minuscules. La théorie est une théorie du premier ordre avec égalité, dotée des symboles

1. La figure 1 montre l'ensemble classique des distinctions possibles dans une telle théorie, nommées RCC8 en référence à RCC, une théorie proche [RAN 92].

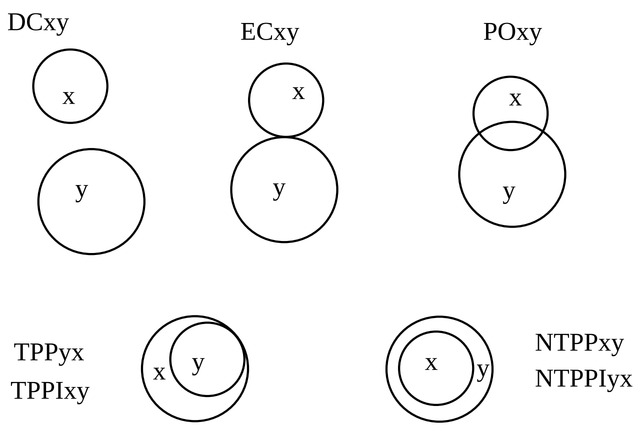

Figure 1. *Les relations méréo-topologiques RCC8.*

fonctionnels $+$, -, $\cdot$, c, i, f, p. La seule constante est notée a. La relation C est réflexive, symétrique et extensionnelle :

A 1 Cxx

A 2 $Cxy \rightarrow Cyx$

A 3 $(\forall z \ (Czx \leftrightarrow Czy) \rightarrow x = y)$

On définit de façon standard les relations suivantes :

D 1 $Pxy \triangleq \forall z \ \ (Czx \rightarrow Czy)$ *(partie de)*

D 2 $PPxy \triangleq Pxy \ \wedge \ \neg Pxy$ *(partie propre)*

D 3 $Oxy \triangleq \exists z \ (Pzx \wedge Pzy)$ *(recouvrement)*

D 4 $POxy \triangleq Oxy \ \wedge \ \neg Pxy \ \wedge \ \neg Pyx$ *(recouvrement partiel)*

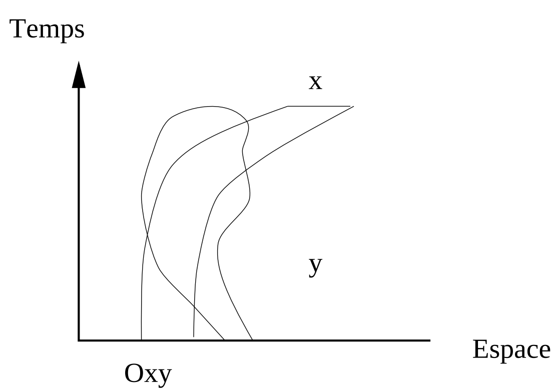

Figure 2. *Une interprétation spatio-temporelle de O(verlap)*

D 5 $ECxy \triangleq Cxy \ \wedge \ \neg Oxy$ *(contact)*

D 6 $TPxy \triangleq Pxy \ \wedge \ \exists z \ (ECzx \wedge ECzy)$ *(partie tangentielle)*

D 7 $NTPxy \triangleq Pxy \ \wedge \ \neg\exists z \ (ECzx \wedge ECzy)$ *(partie non tangentielle)*

L'existence de certaines entités permet de définir les opérateurs suivants (dont certains sont partiels) :

A 4 $\forall x \forall y \exists z \ \forall u \ \ (Cuz \leftrightarrow (Cux \vee Cuy))$

L'objet z, noté $x + y$ représente la « somme » (unique grâce à A 3) de x et y.

A 5 $\forall x \exists y \ \neg Cyx \rightarrow \exists z \ \forall u (Cuz \leftrightarrow \exists v \ (\neg Cvx \wedge Cvu))$

L'objet z, noté $-x$, représente le complément de x.

A 6 $\forall u \ \ Cua$

L'individu a représente l'individu universel (l'espace-temps complet).

A 7 $Oxy \rightarrow \exists z \ \forall u (Cuz \leftrightarrow \exists v \ (Pxy \wedge Pvy \wedge Cvu))$

L'objet z, noté $x \cdot y$ représente l'intersection de x et y.

A 8 $\forall x \exists y \ \forall u \ \ (Cuy \leftrightarrow \exists v \ (NTPvx \wedge Cvu))$

L'individu y, noté ix, représente l'intérieur topologique de x.
La fermeture topologique est alors donnée par :

D 8 $cx \triangleq \ -i(-x)$

A 9 $ca = a$

Il faut ajouter la propriété classique des ouverts :

D 9 $OPx \triangleq \ (ix = x)$

A 10 $(OPx \wedge OPy \wedge Oxy) \rightarrow OP(x \cdot y)$

On peut alors définir la notion de connexité spatio-temporelle et de séparation :

D 10 $SPxy \triangleq \neg Ccxcy$

D 11 $CONx \triangleq \neg(\exists x_1 \exists x_2 (x = x_1 + x_2 \wedge SPx_1x_2))$

4. L'ordre temporel

La méréo-topologie présentée dans sa forme simplifiée est très générale et plutôt considérée comme une théorie topologique d'un espace de dimension quelconque, constitué de régions étendues de même dimension que l'espace global. Pour pouvoir la considérer comme une théorie de l'espace-temps il faut l'enrichir avec les propriétés structurelles du temps. Une conséquence de nos choix ontologiques est que les entités que l'on considère sont étendues dans l'espace et le temps ; la structure adoptée sera donc proche de celle de la « logique d'événements» de Kamp [KAM 79], où il existe une relation d'équivalence temporelle différente de l'égalité. En plus d'une relation d'ordre indiscutable, nous aurons besoin d'exprimer, comme Kamp, les notions d'inclusion et de recouvrement temporels. Celles-ci ne sont cependant pas suffisantes pour décrire les transitions spatiales visées, comme l'a montré Galton [GAL 93]. Il est en effet important de pouvoir différencier un recouvrement d'un simple contact au niveau temporel. La relation « meets » de Allen permet de faire cette différence, mais n'est pas non plus adéquate car elle se restreint à des intervalles convexes. Pour pouvoir distinguer topologiquement les étendues temporelles nous utilisons donc une relation de connexion temporelle, notée $\gtrless$, structurellement analogue à C, mais portant uniquement sur la durée de vie des entités du domaine. Nous évitons ainsi d'introduire des entités (des instants) non homogènes au reste du domaine de notre théorie. Nous en proposons l'axiomatisation suivante, en tenant compte de ses liens avec $<$, la relation d'ordre temporel prise également comme primitive :

A 11 $x \gtrless y \rightarrow y \gtrless x$ *(symétrie)*
A 12 $x \gtrless x$ *(réflexivité)*
A 13 $x \gtrless y \rightarrow \neg x < y$ *(incompatibilité entre $\gtrless$ et $<$)*
A 14 $x < y \rightarrow \neg y < x$ *(antisymétrie de $<$)*
A 15 $(x < y \ \wedge \ y \gtrless z \ \wedge \ z < t) \rightarrow x < t$ *(transfert entre $\gtrless$ et $<$)*

Par l'axiome 12 et l'axiome 15, la relation $<$ est bien transitive. Nous définissons alors les relations classiques :

D 12 $x \subseteq_t y \triangleq \forall z (z \gtrless x \rightarrow z \gtrless y)$ *(inclusion temporelle)*
D 13 $x \sigma y \triangleq \exists z (z \subseteq_t y \ \wedge \ z \subseteq_t x)$ *(recouvrement temporel)*
D 14 $(x \equiv_t y) \triangleq x \subseteq_t y \wedge y \subseteq_t x$ *(équivalence temporelle)*

Et on ajoute alors :

A 16 $x < y \rightarrow (\forall z \ (z \subseteq_t x \rightarrow z < y) \ \wedge \ (z \subseteq_t y \rightarrow x < z))$
(monotonie de $\subseteq_t$ par rapport à $<$)

Ces propriétés permettent de retrouver les axiomes des autres approches de logique d'événements [BEN 95] (à l'exception de la linéarité, nous y revenons plus loin) [2] :

Th 1 $x \subseteq_t x$ *(définition de $\subseteq_t$)*
Th 2 $x \sigma y \rightarrow y \sigma x$ *(définition de σ)*
Th 3 $x < y \rightarrow \neg x \sigma y$
Th 4 $(x < y \ \wedge \ y \sigma z \ \wedge \ z < t) \rightarrow x < t$

---

2. Nous indiquons entre parenthèses les axiomes ou théorèmes nécessaires aux démonstrations évidentes ; les autres sont reportées en annexe.

