Une logique temporelle pour décrire l'évolution des positions relatives des agents dans l'espace

Philippe Balbiani et Jean-François Condotta

Institut de recherche en informatique de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 04, France

Résumé Nous présentons une logique temporelle avec laquelle nous pouvons décrire l'évolution des positions relatives des agents dans l'espace au cours du temps. Cette logique est une logique modale propositionnelle du temps linéaire dont les formules atomiques sont définies sur la base des relations atomiques de certaines algèbres relationnelles du raisonnement spatial qualitatif. Nous étudions la complexité de cette logique.

1 Introduction

Dans de nombreuses applications il n'est pas rare de devoir raisonner sur des informations faisant intervenir le temps et l'espace. C'est le cas dans les domaines comme le traitement automatique du langage naturel, la synthèse d'images, les systèmes d'information géographiques, la vérification de programmes, *etc.* Certaines d'entre elles font intervenir à la fois le temps et l'espace comme, par exemple, les systèmes multi-robots dans lesquelles les robots ont pour tâche de déplacer des objets d'un endroit à un autre. Ces systèmes se retrouvent typiquement dans les ateliers où des pièces manufacturées sont déplacées d'un poste de travail à un autre. Il faut gérer le déplacement de ces robots, pour qu'entre autre chose, n'interviennent pas des collisions entre les robots. Un autre domaine dans lequel doit être gérer un ensemble d'agents en mouvement est le contrôle aérien [SS98]. Dans ce domaine la gestion des mouvements peut se faire d'une manière centralisée : le contrôleur de la zone où se déplace l'avion gère les conflits éventuels, ou bien d'une manière plus décentralisée : ce sont les pilotes eux-mêmes qui gèrent leur route de vol. Ce deuxième cas est particulièrement mis en œuvre par le concept de «free flight». Ce nouveau concept a pour ambition de donner plus de liberté aux pilotes, en leur déchargeant une partie du contrôle aérien.

Ces deux exemples montrent bien que dans le cadre de certains systèmes multi-agents il est crucial de mettre en œuvre des protocoles sécurisés en ce qui concerne la coordination des mouvements des différentes entités du système. L'élaboration de ces protocoles nécessite l'utilisation de formalismes permettant de représenter les informations spatio-temporelles de l'environnement d'une part, et offrant des moyens automatiques pour raisonner sur ces informations d'autre part.

Concernant la représentation de la connaissance spatiale, une branche de l'intelligence artificielle en plein essor ces dix dernières années a proposé de nombreux formalismes, il s'agit du raisonnement spatial qualitatif (RSQ). Chaque formalisme proposé est caractérisé par les entités spatiales considérées, ainsi que par les relations considérées entre ces objets. Ces dernières sont dites qualitatives, c'est-à-dire qu'elles ne font pas intervenir de valeurs quantitatives. Ces relations, munies de quelques opérations fondamentales, définissent des structures particulières appelées algèbres relationnelles. Comme formalisme connu du RSQ nous pouvons citer l'algèbre des régions (RCC) proposée par Randell, Cui et Cohn [RCC92]. Dans RCC les entités considérées sont les régions de l'espace et les relations sont les huit relations topologiques suivantes : DC(x,y) "la région x est déconnectée de la région y", EC(x,y) "la région x est extérieurement connectée à la région y", PO(x,y) "la région x chevauche partiellement la région y", EQ(x,y) "la région x est identique à la région y", TPP(x,y) "la région x est une partie tangentielle propre de la région y", NTPP(x,y) "la région x est une partie propre non tangentielle de la région y", TPPI(x,y) la relation inverse de TPP et NTPPI(x,y) la relation inverse de NTPP. Avec RCC nous ne pouvons pas raisonner sur des relations cardinales telles que : un objet est au nord d'un autre objet, un objet se trouve à droite d'un autre objet, *etc*, chose possible avec d'autres formalismes qualitatifs : l'algèbre des points [VK86], l'algèbre des intervalles [All83], l'algèbre des relations cardinales [Lig98], l'algèbre des rectangles [BCF98,BCF99], *etc*. Dans un formalisme du RSQ les informations sont généralement représentées par des réseaux de contraintes où les variables représentent les objets considérés et où les contraintes sont définies par une relation qualitative. Les méthodes de raisonnement employées sont des méthodes dérivées de celles utilisées dans le cadre général des CSP (Constraint Satisfaction Problem). On retrouve par exemple la méthode de la chemin-consistance [Mon74]. Les formalismes qualitatifs spatiaux offrent ainsi des moyens de raisonner efficacement sur des informations spatiales.

En ce qui concerne la vérification formelle de systèmes dans lesquels interviennent de manière prédominante des connaissances temporelles telles que la vérification de programmes et la vérification des systèmes temps réel, de nombreux formalismes à base de logiques temporelles [AEF90] ont montré leur utilité et leur efficacité. La logique temporelle de base utilisée est la logique propositionnelle temporelle (PTL). Le langage de PTL est défini à partir de propositions atomiques, des connecteurs booléens classiques et des principaux connecteurs temporels $\bigcirc$ ("next"), **U** ("until") avec lesquels ont peut former des expressions comme $\bigcirc A$ "A est vrai à l'instant suivant" et $A\mathbf{U}B$ "A est vrai jusqu'à ce que B soit vrai". Cette logique est à la base de nombreuses autres logiques temporelles et a été très étudiée, en particulier Sistla et Clarke dans [SC85] ont démontré que le problème de la satisfiabilité d'une formule de PTL est PSPACE-complet.

