

# Le problème de la cohérence des réseaux de contraintes du formalisme $INDU$

Philippe Balbiani<sup>1</sup>, Jean-François Condotta<sup>2</sup>, Gérard Ligozat<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IRIT, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France  
balbiani@irit.fr

<sup>2</sup>LIMSI-CNRS, Université de Paris XI, 91403 Orsay, France  
{condotta,ligozat}@limsi.fr

## Résumé

Dans cette contribution, nous étudions le problème de la cohérence du formalisme temporel qualitatif  $INDU$  introduit par Pujari *et al.* Nous prouvons en premier lieu la NP-complétude du problème de la cohérence pour le sous-ensemble des relations préconvexes. Nous montrons qu'en revanche ce problème est polynomial pour l'ensemble des relations fortement préconvexes. Enfin, nous définissons au autre ensemble de relations  $INDU$  pour lequel le problème de la cohérence peut être décidé au moyen d'une méthode similaire à celle de la méthode habituelle de la chemin-cohérence.

## 1 Introduction

Le raisonnement temporel est une tâche centrale dans de nombreuses applications telles que la compréhension du langage naturelle, la spécification et la vérification de programmes et systèmes, l'ordonnancement temporel, *etc.* Dans le domaine du raisonnement temporel qualitatif, le formalisme proposé par Allen [All81], l'algèbre des intervalles ( $\mathcal{AI}$ ), est certainement l'un des modèles les plus connus.

Allen considère comme entités temporelles les intervalles de la droite du temps (la droite des rationnels) et base le formalisme  $\mathcal{AI}$  sur 13 relations (qualitatives) binaires correspondant à toutes les configurations possibles des quatre bornes de deux intervalles. Dans le formalisme  $\mathcal{AI}$ , l'information temporelle est représentée par des réseaux de contraintes (réseaux de  $\mathcal{AI}$ ) dont les variables représentent des intervalles et dont les contraintes sont exprimées par des disjonctions de relations de base. Le problème de la cohérence des réseaux de  $\mathcal{AI}$  qui consiste, étant donné un tel réseau, à déterminer s'il existe une instantiation des variables par des intervalles de la droite de telle sorte que les contraintes soient satisfaites, est NP-complet dans le cas général. Dans un passé récent, de nombreux efforts ont été fournis pour caractériser des fragments polynomiaux de l'algèbre des intervalles (voir par exemple [NB95, DJ97]). Aujourd'hui, tous les fragments polynomiaux de  $\mathcal{AI}$  sont connus.

Plus récemment, un nouveau formalisme temporel qualitatif, appelé  $INDU$ , a été proposé par Pujari *et al.* [PKS99]. Le formalisme  $INDU$  considère également comme entités temporelles des intervalles. Les relations de base prises en compte par  $INDU$  sont au nombre de 25 et constituent un raffinement des 13 relations atomiques de  $\mathcal{AI}$ . En plus de la position relative entre deux intervalles, elles permettent de distinguer la relation entre les durées du premier et du second intervalle (plus courte, plus longue ou bien égale). Chacune des 25

relations de  $\mathcal{INDU}$  peut être représentée par un couple constitué d’une relation atomique d’Allen et d’une relation atomique de l’algèbre des points ( $<$ ,  $>$  ou  $=$ ), cette dernière exprimant la relation entre les durées.

D’un point de vue structurel,  $\mathcal{INDU}$  et  $\mathcal{AI}$  paraissent très similaires au premier abord. Cependant, cette première impression est trompeuse. La vérité est qu’il existe de nombreuses différences entre ces deux formalismes. En particulier, contrairement aux relations de  $\mathcal{AI}$ , l’ensemble des relations de  $\mathcal{INDU}$  n’est pas clos pour l’opération de composition. Nous pouvons également montrer que le problème de la cohérence pour les réseaux de contraintes de  $\mathcal{INDU}$  dont les contraintes sont définies par des relations atomiques ne peut être décidé au moyen de la méthode bien connue de la chemin-cohérence.

Dans cet article, nous nous focalisons sur le problème de la cohérence des réseaux de  $\mathcal{INDU}$ . Notre but est de caractériser plusieurs ensembles importants pour lesquels ce problème est polynomial. À cette fin, nous définissons l’ensemble des relations convexes de  $\mathcal{INDU}$  (d’une manière sensiblement différente de celle de Pujari *et al.*), l’ensemble des relations préconvexes, et un sous-ensemble de ce dernier, l’ensemble des relations fortement préconvexes [BCL00]. Du côté négatif, nous prouvons que le problème de la cohérence pour les réseaux de  $\mathcal{INDU}$  dont les contraintes sont préconvexes est NP-complet. En revanche, nous montrons que les relations fortement préconvexes peuvent être exprimées à l’aide de conjonctions de clauses de Horn [Kou96] et, comme conséquence, que le problème de la cohérence correspondant est polynomial. Nous montrons également que la méthode usuelle basée sur la chemin-cohérence ne peut pas être utilisée pour les relations fortement préconvexes. Enfin, nous définissons une intéressante sous-classe de relations de  $\mathcal{INDU}$  pour laquelle le problème de la cohérence peut être décidé au moyen de cette méthode.

## 2 Le formalisme $\mathcal{INDU}$ : une extension du formalisme d’Allen

### 2.1 Les relations de $\mathcal{INDU}$

Pujari *et al.* [PKS99] ont introduit le formalisme  $\mathcal{INDU}$  qui est une extension du formalisme d’Allen [All81], l’algèbre des intervalles ( $\mathcal{AI}$ ). L’algèbre  $\mathcal{AI}$  est basée sur 13 relations binaires correspondant aux positions relatives possibles entre deux intervalles de la droite. Par rapport à un intervalle fixé, un intervalle arbitraire peut être dans une des 13 positions : avant ( $b$ ), rencontrer ( $m$ ), chevaucher ( $o$ ), débiter ( $s$ ), être contenu dans ( $d$ ), terminer ( $f$ ), être égal ( $eq$ ) (et inversement). Nous dénotons par  $\mathcal{AI}$  l’ensemble de ces 13 relations,  $\mathcal{AI} = \{b, bi, m, mi, o, oi, s, si, f, fi, d, di, eq\}$ . Vilain *et al.* [VK86] ont défini un formalisme moins expressif, l’algèbre des points ( $\mathcal{AP}$ ), basé sur trois relations de base  $\mathcal{AP} = \{<, >, =\}$ , exprimant les trois positions relatives possibles entre deux points de la droite.

De manière analogue, le formalisme  $\mathcal{INDU}$  considère 25 relations binaires, chacune d’elles exprimant une position relative particulière entre deux intervalles de la droite (une des 13 relations de base de  $\mathcal{AI}$ ) et une relation d’ordre entre les deux durées de ces intervalles (une des trois relations de base de  $\mathcal{AP}$ ). Une relation de base de  $\mathcal{INDU}$  sera dénotée par  $i^p$  où  $i \in \mathcal{AI}$  et  $p \in \mathcal{AP}$ . Deux intervalles  $x$  et  $y$  satisfont  $i^p$ , ce qui s’écrit aussi  $x i^p y$ , ssi  $x i y$  et  $(x^+ - x^-) p (y^+ - y^-)$ , où  $x^-$ ,  $y^-$ , et  $x^+$ ,  $y^+$  dénotent respectivement les bornes inférieures et les bornes supérieures des intervalles  $x$  et  $y$ . Par exemple, les intervalles<sup>1</sup> (1, 2) et (2, 4) satisfont la relation de base  $m^<$ . Nous dénotons par  $\mathcal{INDU}$  l’ensemble des 25 relations atomiques de  $\mathcal{INDU}$ ,  $\mathcal{INDU} = \{b^<, b^>, b^=, bi^<, bi^>, bi^=, m^<, m^>, m^=, mi^<, mi^>, mi^=, oi^<, oi^>, oi^=, si^<, si^>, si^=, fi^<, fi^>, fi^=, di^<, di^>, di^=, eq^<, eq^>, eq^=\}$ .

<sup>1</sup>Nous considérerons les intervalles fermés de la droite des nombre rationnels, et dénoterons un tel intervalle par  $(a, b)$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres rationnels.