Th 5 $(x < y \ \wedge \ y \subseteq_t z \ \wedge \ z < t) \to x < t$
Th 6 $(x \subseteq_t y \ \wedge \ y \subseteq_t z) \to x \subseteq_t z$
Th 7 $x \subseteq_t y \to \forall z \ (z \sigma x \to z \sigma y)$
Th 8 $x \subseteq_t y \to \forall z \ ((z < y \to z < x) \ \wedge \ (y < z \to x < z))$ *(Ax. 16)*

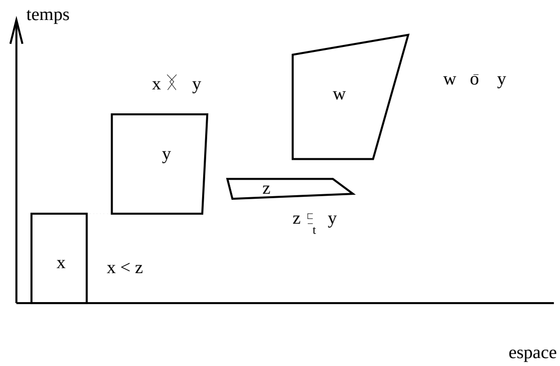

Figure 3. *Les relations temporelles*

Afin de pouvoir retrouver une notion de linéarité temporelle sur l'ordre sous-jacent aux entités temporelles, il nous faut l'équivalent d'un complément temporel ; intuitivement, les entités que l'on peut introduire pour cela correspondent au futur et au passé d'une entité. Le passé et le futur devront être ici les « tranches de l'univers » avant et après l'entité considérée (cf. ci-dessous).

A 17 $\forall x((\exists y(x < y)) \to (\exists z \forall u(x < u \leftrightarrow Puz)))$ *(existence d'un futur)*
A 18 $\forall x((\exists y(y < x)) \to (\exists z \forall u(u < x \leftrightarrow Puz)))$ *(existence d'un passé)*

On appellera futur de x ($f(x)$) et passé de x ($p(x)$) les deux entités dont on a posé l'existence ; leur unicité est montrée facilement. Par exemple, pour le futur, supposons $\exists z_1 \forall u(x < u \to Puz_1)))$ et $\exists z_2 \forall u(x < u \to Puz_2)))$. Avec P$z_1 z_1$ on obtient $x < z_1$ et donc P$z_1 z_2$ et par symétrie on a $z_1 = z_2$.
Les propriétés suivantes sont immédiates :

Th 9 $x < f(x)$
Th 10 $p(x) < x$

5. Contraintes sur l'espace-temps

5.1. *Liens temps/ espace-temps*

Nous allons maintenant préciser les liens entre les relations temporelles et spatio-temporelles qui nous paraissent indispensables pour modéliser la structure globale. La connexion spatiale doit impliquer une forme de connexion temporelle, mais qui doit être de nature similaire : si la connexion implique le partage d'un « point » spatiotemporel, elle doit impliquer le partage d'un « point » temporel :

A 19 $Cxy \rightarrow x \gtrless y$

Ceci règle le cas des points de contact ; il faut lui adjoindre un axiome prenant en compte les liens plus méréologiques entre entités, à savoir que l'inclusion spatiotemporelle entraîne l'inclusion temporelle :

A 20 $Pxy \rightarrow x \subseteq_t y$

Pour que le modèle soit réellement multidimensionnel, les deux relations de contact doivent être distinctes ; les axiomes suivants imposent au moins une autre dimension en plus du temps.

A 21 $\exists x \exists y\ x \gtrless y\ \wedge\ \neg Cxy$

A 22 $\exists x \exists y\ x < y$

La non-convexité temporelle des entités impose les contraintes suivantes sur les liens entre la somme et les relations temporelles :

A 23 $(x < y \wedge z < y) \leftrightarrow (x + z) < y$

A 24 $(x + y) \gtrless z \leftrightarrow\ x \gtrless z\ \vee\ y \gtrless z$

Enfin, nous caractérisons le lien entre connexion temporelle et l'intérieur par l'axiome suivant :

A 25 $ix \gtrless y \rightarrow x \sigma y$

On a alors les propriétés suivantes :

Th 11 $Oxy \rightarrow x\sigma y$ *(Ax. 20)*

Th 12 $(x < y \wedge Pzx \wedge Pty) \rightarrow z < t$ *(Th. 8, Ax. 20)*

Th 13 $(x\sigma y \wedge Pxz \wedge Pyt) \rightarrow z\sigma t$ *(Th. 7, Ax. 20)*

Th 14 $(x + y)\sigma z \leftrightarrow\ x\sigma z\ \vee\ yb\sigma z$ *(Ax. 24)*

5.2. *Parties temporelles*

Pour pouvoir définir des relations entre régions de l'espace qui évoluent et pouvoir exprimer certaines formes de changement, nous allons maintenant définir une notion de tranche temporelle, c'est-à-dire la partie maximum d'une entité spatiotemporelle qui correspond à une certaine période de temps. Cette période de temps sera bien sûr définie par rapport à une autre entité du domaine (le temps n'existant pas indépendamment des entités du domaine). Nous supposons ainsi que toutes les entités que l'on considère peuvent avoir des parties temporelles. La définition adoptée est alors qu'une tranche temporelle x est une partie d'une entité y telle que toute autre partie de y contenue

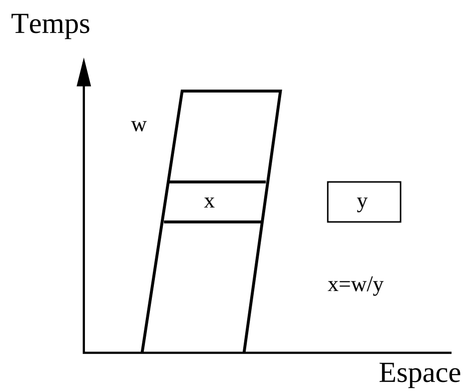

Figure 4. *Tranche temporelle : x est une tranche de w*

temporellement dans x est une partie de x [3] :

D 15 $TSxy \triangleq Pxy \wedge \forall z\ ((Pzy \wedge z \subseteq_t x) \rightarrow Pzx)$

Qui donne les propriétés suivantes :

Th 15 $TSxx$ *(réflexivité)*
Th 16 $(TSxy \wedge TSyx) \rightarrow x = y$ *(antisymétrie)*
Th 17 $(TSxy \wedge TSyz) \rightarrow TSxz$ *(transitivité)*

De plus, une tranche x d'un objet y incluse temporellement dans une autre tranche z de y est aussi une tranche de z :

Th 18 $(TSxy \wedge TSzy\ \wedge\ x \subseteq_t z) \rightarrow TSxz$

Il faut maintenant se poser la question de l'introduction de tranches temporelles. Il semble justifié de considérer que les parties temporelles sont déterminées par les périodes de temps présentes dans le domaine des objets et que chaque objet doit donc avoir une partie temporelle correspondant à la vie des autres entités existant pendant la durée de l'entité considérée. Ceci correspond à l'axiome suivant :

A 26 $y \subseteq_t x \rightarrow \exists u\ (TSux\ \wedge\ u \equiv_t y)$
(Toute entité x a une tranche u temporellement équivalente à tout autre entité y incluse temporellement dans la durée de vie de x.)

Il en résulte alors :

Th 19 $\forall x, y(x \sigma y \rightarrow \exists u(TSux\ \wedge\ u \subseteq_t y))$
Th 20 $Pxy \rightarrow \exists z(TSzy\ \wedge\ z \equiv_t x)$
(Pour toute entité, il existe une tranche temporellement équivalente à toute partie de cette entité.)

3. On désigne une tranche par TS pour *Temporal Slice*.

Th 21 $(TSxy \wedge TSzy \ \wedge \ x \equiv_t z) \rightarrow x = z$
(Cette tranche est unique.)

On notera $x_{/y}$ cette tranche correspondante quand elle existe ; $x_{/y}$ est la partie de x correspondant à la « vie » de y, quand $y \subseteq_t x$.

