

Représentation et raisonnement sur les intervalles cycliques

Philippe Balbiani - Aomar Osmani

Laboratoire d'informatique de Paris-Nord
Avenue J.-B. Clément, F-93430 Villetaneuse
E-mail : ao@lipn.univ-paris13.fr

Résumé

Cet article présente une algèbre pour le raisonnement sur les relations topologiques entre intervalles définis sur un cercle : les $c_intervalles$. Après l'étude du comportement des relations entre $c_intervalles$ par rapport aux opérations fondamentales d'inverse, d'intersection et de composition, nous proposerons une structure de voisinage (la $v_structure$) entre les relations de l'algèbre. La $v_structure$ permet d'extraire des sous-ensembles de relations présentant de bonnes propriétés : les relations convexes et les relations préconvexes. Le problème de la consistance des réseaux de contraintes de cette algèbre est NP-complet. Afin d'extraire des classes de problèmes traitables, nous avons défini une fonction bijective entre les relations atomiques de l'algèbre et la disposition des points à l'intérieur du disque délimité par le cercle considéré. Cette fonction nous a permis de redéfinir les notions de convexité et de préconvexité par le mouvement en spirale d'un segment porté par une droite passant par le centre du disque. Elle nous a permis de définir un fragment tractable dans l'algèbre : le fragment simplement préconvexe qui sera décrit à la fin de l'article.

1 Introduction

Parmi les formalismes de raisonnement sur le temps utilisés en intelligence artificielle, le formalisme utilisant les techniques de satisfaction de contraintes (CSP) occupe une place très importante. En effet, dans beaucoup d'applications telles que la planification, le langage naturel, les problèmes d'ordonnancement, les connaissances temporelles sont exprimées sous forme d'une collection de relations binaires entre intervalles ou entre points. Dans ce cas, le raisonnement temporel utilise les algorithmes développés pour la résolution des problèmes de satisfaction de contraintes (chemin-consistance, k-consistance,...) pour maintenir la consistance des relations (satisfiabilité), rechercher une solution ou un ensemble de solutions satisfaisant l'ensemble des contraintes et pour générer de nouvelles relations à partir de celles données.

Dans son article publié en 1983, Allen [1] a isolé les relations de base qui peuvent exister entre les couples d'intervalles et a proposé une variante de l'algorithme de chemin-consistance pour le maintien de la consistance et la recherche de solutions des problèmes exprimés sous forme de réseaux de contraintes temporelles. Depuis, une multitude de travaux sont consacrés à la recherche de classes traitable en temps polynomial et à l'amélioration de l'algorithme de résolution proposé par Allen. Les travaux les plus notables sont : l'introduction de la classe pointisable (l'algèbre PA) par Vilain et Kautz[12], la proposition d'algorithmes efficaces pour la recherche de solutions par van Beek [10], la définition d'une classe tractable maximale par Nebel[3], la définition de la classe préconvexe par Ligozat[8]. D'autres travaux ont étudiés diverses extensions de l'algèbre des intervalles.

Les extensions de Ladkin [6], Morris[9], Ligozat[7] et Balbiani et col.[2] sont les extensions les plus notables.

Les techniques de satisfaction de contraintes sont également considérées en raisonnement spatial. Le modèle des régions, élaboré par Cohn, Cui et Randell [5] est, à cet égard, le formalisme le plus connu pour raisonner qualitativement sur l'espace.

Nous présenterons dans cet article une algèbre pour la représentation et le raisonnement sur l'espace et le temps : l'algèbre des intervalles cycliques. Les objets de cette algèbre sont des arcs sur le cercle.

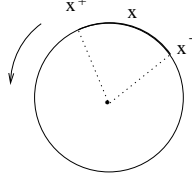


FIG. 1: Exemple d'intervalle cyclique.

Les relations topologiques atomiques possibles entre les intervalles cycliques sont au nombre de 16. Ces relations permettent de comparer tout couple de c-intervalles sur le cercle.