Récemment, Wolter et Zakharyaschev [WZ00] ont proposé un formalisme combinant les contraintes spatiales de l'algèbre des régions et la logique temporelle propositionnelle pour pouvoir raisonner sur des informations spatio-temporelles. Pour cela, ils ont "remplacé" les propositions du langage de la logique temporelle propositionnelle par des prédicats binaires basés sur les huit relations topologiques de RCC. Par exemple, le langage de Wolter et Zakharyaschev permet de parler de l'évolution des positions relatives entre deux régions x et y. La formule $DC(x,y)$ **U** $EC(x,y)$ signifie que les régions x et y sont déconnectées jusqu'à ce qu'elles soient extérieurement connectées. Ils ont fourni de nombreux résultats de complexité concernant le problème de satisfiabilité des formules du nouveau langage logique considéré.

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, l'algèbre des régions permet uniquement de prendre en compte des relations d'ordre topologique, et ne considère pas par exemple des relations d'ordre directionnel, une question se pose alors : est-ce que les résultats de Wolter et Zakharyaschev peuvent être étendus à d'autres algèbres relationnelles? Dans ce papier nous montrons que ces résultats peuvent être effectivement étendus à d'autres algèbres spatiales, notamment celles considérant des relations de type directionnel. Nous raffinons même certains résultats. De plus, signalons que la démarche que nous employons est différente de celle employée par Wolter et Zakharyaschev qui utilisent des résultats concernant le produit de logiques modales. En fait, nous suivons la ligne de raisonnement proposée par Sistla et Clarke dans [SC85], en y ajoutant toutes les spécificités concernant les algèbres relationnelles considérées.

Le plan du papier est le suivant. Tout d'abord, dans la section 2 nous effectuons quelques rappels sur les algèbres relationnelles et posons les propriétés des algèbres relationnelles que nous considérons. La section 3 concerne la définition du langage logique que nous étudions. Dans la section 4 nous définissons les modèles de nos formules logiques. La section 5 est consacrée à des résultats de complexité fondamentaux concernant un sous-langage de notre langage, tandis que la section 6 concerne des résultats de complexité fondamentaux du langage entier. Dans un dernier temps, nous concluons en donnant des perspectives de travail. Notons que la plupart des preuves données dans ce papier ne sont pas complètes pour des raisons évidentes de manque de place, mais nous pensons qu'elles donnent clairement la démarche à suivre pour effectuer les preuves complètes.

2 Algèbre relationnelle

Dans la suite, $\mathcal{A}$ dénotera l'algèbre relationnelle considérée. Nous ne nous focaliserons pas sur une algèbre relationnelle particulière, par contre nous supposerons que $\mathcal{A}$ possède certaines propriétés que nous expliciterons dans cette section. VAL dénotera l'ensemble des objets considérés par $\mathcal{A}$ et $PRED$ l'ensemble des relations atomiques binaires de $\mathcal{A}$ définies sur $VAL \times VAL$. Les lettres P, Q, *etc.* serviront à dénoter ces relations atomiques. Nous supposerons que les relations de $PRED$ sont complètes et mutuellement exclusives, c'est-à-dire que tout couple d'objets de VAL est dans une certaine relation $P \in \mathcal{A}$ et une seule. Nous supposerons également que $\mathcal{A}$ contient la relation identité que l'on notera EQ. A notre connaissance, il n'existe pas d'algèbre relationnelle employée pour le raisonnement qualitatif spatial ou temporel qui ne satisfasse pas ces prérequis. Par exemple, dans le cadre du raisonnement temporel basé sur l'algèbre des intervalles d'Allen [All83], $PRED$ est constitué des treize relations d'Allen : $meets$, $before$, $after$, *etc.* Dans ce cadre là, VAL est l'ensemble des intervalles de la droite des réels. Autre exemple, dans le cadre du raisonnement spatial basé sur l'algèbre des relations cardinales [Lig98], VAL est l'ensemble des points du plan et $PRED$ est égal à l'ensemble des neuf relations cardinales : sud, $sud\text{-}ouest$, $sud\text{-}est$, $nord$, *etc.*

Pour représenter des informations entre les objets on utilise généralement des réseaux de contraintes qualitatifs où les variables représentent les entités considérées et les contraintes binaires représentent les informations temporelles ou spatiales entre chaque couple d'entités. Chaque contrainte est définie par une disjonction de relations atomiques de l'algèbre. Dans la suite, nous utiliserons de tels réseaux, néanmoins ils auront la particularité d'être atomiques, c'est-à-dire que chaque contrainte sera formée d'une seule relation atomique. Formellement, un réseau de contraintes qualitatives $\mathcal{N}$ est défini par un couple (V, C) où :

- V est un ensemble de variables $\{V_1, \ldots, V_n\}$,
- C est une application de $V \times V$ dans 2^{PRED} (la contrainte entre V_i et V_j sera notée $C(V_i, V_j)$ ou C_{ij}).