Par exemple si x désigne l'histoire de Léon Blum et y l'ensemble des entités qui ont constitué le Front Populaire, $x_{/y}$ désigne la partie de l'histoire de Blum pendant le Front Populaire.

5.3. *Tranches temporelles et structure temporelle*

On peut maintenant caractériser plus précisément les propriétés de la structure temporelle de la théorie spatiotemporelle. On a tout d'abord :

Th 22 $TS(f(x), a) \wedge TS(p(x), a)$
(Le futur et le passé d'une entité quelconque sont des tranches temporelles de l'univers.)

Une tranche d'univers peut être considérée comme un épisode du monde considéré. Ce théorème a pour conséquence immédiate l'unicité du futur et du passé pour deux entités contemporaines :

Th 23 $(x \equiv_t y \ \wedge \ \exists z \ (x < z)) \rightarrow f(x) = f(y)$
Th 24 $(x \equiv_t y \ \wedge \ \exists z \ (z < x)) \rightarrow p(x) = p(y)$

On peut définir des notions temporelles utiles comme :

D 16 $CON_t x \triangleq \neg(\exists x_1 \exists x_2 (x = x_1 + x_2 \ \wedge \ \neg(cx_1 \lessgtr cx_2)))$ *(connexité temporelle)*

Et une notion plus spatio-temporelle importante de « normalité » de l'univers :

A 27 $(TSua \ \wedge \ cu \lessgtr cv) \rightarrow Ccucv$

Cette propriété assure que l'univers ne fait pas de sauts spatiotemporels (il n'y a pas d'entités temporellement liées à une tranche d'univers mais déconnectées de cette tranche). Cette propriété peut être vue comme une forme de connexité spatiotemporelle. L'expression $cu \lessgtr cv$ est indispensable pour exclure le cas d'une région ouverte succédant de façon brusque à une autre région (et pour lesquelles on n'aurait pas $u \lessgtr v$).

Pour imposer la linéarité de l'ordre temporel on pourrait imposer un ordonnancement des entités temporellement connexes (qui correspond à l'adaptation de la définition de Kamp à notre primitive de contact temporel) :

$$(\mathrm{CON}_t x \wedge \mathrm{CON}_t y) \rightarrow (x < y \ \vee \ x \lessgtr y \ \vee \ y < x)$$

Mais cela n'est pas suffisant dans le cas général des entités non connexes. Il va donc nous falloir une contrainte plus forte. Tout d'abord la notion d'ordonnancement sera définie comme suit :

D 17 $\mathit{ORD}(x, y) \triangleq x < y \ \vee \ x > y$

Cette relation est symétrique. On introduit aussi :

D 18 $\mathit{PMCT}(x, y) \triangleq Pxy \ \wedge \ \neg\exists z \ (Pzy \wedge \mathit{CON}_t(x + z))$

Cette relation exprime que x est une partie temporellement maximalement connectée de y (une composante temporellement connexe). Pour exprimer un équivalent de l'axiome de linéarité, on affirme ensuite que les composantes connexes de deux entités sont ordonnées, en se servant d'une relation « d'entremêlage » de deux entités temporellement :

D 19 $\mathit{BETW}(y, x) \triangleq \neg\mathit{ORD}(x, y) \ \wedge$
$\forall y'(\mathit{PMCT}y'y \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \ (x = x_1 + x_2 \wedge \mathit{ORD}x_1 y' \wedge \mathit{ORD}x_2 y'))$

Un exemple de configuration correspondant à cette relation est montré figure 5. Cette relation exprime qu'il y a au moins des parties de x et y que l'on peut ordonner. Il faut noter que l'on peut avoir à la fois BETWxy et BETWyx. On impose alors :

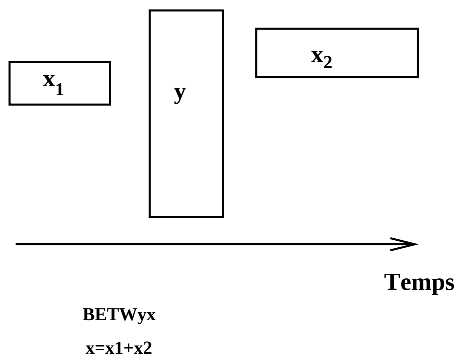

Figure 5. *Un exemple d'entremêlage d'entités temporellement non connexes*

A 28 $\forall x, y(\mathit{BETW}(x, y) \vee \mathit{BETW}(y, x) \vee \mathit{ORD}(x, y) \ \vee \ x \between y)$

Et on impose également qu'il existe toujours une partie temporellement maximalement connectée pour toute entité :

A 29 $\forall x \exists x' \ \mathit{PMCT}x'x$

Cela nous donne les propriétés suivantes :

Th 25 $\mathit{BETW}yx \rightarrow \exists y'(\mathit{PMCT}y'y \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \ (x = x_1 + x_2 \ \wedge \ x_1 < y' < x_2)$

C'est-à-dire que pour deux entités entremêlées, on peut ordonner les composantes connexes de l'une avec des parties de l'autre. Cela nous donne bien la version généralisée de la linéarité que l'on cherchait.

Th 26 $(CON_t x \wedge CON_t y) \rightarrow (x < y \ \vee \ x \lessgtr y \ \vee \ y < x)$

Th 27 $\forall x[(\exists y(y < x)) \rightarrow (p(x) < -p(x))]$ *(le passé est avant son complément)*

Th 28 $\forall x[(\exists y(x < y)) \rightarrow (-f(x) < f(x))]$ *(le futur est après son complément)*

La démonstration de ces deux théorèmes se fait en se servant de l'axiome 28 et de l'axiome de « normalité » 27. Ces théorèmes ont pour corollaires :

Th 29 $(\exists y \ x < y) \rightarrow -f(x) = p(f(x))$ *(le complément d'un futur est son passé)*

Th 30 $(\exists y \ y < x) \rightarrow -p(x) = f(p(x))$ *(le complément d'un passé est son futur)*

Il faut remarquer que la théorie n'impose pas à l'espace topologique global d'être connexe (ce qui serait probablement souhaitable pour une théorie de sens commun, et l'axiome correspondant pourrait alors être ajouté sans problème).

6. Modèles de la théorie

6.1. *Définition*

Nous allons dans cette section présenter ces contraintes qui définissent les modèles de la théorie (notée ST) correspondant aux axiomes 1-29.

On considère un espace topologique classique $\langle \mathcal{E}, T \rangle$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble de points et T un ensemble d'ouverts sur $\mathcal{E}$. On va considérer une structure $\langle \mathcal{E}, T, \mathcal{G}, \prec, [\![\cdot]\!] \rangle$ telle que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Les opérateurs topologiques seront notés « int » et « cl ». L'intersection et l'union classiques seront notées $\cap$ et $\cup$. L'ensemble $\mathcal{G}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{E} \in \mathcal{G}$.

(b) Régularité : l'intérieur d'un élément de $\mathcal{G}$ n'est pas vide et est régulier ($int(cl(X)) = int(X)$) et est dans $\mathcal{G}$. Sa fermeture est régulière : ($cl(int(X)) = cl(X)$) et appartient à $\mathcal{G}$. Les opérateurs $\cup^*$ et $\cap^*$ désignent alors les opérateurs d'union et d'intersection qui préservent la « régularité » des intérieurs et des fermetures :

$$X \cup^* Y = X \cup Y \cup int(cl(X \cup Y))$$
$$X \cap^* Y = X \cap Y \cap cl(int(X \cap Y))$$

(c) Si $X \in \mathcal{G}$ et $X \neq \mathcal{E}$ alors $(\mathcal{C}(X)/_{\mathcal{E}}) \in \mathcal{G}$ (si le complément de X dans $\mathcal{E}$ n'est pas vide, il est dans $\mathcal{G}$)

(d) Si $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ et $int(X \cap Y) \neq \emptyset$, alors $X \cap^* Y \in \mathcal{G}$. (L'intersection $\cap^*$ de deux éléments de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$ si cette intersection a un intérieur non vide.)

(e) Si $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$, $X \cup^* Y \in \mathcal{G}$. (L'union $\cup^*$ de deux éléments de $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{G}$.)