Les relations entre les c-intervalles sont définissables par la relation *meets* et les opérations fondamentales d'inverse ($^{-1}$), d'intersection (\cap) et de composition (\circ) comme le montre la table 1. Le seul prédicat de la logique des arcs est donc le prédicat $m(x, y) : x \text{ meets } y$.

$x \text{ mi } y$	$x \text{ } m^{-1} \text{ } y$
$x \text{ mmi } y$	$x ((m \circ mi \circ m) \wedge (mi \circ m \circ mi)) y$
$x \text{ eq } y$	$x (mmi \circ mmi) y$
$x \text{ s } y$	$x (mi \circ mmi) y$
$x \text{ f } y$	$x (m \circ mmi) y$
$x \text{ ppi } y$	$x (s \circ m) y$
$x \text{ o } y$	$x ((m \circ f) \wedge (si \circ m)) y$
$x \text{ d } y$	$x ((m \circ m) \wedge (mi \circ s)) y$
$x \text{ omi } y$	$x ((si \circ mmi)) y$
$x \text{ ooi } y$	$x (di \circ mmi) y$

TAB. 1: Les relations atomiques définies par la relation m .

L'interprétation de ce prédicat permet de définir l'ensemble des structures relationnelles de l'algèbre des arcs sous la forme $(Arcs, m)$ où m est une relation binaire entre les éléments de l'ensemble $Arcs$ des intervalles cycliques. L'axiomatisation de l'ensemble des formules valides de la classe de modèles définie dans cette logique est-elle possible ? La logique des arcs est-elle décidable ? Est-elle complète ? Admet-elle l'élimination de quantificateurs ? En s'inspirant des techniques de propagation développées pour les réseaux de contraintes entre les intervalles et les points [1, 11, 13] nous donnerons dans ce qui suit quelques réponses à ces questions. Nous commencerons par la présentation des relations atomiques de l'algèbre, puis, nous proposerons la structure de voisinage des relations. Nous exposerons dans la section 3 la représentation topologique des relations. La section 4 définira les opérations atomiques entre les relations (inverse, intersection et composition). La section 5 introduira la notion de réseau de contraintes et montrera que le problème de la consistance de ces

réseaux est NP-complet. La dernière section présentera un fragment tractable de l’algèbre : le fragment des relations simplement préconvexes.

2 Les relations

Soient $\mathcal{C}(C, r)$ un cercle de centre C et de rayon r , $\mathcal{D}(C, r)$ l’ensemble des points du disque délimité par ce cercle et $\mathcal{A}(C, r)$ l’ensemble des c-intervalles (arcs de $\mathcal{C}(C, r)$). Le premier résultat est illustré par la figure 2 : elle définit les 16 relations atomiques possibles entre deux c-intervalles x et y . Les 16 relations sont $o, s, d, fi, eq, f, di, si, oi, moi, ooi, mi, mmi, omi, ppi$ and m . En particulier, étant donné le c-intervalle $x \in \mathcal{A}(C, r)$, il existe exactement un c-intervalle $y \in \mathcal{A}(C, r)$ tel que $mmi(x, y)$ (y est noté x').

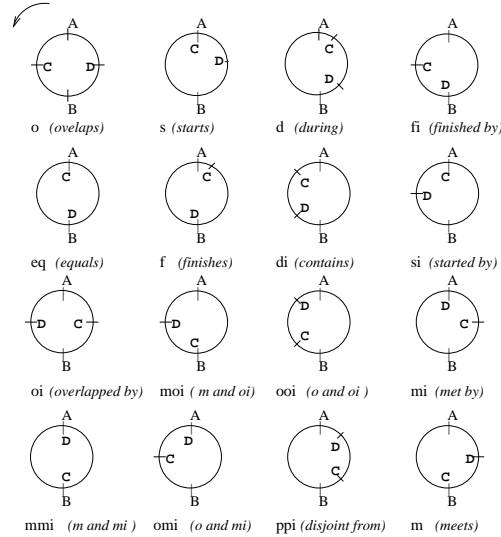


FIG. 2: Les 16 relations atomiques possibles entre deux c-intervalles $x = [A, B]$ et $y = [C, D]$.