$\mathcal{N}$ est atomique si chaque ensemble C_{ij} est composé d'une seule relation atomique, dans ce cas-là, pour des raisons de commodité on confondra C_{ij} avec l'unique relation atomique qu'elle possède. La consistance d'un réseau $\mathcal{N} = (V, C)$ est définie comme suit :

- une instantiation consistante m de $\mathcal{N} = (V, C)$ est une application qui associe à chaque variable V_i de V une valeur m_i de VAL telle que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $m_i \ C_{ij} \ m_j$.
- Une instantiation consistante partielle m' de $\mathcal{N} = (V, C)$ de l'ensemble $V' \subseteq V$ est une application qui associe à chaque variable V'_i de V' une valeur m'_i de VAL telle que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V'|$, $m'_i \ C(V'_i, V'_j) \ m'_j$.
- Un réseau $\mathcal{N} = (V, C)$ est consistant ssi il admet une instantiation consistante.
- Un réseau $\mathcal{N} = (V, C)$ est globalement consistant ssi chacune de ses instantiations partielles consistantes $m' : m'_1, \ldots, m'_l$ d'un ensemble de variables $V' \subset V$ peut toujours être étendue à une instantiation partielle consistante $m'_1, \ldots, m'_l, m'_{l+1}$ de l'ensemble $V' \cup \{V'_{l+1}\}$ avec $V'_{l+1} \in V \setminus V'$.

Nous supposerons que les réseaux de contraintes qualitatifs atomiques et consistants définis sur l'algèbre relationnelle $\mathcal{A}$ sont globalement consistants. L'algèbre des points [VK86], l'algèbre des points multi-dimensionnels [Lig98], l'algèbre des intervalles [All81] ainsi que l'algèbre des rectangles [BCF98,BCF99] satisfont toutes les conditions imposées sur $\mathcal{A}$. Ajoutons que cette liste n'est pas exhaustive.

3 Syntaxe

Les relations de l'algèbre relationnelle $\mathcal{A}$ concernent uniquement l'aspect spatial de la représentation. Nous allons maintenant les "temporiser" en les encapsulant dans un langage plus riche et inspiré des travaux de Wolter et Zakharyaschev [WZ00]. Cette section est dévolue à la définition de ce langage.
Dans la suite, VAR dénotera l'ensemble dénombrable des variables individuelles, nous emploierons les lettres minuscules x, y, *etc.*, pour les désigner. Chaque variable correspond à un agent. Le langage modal propositionnel que nous définissons permettra de qualifier l'évolution des positions relatives entre ces agents. De manière inductive, nous définissons l'ensemble des formules qualitatives de la manière suivante :

- $f ::= P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid \neg f \mid (f \vee g) \mid (f \mathbf{U} g)$;

où P appartient à l'ensemble $PRED$, m, n sont deux entiers positifs, et x, y appartiennent à l'ensemble VAR. Les autres connecteurs standards sont définis par les abréviations habituelles. En particulier, $\mathbf{F}f$ est $(\top \mathbf{U} f)$ et $\mathbf{G}f$ est $\neg(\top \mathbf{U} \neg f)$. Intuitivement, $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ signifie à l'instant i que la valeur de x à l'instant $i + m$ est en relation P avec la valeur de y à l'instant $i + n$. Si par exemple $\mathcal{A}$ est l'algèbre des

intervalles alors $\mathbf{G}\ before(x, \bigcirc x)$ signifiera que x se déplace toujours vers la droite. Nous suivons également les règles standards pour l'omission des parenthèses. Une formule atomique est une formule de la forme $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$, tandis qu'une U-formule est une formule de la forme $f\mathbf{U}g$.
Soit f une formule qualitative. $var(f)$ et $SF(f)$ dénoteront respectivement l'ensemble des variables individuelles appartenant à f et l'ensemble de toutes les sous-formules de f. Le nombre de symboles dans f sera dénoté par $length(f)$. Il est intéressant de noter que pour toute formule qualitative f, il y a strictement moins de $Card(SF(f))$ $\mathbf{U}$-formules dans $SF(f)$. La taille de f, notée $\mid f \mid$, est définie de manière inductive :

- $\mid P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid = \max\{m, n\}$;
- $\mid \neg f \mid = \mid f \mid$; $\mid f \vee g \mid = \max\{\mid f \mid, \mid g \mid\}$; $\mid f\mathbf{U}g \mid = \max\{\mid f \mid, \mid g \mid\}$.

L'ensemble de toutes les formules atomiques dont les variables individuelles sont dans $var(f)$ et dont les tailles sont plus petites ou égales à $\mid f \mid$ sera dénoté par $AF(f)$. Remarquons que $Card(var(f)) < length(f)$, $Card(SF(f)) < length(f)$ et que $\mid f \mid < length(f)$. De plus, $Card(AF(f)) = Card(PRED) \times Card(var(f))^2 \times (\mid f \mid + 1)^2$.