Ces propriétés caractérisent les modèles pour l'axiomatisation de C que l'on a repris de [ASH 95b] et où on a enlevé les axiomes nécessaires à la définition du contact faible. Nous considérons quant à nous une structure plus contrainte dans la mesure où l'on a un ordre strict partiel sur les points, noté $\prec$. On notera $\approx_t$ la relation d'équivalence [4] sur les points définie comme suit :

Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}$ et $\beta \in \mathcal{E}$, $\alpha \approx_t \beta$ si et seulement si : pour tout γ $(\gamma \prec \alpha \Leftrightarrow \gamma \prec \beta)$ et $(\alpha \prec \gamma \Leftrightarrow \beta \prec \gamma)$.

La structure considérée a les propriétés supplémentaires suivantes, où les lettres grecques désignent des éléments de $\mathcal{E}$:

(f) Pour tout $\alpha \in \mathcal{E} \quad \alpha \not\prec \alpha$

(g) Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}, \beta \in \mathcal{E}, \gamma \in \mathcal{E}$, $\alpha \prec \beta$ et $\beta \prec \gamma$ impliquent $\alpha \prec \gamma$

(h) Pour tout $\alpha \in \mathcal{E}, \beta \in \mathcal{E}$, $\alpha \approx_t \beta \ \vee \ \beta \prec \alpha \ \vee \ \alpha \prec \beta$

On définit alors, par commodité, les fonctions suivantes de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$:

$\text{TPS}(X) = \{ \alpha \mid \exists \beta \in X \ \beta \approx_t \alpha \}$

$f^*(X) = \{ \alpha \mid \forall \beta \in X \ \beta \prec \alpha \}$

$p^*(X) = \{ \alpha \mid \forall \beta \in X \ \alpha \prec \beta \}$

Et la relation suivante :

$X < Y$ si et seulement si $\forall \alpha \in X \ \forall \beta \in Y$, on a $\alpha \prec \beta$

On a encore les contraintes suivantes :

(i) Pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $\text{TPS}(X) \subseteq \text{TPS}(Y)$ on a aussi $Y \cap \text{TPS}(X) \in \mathcal{G}$ Cette contrainte est facilement compatible avec les autres car $Y \cap \text{TPS}(X)$ a un intérieur non vide puisque Y et X (et donc $\text{TPS}(X)$) ont des intérieurs non vides.

(j) Pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $X < Y$ on a aussi $f^*(X) \in \mathcal{G}$ et $p^*(Y) \in \mathcal{G}$. Là aussi les nouvelles entités ont forcément un intérieur non vide et une fermeture régulière. Cet axiome correspond aux axiomes d'existence du passé et du futur des entités convenables.

(k) Il existe $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$, tels que $X < Y$.

(l) Il existe $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $\text{TPS}(X) \cap \text{TPS}(Y) \neq \emptyset$et $X \cap Y = \emptyset$.

(m) « Normalité » de l'univers : pour tout $X \in \mathcal{G}$, tel qu'il existe Y avec $X = \text{TPS}(Y)$ et pour tout $Z \in \mathcal{G}$ tel que $cl(\text{TPS}(X)) \cap cl(\text{TPS}(Z)) \neq \emptyset$, alors on a aussi $X \cap Z \neq \emptyset$. Il resterait à étudier la signification en termes de points de cette contrainte, de façon plus intuitive (elle correspond à l'axiome 27).

4. Il est immédiat de vérifier que cette relation est une relation d'équivalence.

6.2. *Sémantique*

La fonction $[\![\cdot]\!]$ est une fonction d'interprétation sur le domaine ; elle assigne une dénotation dans $\mathcal{G}$ aux termes du langage de la théorie spatiotemporelle présentée, et une valeur de vérité aux propositions. En notant g une fonction d'assignation de variables dans $\mathcal{G}$, on donne l'interprétation suivante aux primitives du langage :

$[\![Cxy]\!]_g =$ vrai si et seulement si $[\![x]\!]_g \cap [\![y]\!]_g \neq \emptyset$

$[\![x \between y]\!]_g =$ vrai si et seulement si TPS$([\![x]\!]_g)\cap$TPS$([\![y]\!]_g) \neq \emptyset$

$[\![x < y]\!]_g =$ vrai si et seulement si $[\![x]\!]_g < [\![y]\!]_g$

On appellera S les structures contraintes par (a)-(m) et munies de l'interprétation ci-dessus. On a alors :

$[\![x \cdot y]\!]_g = [\![x]\!]_g \cap^* [\![y]\!]_g$

$[\![x + y]\!]_g = [\![x]\!]_g \cup^* [\![y]\!]_g$

$[\![-x]\!]_g = \mathcal{C}_{/\mathcal{E}}([\![x]\!]_g)$

$[\![ix]\!]_g = int([\![x]\!]_g)$

$[\![cx]\!]_g = cl([\![x]\!]_g)$

$[\![p(x)]\!]_g = p^*([\![x]\!]_g)$

$[\![f(x)]\!]_g = f^*([\![x]\!]_g)$

$[\![x/y]\!]_g = [\![x]\!]_g \cap^*TPS([\![y]\!]_g)$

$[\![x \subseteq_t y]\!]_g =$ vrai ssi TPS$([\![x]\!]_g) \subset$TPS$([\![y]\!]_g)$

On a fait la preuve de la cohérence et de la complétude de la théorie vis-à-vis de cette classe de modèles dans [MUL 98a].

7. Relations purement spatiales

Pour pouvoir comparer l'approche spatiotemporelle aux approches spatiales et temporelles il nous faut aussi introduire des relations assimilables aux relations spatiales. En effet, bien que nous utilisions les relations méréo-topologiques semblables à RCC8, nous ne les interprétons pas spatialement. Intuitivement, une relation purement spatiale doit correspondre à une relation qui ne change pas pendant une certaine période, autrement dit qui est vérifiée entre toutes les tranches temporelles des entités considérées pendant la période de temps pertinente. On peut constater que c'est déjà vrai pour DC quand elle est vraie entre deux entités contemporaines :

Th 31 $(DCxy \wedge x \equiv_t y) \rightarrow \forall u(TSux \rightarrow DCx_{/u}y_{/u})$

On définit donc :

D 20 $DC_{sp}xy \triangleq DCxy \ \wedge \ x \equiv_t y$

Pour les autres relations de RCC8, on peut prendre les définitions suivantes (R_{sp} désignera l'équivalent purement spatial de R) :

D 21 $EC_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \ \wedge \ \forall u(TSux \rightarrow ECx_{/u}y_{/u})$

D 22 $O_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \wedge Oxy \ \wedge \ x \equiv_t (x \cdot y)$

Car on a alors :

Th 32 $O_{sp}xy \rightarrow \forall u(TSux \rightarrow Ox_{/u}y_{/u})$

De même :

D 23 $PO_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \wedge POxy \ \wedge \ x \equiv_t (x \cdot y)$

Car on a alors :

Th 33 $PO_{sp}xy \rightarrow \forall u(TSux \rightarrow POx_{/u}y_{/u})$

On pose également :

D 24 $P_{sp}xy \triangleq Pxy \ \wedge \ x \equiv_t y$

et on a bien :

Th 34 $(Pxy \ \wedge \ x \equiv_t y) \rightarrow \forall u(TSux \rightarrow PPx_{/u}y_{/u})$

D 25 $TPP_{sp}xy \triangleq x \equiv_t y \ \wedge \ \forall u(TSux \rightarrow TPPx_{/u}y_{/u})$

La définition de NTPP$_{sp}xy$ se distingue un peu de la structure des autres définitions purement spatiales car cette relation doit pouvoir être valide aussi sur une période de temps fermée, ce qui est impossible avec TSzx $\rightarrow$NTPP$x_{/z}y_{/z}$, car pour $z = x$ on force NTPPxy, ce qui rend impossible simultanément $x \equiv_t y$ et que y soit fermé (puisque x est ouvert). Afin de garder toute l'expressivité nécessaire pour ce que l'on vise, nous adoptons donc la définition suivante :

D 26 $NTPP_{sp}xy \triangleq Pxy \ \wedge \ x \equiv_t y \ \wedge \ \neg\exists z \ (z \subseteq_t x \wedge ECzx \wedge ECzy)$

Et on a alors une propriété plus faible sur les tranches :

Th 35 $NTPP_{sp}xy \rightarrow \forall z(TSz(ix) \rightarrow NTPP(x_{/z})(y_{/z})$

Les relations spatiales TPP^{-1} et NTPP^{-1} se définissent alors immédiatement.