$mi^=, o^<, o^>, o^=, oi^<, oi^>, oi^=, s^<, si^>, d^<, di^>, f^<, fi^>, eq^=$ .  $INDU$  est un ensemble de relations complètes et mutuellement exclusives, c'est-à-dire que, pour tout couple d'intervalles de la droite rationnelle  $(x, y)$  il existe une et une seule relation  $i^p$  de  $INDU$  telle que  $x i^p y$ . Les 25 relations de  $INDU$  apparaissent comme des couples particuliers de  $AI \times AP$ . Dans la suite, il sera parfois commode de considérer que  $INDU \subset AI \times AP$ , et de parler de “relations atomiques virtuelles” pour les couples appartenant à  $(AI \times AP) \setminus INDU = \{s^=, s^>, si^=, si^<, f^=, f^>, fi^=, fi^<, d^=, d^>, di^=, di^<, eq^<, eq^>\}$ . Ces relations atomiques virtuelles sont insatisfaisables.

À partir des 25 relations de base, nous pouvons définir  $2^{25}$  “relations”, en donnant à ce terme le sens de sous-ensembles quelconques de  $INDU$ . Les relations sont des éléments de  $2^{INDU}$ . Soient  $r \in 2^{INDU}$ , et deux intervalles  $x$  et  $y$ ; par définition  $x r y$  ssi il existe  $a \in r$  tel que  $x a y$ . Par exemple,  $(1, 2)$  et  $(3, 4)$  satisfont la relation  $\{b^<, b^=, m^=, d^<\}$  puisqu'ils satisfont la relation  $b^=$ . Les relations correspondant à  $\emptyset$  et  $INDU$  sont appelées relation vide et relation universelle respectivement. Chaque relation  $r \in 2^{INDU}$  peut être vue comme la disjonction des relations atomiques la composant. Nous supposons définies d'une manière similaire les  $2^{13}$  relations de  $\mathcal{AI}$  et les  $2^3$  relations de  $\mathcal{AP}$ .

## 2.2 Représentation de Horn

Dans certains cas, la contrainte “deux intervalles  $x$  et  $y$  doivent satisfaire une relation  $r \in 2^{INDU}$ ” peut s'exprimer à l'aide d'une conjonction de clauses de Horn portant sur les bornes des intervalles  $x$  et  $y$ . Une clause de Horn [Kou96] est une disjonction formée de littéraux (inéquations ou inégalités) positifs :  $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \leq c_{n+1} u_{n+1} + \dots + c_{n+k} u_{n+k}$  et de littéraux négatifs :  $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \neq c_{n+1} u_{n+1} + \dots + c_{n+k} u_{n+k}$ , où chaque  $c_i$  est un coefficient rationnel et chaque  $u_i$  une variable sur les nombres rationnels. Chaque clause de Horn contient au plus un littéral contenant le relation  $\leq$ , *i.e.* un littéral positif (d'où le nom porté par ces clauses). Il est important de signaler que la résolution d'un ensemble de conjonctions de clauses de Horn est polynomial [Kou96]. Remarquons que les relations atomiques appartenant à  $INDU$  peuvent s'exprimer à l'aide d'une conjonction de clauses de Horn unitaires (un littéral par clause de Horn). Par exemple, la satisfaction de la relation  $m^<$  entre deux intervalles  $x = (x^-, x^+)$  et  $y = (y^-, y^+)$  peut s'exprimer par la conjonction de clauses de Horn unitaires suivante :  $(x^- \leq x^+) \wedge (x^- \neq x^+) \wedge (y^- \leq y^+) \wedge (y^- \neq y^+) \wedge (x^+ \leq y^-) \wedge (y^- \leq x^+) \wedge (x^+ - x^- \leq y^+ - y^-) \wedge (x^+ - x^- \neq y^+ - y^-)$ . Une clause ORD-Horn [NB95] est une clause de Horn contenant uniquement des littéraux de la forme  $u \neq v$  ou  $u \leq v$ , avec  $u$  et  $v$  deux variables. Toutes les relations de  $2^{AP}$  peuvent s'exprimer à l'aide de conjonctions de clauses ORD-Horn ; celles de  $2^{AI}$  ayant cette propriété sont les relations ORD-Horn [NB95] de l'algèbre des intervalles (ces relations correspondent aux relations préconvexes de  $\mathcal{AI}$  [Lig96]).

## 2.3 Représentation géométrique

Comme pour les relations atomiques de  $\mathcal{AI}$ , les relations atomiques de  $INDU$  peuvent être représentées par des régions du plan muni d'un repère. Chaque intervalle  $x = (x^-, x^+)$  est représenté par le point de coordonnées  $(x^-, x^+)$ . Étant donné un intervalle de référence  $y = (y^-, y^+)$ , la région représentant la relation atomique  $a \in INDU$ , notée  $\text{Reg}(a, y)$ , est l'ensemble de points du plan  $\{x = (x^-, x^+) : x a y\}$ . Nous obtenons ainsi 25 régions convexes partitionnant le demi-plan  $H = \{(x, y) : y > x\}$  (voir Fig. 1). La représentation géométrique d'une relation  $r \in 2^{INDU}$ ,  $\text{Reg}(r, y)$ , correspond à l'union des régions correspondant à ses relations atomiques :  $\bigcup_{a \in r} \{\text{Reg}(a, y)\}$ . Lorsqu'il ne sera pas important d'indiquer l'intervalle de référence  $y$ , nous noterons simplement cette région  $\text{Reg}(r)$ .

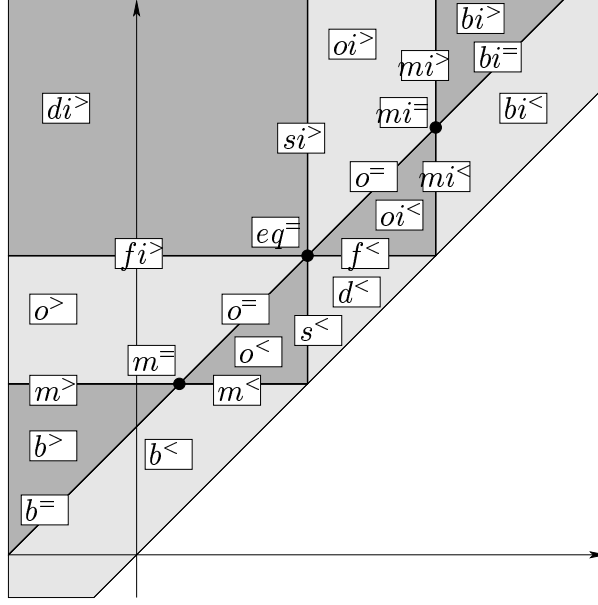


FIG. 1 – Représentation géométrique des relations atomiques de  $INDU$ .

## 2.4 Les opérations fondamentales

Comme pour les relations de  $\mathcal{AI}$  et  $\mathcal{AP}$  nous allons définir des opérations nous permettant de manipuler les relations de  $INDU$ . En interprétant une relation de  $2^{INDU}$  comme une relation binaire classique, c'est-à-dire comme un ensemble de couples d'intervalles de la droite, les opérations relationnelles classiques d'union ( $\cup$ ), d'intersection ( $\cap$ ), d'inverse ( $^{-1}$ ) et de composition ( $\circ$ ) peuvent se définir de manière habituelle :  $x(r \cap s)y$  ssi  $x r y$  et  $x s y$  ;  $x(r \cup s)y$  ssi  $x r y$  ou  $x s y$  ;  $x(r \circ s)y$  ssi  $\exists z, x r z$  et  $z s y$  ;  $x r^{-1} y$  ssi  $y r x$  ( $r, s \in 2^{INDU}$ ). Nous pouvons montrer que  $r \cap s = \{a \in INDU : a \in r \text{ et } a \in s\}$  et  $r \cup s = \{a \in INDU : a \in r \text{ ou } a \in s\}$ . L'inverse d'une relation singleton est une relation singleton (comme pour les relations de  $\mathcal{AI}$  et de  $\mathcal{AP}$ ) et peut se définir par  $\{i^p\}^{-1} = \{(i^{-1})^{p-1}\}$ , avec  $i^p \in INDU$  (nous employons les mêmes symboles pour noter les opérations relationnelles portant sur les relations de  $2^{\mathcal{AI}}$  et  $2^{\mathcal{AP}}$  que ceux que nous utilisons pour les relations de  $INDU$ ). Ainsi,  $r^{-1} = \bigcup_{a \in r} \{a^{-1}\}$ . L'opération de composition a un comportement inhabituel pour un ensemble de relations d'un formalisme qualitatif ; en effet, contrairement aux relations de  $\mathcal{AI}$  et de  $\mathcal{AP}$ , l'ensemble  $2^{INDU}$  n'est pas clos pour l'opération de composition, ce qui signifie que  $(r \circ s)$ , en tant qu'ensemble de couples d'intervalles de la droite, ne coïncide pas toujours avec une réunion d'éléments de  $INDU$ . Considérons par exemple  $\{m^=\} \circ \{m^=\}$ . Il est clair que  $\{m^=\} \circ \{m^=\} \subseteq \{b^=\}$ . Si  $\{m^=\} \circ \{m^=\}$  était une réunion d'éléments de  $INDU$ , elle coïnciderait avec  $\{b^=\}$ , or ce n'est pas le cas :  $\{m^=\} \circ \{m^=\} \subset \{b^=\}$ . Par exemple, le couple d'intervalles formé par  $(0, 1)$  et  $(4, 5)$  est un élément de  $\{b^=\}$  mais n'est pas un élément de  $(\{m^=\} \circ \{m^=\})$ . L'opération de composition est donc inadaptée pour effectuer du raisonnement qualitatif sur  $INDU$  puisque les briques de base manipulées doivent être les relations atomiques. Il est donc nécessaire de définir une opération plus faible que l'opération de composition, parfois appelée *composition faible*, que nous dénoterons par  $\diamond$ . Par définition  $r \diamond s$  est le plus petit sous-ensemble de relations de  $INDU$  tels que  $r \circ s \subseteq r \diamond s$ . Par exemple,