L’étude des relations entre c-intervalles, par le déplacement de leurs bornes, nous a conduit à définir une structure de continuité permettant une organisation en treillis à occurrence périodique (voir figure 3), de toutes les relations atomiques. Etant donné le c-intervalle $x \in \mathcal{A}(C, r)$, soit $y \in \mathcal{A}(C, r)$ un c-intervalle tel que $o(x, y)$. Le déplacement continu de la borne y^- dans le sens des aiguilles d’une montre fait passer la relation entre les c-intervalles x et y de o vers s puis vers la relation d . De la même façon, étant donné deux c-intervalles x et $y \in \mathcal{A}(C, r)$ reliés par la relation oi , le déplacement de y^+ dans le sens des aiguilles d’une montre, permet de transformer la relation entre x et y vers les relations mi puis ppi , respectivement. L’application de ce principe de raisonnement à toutes les relations atomiques nous a permis la génération de la structure de voisinage de la figure 3. **Notation** : $a(i, j)$ désigne la relation atomique d’abscisse i et d’ordonnée j . Par exemple $a(0, 2) = o$.

Propriété 1 Etant donné deux c-intervalles $x = [x^-, x^+]$ et $y = [y^-, y^+]$. Pour tout couple de relations $a(i, j)$ et $a(i, j+1)$ (resp. $a(i+1, j)$), si $a(i, j)(x, y)$ alors la relation $a(i, j+1)$ (resp. $a(i+1, j)$) est la première relation différente de $a(i, j)$ obtenue par le déplacement continu de y^+ (resp. y^-) dans le sens des aiguilles d’une montre.

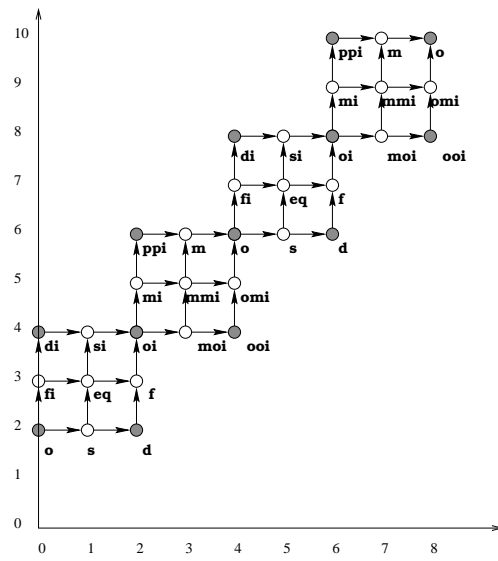


FIG. 3: La structure de voisinage des relations atomiques.

De même en suivant le principe d'attribution d'une dimension aux relations introduit par Ligozat, les 16 relations atomiques sont classées selon la robustesse des relations entre c -intervalles. La dimension d'une relation est égale à deux moins le nombre d'égalités entre points que cette relation implique. Les relations o, d, di, oi, ooi et ppi sont de dimension 2, les relations $s, fi, f, si, moi, mi, omi$ et m sont de dimension 1 et les relations eq et mmi sont de dimension 0. L'attribution des dimensions aux relations permet de définir la fermeture topologique comme suit :

Définition 1 La fermeture topologique d'une relation R est la plus petite relation $C(R)$ telle que $R \subseteq C(R)$ et pour toute relation atomique $A \in R$ et pour toute relation A' voisine de A si $\dim(A) > \dim(A')$ alors $A' \in C(R)$ (voir figure 4).

Exemple 1 $C(mmi) = \{mmi\}$, $C(si) = \{eq, si\}$ et $C(ppi) = \{mi, mmi, ppi, m\}$.

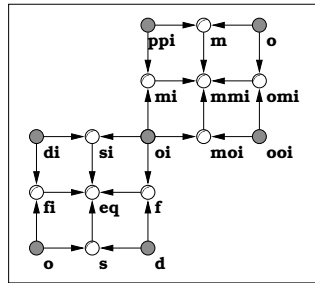


FIG. 4: La fermeture topologique des relations atomiques.