Il faut noter que la théorie autorise des entités non connexes spatiotemporellement, ce qui peut correspondre à des cas de figure très différents : soit une coupure temporelle (l'histoire de la Pologne en tant qu'État en est un exemple), soit une coupure « spatiale » (comme le territoire français). On peut par contre avoir une entité spatio-temporellement connexe même si elle est temporairement non connexe spatialement (la rencontre de deux objets initialement séparés définit une histoire spatiotemporellement connexe). On voit ainsi le pouvoir expressif de cette théorie, qui ne nécessite pas de contraintes extra-topologiques (sur la vitesse de déplacement, la rigidité des objets considérés, etc.).

8. Représentation de mouvements naturels

8.1. *Catégories de mouvements de sens commun*

Sur la base de la seule méréo-topologie spatiotemporelle ST on peut définir des trajectoires spatiotemporelles très différentes, et si cette expressivité est *a priori* un avantage pour la représentation, c'est aussi un inconvénient pour le raisonnement. Un objectif raisonnable dans la perspective du raisonnement qualitatif serait donc de définir un ensemble de configurations dans l'espace-temps qui soit à la fois assez expressif pour couvrir une partie de ce que l'on veut exprimer pour une tâche donnée et en même temps assez contraint pour permettre une utilisation pratique raisonnable.

Beaucoup d'auteurs en linguistique ont cherché à classer des configurations de mouvements à partir notamment de l'étude de certains verbes (cf. [TAL 83] pour ce qui est des facteurs « géométriques » par exemple). [SAB 95], par exemple, considère le mouvement essentiellement comme une caractérisation complète de la position d'un objet pendant trois phases successives (au début, pendant et à la fin de l'événement).

Nous allons, pour notre part, reprendre l'étude des verbes de déplacement transitifs du français présentée dans [MUL 98b] pour tenter d'isoler les aspects essentiels qui permettraient de se concentrer sur des formes de trajectoires particulières exprimables dans notre théorie ST (parmi toutes les possibilités) et qui correspondent aux mouvements les plus « basiques », intuitivement, que l'on peut extraire de l'observation du langage naturel. De ce point de vue, les verbes de déplacement transitifs décrivent des relations entre deux entités (le sujet et l'objet du verbe) dont l'une au moins est en mouvement, et fournissent un ensemble de relations, non exhaustif mais naturel et à même de servir de base à la représentation du mouvement.

Dans l'étude des verbes de déplacement, les facteurs principaux qui apparaissent sont non pas les localisations successives d'un objet pendant l'événement décrit, mais seulement l'accent mis sur une phase du mouvement ou une autre. L'étude de [MUL 98b] montre que l'on peut isoler trois traits caractérisant les mouvements décrits par certains verbes :

— la polarité, c'est-à-dire la phase du mouvement sur laquelle l'attention est portée. Elle peut être initiale (quitter), finale (atteindre) ou médiane (traverser) ;

— la relation topologique entre les deux entités concernées par un mouvement relatif, au moment de la phase définie par la polarité, soit l'inclusion (quitter la ville), soit le contact (atteindre l'arbre), soit aucune (non-connexion) ;

— le changement ou non de cette relation au cours du mouvement (arpenter la ville vs. quitter la ville).

En combinant ces traits on retrouve six classes de verbes non vides : les initiaux internes (comme quitter), les finaux internes (atteindre) ou de contact (heurter), les médians internes (arpenter), non topologiques (contourner), et les médians avec changement (traverser). Nous allons ici définir des classes de changement topologique qui correspondent à ces verbes, en ne gardant que les aspects topologiques, dans la mesure où on cherche des relations basiques entre régions de l'espace-temps. L'étude lexicale ne doit en conséquence être vue ici que comme un guide pour la définition de classes topologiques de mouvement significatives, car on laisse de côté des aspects de la sémantique qui dépassent la simple géométrie.

8.2. *Quelques concepts spatiotemporels*

Nous allons d'abord introduire quelques notions qui nous seront indispensables par la suite. Nous utiliserons souvent un cas de recouvrement partiel particulier, correspondant à un recouvrement spatiotemporel et pas uniquement temporel (une tranche de x doit être complètement hors de y pendant un moment) :

D 27 $\mathit{STPO}xy \triangleq Oxy \;\wedge\; \neg(x \equiv_t x \cdot y) \;\wedge\; \neg(y \equiv_t y \cdot x)$

Avec cette définition on a bien en effet la propriété voulue :

Th 36 $\mathit{STPO}xy \rightarrow \exists u(\mathit{TS}ux \;\wedge\; \neg Cuy)$

Nous introduisons de plus une relation d'inclusion de tranche :

D 28 $\mathit{LOC}xy \triangleq \exists z(\mathit{TS}zx \wedge Pzy)$ *(une tranche de x fait partie de y)*

Et une relation d'inclusion temporaire :

D 29 $\mathit{TEMP\_IN}xy \triangleq \mathit{LOC}xy \wedge \mathit{STPO}xy$ *(x est « temporairement » une partie de y)*

Nous allons également définir des relations temporelles équivalentes à celles de Allen, par commodité (il faut noter que = et b(efore) existent déjà et correspondent à $\equiv_t$ et $<$) :

D 30 $\mathit{MEETS}xy \triangleq ix < iy \wedge x \between y$

D 31 $\mathit{START}xy \triangleq x \subseteq_t y \wedge \forall z(z < x \rightarrow z < y) \wedge \neg y \subseteq_t x$

D 32 $\mathit{FINISH}xy \triangleq x \subseteq_t y \;\wedge\; \forall z(x < z \rightarrow y < z) \;\wedge\; \neg y \subseteq_t x$

Pour éviter toute confusion, l'overlap de Allen sera noté O_t ; il diffère en effet de σ car il implique une orientation (une partie du premier terme est situé « avant » le deuxième terme mis en relation) :

D 33 $O_t xy \triangleq x \sigma y \;\wedge\; \exists u(\mathit{START}uy \wedge \mathit{FINISH}ux)$

D 34 $\mathit{DURING}xy \triangleq x \subseteq_t y \;\wedge\; \neg \mathit{FINISH}xy \;\wedge\; \neg \mathit{START}xy \wedge \neg y \subseteq_t x$

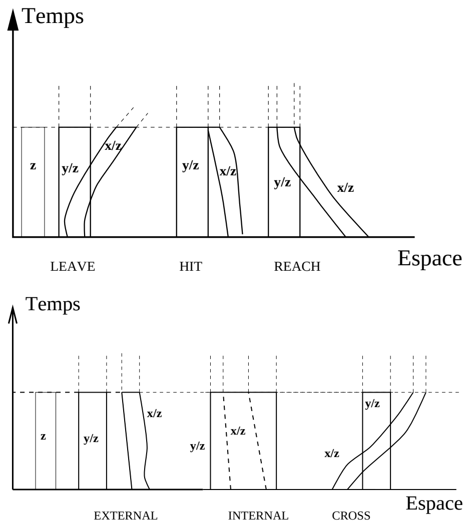

Figure 6. *Les six classes de mouvement « naturelles »*

Les relations inverses peuvent être définies d'une façon évidente et seront notées MEETS$_i$, START$_i$, FINISH$_i$, O$_i$, DURING$_i$. Ces relations ne vérifient pas tous les axiomes de [ALL 85] sur des intervalles de temps puisqu'il n'y a pas d'équivalence entre l'étendue temporelle d'une entité et cette entité elle-même.

8.3. *Classes naturelles*

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour spécifier topologiquement les comportements de classes de mouvement prenant en compte les aspects vus section 8.1. Ces classes de mouvement mettent trois individus spatiotemporels en relation : le premier argument (z) correspond à l'entité qui « temporalise » la relation : la relation est valable pendant la durée de vie de l'entité z. En fait, la relation porte donc entre $x_{/z}$ et $y_{/z}$, x et y (les deux autres termes de la relation) étant deux autres entités spatiotemporelles. Intuitivement, cela peut correspondre à deux entités x et y dont on exprime la relation « pendant » une éventualité (un état ou un événement) z. Nous allons, conformément à l'étude lexicale, définir six classes de mouvement notées LEAVE, REACH, HIT, CROSS, INTERNAL and EXTERNAL ; intuitivement, ces classes correspondent aux comportements topologiques des classes des verbes suivants : LEAVE représente la classe de quitter, REACH la classe d'atteindre, HIT la classe de heurter et CROSS la classe de traverser, INTERNAL correspond à la classe de verbes comme arpenter dont le comportement topologique est très sous-spécifié et EXTERNAL correspond à la classe de verbes comme éviter, contourner (cf. figure 6). Elles sont cependant plus « abstraites » dans la mesure où, par exemple, on ne considère pas les notions d'intérieur d'une entité, mais on ne s'attache qu'à caractériser des relations basiques. De la même façon, la classe CROSS exprime le déplacement d'une entité qui « rentre » dans une autre puis en « ressort ».