4 Sémantique

Un modèle qualitatif ϵ est une fonction de l'ensemble $VAR \times \mathbb{N}$ vers l'ensemble VAL. Nous définissons la relation “la formule qualitative f est vraie à l'entier i dans le modèle qualitatif ϵ”, notée $\epsilon, i \models f$, de la manière suivante :

- $\epsilon, i \models P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y)$ ssi $P(\epsilon(x, i+m), \epsilon(y, i+n))$;
- $\epsilon, i \models \neg f$ ssi $\epsilon, i \not\models f$;
- $\epsilon, i \models f \vee g$ ssi $\epsilon, i \models f$ ou $\epsilon, i \models g$;
- $\epsilon, i \models f\mathbf{U}g$ ssi il existe un entier k tel que $i \leq k$, $\epsilon, k \models g$ et pour tout entier j, si $i \leq j$ et $j < k$ alors $\epsilon, j \models f$.

Une $\mathbf{U}$-formule qualitative $f\mathbf{U}g$ sera dite accomplie entre deux entiers i et j dans le modèle qualitatif ϵ si $i \leq j$, $\epsilon, i \models f\mathbf{U}g$ et s'il existe un entier k tel que $i \leq k$, $k \leq j$ et $\epsilon, k \models g$. Une formule qualitative f est satisfiable s'il existe un modèle qualitatif ϵ tel que $\epsilon, 0 \models f$. Les égalités suivantes spécifient quelles formules qualitatives sont respectivement prises en compte dans $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ et $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$:

- $f ::= P(x, y) \mid \neg f \mid (f \vee g) \mid (f\mathbf{U}g)$;
- $f ::= P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \mid \neg f \mid (f \vee g) \mid (f\mathbf{U}g)$.

Dans [WZ00], l'algèbre relationnelle considérée par Wolter et Zakharyaschev est l'algèbre des régions $RCC8$ [RCC92,RN99]. Concernant le problème de la satisfiablité d'une formule qualitative dans ce cadre là, les résultats suivants ont été prouvés :

Proposition 1.

- *Le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$;*
- *Le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $EXPSPACE$.*

Une question importante est de savoir si ces résultats peuvent être étendus dans le cadre d'un raisonnement qualitatif basé sur une algèbre relationnelle telle que $\mathcal{A}$. Dans la suite, nous allons répondre à cette question. Avant cela, nous allons définir le concept de f-états.

5 f-états

Soient ϵ un modèle qualitatif et un entier i. Soit $\widehat{\epsilon}_i$ la fonction assignant à chaque formule qualitative f l'ensemble $\widehat{\epsilon}_i(f)$ de toutes les formules atomiques de $AF(f)$ vraies en i dans ϵ. Soit $\widetilde{\epsilon}_i$ la fonction qui assigne à chaque formule qualitative f l'ensemble $\widetilde{\epsilon}_i(f)$ de toutes les sous-formules de f vraies en i dans ϵ. Soit $\overline{\epsilon}_i$ la fonction assignant à chaque formule qualitative f la structure $(\widehat{\epsilon}_{i-|f|}(f), \ldots, \widehat{\epsilon}_i(f), \widetilde{\epsilon}_i(f))$. Dans le cas où $i <| f |$, nous posons :

$$\overline{\epsilon}_i(f) = (\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{|f|-i \text{ fois}}, \widehat{\epsilon}_0(f), \ldots, \widehat{\epsilon}_i(f), \widetilde{\epsilon}_i(f)).$$

Soit ω la fonction qui assigne à chaque formule qualitative f l'entier :

$$Card(PRED)^{Card(var(f))^2 \times (|f|+1)^3} \times 2^{Card(SF(f))}.$$

Il est intéressant de noter que pour toute formule qualitative f et pour tout modèle qualitatif ϵ, le domaine d'arrivée de la fonction assignant à chaque entier i la structure $\overline{\epsilon}_i(f)$ contient strictement moins de $\omega(f)$ éléments. Ces éléments sont des cas particuliers du concept de f-états. Soit f un formule qualitative. Un f-état est une structure

$$(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$$

où $\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0$ sont des sous-ensembles de $AF(f)$ et $\widetilde{S}_0$ est un sous-ensemble de $SF(f)$. Nous supposons que les variables individuelles de l'ensemble $var(f)$ sont arrangées dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$. Nous faisons également les hypothèses suivantes :

- pour tout $k \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, pour tout $l, m \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$ et pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ il existe $P \in PRED$ tel que $P(\bigcirc^l x_{n_1}, \bigcirc^m x_{n_2}) \in \widehat{S}_k$.
- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, pour tout $l_1, l_2, m_1, m_2 \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$, et pour tout $k_1, k_2 \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, si $P(\bigcirc^{l_1} x_{n_1}, \bigcirc^{m_1} x_{n_2}) \in \widehat{S}_{k_1}$ et $Q(\bigcirc^{l_2} x_{n_1}, \bigcirc^{m_2} x_{n_2}) \in \widehat{S}_{k_2}$ et si $l_1 + k_1 = l_2 + k_2$ et $m_1 + k_1 = m_2 + k_2$ alors P et Q sont une même relation atomique.

La structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$ définit un réseau de contraintes qualitatives $\mathcal{N} = (V, C)$ contenant uniquement des contraintes atomiques ou la contrainte totale (disjonction de toutes les relations atomiques de $PRED$) :

- $V = \{X_{1,-|f|}, \ldots, X_{1,|f|}, \ldots, X_{N,-|f|}, \ldots, X_{N,|f|}\}$;
- s'il existe $P(\bigcirc^l x_{n_1}, \bigcirc^m x_{n_2}) \in \widehat{S}_k$, avec $k \in \{- \mid f \mid, \ldots, 0\}$, $l, m \in \{0, \ldots, \mid f \mid\}$, $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $P \in PRED$ alors $C(X_{n_1,k+l}, X_{n_2,k+m}) = \{P\}$, sinon $C(X_{n_1,k+l}, X_{n_2,k+m})$ est égale à la contrainte totale $PRED$.

Notons qu'à partir d'un réseau de contraintes qualitatives atomique et consistant avec pour ensemble de variables l'ensemble V, nous pouvons définir une unique structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$.

Un f-état $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est défini comme consistant si le réseau de contraintes correspondant à la structure $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0)$ est consistant et :

- Si $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in SF(f)$ alors $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in \widetilde{S}_0$ ssi $P(\bigcirc^m x, \bigcirc^n y) \in \widehat{S}_0$;

– si $\neg g \in SF(f)$ alors $\neg g \in \widetilde{S}_0$ ssi $g \notin \widetilde{S}_0$;
– si $g \vee h \in SF(f)$ alors $g \vee h \in \widetilde{S}_0$ ssi $g \in \widetilde{S}_0$ ou $h \in \widetilde{S}_0$.

Un f-état $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ sera défini comme **U**-consistant par rapport au f-état $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ si $\widehat{T}_{-|f|} = \widehat{S}_{-|f|+1}$, ..., $\widehat{T}_{-1} = \widehat{S}_0$ et :

– si $g\mathbf{U}h \in SF(f)$ alors $g\mathbf{U}h \in \widetilde{S}_0$ ssi $h \in \widetilde{S}_0$ ou $g \in \widetilde{S}_0$ et $g\mathbf{U}h \in \widetilde{T}_0$.

6 La complexité de $\mathcal{L}_0(\mathrm{U})$

En suivant la ligne de raisonnement utilisée par Sistla et Clarke dans [SC85], nous obtenons les résultats importants suivants :

Lemme 1. *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ tels que $i < j$ et $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$. Il existe alors un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_{k+j-i}(f)$. Ajouté à cela, pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_{k+j-i}(f)$.*

Preuve. Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ dans VAL définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < i$ alors pour toute variable individuelle x dans $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k)$ et si $k \geq i$ alors pour toute variable individuelle x de $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k + j - i)$. ϵ' satisfait bien les conditions requises.

Lemme 2. *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ tels que $i < j$, $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$ et chaque $\mathbf{U}$-formule de $\widetilde{\epsilon}_i(f)$ est accomplie entre i et j dans ϵ. Il existe alors un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k, si $k < j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon'}_{k+i-j}(f)$. Ajouté à cela, pour tout entier k, si $k < j$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq j$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon'}_{k+i-j}(f)$. ϵ' est dit être un modèle périodique qualitatif de période $j - i$ commençant à l'indice i.*

Preuve. Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ vers VAL définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < j$ alors pour toute variable individuelle x dans $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k)$ et si $k \geq j$ alors pour toute variable individuelle x dans $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon'(x, k + i - j)$. Il est certain que ϵ' satisfait les conditions requises.

A l'aide des lemmes 1 et 2, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit f une formule de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ telle que f est satisfiable. Il existe un modèle qualitatif ϵ et des entiers i, j tels que $i < j$, ϵ est un modèle périodique qualitatif de période $j - i$ débutant à l'indice i, $i < \omega(f)$, $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$ et $\epsilon, 0 \models f$.*

Preuve. Voir l'appendice.

Du théorème 1, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 2. *Déterminer si une formule donnée $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$-complet.*

Preuve. Le lecteur peut facilement prouver que le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$-difficile en y réduisant le problème $PSPACE$-difficile consistant à déterminer si une formule donnée de la logique propositionnelle temporelle $\mathcal{L}(\mathbf{U})$ est satisfiable [SC85].
Pour tester si une formule f de $\mathcal{L}_0(\mathbf{U})$ est satisfiable, nous présentons l'algorithme non déterministe suivant :

Deviner des entiers i, j tels que $i < j$, $i < \omega(f)$ et $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$;
Deviner un f-état consistant $(\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ tel que $f \in \widetilde{S}_0$;
$k := 0$;
Tant que $k < i$ faire
  Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant avec $(\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
  $(\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
  $k := k + 1$;
$(\widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) := (\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$;
Tant que $k < j$ faire
  Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant avec $(\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
  Pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h \in SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ et $h \in \widetilde{T}_0$ alors marquer $g\mathbf{U}h$ dans $\widetilde{U}_0$;
  $(\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
  $k := k + 1$;
Vérifier si pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h \in SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ alors $g\mathbf{U}h$ est marquée dans $\widetilde{U}_0$;
Vérifier si $(\widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) = (\widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$.