on aura  $\{m^=\} \diamond \{m^=\} = \{b^=\}$ . On constate que l'opération  $\diamond$  n'est pas associative : par exemple  $(\{bi^>\} \diamond \{mi^>\}) \diamond \{m^>\} = \{oi^>, mi^>, bi^>\}$  et  $\{bi^>\} \diamond (\{mi^>\} \diamond \{m^>\}) = \{bi^>\}$ . Il en résulte que l'opération  $\diamond$  ne peut pas être utilisée pour définir pour  $\mathcal{INDU}$  une structure d'algèbre relationnelle [Tar41]. Remarquons que  $\circ$  et  $\diamond$  sont identiques pour  $\mathcal{AI}$  et  $\mathcal{AP}$ . Nous considérons également une opération binaire correspondant au produit cartésien d'une relation  $r \in 2^{\mathcal{AI}}$  et d'une relation  $s \in 2^{\mathcal{AP}}$  par :  $r \times s = \{i^p : i \in r, p \in s\}$ . Cet ensemble de couples peut contenir des relations atomiques virtuelles de  $\mathcal{INDU}$  et n'est donc pas nécessairement une relation de  $2^{\mathcal{INDU}}$ . Il est intéressant de noter que pour  $i^p, j^q \in \mathcal{INDU}$ ,  $i^p \diamond j^q = ((i \circ j) \times (p \circ q)) \cap \mathcal{INDU}$ . La projection sur les intervalles (resp. sur les points) d'une relation  $r \in 2^{\mathcal{INDU}}$ , dénotée par  $r_I$  (resp.  $r_P$ ), est définie par  $r_I = \{i : i^p \in r\}$  (resp.  $r_P = \{p : i^p \in r\}$ ).

Dans la suite nous dirons qu'un ensemble de relations est une sous-classe si et seulement s'il est clos pour les opérations  $^{-1}$ ,  $\circ$ , et  $\cap$ .

### 3 Les réseaux de contraintes qualitatives

#### 3.1 Définitions

Un réseau de contraintes  $\mathcal{INDU}$  est un couple  $\mathcal{N} = (V, C)$ , où :

- $V$  est un ensemble fini  $\{V_1, \dots, V_n\}$  (avec  $n = |V|$ ) de variables (représentant des intervalles de la droite),
- $C$  est fonction associant à chaque couple  $(V_i, V_j)$  de variables de  $V$  une contrainte, notée  $C_{ij}$ , définie par une relation de  $2^{\mathcal{INDU}}$ .

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $C_{ij}^{-1} = C_{ji}$  et  $C_{ii} = \{eq^-\}$ , pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . De plus, nous supposons définis d'une manière similaire des réseaux de  $\mathcal{AI}$  et des réseaux de  $\mathcal{AP}$ . Un réseau atomique est un réseau dont toutes les contraintes sont formées d'une seule relation de base.

**Définition 1** Soit un réseau  $\mathcal{INDU}$   $\mathcal{N} = (V, C)$  et  $n = |V|$ .

- Une instantiation  $m$  de  $\mathcal{N}$  est une application associant à chaque variable  $V_i \in V$  un intervalle  $m_i$  (également dénoté par  $m(V_i)$ ).  $m_{ij}$  dénotera la relation de l'ensemble  $\mathcal{INDU}$  satisfaite entre  $m_i$  et  $m_j$ .
- L'instanciation  $m$  est une instantiation cohérente ou solution de  $\mathcal{N}$  ssi pour tout  $V_i, V_j \in V$ ,  $m_{ij} \in C_{ij}$ . Si  $\mathcal{N}$  admet une solution, il sera dit cohérent.
- $\mathcal{N}$  est  $k$ -cohérent (avec  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) ssi toute instantiation partielle cohérente de  $k - 1$  variables peut être étendue à une nouvelle variable tout en restant cohérente.
- $\mathcal{N}$  sera dit  $\diamond$ -fermé ssi pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $C_{ij} \subseteq C_{ik} \diamond C_{kj}$ .
- Un sous-réseau  $\mathcal{N}' = (V', C')$  est un réseau tel que  $V' = V$  et  $C'_{ij} \subseteq C_{ij}$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .
- Un réseau  $\mathcal{N}' = (V, C')$  est équivalent à  $\mathcal{N}$  ssi ils admettent les mêmes solutions.

Étant donné un réseau de contraintes, le principal problème qui se pose est de savoir si ce réseau admet une solution. Ce problème est appelé problème de la cohérence. Étant donné un ensemble  $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{INDU}}$  (fermé pour l'opération inverse et contenant la relation  $\{eq^-\}$ ), le problème de la cohérence des réseaux de  $\mathcal{INDU}$  dont les contraintes appartiennent à  $\mathcal{E}$  sera dénoté par  $\text{Coherence}(\mathcal{E})$ . Le problème de la cohérence des réseaux de  $\mathcal{AI}$  étant NP-complet, il est clair que  $\text{Coherence}(2^{\mathcal{INDU}})$  est également NP-complet. Nous appelons méthode de la  $\diamond$ -fermeture, la méthode consistant à obtenir à partir d'un réseau  $\mathcal{N} = (V, C)$  un sous-réseau  $\diamond$ -fermé et équivalent à  $\mathcal{N}$  en itérant l'opération  $C_{ij} := C_{ij} \cap (C_{ik} \diamond C_{kj})$ , pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, |V|\}$ , jusqu'à obtention d'un point fixe. Cette méthode peut être implémentée

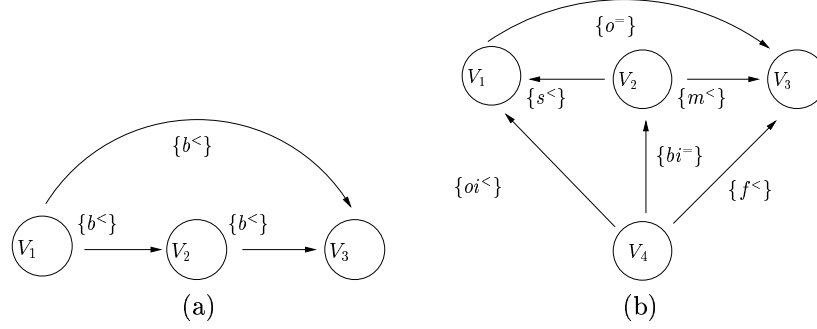


FIG. 2 – (a) un réseau atomique cohérent et non 3-cohérent, (b) un réseau atomique 3-cohérent et non cohérent.

en  $0(n^3)$  (avec  $n$  le nombre de variables) à l’aide d’algorithmes similaires à ceux employés pour obtenir des CSP équivalents chemin-cohérents [MF85].

### 3.2 Cohérence et $\diamond$ -fermeture

Du fait que l’ensemble  $2^{\text{INDU}}$  n’est pas clos pour l’opération de composition, plusieurs propriétés fondamentales que possèdent les réseaux de contraintes de  $\mathcal{AI}$  et de  $\mathcal{AP}$  ne sont plus vraies.