D 35 $\mathit{REACH}zxy \triangleq \mathit{TEMP\_IN}x_{/z}y_{/z} \wedge \mathit{FINISH}(x_{/z} \cdot y_{/z})z$

D 36 $\mathit{LEAVE}zxy \triangleq \mathit{TEMP\_IN}x_{/z}y_{/z} \wedge \mathit{START}(x_{/z} \cdot y_{/z})z$

D 37 $\mathit{INTERNAL}zxy \triangleq \mathit{PP}x_{/z}y_{/z}$

D 38 $\mathit{HIT}zxy \triangleq$
$\mathit{EC}x_{/z}y_{/z} \wedge \forall x_1, y_1[(Px_1x_{/z} \wedge Py_1y_{/z} \wedge \mathit{EC}x_1y_1) \rightarrow (\mathit{FINISH}x_1z \wedge \mathit{FINISH}y_1z)]$

D 39 $\mathit{EXTERNAL}zxy \triangleq \neg Cx_{/z}y_{/z}$

D 40 $\mathit{CROSS}zxy \triangleq$
$\exists z_1, z_2(z = z_1 + z_2 \wedge \mathit{MEETS}z_1z_2 \wedge \mathit{REACH}z_1xy \wedge \mathit{LEAVE}z_2xy)$

9. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une théorie du mouvement de sens commun sous l'angle topologique. La définition d'une théorie en logique des prédicats a permis la caractérisation des propriétés que l'on souhaite pour un modèle de l'espace et du temps dans cette perspective : les entités du domaine considéré sont des régions de l'espace-temps, interprétées comme les référents d'histoires d'objets physiques ou d'événements spatiotemporels, dont on peut décrire les relations dans le temps et l'espace. Nous avons exprimé dans ce formalisme un ensemble de relations entre histoires correspondant à des mouvements relatifs d'entités spatiales, et montré comment l'on peut raisonner sur ces informations en les combinant avec des informations purement temporelles ou spatiales. Nous pensons avoir ainsi fourni une base à la représentation de concepts intuitifs liés à l'espace et au temps, dans une perspective symbolique où l'on ne dispose et ne manipule pas des informations géométriques exactes. Ce faisant, nous nous sommes restreints aux informations de nature topologique en laissant de côté ce qui pourrait constituer un enrichissement futur, à savoir l'intégration de données géométriques plus complètes, comme des informations sur les distances relatives des objets ou leur orientation dans l'espace. Par ailleurs, il reste à explorer les possibilités inférentielles de la théorie, pour pouvoir disposer d'une gamme complète de systèmes de déduction sur des informations de nature spatiotemporelle.

Bibliographie

[ALL 85] ALLEN J. et HAYES P., « A Common-sense Theory of Time ». In *Proceedings of IJCAI'85*, 1985.

[ASH 95a] ASHER N. et SABLAYROLLES P., « A typology and discourse semantics for motion verbs and spatial PPs in French ». *Journal of Semantics*, vol. 12, n° 1, p. 163-209, juin 1995.

[ASH 95b] ASHER N. et VIEU L., « Towards a geometry of common sense: a semantics and a complete axiomatisation of mereotopology ». In *Proceedings of IJCAI95*, 1995.

[BEN 95] VAN BENTHEM J., « Temporal Logic ». In GABBAY, Ed., *Logics for Epistemic and Temporal Reasoning*, vol. 4 de *Handbook of Logics for AI and Logic Programming*. Oxford University Press, 1995.

[BOR 96] BORGO S., GUARINO N. et MASOLO C., « A Pointless Theory of Space Based on Strong Connection and Congruence ». In CARLUCCI AIELLO L. et SHAPIRO S., Eds., *Proceedings of KR'96, Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, p. 220-229, San Mateo (CA), 1996. Morgan Kauffmann.

[CLA 81] CLARKE B., « A calculus of individuals based on 'connection' ». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 22, n° 3, p. 204-218, July 1981.

[CLA 85] CLARKE B., « Individuals and points ». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 26, n° 1, p. 61-75, 1985.

[CLA 97] CLARAMUNT C., THÉRIAULT M. et PARENT C., « A Qualitative Representation of Evolving Spatial Entities in Two-dimensional Topological Spaces. » In CARVER S., Ed., *Innovations in GIS*, vol. V, p. 119-129. Taylor & Francis, 1997.

[COH 96] COHN A., Calculi for Qualitative Spatial Reasoning. In CALMET J., CAMPBELL J. et PFALZGRAF J., Eds., *Artificial Intelligence and Symbolic Mathematics*, vol. 1138 de *LNCS*, p. 124-143. Springer Verlag, Heidelberg, 1996.

[ESC 93] ESCHENBACH C. et HEYDRICH W., « Classical Mereology and Restricted Domains ». In GUARINO N. et POLI R., Eds., *Proceedings of the International Workshop on Formal Ontology in Conceptual Analysis and Representation*, p. 205-217, Padova, 1993.

[FAL 90] FALTINGS B., « Qualitative Kinematics in Mechanisms ». *Artificial Intelligence*, vol. 44, n° 1-2, p. 89-119, 1990.

[FOR 87] FORBUS K., NIELSEN P. et FALTINGS B., « Qualitative kinematics : a framework ». In *Proceedings of IJCAI'87*, p. 430-435, 1987.

[FOR 95a] FORBUS K., « Qualitative Spatial Reasoning. Framework and Frontiers. « In GLASGOW J., NARAYANAN N. et CHANDRASEKARAN B., Eds., *Diagrammatic Reasoning. Cognitive and Computational Perspectives*, p. 183-210. AAAI Press / MIT Press, Menlo Park (CA) and Cambridge (MA), 1995.

[FOR 95b] FORREST P., « Is Space-Time Discrete or Continuous ? An Empirical Question ». *Synthese*, vol. 103, p. 327-354, 1995.

[FRA 95] FRANK A. et KUHN W., Eds., *Spatial Information Theory - Proceedings of COSIT'95*, n° 988 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1995.

[GAL 93] GALTON A., « Towards an Integrated Logics of Space, Time and Motion ». IJCAI, 1993.

[GAL 97] GALTON A., « Space, Time and Movement ». In STOCK O., Ed., *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer, 1997.

[HAY 85a] HAYES P., « An Ontology for Liquids ». In ET R.C. MOORE J. H., Ed., *Formal Theories of the Commonsense World*. Ablex Publishing Corporation, Norwood, 1985.

[HAY 85b] HAYES P., « The Second Naive Physics Manifesto ». In ET R.C. MOORE J. H., Ed., *Formal Theories of the Commonsense World*, p. 1-36. Ablex Publishing Corporation, Norwood, 1985.

[HEL 90] HELLER M., *The Ontology of Physical Objects: Four-Dimension Hunks of Matter*. Cambridge University Press, 1990.

[HER 82] HERSKOVITS A., Space and Preposition in English. PhD thesis, Stanford University, Stanford (CA), 1982.

[HIR 97] HIRTLE S. et FRANK A., Eds., *Spatial Information Theory - Proceedings of COSIT'97*. N° 1329 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1997.

[KAM 79] KAMP H., « Events, Instants and temporal reference ». In BÄUERLE EGLI V. S., Ed., *Meaning, use and interpretation of language*, p. 376-417. de Gruyter, Berlin, 1979.

[LI 97] LI J., ÖZSU T. et SZAFRON D., « Modelling of Moving Objects in a Video Database ». In *Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia Computing and Systems*, p. 336-343, Ottawa, Canada, juin 1997.

[MUL 98a] MULLER P., Éléments d'une théorie du mouvement pour la modélisation du raisonnement spatio-temporel de sens commun. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.

[MUL 98b] MULLER P. et SARDA L., « Représentation de la Sémantique des Verbes de Déplacements Transitifs du Français ». In *Actes de la Conférence Traitement Automatique du Langage Naturel (TALN'98)*, Paris, juin 1998.

[PIN 96] PINHANEZ C. et BOBICK A., « Approximate World Models: Incorporating Qualitative and Linguistic Information into Vision Systems ». In *Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence and the Eighth Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference*, p. 1116-1123, Menlo Park, Août 4-8 1996. AAAI Press / MIT Press.