Le lecteur peut facilement vérifier que l'algorithme non déterministe précédent fonctionne correctement et qu'il est borné en espace par un polynôme en $length(f)$.

7 La complexité de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$

Nous allons maintenant étudier le langage plus riche qu'est $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$. En accord avec la ligne de raisonnement mise en avant par Sistla et Clarke [SC85], nous pouvons établir les résultats importants suivants.

Lemme 3. *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ tels que $i < j$ et $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$. Il existe un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_{k+j-i}(f)$. Ajouté à cela, pour tout entier k, si $k < i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq i$ alors $\widetilde{\epsilon'}_k(f) = \widetilde{\epsilon}_{k+j-i}(f)$.*

Preuve. Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ dans VAL définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < i$ alors pour toute variable individuelle x dans $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k)$. Pour tout entier k, si $k \geq i$ alors en supposant que l'ensemble de toutes les variables individuelles de $var(f)$ est arrangé dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$, considérons le réseau de contraintes atomique (V^k, C^k) défini de la manière suivante :

- soit V^k l'ensemble $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k}\}$.

- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, soit $C^k(X_{n_1,l_1}, X_{n_2,l_2})$ la contrainte atomique composée de la relation atomique satisfaite par $\epsilon(x_{n_1}, l_1 + j - i)$ et $\epsilon(x_{n_2}, l_2 + j - i)$.

On peut facilement vérifier que (V^k, C^k) est consistant. D'après l'hypothèse faite sur l'algèbre relationnelle $\mathcal{A}$ nous en déduisons que (V^k, C^k) est aussi globalement consistant, par conséquent nous pouvons toujours étendre une instantiation partielle consistante $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k-1), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k-1)$ des variables $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k-1}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k-1}\}$ en une instantiation consistante $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k)$. Il en résulte que, de proche en proche, nous pouvons terminer de construire notre modèle qualitatif ϵ' en résolvant le réseau de contraintes précédent avec $k = j$, puis $k = j+1$ et ainsi de suite. Le lecteur peut vérifier que ϵ' satisfait les conditions requises.

Lemme 4. *Soient ϵ un modèle qualitatif, i, j deux entiers et f une formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ tels que $i < j$, $\overline{\epsilon}_i(f) = \overline{\epsilon}_j(f)$ et chaque $\mathbf{U}$-formule de $\widetilde{\epsilon}_i(f)$ est accomplie entre i et j dans ϵ. Il existe un modèle qualitatif ϵ' tel que pour tout entier k, si $k < j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon}_k(f)$ et si $k \geq j$ alors $\widehat{\epsilon'}_k(f) = \widehat{\epsilon'}_{k+i-j}(f)$. De plus, ϵ' est un modèle qualitatif périodique de période $j - i$ débutant à l'indice i.*

Preuve. Soit ϵ' la fonction de $VAR \times \mathbb{N}$ dans VAL définie de la manière suivante. Pour tout entier k, si $k < j$ alors pour toute variable individuelle x de $var(f)$, soit $\epsilon'(x, k)$ la valeur $\epsilon(x, k)$. Pour tout entier k, si $k \geq j$ alors en supposant que l'ensemble des variables individuelles de $var(f)$ est arrangé dans un certain ordre $x_1, \ldots, x_N$, considérons le réseau de contraintes atomique (V^k, C^k) défini comme suit :

- soit V^k l'ensemble $\{V_{1,k-|f|}, \ldots, V_{1,k}, \ldots, V_{N,k-|f|}, \ldots, V_{N,k}\}$.
- Pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$ et $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, soit $C^k(X_{n_1,l_1}, X_{n_2,l_2})$ la contrainte atomique composée de la relation atomique satisfaite par $\epsilon(x_{n_1}, l_1 + j - i)$ et $\epsilon(x_{n_2}, l_2 + j - i)$.

Comme ϵ est un modèle qualitatif on peut facilement vérifier que le réseau de contraintes ■ (V^k, C^k) est consistant. Il est donc également globalement consistant. Il s'ensuit qu'étant données des valeurs $\epsilon'(x_1, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_1, k-1), \ldots, \epsilon'(x_N, k- \mid f \mid), \ldots, \epsilon'(x_N, k-1)$ telles que pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, et pour tout $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k-1\}$, $\epsilon'(x_{n_1}, l_1)$ et $\epsilon'(x_{n_2}, l_2)$ satisfont la contrainte $C^k(V_{n_1,l_1}, V_{n_2,l_2})$, il existe des valeurs $\epsilon'(x_1, k), \ldots, \epsilon'(x_N, k)$ telles que pour tout $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, N\}$, et pour tout $l_1, l_2 \in \{k- \mid f \mid, \ldots, k\}$, alors $\epsilon'(x_{n_1}, l_1)$ et $\epsilon'(x_{n_2}, l_2)$ satisfont la contrainte $C^k(V_{n_1,l_1}, V_{n_2,l_2})$. On peut donc, de proche en proche, terminer de définir notre fonction ϵ' de telle manière qu'elle satisfasse les conditions requises.