**Proposition 1** *Soit  $\mathcal{N}$  un réseau  $\text{INDU}$ . Il n’existe pas nécessairement un réseau  $\mathcal{N}'$  équivalent à  $\mathcal{N}$  et 3-cohérent.*

Le réseau atomique représenté dans Fig. 2 (a) est  $\diamond$ -fermé mais non 3-cohérent : il suffit pour le voir de considérer la solution partielle  $m(V_1) = (1, 2)$ ,  $m(V_3) = (3, 5)$  qui ne peut être étendue à la variable  $V_2$ . Ce réseau est clairement cohérent et n’admet pas de réseau équivalent 3-cohérent.

Malgré tout, il existe des réseaux de  $\text{INDU}$  3-cohérents, en particulier des réseaux atomiques. Qu’en est-il de leur cohérence? En fait il est possible de mettre en évidence des réseaux atomiques 3-cohérents et non cohérents (voir Fig. 2 (b)). Ces réseaux sont  $\diamond$ -fermés ; en conséquence, nous pouvons affirmer :

**Proposition 2** *Un réseau atomique  $\text{INDU}$   $\diamond$ -fermé n’est pas nécessairement cohérent.*

Pour  $\mathcal{AI}$  il a été établi que la complexité de  $\text{Coherence}(\mathcal{E})$ , avec  $\mathcal{E} \in 2^{\mathcal{A}}$  est la même que celle de  $\text{Coherence}(\bar{\mathcal{E}})$  [NB95], avec  $\bar{\mathcal{E}}$  dénotant la fermeture de  $\mathcal{E}$  pour les opérations d’inverse, d’intersection et de composition. La preuve de ce résultat est basée sur le fait qu’à partir d’un réseau de  $\mathcal{AI}$  sur  $\bar{\mathcal{E}}$  on peut construire un réseau équivalent sur  $\mathcal{E}$ . Si on substitue à l’opération de composition l’opération de “composition faible”  $\diamond$ , cette propriété ne peut plus être établie pour  $\text{INDU}$ . Ceci provient du fait que pour deux intervalles  $x$  et  $y$  satisfaisant la relation  $r \diamond s$  il n’existe pas nécessairement un troisième intervalle  $z$  tel que  $x r z$  et  $z s y$  (propriété nécessaire pour traduire le réseau sur  $\bar{\mathcal{E}}$  en un réseau équivalent sur  $\mathcal{E}$ ). Malgré tout, nous pouvons établir un résultat d’équivalence plus faible, que nous utiliserons plus tard :

**Proposition 3** *Soit  $\mathcal{E} \subseteq 2^{\text{INDU}}$ , fermé pour l’inverse et contenant la relation  $\{eq^=\}$ .  $\text{Coherence}(\mathcal{E})$  à la même complexité en temps que  $\text{Coherence}(\mathcal{E}^*)$ , où  $\mathcal{E}^*$  note la fermeture de  $\mathcal{E}$  pour l’opération d’intersection.*

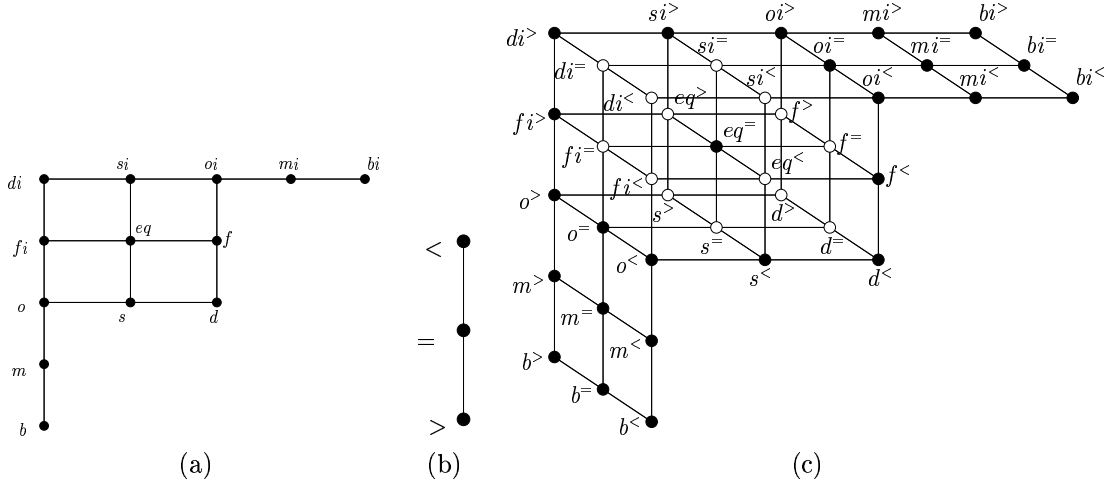


FIG. 3 – (a) le treillis des intervalles, (b) le treillis des points, (c) le treillis de  $\mathcal{INDU}$ .

La preuve de ce résultat est basée sur le fait qu’une contrainte de la forme  $x (r \cap s) y$  est équivalente aux trois contraintes  $x r y$ ,  $x s y$  et  $y \{eq^=\} z$ , avec  $z$  une nouvelle variable. Dans la suite de cet article nous allons caractériser plusieurs ensembles de relations de  $\mathcal{INDU}$  pour lesquels le problème de la cohérence est polynomial. Plusieurs cas de polynomialité peuvent être obtenus de manière directe à partir de ceux de l’algèbre des intervalles :

**Proposition 4** *Soit  $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{AI}}$  pour lequel le problème de la cohérence est polynomial. Soit  $\mathcal{E}' \subseteq 2^{\mathcal{INDU}}$  défini par  $\mathcal{E}' = \{(r \times \{<, =, >\}) \cap \mathcal{INDU} : r \in \mathcal{E}\}$ . Alors  $\text{Coherence}(\mathcal{E}')$  est un problème polynomial.*

Ces cas polynomiaux sont peu intéressants du fait que les relations  $\mathcal{INDU}$  correspondantes n’imposent aucune contrainte sur les durées des intervalles, et ne sont finalement que “des relations de  $\mathcal{AI}$ ”. Établissons des cas de polynomialité moins directs et plus intéressants.

## 4 Les relations convexes du formalisme $\mathcal{INDU}$

### 4.1 Définition et représentation

Les relations convexes de  $\mathcal{AI}$  et de  $\mathcal{AP}$  correspondent respectivement aux intervalles du treillis des intervalles et aux intervalles du treillis des points. De manière naturelle, nous définissons le treillis de  $\mathcal{INDU}$  comme le produit cartésien du treillis des intervalles et du treillis des points (voir Fig. 3 (c)). Ce treillis contient donc en particulier les relations atomiques virtuelles de  $\mathcal{INDU}$ . Nous définissons l’ensemble des relations convexes de  $2^{\mathcal{INDU}}$ , dénoté par  $\mathcal{C}$ , de la manière suivante.

**Définition 2** *Soit  $r \in \mathcal{INDU}$ .  $r \in \mathcal{C}$  ssi  $r = [min, max] \cap \mathcal{INDU}$  où  $[min, max]$  est un intervalle du treillis de  $\mathcal{INDU}$ .*

Remarquons que  $r$  est convexe ssi  $r = (s \times t) \cap \mathcal{INDU}$ , où  $s$  et  $t$  sont deux relations convexes de  $\mathcal{AI}$  et de  $\mathcal{AP}$ , respectivement. Il s’ensuit que du point de vue géométrique, une relation  $r$  de  $\mathcal{INDU}$  est convexe si sa représentation géométrique  $\text{Reg}(r)$  est une région convexe qui satisfait l’égalité suivante :

$$\exists h \in \mathcal{H}, \text{Reg}(r) = (\text{Proj}_1(\text{Reg}(r)) \times \text{Proj}_2(\text{Reg}(r))) \cap h,$$

où  $Proj_1$  (resp.  $Proj_2$ ) dénote la projection sur le premier axe (resp. le second axe) et  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des six régions connexes formées par l'union de régions de  $\{\text{Reg}(\text{INDU} \cap (\text{AI} \times \{<\})), \text{Reg}(\text{INDU} \cap (\text{AI} \times \{>\})), \text{Reg}(\text{INDU} \cap (\text{AI} \times \{=\}))\}$ .