[RAN 92] RANDELL D., CUI Z. et COHN A., « A Spatial Logic Based on Regions and Connection ». San Mateo CA, 1992. KR'92, Morgan Kaufmann.

[SAB 95] SABLAYROLLES P., Sémantique formelle de l'expression du mouvement. De la sémantique lexicale au calcul de la structure du discours en français. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, 1995.

[TAL 75] TALMY L., « Syntax and Semantics of Motion ». In KIMBALL J., Ed., *Syntax and Semantics*, vol. 4. Academic Press, 1975.

[TAL 83] TALMY L., « How Language Structures Space ». In ET L. ACREDOLO H. P., Ed., *Spatial Orientation: theory, research and application*, p. 225-282. Plenum, New York, 1983.

[VIE 91] VIEU L., Sémantique des relations spatiales et inférences spatio-temporelles: une contribution à l'étude des structures formelles de l'espace en langage naturel. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1991.

[VIE 97] VIEU L., « Spatial Representation and Reasoning in AI ». In STOCK O., Ed., *Spatial and Temporal Reasoning*, p. 3-40. Kluwer, 1997.

Annexe : Preuves des théorèmes

On montre d'abord les lemmes suivants :

Lemme 1 $x \subseteq_t y \to x \lessgtr x$

Preuve

1 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall u\ (u \between x \rightarrow u \between y)$ (déf. de $\subseteq_t$)
2 $x \between x$ (Ax. 12)
3 $x \between y$ (avec 1 et 2)
□

Lemme 2 $x \sigma y \rightarrow x \between y$

Preuve

1 $x\sigma y \rightarrow \exists z (z \subseteq_t y\ \wedge\ z \subseteq_t x)$
2 $\forall u\ (u \between z \rightarrow u \between y)$ (1 et déf. de $\subseteq_t$)
3 $\forall u\ (u \between z \rightarrow u \between x)$ (1 et déf. de $\subseteq_t$)
4 $z \between z$ (Ax 11)
5 $z \between x$ (4 et 2)
6 $x \between y$ (Ax 4.12, 5 et 3)
□

Th 3 $x < y \rightarrow \neg x \sigma y$
On montre la contraposée :

Preuve

1 $x\sigma y \rightarrow x \between y$ (Lemma 2)
2 $\neg x < y$ (Ax 4.13 et 1)
□

Th 4 $(x < y\ \wedge\ y\sigma z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$

Preuve

1 $y\sigma z \rightarrow y \between z$ (Lemme 2)
2 $(x < y\ \wedge\ y \between z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 15)
3 $(x < y\ \wedge\ y\sigma z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$ (avec 1 et 2)
□

Th 5 $(x < y\ \wedge\ y \subseteq_t z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$

Preuve

1 $y \subseteq_t z \rightarrow y \between z$ (Lemme 1)
2 $(x < y\ \wedge\ y \between z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$ (Ax. 15)
3 $(x < y\ \wedge\ y \subseteq_t z\ \wedge\ z < t) \rightarrow x < t$ (avec 1 et 2)
□

Th 6 $(x \subseteq_t y\ \wedge\ y \subseteq_t z) \rightarrow x \subseteq_t z$

Preuve

1 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall u\ (u \between x \rightarrow u \between y)$ (déf. de $\subseteq_t$)
2 $y \subseteq_t z \rightarrow \forall u\ (u \between y \rightarrow u \between z)$ (déf. de $\subseteq_t$)

3 $\forall u\ (u \lessgtr x \rightarrow u \lessgtr z)$ soit la définition de $x \subseteq_t z$ (avec 1 et 2)

$\square$

Th 7 $x \subseteq_t y \rightarrow \forall z\ (z\sigma x \rightarrow z\sigma y)$

Preuve

1 $z\sigma x \rightarrow \exists u\ (u \subseteq_t x\ \wedge\ u \subseteq_t z)$ (déf. de σ)
2 $(u \subseteq_t x\ \wedge\ x \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y$ (Th.)
3 $\exists u\ (u \subseteq_t y\ \wedge\ u \subseteq_t z) \rightarrow z\sigma y$ (1, 2 et déf. de σ)

$\square$

Th 11 $Oxy \rightarrow x\sigma y$

Preuve

1 $\exists z\ (\mathrm{P}zy \wedge \mathrm{P}zx)$ (Oxy)
2 $\mathrm{P}zy \rightarrow z \subseteq_t y$ (Ax 20 et 1)
3 $\mathrm{P}zx \rightarrow z \subseteq_t x$ (1)
4 $x\sigma y$ (déf. de σ et 2 et3)

$\square$

Th 12 $(x < y \wedge Pzx \wedge Pty) \rightarrow z < t$

Preuve

1 $\mathrm{P}zx \rightarrow z \subseteq_t x$ (Ax. 20)
2 $(x < y\ \wedge\ z \subseteq_t x) \rightarrow z < y$ (Ax. 16)
3 $\mathrm{P}ty \rightarrow t \subseteq_t y$ (Ax. 20)
4 $(z < y\ \wedge\ t \subseteq_t y) \rightarrow z < t$ (Ax. 16et 1, 2, 3)

$\square$

Th 13 $(x\sigma y \wedge Pxz \wedge Pyt) \rightarrow z\sigma t$

Preuve

1 $\mathrm{P}xz \rightarrow x \subseteq_t z$ (Ax. 20)
2 $\mathrm{P}yt \rightarrow y \subseteq_t t$ (Ax. 20)
3 $x\sigma y \rightarrow \exists u\ (u \subseteq_t x\ \wedge\ u \subseteq_t y)$ (déf. de σ)
4 $(u \subseteq_t x\ \wedge\ x \subseteq_t z) \rightarrow u \subseteq_t z$ (Ax. 6)
5 $(u \subseteq_t y\ \wedge\ y \subseteq_t t) \rightarrow u \subseteq_t t$ (Ax. 6)
6 $(x\sigma y \wedge \mathrm{P}xz \wedge \mathrm{P}yt) \rightarrow z\sigma t$ (déf. de σ et 1, 2, 3, 4, 5)

$\square$

Th 14 $(x+y)\sigma z \leftrightarrow\ x\sigma z\ \vee\ y\sigma z$
On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3 $u \subseteq_t (x+y) \rightarrow (u\sigma x\ \vee\ u\sigma y)$

Preuve

1 $\mathrm{C}(iu)u$ (déf. de l'intérieur)

2	$iu \mathrel{>\!\!\!<} u$	(1 et ax. 19)
3	$iu \mathrel{>\!\!\!<} (x+y)$	(hypothèse, déf. de $\subseteq_t$ et 2)
4	$iu \mathrel{>\!\!\!<} x \ \vee \ iu \mathrel{>\!\!\!<} y$	(3 et ax. 24)
5	$iu \mathrel{>\!\!\!<} x \rightarrow u\sigma x$	(ax. 25)
6	$u \mathrel{>\!\!\!<} x \ \vee \ u \mathrel{>\!\!\!<} y$	(4 et 5)

□

On peut alors montrer le sens direct du théorème visé :

Preuve

1	$\exists u \ (u \subseteq_t (x+y) \ \wedge \ u \subseteq_t z)$	(hypothèse et déf. de σ)
2	$u\sigma x \ \vee \ u\sigma y$	(1 et lemme 3)
3	$\exists v \ (v \subseteq_t u \ \wedge \ v \subseteq_t x) \ \vee \ \exists v \ (v \subseteq_t u \ \wedge \ v \subseteq_t y)$	(déf. de σ et 2)
4	$(v \subseteq_t u \ \wedge \ u \subseteq_t z) \rightarrow v \subseteq_t z$	(th. 6)
5	$z\sigma x \ \vee \ z\sigma y$	(3 et 4)

□

Le sens réciproque du théorème est montré par :

Preuve

1	$\mathrm{P}x(x+y) \rightarrow x \subseteq_t (x+y)$	(ax. 20)
2	$x\sigma z \rightarrow \exists u \ (u \subseteq_t x \ \wedge \ u \subseteq_t z)$	(déf. de σ)
3	$u \subseteq_t (x+y)$	(avec 1, 2 et th. 6)
4	$z\sigma(x+y)$	(avec 1 et 2)
5	on prouve de même que $y\sigma z \rightarrow z\sigma(x+y)$.	