En combinant le lemme 3 avec le lemme 4, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 3. *Soit f la formule de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ telle que f est satisfiable. Il existe un modèle qualitatif ϵ et des entiers i, j tels que $i < j$, ϵ est un modèle qualitatif périodique commençant de période $j - i$ commençant à l'indice i, $i < \omega(f)$, $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$ et $\epsilon, 0 \models f$.*

Preuve. Voir l'appendice.

Grâce au théorème 3, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 4. *Le problème de déterminer si une formule donnée de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable ou non est un problème $PSPACE$-complet.*

Preuve. Pour tester si une formule f de $\mathcal{L}_1(\mathbf{U})$ est satisfiable, nous présentons l'algorithme non déterministe suivant :

Deviner deux entiers i, j tels que $i < j$, $i < \omega(f)$ et $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$;
Deviner un f-état consistant $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ tel que $\widehat{S}_{-|f|} = \emptyset$, ..., $\widehat{S}_{-1} = \emptyset$ et $f \in \widetilde{S}_0$;
$k := 0$;
Tant que $k < i$ faire
    Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant par rapport à $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
    $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
    $k := k + 1$;
$(\widehat{U}_{-|f|}, \ldots, \widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) := (\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$;
Tant que $k < j$ faire
    Deviner un f-état consistant $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$ tel que $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$ est $\mathbf{U}$-consistant par rapport à $(\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
    Pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h \in SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ et $h \in \widetilde{T}_0$ alors marquer $g\mathbf{U}h$ dans $\widetilde{U}_0$;
    $(\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0) := (\widehat{T}_{-|f|}, \ldots, \widehat{T}_0, \widetilde{T}_0)$;
    $k := k + 1$;
Vérifier si pour toute $\mathbf{U}$-formule $g\mathbf{U}h$ de $SF(f)$, si $g\mathbf{U}h \in \widetilde{U}_0$ alors $g\mathbf{U}h$ est marquée dans $\widetilde{U}_0$;
Vérifier si $(\widehat{U}_{-|f|}, \ldots, \widehat{U}_0, \widetilde{U}_0) := (\widehat{S}_{-|f|}, \ldots, \widehat{S}_0, \widetilde{S}_0)$.

Le lecteur pourra facilement vérifier que l'algorithme non déterministe précédent est correct et qu'il est borné en espace par un polynôme en $length(f)$.

8 Conclusion

Nous venons de présenter une logique temporelle propositionnelle avec laquelle on peut étudier l'évolution des positions relatives entre des agents x ,y, *etc.* au cours du temps. Cette logique a été introduite par Wolter et Zakharyaschev. Ils ont montré que la satisfiabilité des formules de cette logique est dans EXPSPACE lorsque les relations spatiales considérées entre les agents sont celles de l'algèbre des régions. Nous avons montré comment étendre leur formalisme à d'autres algèbres (algèbre des intervalles, algèbre des relations cardinales, *etc*). Pour les formules des logiques temporelles basées sur ces algèbres, nous avons montré que le problème de la satisfiabilité est PSPACE-complet, améliorant de fait la borne supérieure donnée par Wolter et Zakharyaschev.

Nous pouvons envisager deux perspectives à notre approche. Nous pouvons d'abord enrichir notre langage modal propositionnel en considérant non pas les opérateurs modaux du temps linéaire mais ceux du temps arborescent [Eme90]. Nous pouvons également trouver des fragments de notre langage pour lesquels le problème de la satisfiabilité est dans la classe NP.

Remerciements

Nous remercions Nathalie Chetcuti qui nous a fait de nombreux commentaires pour améliorer la lisibilité de ce papier.

Références

[AEF90] Eric Audureau, Patrice Enjalbert, and Luis Fariñas del Cerro. *Logique temporelle : Sémantique et validation de programmes parallèles.* Masson, 1990.

[All81] James F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proceedings of the Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.

[All83] James F. Allen. Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, November 1983.

[BCF98] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A model for reasoning about bidimensional temporal relations. In A. G. Cohn, L. Schubert, and S. C. Shapiro, editors, *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 124–130. Morgan Kaufmann, 1998.

[BCF99] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In T. Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 442–447, 1999.

[Eme90] E. Allen Emerson. Temporal and modal logic. In Jan van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Semantics*, pages 995–1072. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1990.

[Lig98] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9):23–44, 1998.

[Mon74] Ugo Montanari. Networks of constraints: Fundamental properties and application to picture processing. *Information Sciences*, 7(2):95–132, 1974.

[RCC92] David A. Randell, Zhan Cui, and Anthony G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In B. Nebel and C. Rich, editors, *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 165–176. Morgan Kaufmann, 1992.

[RN99] Renz and Nebel. On the Complexity of Qualitative Spatial Reasoning: A Maximal Tractable Fragment of the Region Connection Calculus. *AIJ: Artificial Intelligence*, 108, 1999.

[SC85] A. Sistla and E. Clarke. The complexity of propositional linear temporal logics. *Journal of the ACM*, 32:733–749, 1985.