Comme pour les relations convexes de l'algèbre des intervalles ou de l'algèbre des points nous avons la propriété suivante :

**Proposition 5** *Soit  $r \in \text{INDU}$ .  $r$  est convexe ssi  $r$  peut s'exprimer par une conjonction de clauses de Horn unitaires  $\Phi$  telle que, si  $(u \neq v) \in \Phi$  alors  $(u \leq v) \in \Phi$  ou  $(v \leq u) \in \Phi$  (avec  $u$  et  $v$  correspondant à des bornes ou à des différences de bornes (des longueurs d'intervalles)).*

La preuve de cette proposition utilise le fait qu'une relation convexe de  $\text{INDU}$  est le "produit cartésien" d'une relation convexe de  $2^{\text{AI}}$  et d'une relation convexe de  $2^{\text{AP}}$ . Remarquons qu'une relation convexe de  $\text{INDU}$  ne peut pas toujours s'exprimer par une conjonction de clauses unitaires de type ORD-Horn puisque parfois il est nécessaire d'utiliser des clauses de la forme  $x^+ - x^- \leq y^+ - y^-$  ou  $x^+ - x^- \neq y^+ - y^-$ . Pujari *et al.* dénombrent 227 relations convexes ; en fait il y en a 240, cette différence provenant du fait que ces auteurs utilisent un treillis ne tenant pas compte des relations atomiques virtuelles. Par exemple, la relation convexe  $\{fi^>, eq^=, o^>, o^=, o^<, s^<\}$  (voir Fig. 4) fait partie de cette différence. De plus, nous pouvons

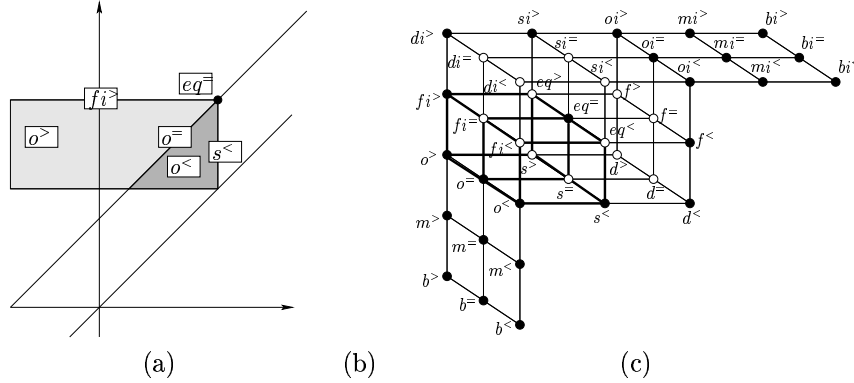


FIG. 4 – La relation convexe  $\{fi^>, eq^=, o^>, o^=, o^<, s^<\}$

remarquer que l'ensemble  $\mathcal{C}$  n'est pas une sous-classe :

**Proposition 6** *L'ensemble  $\mathcal{C}$  est stable pour les opérations  $^{-1}$ ,  $\cap$ , mais pas pour  $\diamond$ .*

La stabilité pour les opérations d'intersection et d'inverse découle directement de la définition. Pour se convaincre de la non stabilité pour l'opération  $\diamond$ , il suffit de considérer la composée  $\{b^<\} \diamond \{d^<, o^<, o^>, o^=, s^<\}$  qui est la relation non convexe  $\{b^<, b^>, b^=, d^<, o^<, m^<, s^<\}$ .

Certaines relations de  $\mathcal{C}$  peuvent s'exprimer à l'aide de clauses ORD-Horn, *i.e.* sans clause faisant intervenir la longueur des intervalles. Ces relations convexes correspondent en fait aux relations convexes de  $\mathcal{AI}$  ; nous dénoterons leur ensemble par  $\mathcal{C}_{AI}$ . Les relations de  $\mathcal{C}_{AI}$  peuvent être caractérisées de deux façons équivalentes en termes de relations convexes de  $\mathcal{AI}$  ou d'intervalles du treillis de  $\text{INDU}$  :

**Proposition 7** *Soit  $r \in 2^{\text{INDU}}$ .  $r \in \mathcal{C}_{AI}$  ssi  $r$  satisfait une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

- $r = (s \times \{<, =, >\}) \cap \text{INDU}$  avec  $s$  une relation convexe de  $2^{\text{AI}}$  ;

–  $r = [i^<, j^>] \cap \text{INDU}$  où  $[i^<, j^>]$  est un intervalle du treillis de  $\text{INDU}$  avec  $i, j \in \text{AI}$ .

Du fait que l'ensemble  $\mathcal{C}_{\text{AI}}$  correspond aux relations convexes de l'algèbre des intervalles, nous pouvons affirmer que l'opération  $\diamond$  restreinte aux relations de  $\mathcal{C}_{\text{AI}}$  correspond à la "vraie" composition. Par ailleurs, il s'ensuit que l'ensemble  $\mathcal{C}_{\text{AI}}$  est une sous-classe, c'est-à-dire qu'il est stable pour les trois opérations  $^{-1}$ ,  $\cap$  et  $\diamond$ .

## 4.2 Polynomialité des relations convexes de $\text{INDU}$

Les relations convexes peuvent s'exprimer à l'aide de clauses de Horn unitaires ; en conséquence, le problème de la cohérence des réseaux de  $\text{INDU}$  convexes (les réseaux de  $\text{INDU}$  ne contenant que des relations convexes comme contraintes) est polynomial. Il suffit pour le voir de traduire le réseau convexe en un ensemble de clauses de Horn, et d'appliquer un algorithme de résolution tel que celui proposé par Koubarakis [Kou96]. Remarquons que les clauses de Horn unitaires obtenues à partir de relations convexes correspondent à un ensemble d'inéquations strictes ou larges, et peuvent donc être résolues par l'algorithme du simplexe ou par celui de Kachian.

**Proposition 8** *Coherence( $\mathcal{C}$ ) est un problème polynomial.*

Il est bien connu que la méthode de la chemin-cohérence résout le problème de la minimalité et de la cohérence des réseaux convexes de  $\mathcal{AI}$ . Par voie de conséquence, nous avons :

**Proposition 9** *Coherence( $\mathcal{C}_{\text{AI}}$ ) peut être décidé au moyen de la méthode de  $\diamond$ -fermeture.*

## 5 Les relations préconvexes de $\text{INDU}$

On sait que l'unique ensemble maximal polynomial de  $\mathcal{AI}$  contenant toutes les relations atomiques est la sous-classe des relations préconvexes [NB95, Lig96]. Cette sous-classe correspond à la sous-classe des relations ORD-Horn de  $\mathcal{AI}$ . Pour définir les relations préconvexes de  $\text{INDU}$  nous utilisons la définition donnée par Ligozat [Lig96] en étendant les notions de fermeture convexe et de dimension aux relations de  $\text{INDU}$ . Pour  $\mathcal{AI}$ , la dimension d'une relation est par définition celle de la région qui la représente. D'une manière similaire nous posons la définition suivante :

**Définition 3** *Soit  $r \in 2^{\text{INDU}}$ . La dimension de  $r$ , notée  $\text{dim}(r)$ , est la dimension de la région  $\text{Reg}(r)$ .*

Conformément aux conventions généralement faites, la dimension de la relation vide est  $-1$ . Remarquons que  $\text{dim}(r) = \max\{\text{dim}(\{a\}) : a \in r\}$ . La dimension d'une relation singleton  $\{a\}$  peut être aussi vue comme le degré de liberté pour placer les bornes d'un intervalle  $x$  de telle manière que  $x$  satisfasse la relation  $a$  avec un intervalle  $y$  déjà donné. Ainsi, si  $a$  est la relation  $m^=$ , ce degré de liberté est 0 puisque nécessairement les contraintes  $x^+ = y^-$  et  $x^- = 2y^- - y^+$  doivent être satisfaites. Si  $a$  est la relation  $b^=$ , le degré de liberté est de 1, puisque le placement de  $x^-$  (resp.  $x^+$ ) contraint le placement de  $x^+$  (resp.  $x^-$ ).

La fermeture convexe d'une relation de  $\text{INDU}$   $r$ , notée  $I(r)$ , est la plus petite relation convexe contenant  $r$ . Remarquons que cette relation existe toujours puisque l'ensemble  $\mathcal{C}$  est clos pour l'opération d'intersection.

**Définition 4** *Soit  $r \in 2^{\text{INDU}}$ .  $I(r) = \bigcap_{s \in \mathcal{C}} \{s\}$ .*

La fermeture convexe d'une relation de  $\text{INDU}$  peut être calculée à partir de celles de  $\mathcal{AP}$  et de  $\mathcal{AI}$  :

**Proposition 10** Soit  $r \in 2^{\text{INDU}}$ .  $I(r) = (I(r_I) \times I(r_P)) \cap \text{INDU}$ .

Maintenant, nous pouvons définir les relations préconvexes de  $\text{INDU}$ .