□

Th 15 *TS*xx
On a Pxx et $\forall z(\mathrm{P}zx \rightarrow \mathrm{P}zx)$ donc par définition de T, $\forall x \ \mathrm{T}xx$.

Th 16 $(\mathit{TS}xy \wedge \mathit{TS}yx) \rightarrow x = y$
Évident par la définition de T, car $\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}yx \rightarrow x = y$.

Th 17 $(\mathit{TS}xy \wedge \mathit{TS}yz) \rightarrow \mathit{TS}xz$

Preuve

1	$\mathrm{TS}xy \rightarrow \mathrm{P}xy$	(déf. de TS)
2	$\mathrm{TS}yz \rightarrow \mathrm{P}yz$	(déf. de TS)
3	$(\mathrm{P}xy \wedge \mathrm{P}yz) \rightarrow \mathrm{P}xz$	(transitivité de P)
4	$\mathrm{TS}xy \rightarrow \forall u \ ((\mathrm{P}uy \ \wedge \ u \subseteq_t x) \rightarrow \mathrm{P}ux)$	(déf. de TS)
5	$\mathrm{TS}yz \rightarrow \forall u \ ((\mathrm{P}uz \ \wedge \ u \subseteq_t y) \rightarrow \mathrm{P}uy)$	(déf. de TS)
6	$\mathrm{P}xy \rightarrow x \subseteq_t y$	(Ax 20)
7	$(u \subset_t x \ \wedge \ x \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y$	(6)
8	$(\mathrm{P}uz \ \wedge \ u \subseteq_t y) \rightarrow \mathrm{P}uy$	(5)
9	$(\mathrm{P}uy \ \wedge \ u \subseteq_t x) \rightarrow \mathrm{P}ux$	(4)
10	$(\mathrm{P}uz \ \wedge \ u \subseteq_t x) \rightarrow \mathrm{P}ux$	(6, 7, 8, et 9)
11	3 et 10 donnent TSxz par définition de TS.	

□

Th 18 $(TSxy \wedge TSzy \ \wedge \ x \subseteq_t z) \rightarrow TSxz$

Preuve

1 TS$xy \rightarrow$Pxy
2 (Pxy $\wedge$ $x \subseteq_t z \wedge$ TSzy) $\rightarrow$Pxz (déf. de TS.)
3 TS$yz \rightarrow$Pzy (déf. de TS.)
4 (P$uz \wedge$ Pzy) $\rightarrow$Puy (transitivité de P)
5 (Puy $\wedge$ $u \subseteq_t x$) $\rightarrow$Pux (TSxy)
6 (Puz $\wedge$ $u \subseteq_t x$) $\rightarrow$Pux (4 et 5)
7 avec 2 et 6 on tire par définition que TSxz

□

Th 19 $\forall x, y(x\sigma y \rightarrow \exists u(TSux \ \wedge \ u \subseteq_t y))$

Preuve

1 $x\sigma y \rightarrow \exists z \ (z \subseteq_t x \ \wedge \ z \subseteq_t y)$
2 $z \subseteq_t x \rightarrow \exists u$ (TSux $\wedge$ $z \equiv_t u$) (Ax. 26)
3 $(z \equiv_t u \ \wedge \ z \subseteq_t y) \rightarrow u \subseteq_t y$

□

Th 20 $Pxy \rightarrow \exists z(TSzy \ \wedge \ z \equiv_t x)$

Preuve

1 P$xy \rightarrow x \subseteq_t y$ (Ax. 20)
2 $x\sigma y \rightarrow \exists z$ (TSzy $\wedge$ $z \equiv_t x$) (Ax. 26)

□

Th 21 $(TSxy \wedge TSzy \ \wedge \ x \equiv_t z) \rightarrow x = z$

Preuve

1 $\forall u$(Puy $\wedge$ $u \subseteq_t x$) $\rightarrow$Pux (TSxy)
2 TS$zy \rightarrow$Pzy
3 $x \equiv_t z \rightarrow z \subseteq_t x$ (déf de $\equiv_t$)
4 Pzx (avec 1, 2 et 3)
5 Les hypothèses étant symétriques par rapport à x et z, on tire de même que Pxz, d'où finalement $x = z$.

□

Th 22 $TS(f(x), a)$

Preuve

1 P$f(x)a$ (déf. de a)
2 $x < f(x)$ (th. 9)
3 $\forall u \ (u \subseteq_t f(x) \rightarrow x < u)$ (2 et th. 8)
4 $\forall u \ (x < u \rightarrow$P$uf(x))$ (déf. de $f(x)$)
5 $\forall u$ (Pua $\wedge$ $u \subseteq_t f(x) \rightarrow$P$uf(x))$ (4)

6 avec 1 et 5 on tire TS$(f(x), a)$ par définition de TS.

□

On montre de façon similaire que TS$(p(x), a)$.

Th 23 $(x \equiv_t y \wedge \exists z\ (x < z)) \to f(x) = f(y)$

Preuve

1 $x < f(x)$ (déf. de $f(x)$)
2 $(x < f(x) \wedge y \subseteq_t x) \to y < f(x)$ (th. 8)
3 $y < f(x) \to$P$f(x)f(y)$ (déf. de $f(y)$)
4 Les hypothèses étant symétriques par rapport à x et y on tire aussi P$f(x)f(y)$ d'où $f(x) = f(y)$.

□

De même, on a $(x \equiv_t y \wedge \exists z\ (z < x)) \to p(x) = p(y)$

Th 26 $(CON_t x \wedge CON_t y) \to (x < y \vee x \between y \vee y < x)$

Ce théorème est une conséquence immédiate (par l'axiome 28), du lemme suivant, dont nous allons prouver la contraposée :

Lemme 4 $CON_t x \to \neg BETW yx$

Preuve

1
2 $\exists y', x_1, x_2\ (x = x_1 + x_2 \wedge x_1 < y' < x_2)$ (déf de BETW et th. 25)
3 $x_1 < y' < x_2 \to \neg$Ccx_1cx_2 (ax. 13 et ax. 19)
4 $\neg$CON$_t x$ (déf. de CON$_t$ et 3)

□

Th 27 $(\exists y\ x < y) \to -f(x) = p(f(x))$

Preuve

1 $-f(x) < f(x)$ (th. 28)
2 P$(-f(x), p(f(x)))$ (1 et déf. de $p(f(x))$)
3 $p(f(x)) < f(x)$ (déf. de $p()$)
4 $p(f(x)) < f(x) \to \neg f(x) \between p(f(x))$ (ax. 13)
5 $\neg f(x) \between p(f(x)) \to \neg$C$(f(x), p(f(x)))$ (ax. 19)
6 P$(p(f(x)), -f(x))$ (5 et déf. du complément)
7 $-f(x) = p(f(x))$ (2 et 6)

□

De même $(\exists y\ y < x) \to -p(x) = f(p(x))$.

Th 29 $\forall x[(\exists y(y < x)) \to (p(x) < -p(x))]$

Th 30 $\forall x[(\exists y(x < y)) \to (-f(x) < f(x))]$

D'après l'axiome 28 il n'y a que les possibilités suivantes :

1 soit $BETW(-p(x), p(x))$: $\exists u_1, u_2, v(Pu_1p(x) \ \wedge \ Pu_2p(x) \ \wedge \ Pv(-(p(x))) \ \wedge \ u_1 < v < u_2)$
avec $Pu_2p(x)$ on déduit $u_2 < x$ et donc $v < u_2 < x$
et $Pv(p(x))$ d'où $Op(x)(-p(x))$: contradiction ;

2 ou bien $BETW(p(x), -p(x))$: $\exists u_1, u_2, v(Pu_1{-}p(x) \wedge Pu_2{-}p(x) \wedge Pv(p(x)) \wedge u_1 < v < u_2)$
$Pv(p(x))$ implique $v < x$ et donc $u_1 < x$ d'où $Pu_1p(x)$
et donc $Op(x)(-p(x))$: contradiction ;

3 ou bien $-p(x) < p(x)$: d'où $-p(x) < x$ et donc $P(-p(x))p(x)$.

4 ou bien $p(x) \between -(p(x))$: avec l'axiome de normalité et parce que TS$p(x)a$, on obtient alors $Cp(x)(-p(x))$ qui est une contradiction.

Le seul cal possible reste donc $p(x) \ < \ -p(x)$. On montre le théorème analogue pour f de la même façon.