[SS98] S. Sekhavat and S. S. Sastry. A distributed automatic air traffic management system. In *Proc. of the Int. Symp. on Robotics and Automation.* Saltillo, 1998.

[VK86] Marc Vilain and Henry Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. In T. Kehler and S. Rosenschein, editors, *Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'86)*, pages 377–382. American Association for Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann, 1986.

[WZ00] Frank Wolter and Michael Zakharyaschev. Spatio-temporal representation and reasoning based on RCC-8. In Anthony G. Cohn, Fausto Giunchiglia, and Bart Selman, editors, *KR2000: Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 3–14, San Francisco, 2000. Morgan Kaufmann.

Appendice

Preuve. **du théorème 1** Soit $\epsilon^{(0)}$ un modèle qualitatif tel que $\epsilon^{(0)}, 0 \models f$. Le lecteur pourra facilement vérifier qu'il existe des entiers $i^{(0)}, j^{(0)}$ tels que $i^{(0)} < j^{(0)}$, $\overline{\epsilon^{(0)}}_{i^{(0)}}(f) = \overline{\epsilon^{(0)}}_{j^{(0)}}(f)$ et chaque **U**-formule de $\widetilde{\epsilon^{(0)}}_{i^{(0)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(0)}$ et $j^{(0)}$ dans $\epsilon^{(0)}$. Si $i^{(0)} \geq \omega(f)$ alors il existe des entiers k, l tels que $k < l$, $l \leq i^{(0)}$ et $\overline{\epsilon^{(0)}}_k(f) = \overline{\epsilon^{(0)}}_l(f)$. En appliquant le lemme 1, nous en déduisons qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(1)}$ tel que $\epsilon^{(1)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(1)}, j^{(1)}$ tels que $i^{(1)} < j^{(1)}$, $\overline{\epsilon^{(1)}}_{i^{(1)}}(f) = \overline{\epsilon^{(1)}}_{j^{(1)}}(f)$, chaque **U**-formule de $\widetilde{\epsilon^{(1)}}_{i^{(1)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(1)}$ et $j^{(1)}$ dans $\epsilon^{(1)}$ et $i^{(1)} < i^{(0)}$. Appliquant cette réduction aussi loin que possible, nous concluons à partir de cela qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(2)}$ tel que $\epsilon^{(2)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(2)}, j^{(2)}$ tels que $i^{(2)} < j^{(2)}$, $\overline{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f) = \overline{\epsilon^{(2)}}_{j^{(2)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(2)}$ et $j^{(2)}$ dans $\epsilon^{(2)}$ et $i^{(2)} < \omega(f)$. Si $j^{(2)} - i^{(2)} \geq Card(SF(f)) \times \omega(f)$ alors il existe des entiers k, l tels que $i^{(2)} \leq k$, $k < l$, $l \leq j^{(2)}$, $\overline{\epsilon^{(2)}}_k(f) = \overline{\epsilon^{(2)}}_l(f)$ et chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(2)}}_{i^{(2)}}(f)$ est accomplie soit entre $i^{(2)}$ et k, ou soit entre l et $j^{(2)}$ dans $\epsilon^{(2)}$. En appliquant le lemme 1, nous inférons à partir de cela qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(3)}$ tel que $\epsilon^{(3)}, 0 \models f$ et il existe deux entiers $i^{(3)}, j^{(3)}$ tels que $i^{(3)} < j^{(3)}$, $\overline{\epsilon^{(3)}}_{i^{(3)}}(f) = \overline{\epsilon^{(3)}}_{j^{(3)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(3)}}_{i^{(3)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(3)}$ et $j^{(3)}$ dans $\epsilon^{(3)}$, $i^{(3)} < \omega(f)$ et $j^{(3)} - i^{(3)} < j^{(2)} - i^{(2)}$. En appliquant cette réduction aussi loin que possible, nous en concluons qu'il existe un modèle qualitatif $\epsilon^{(4)}$ tel que $\epsilon^{(4)}, 0 \models f$ et il existe des entiers $i^{(4)}, j^{(4)}$ tels que $i^{(4)} < j^{(4)}$, $\overline{\epsilon^{(4)}}_{i^{(4)}}(f) = \overline{\epsilon^{(4)}}_{j^{(4)}}(f)$, chaque **U**-formule dans $\widetilde{\epsilon^{(4)}}_{i^{(4)}}(f)$ est accomplie entre $i^{(4)}$ et $j^{(4)}$ dans $\epsilon^{(4)}$, $i^{(4)} < \omega(f)$ et $j^{(4)} - i^{(4)} < Card(SF(f)) \times \omega(f)$. En appliquant le lemme 2, nous concluons que il existe un modèle qualitatif ϵ et des entiers i, j tels que $i < j$, ϵ est un modèle qualitatif périodique de période $j - i$ débutant à l'indice i, $i < \omega(f)$, $j - i < Card(SF(f)) \times \omega(f)$ and $\epsilon, 0 \models f$.

Preuve. **du théorème 3** Reprendre la preuve du théorème 1 en utilisant les lemmes 3 et 4 à la place des lemmes 1 et 2.