**Définition 5** Soit  $r \in 2^{\text{INDU}}$ .  $r$  est préconvexe ssi  $r$  est vide ou  $\dim(I(r) \setminus r) < \dim(r)$ .

Nous dénotons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des relations préconvexes de  $\text{INDU}$ . Remarquons que  $\mathcal{P}$  est un sur-ensemble strict de l'ensemble des relations issues du produit cartésien des relations préconvexes de AI et des relations préconvexes de AP. Par ailleurs,  $\mathcal{P}$  contient 88096 relations (dont les relations convexes de  $\mathcal{C}$ ).

**Proposition 11** L'ensemble  $\mathcal{P}$  est clos pour  $^{-1}$ , mais il ne l'est pas pour  $\cap$  et  $\diamond$ .

Pour montrer le deuxième point, considérons les relations préconvexes  $r = \{eq^-, b^-, b^-, o^-\}$ ,  $s = \{eq^-, b^-, b^-, o^-\}$ ,  $t = \{b^-\}$  et  $u = \{d^-, o^-, o^-\}$ . On constate que les relations  $r \cap s = \{eq^-, b^-\}$  et  $t \circ u = \{b^-, b^-, b^-, d^-, o^-, m^-, s^-\}$  ne sont pas préconvexes.

## 5.1 NP-complétude des relations préconvexes de INDU

Dans cette sous-section nous montrons la NP-complétude des relations préconvexes de  $\text{INDU}$ . Pour cela nous définissons une réduction polynomiale entre le problème du 3-coloriage de graphe et le problème de la cohérence pour  $\mathcal{P}^*$ .

**Proposition 12**  $\text{Cohérence}(\mathcal{P}^*)$  est un problème NP-complet.

**Preuve** Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté, où  $S$  est un ensemble de sommets et  $A$  un ensemble d'arêtes entre ces sommets. Nous lui associons le réseau de  $\text{INDU}$   $\mathcal{N} = (V, C)$  défini de la manière suivante.  $V = \text{Col} \cup V_S$  est un ensemble de variables avec  $\text{Col} = \{\text{Col}_1, \text{Col}_2, \text{Col}_3\}$  et  $V_S = \{S_1, \dots, S_n\}$  ( $n = |S|$ ). À chaque variable de  $\text{Col}$  correspond une couleur. À chaque variable  $S_i \in V$  correspond un sommet  $s_i \in S$ . Les contraintes de  $\mathcal{N}$  entre les trois variables de  $\text{Col}$  sont données par la figure Fig. 5 (a). Celles entre deux variables  $S_i$  et  $S_j$  telles que  $(s_i, s_j) \in E$  (resp.  $\notin E$ ) sont données par Fig. 5 (b) (resp. (c)). Nous pouvons vérifier que ces contraintes appartiennent à  $\mathcal{P}^*$ . Par exemple, la relation  $\{m^-, eq^-, mi^-\}$  est l'intersection des relations préconvexes  $\{o^-, di^-, oi^-, m^-, eq^-, mi^-\}$  et  $\{o^-, d^-, o^-, m^-, eq^-, mi^-\}$ . Nous pouvons montrer que  $G = (S, A)$  est 3-coloriable ssi  $\mathcal{N}$  est

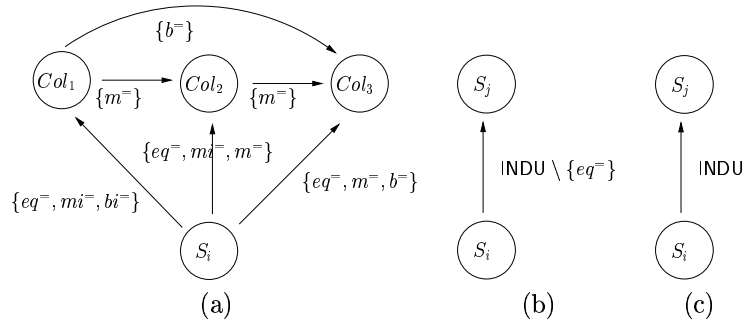


FIG. 5 – Les contraintes de  $\mathcal{N} = (V, C)$

cohérent. Étant donnée une solution du problème du 3-coloriage pour  $G$ , il suffit d'assigner à chaque variable  $S_i$  l'intervalle correspondant à la couleur affectée au sommet  $s_i$ . Inversement, pour obtenir une solution du problème de 3-coloriage de  $G$  à partir d'une solution de  $\mathcal{N}$ ,

il suffit d'associer à chaque sommet  $s_i$  la couleur correspondant à l'intervalle assigné à la variable  $S_i$ .  $\dashv$

À partir de ce résultat et de la proposition 3 nous pouvons en déduire la NP-complétude des relations préconvexes de  $\mathcal{INDU}$  :

**Théorème 1** *Coherence( $\mathcal{P}$ ) est un problème NP-complet.*

## 6 Les relations fortement préconvexes de $\mathcal{INDU}$

Nous venons de démontrer que le problème de la cohérence sur les relations préconvexes de  $\mathcal{INDU}$  est NP-complet. Ceci est également le cas pour les relations préconvexes de l'algèbre des intervalles généralisés [BCL00]. Il a été démontré que pour un sous-ensemble des relations préconvexes de l'algèbre des intervalles généralisés, les relations fortement préconvexes, il en était autrement. En suivant la ligne de raisonnement proposé par Balbiani *et al.* nous définissons les relations fortement préconvexes de  $\mathcal{INDU}$  et montrerons que pour cet ensemble le problème de la cohérence est polynomial.

**Définition 6** *Soit  $r \in 2^{\mathcal{INDU}}$ .  $r$  est fortement préconvexe ssi pour tout relation convexe  $s \in \mathcal{C}$ , la relation  $r \cap s$  est préconvexe.*

Nous dénotons par  $\mathcal{F}$  l'ensemble des relations fortement préconvexes de  $\mathcal{INDU}$ . L'ensemble  $\mathcal{F}$  contient 45792 relations.

**Proposition 13** *L'ensemble  $\mathcal{F}$  est clos<sup>2</sup> pour  $^{-1}$  et  $\cap$ , mais il ne l'est pas pour  $\diamond$ .*

Considérons les deux relations fortement préconvexes de  $\mathcal{INDU}$   $r = \{b^<\}$  et  $s = \{d^<, o^<, o^>\}$ . Alors  $r \diamond s$  est la relation  $\{b^<, b^>, b^=, d^<, o^<, m^<, s^<\}$  qui n'est pas fortement préconvexe. Il est intéressant de remarquer que, pour déterminer si une relation de  $\mathcal{INDU}$  est fortement préconvexe, on peut se restreindre à tester la préconvexité de ses intersections avec uniquement deux relations convexas. En effet, on peut montrer qu'une relation  $r$  est fortement préconvexe si les deux relations  $r \cap \text{INDU}$  et  $r \cap (\text{AI} \times \{=\})$  sont préconvexas.

### 6.1 Polynomialité des relations fortement préconvexes de $\mathcal{INDU}$

Cette section est dévolue au bon comportement des relations fortement préconvexes de  $\mathcal{INDU}$  en ce qui concerne le problème de la cohérence.

**Proposition 14** *Les relations fortement préconvexas peuvent s'exprimer par des conjonctions de clauses de Horn.*

**Preuve** Soit  $r \in \mathcal{F}$ . Puisque  $I(r)$  est convexe, il existe une conjonction de clauses de Horn la représentant. Dénotons par  $\Phi_{I(r)}$  une telle conjonction. Dans le cas général  $\Phi_{I(r)}$  est "trop permissive". En effet, en considérant les contraintes de  $\Phi_{I(r)}$ , une relation atomique  $a \in I(r) \setminus r$  est toujours réalisable. Nous devons interdire ces relations atomiques sans interdire les relations atomiques appartenant à  $r$ . Soit  $a \in I(r) \setminus r$ . Nous allons définir pour tous les cas possibles de  $a$  une clause de Horn, dénotée par  $\Phi_a$ , telle que l'addition de  $\Phi_a$  à  $\Phi$  permet d'empêcher la satisfaction de  $a$  sans exclure la satisfaction des relations atomiques appartenant à  $r$ . Étant donné que  $r$  est préconvexe,  $\dim(I(r) \setminus r) < \dim(r)$ , et donc  $\dim(a) < \dim(r)$ . En conséquence,  $\dim(a) = 1$  ou  $0$ .

Considérons tout d'abord les cas où  $a$  n'impose pas l'égalité des durées des deux intervalles.

<sup>2</sup>Un programme machine a été utilisé pour démontrer ce résultat et la proposition 15.

$$\begin{aligned}
\Phi_{m<} &= (x^+ \neq y^- \vee x^+ - x^- \geq y^+ - y^-), & \Phi_{m>} &= (x^+ \neq y^- \vee x^+ - x^- \leq y^+ - y^-), \\
\Phi_{mi<} &= (y^+ \neq x^- \vee x^+ - x^- \geq y^+ - y^-), & \Phi_{mi>} &= (y^+ \neq x^- \vee x^+ - x^- \leq y^+ - y^-), \\
\Phi_{s<} &= (x^- \neq y^- \vee x^+ - x^- \geq y^+ - y^-), & \Phi_{si>} &= (x^- \neq y^- \vee x^+ - x^- \leq y^+ - y^-), \\
\Phi_{f<} &= (x^+ \neq y^+ \vee x^+ - x^- \geq y^+ - y^-), & \Phi_{fi>} &= (x^+ \neq y^+ \vee x^+ - x^- \leq y^+ - y^-),
\end{aligned}$$

Maintenant, considérons les relations atomiques imposant l'égalité des durées des deux intervalles. Ces relations atomiques appartiennent à la relation convexe  $s$  définie par  $s = \{eq^-, b^-, bi^-, o^-, oi^-, m^-, mi^-\}$ .  $\Phi_a$ , excepté pour le cas  $a = eq^-$  contiendra toujours le littéral  $x^+ - x^- \neq y^+ - y^-$ .

$$\begin{aligned}
\Phi_{b=} &= (x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee x^+ \geq y^-), & \Phi_{bi=} &= (x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee y^+ \geq x^-), \\
\Phi_{m=} &= (x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee x^+ \neq y^-), & \Phi_{mi=} &= (x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee y^+ \neq x^-), \\
\Phi_{eq=} &= (x^- \neq y^- \vee x^+ \neq y^+).
\end{aligned}$$

Les cas restants correspondent à  $a = o^-$  et  $a = oi^-$ . Considérons le cas  $a = o^-$  (le cas  $oi^-$  est similaire). Supposons que  $r \cap \{b^-, m^-\} \neq \emptyset$  et que  $r \cap \{eq^-, mi^-, oi^-, bi^-\} \neq \emptyset$ . Ainsi  $a \in I(r \cap s)$ . Par ailleurs, nous savons que  $a \notin r$ . Par conséquent  $\dim(I(r \cap s) \setminus (r \cap s)) \geq 1$ . Puisque  $r \cap s \subseteq s$  et  $\dim(s) = 1$ ,  $\dim(I(r \cap s) \setminus (r \cap s)) \leq 1$ . Ainsi,  $\dim(r \cap s) \leq \dim(I(r \cap s) \setminus (r \cap s))$  et  $r \cap s$  est non préconvexe. Il y a une contradiction (puisque  $r$  est une relation fortement préconvexe). Par conséquent, seulement trois cas peuvent se présenter :

- $r \cap s = \emptyset$ .  $\Phi_{o=}$  est  $x^+ - x^- \neq y^+ - y^-$ ,
- $r \cap \{b^-, m^-\} \neq \emptyset$  et  $r \cap \{eq^-, mi^-, oi^-, bi^-\} = \emptyset$ .  $\Phi_{o=}$  est  $x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee x^+ \leq y^-$ ,
- $r \cap \{b^-, m^-\} = \emptyset$  et  $r \cap \{eq^-, mi^-, oi^-, bi^-\} \neq \emptyset$ .  $\Phi_{o=}$  is  $x^+ - x^- \neq y^+ - y^- \vee x^+ \geq y^+$ .

En définitive, on voit que  $r$  peut être exprimée par la conjonction de clauses de Horn  $\Phi_{I(r)} \wedge \bigwedge_{a \in (I(r) \setminus r)} \Phi_a$ .  $\dashv$

Le fait que chaque relation fortement préconvexe puisse être exprimée à l'aide d'une conjonction de clauses de Horn nous permet d'affirmer le résultat suivant :

**Théorème 2** *Coherence( $\mathcal{F}$ ) est un problème polynomial.*

## 7 Un nouvel ensemble polynomial : la sous-classe $\mathcal{G}$

Nous venons de montrer que l'ensemble des relations fortement préconvexes est polynomial. Or cet ensemble contient les relations singletons de  $\mathcal{INDU}$  pour lesquelles nous avons remarqué que la méthode de  $\diamond$ -fermeture ne permet pas de résoudre le problème de la cohérence. Dans cette section nous allons caractériser un sous-ensemble de relations préconvexes pour lequel le problème de la fermeture par  $\diamond$  résout le problème de la cohérence. Nous dénoterons par  $\mathcal{G}$  ce nouvel ensemble de relations.

**Définition 7**  $\mathcal{G}$  est l'ensemble des relations  $r \in 2^{\mathcal{INDU}}$  telle que pour toute relation convexe  $s \in \mathcal{C}_{AI}$ ,  $r \cap s$  est une relation préconvexe et  $I(r \cap s) \in \mathcal{C}_{AI}$ .

L'ensemble  $\mathcal{G}$  contient 11854 relations. La définition de cet ensemble a été guidée par notre volonté d'obtenir des relations préconvexes de  $\mathcal{INDU}$  dont les fermetures convexes sont "des relations convexes de  $\mathcal{AI}$ " et qui forment une sous-classe. Le premier point est satisfait puisque pour toute relation  $r \in \mathcal{G}$ , par définition, d'une part la relation  $r \cap \mathcal{INDU} = r$  est préconvexe et d'autre part  $I(r \cap \mathcal{INDU}) = I(r)$  est une relation appartenant à  $\mathcal{C}_{AI}$ . Le deuxième point peut être vérifié par machine.

**Proposition 15** *L'ensemble  $\mathcal{G}$  est stable pour les opérations  $^{-1}$ ,  $\cap$  et  $\diamond$ .*

Remarquons que toute relation de  $\mathcal{G}$  n'est pas nécessairement fortement préconvexe. Par exemple, la relation  $\{eq^-, d^<, di^>, o^<, o^>, oi^<, oi^>, m^<, m^>, m^=, mi^<, mi^>, mi^=\}$  appartient à  $\mathcal{G}$  mais n'est pas fortement préconvexe puisque l'intersection de cette relation avec la relation convexe  $\{eq^-, o^=, oi^=, m^=, mi^=\}$  n'est pas préconvexe. Inversement, une relation

fortement préconvexe n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{G}$ . Notons que, pour déterminer si une relation de  $\mathcal{INDU}$  appartient à  $\mathcal{G}$ , il est suffisant de considérer uniquement un ensemble de trois relations convexes de  $\mathcal{C}_{AI}$ . En effet nous pouvons montrer qu'une relation  $r$  de  $\mathcal{INDU}$  appartient à  $\mathcal{G}$  ssi  $r \cap s \in \mathcal{P}$  et  $I(r \cap s) \in \mathcal{C}_{AI}$  pour tout  $s \in \{\text{INDU}, \{m^<, m^=, m^>\}, \{mi^<, mi^=, mi^>\}\}$ .

### 7.1 La sous-classe $\mathcal{G}$ est polynomiale

Nous allons montrer que le problème de la cohérence sur l'ensemble  $\mathcal{G}$  est polynomial. Tout d'abord considérons les réseaux de  $\mathcal{INDU}$   $\diamond$ -fermés dont les contraintes appartiennent à  $\mathcal{C}_{AI}$  et montrons qu'ils admettent une solution maximale, *i.e.* une solution  $m$  telle que  $\dim(m_{ij}) = \dim(C_{ij})$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  (où  $C$  désigne les contraintes du réseau et  $n$  son nombre de variables).

**Proposition 16** *Soit  $\mathcal{N} = (V, C)$  un réseau convexe de  $\mathcal{INDU}$  dont toutes les contraintes appartiennent à  $\mathcal{C}_{AI}$  ( $\neq \emptyset$ ) et qui est  $\diamond$ -fermé. Alors  $\mathcal{N}$  admet une solution maximale.*

**Preuve**  $\mathcal{C}_{AI}$  correspond aux relations convexes de  $\mathcal{AI}$ . Soit  $\mathcal{N}' = (V, C')$  le réseau convexe de  $\mathcal{AI}$  équivalent à  $\mathcal{N}$ .  $\mathcal{N}'$  admet une solution  $m = m_1, \dots, m_n$  (avec  $n = |V|$ ) telle que  $a = b$ , avec  $a$  et  $b$  deux bornes de  $m_i$  et  $m_j$ , si et seulement si toutes les relations atomiques de  $\mathcal{AI}$  appartenant à  $C'_{ij}$  impose cette égalité ( $m$  est une solution maximale pour  $\mathcal{AI}$ , voir [Lig96]). Nous pouvons modifier  $m$  pour obtenir une solution  $s$  ayant la propriété supplémentaire :  $s_i^+ - s_i^- = s_j^+ - s_j^-$  ssi  $C_{ij} = \{eq^-\}$ . Considérons la borne inférieure  $m_i^-$ , soit  $l$  le nombre de bornes localisées avant  $m_i^-$ . Nous affectons à  $s_i^-$  la valeur  $l/(1+l)$ . Nous traitons d'une manière similaire les bornes supérieures. La solution  $s$  satisfait les propriétés fixées précédemment. Ainsi,  $s$  est une solution maximale de  $\mathcal{N} = (V, C)$ .  $\dashv$

**Proposition 17** *Soient  $r, s \in \text{INDU}$  telles que  $I(r \diamond s)$ ,  $I(r)$  et  $I(s) \in \mathcal{C}_{AI}$ . Nous avons  $I(r \diamond s) \subseteq I(r) \diamond I(s)$ .*

**Preuve**  $r \subseteq I(r)$  et  $s \subseteq I(s)$ . Ainsi  $r \diamond s \subseteq I(r) \diamond I(s)$ . En conséquence,  $I(r \diamond s) \subseteq I(I(r) \diamond I(s))$ . Puisque  $\mathcal{C}_{AI}$  est clos pour l'opération  $\diamond$ ,  $I(r) \diamond I(s)$  est une relation convexe. Ainsi,  $I(I(r) \diamond I(s)) = I(r) \diamond I(s)$ . Il résulte que  $I(r \diamond s) \subseteq I(r) \diamond I(s)$ .  $\dashv$

**Proposition 18** *Soit  $\mathcal{N} = (V, C)$  un réseau dont les contraintes appartiennent à  $\mathcal{G}$ . Soit  $\mathcal{N}^I = (V, C^I)$  le réseau de  $\mathcal{INDU}$  défini par  $C^I_{ij} = I(C_{ij})$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , avec  $n = |V|$ . Si  $\mathcal{N}$  est  $\diamond$ -fermé alors  $\mathcal{N}^I$  est  $\diamond$ -fermé.*

**Preuve** Soient  $V_i, V_j, V_k \in V$ . Comme  $\mathcal{N}$  est  $\diamond$ -fermé,  $C_{ij} \subseteq C_{ik} \diamond C_{kj}$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Il s'ensuit que  $I(C_{ij}) \subseteq I(C_{ik} \diamond C_{kj})$ . Nous savons que  $\mathcal{G}$  est fermé pour l'opération  $\diamond$ . Il en résulte que  $I(C_{ik} \diamond C_{kj}) \in \mathcal{C}_{AI}$ . De plus, par définition de  $\mathcal{G}$ ,  $I(C_{ik})$  et  $I(C_{kj}) \in \mathcal{C}_{AI}$ . De Prop. 17, nous déduisons que  $I(C_{ik} \diamond C_{kj}) \subseteq I(C_{ik}) \diamond I(C_{kj})$ . En utilisant ce résultat, on obtient que  $I(C_{ij}) \subseteq I(C_{ik}) \diamond I(C_{kj})$ .  $\dashv$

Maintenant, nous pouvons établir le résultat principal concernant l'ensemble  $\mathcal{G}$ .

**Théorème 3** *Cohérence( $\mathcal{G}$ ) peut être décidé au moyen de la méthode de  $\diamond$ -fermeture.*

**Preuve** Soit  $\mathcal{N} = (V, C)$  un réseau de  $\mathcal{INDU}$  contenant des contraintes appartenant à  $\mathcal{G}$ . En utilisant la méthode de  $\diamond$ -fermeture sur  $\mathcal{N}$  nous obtenons un sous-réseau équivalent  $\mathcal{N}' = (V, C')$ . Les contraintes de  $\mathcal{N}'$  appartiennent à  $\mathcal{G}$  puisque  $\mathcal{G}$  est fermé pour les trois opérations  $^{-1}$ ,  $\cap$  et  $\diamond$ . Si  $\mathcal{N}'$  contient la contrainte vide, alors  $\mathcal{N}$  est non cohérent. Dans le cas opposé, montrons que  $\mathcal{N}'$  (et par conséquent  $\mathcal{N}$ ) est cohérent. Soit  $\mathcal{N}'' = (V, C'')$  défini par  $C''_{ij} = I(C^I_{ij})$ .  $\mathcal{N}''$  est  $\diamond$ -fermé (Prop. 18). Il admet une solution maximale  $m$  (Prop.

16). Or cette solution  $m$  est aussi une solution maximale de  $\mathcal{N}''$  : cela résulte du fait que  $\dim(I(C'_{ij}) \setminus C'_{ij}) < \dim(C'_{ij})$  (voir définition de  $\mathcal{G}$ ), pour chaque couple de variables  $V_i$  et  $V_j$ .  $\dashv$

Ainsi, nous venons de caractériser un ensemble de relations  $INDU$  pour lequel la méthode de  $\diamond$ -fermeture est complète.

## 8 Conclusion

Il existe de nombreuses bonnes propriétés du formalisme d'Allen que le formalisme  $INDU$  ne possède pas : sa (faible) composition ne définit pas une algèbre de relations, la 3-cohérence n'implique pas la cohérence pour les réseaux de  $INDU$  atomiques, certains réseaux de 4 variables sont 3-cohérents mais non cohérents. Malgré ces résultats négatifs, nous avons caractérisé d'intéressants sous-ensembles polynomiaux de relations. À cette fin, nous avons utilisé à la fois une approche syntaxique (les clauses de Horn) et l'approche géométrique (convexité et préconvexité). Alors que les deux approches conduisent à la même sous-classe dans le cas d'Allen, elles conduisent à deux ensembles distincts dans le cas du formalisme  $INDU$ . Suivant l'approche géométrique, nous définissons l'ensemble des relations préconvexes et prouvons que son problème de la cohérence est NP-complet. Nous caractérisons alors deux sous-ensembles de relations préconvexes : un est le sous-ensemble des relations fortement préconvexes, qui est polynomial (puisque ces relations peuvent être représentées par des conjonctions de clauses de Horn), mais pour lequel la cohérence ne peut pas être décidée par la méthode habituelle de la chemin-cohérence ; l'autre, qui ne lui est pas comparable, est également polynomial, et son problème de cohérence peut être résolu au moyen de cette méthode. Ce travail constitue une première exploration fructueuse des propriétés de complexité du formalisme  $INDU$ .

## Références

- [All81] J. F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proceedings of the Seventh Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.
- [BCL00] P. Balbiani, J.-F. Condotta, and G. Ligozat. Reasoning about generalized intervals : Horn representability and tractability. In *Proc. of the seventh int. workshop on Temporal Repres. and Reasoning (TIME'2000)*, Canada, pages 23–30, 2000.
- [DJ97] Th. Drakengren and P. Jonsson. Eight Maximal Tractable Subclasses of Allen's Algebra with Metric Time. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 7 :25–45, 1997.
- [Kou96] M. Koubarakis. Tractable disjunctions of linear constraints. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP'96)*, LNCS 1118, pages 297–307, Cambridge, MA, 1996.
- [Lig96] G. Ligozat. A New Proof of Tractability for ORD-Horn Relations. In *Proc. of the Thirteenth National Conf. on Artificial Intel. (AAAI'96)*, volume 1, pages 395–401, 1996.
- [MF85] A. K. Mackworth and E. C. Freuder. The Complexity of Some Polynomial Network Consistency Algorithms for Constraint Satisfaction Problem. *Artif. Intel.*, 25(1) :65–74, 1985.
- [NB95] B. Nebel and H.-J. Bürckert. Reasoning About Temporal Relations : A Maximal Tractable Subclass of Allen's Interval Algebra. *Jour. of the ACM*, 42(1) :43–66, 1995.
- [PKS99] A. K. Pujari, G. Vijaya Kumari, and A. Sattar. INDU : An Interval and Duration Network. In *Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 291–303, 1999.
- [Tar41] A. Tarski. On the Calculus of Relations. *Journal of Symbolic Logic*, 6(3) :73–89, 1941.
- [VK86] Marc Vilain and Henry Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. In T. Kehler and S. Rosenschein, editors, *Proceedings of the Fifth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'86)*, pages 377–382. American Association for Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann, 1986.