La relation R est définie par un ensemble de relations atomiques. Pour toute relation R $\dim(R) = \max(\{\dim(A) : A \in R\})$ et $C(R) = \bigcup\{C(A) : A \in R\}$, la relation R est convexe si et seulement si, la relation R est obtenue par le produit cartésien de parties de \mathcal{N} de la figure 3.

Exemple 2 Nous considérons, par exemple, la relation $R = \{eq, f, si, oi, moi, mi, mmi\}$. R est convexe, elle est obtenue par le produit cartésien de deux sous-ensembles convexes

$\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 4, 5\}$ de \mathcal{N} . Un autre exemple : la relation $\{ppi, m, o, s, d\}$ est une relation convexe, elle est obtenue par le produit cartésien des sous-ensembles convexes $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\{6\}$ de \mathcal{N} .

L'algèbre des arcs est composée de 236 relations convexes. La liste de ces relations est donnée en annexe.

Définition 2 En reprenant l'idée introduite par Ligozat dans le cadre des relations entre intervalles, une relation R est dite préconvexe si et seulement si la fermeture topologique $C(R)$ de R est convexe.

Exemple 3 La relation $\{moi, m\}$ est préconvexe car sa fermeture topologique donnée par la relation $\{moi, mmi, m\}$ est convexe. Un autre exemple, la relation $\{fi, f, di, oi\}$ est préconvexe car sa fermeture topologique donnée par la relation $\{fi, eq, f, di, si, oi, moi, mi, mmi\}$ est convexe.

Définition 3 Une relation R est dite simplement préconvexe si et seulement R est préconvexe de dimension 0 ou 1 ou si elle est convexe et contient au plus une relation de dimension 2. L'algèbre des c -intervalles contient exactement 49 relations fortement préconvexe.

3 Représentation spatiale

Pour tout c -intervalle $x \in \mathcal{A}(C, r)$, tel que $x^- = A$ et $x^+ = B$ du cercle $\mathcal{C}(C, r)$, il existe un point $X \in \mathcal{D}(C, r)$ tel que X est situé sur le segment $[x^-, C]$ et tel que $long(x) = 2\pi \times long([x^-, X])$ (voir figure 5). D'un autre côté, pour tout point $X \in \mathcal{D}(C, r)$, il existe exactement un arc $x \in \mathcal{A}(C, r)$ tel que X est situé sur le segment $[x^-, C]$ et $long(x) = 2\pi \times long([x^-, X])$.

Lemme 1 La fonction ϕ qui associe à chaque arc de cercle $x \in \mathcal{A}(C, r)$ le point $X \in \mathcal{D}(C, r)$ comme ci-dessus est une fonction bijective entre $\mathcal{A}(C, r)$ et $\mathcal{D}(C, r)$.

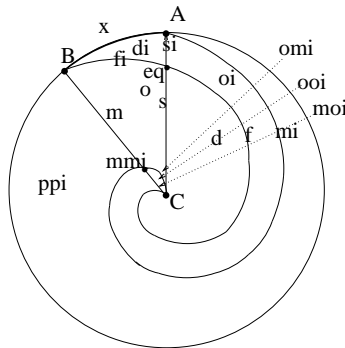


FIG. 5: Représentation géométrique des relations atomiques de l'algèbre des arcs.

De plus, remarquons que, pour tout c -intervalle $x \in \mathcal{A}(C, r)$, tel que $x^- = A$ et $x^+ = B$, $long([x^-, \phi(x)]) = long([\phi(x'), C])$. La spirale d'Archimède $s(B)$ (resp. $s(A)$) tracée dans le sens des aiguilles passant par les points B (resp. A) et le centre du disque C et faisant un tour passe également par le point $\phi(x)$ (resp. $\phi(x')$). Les spirales $s(A)$ et $s(B)$ et les deux rayons (A, C) et (B, C) découpent le disque en 16 régions définissant les 16

relations atomiques (voir figure 5). Toute relation R de l'algèbre est définie dans le disque par l'union des régions associées aux relations atomiques composant R (voir figure 6). Soit $region(x, A)$ la région du disque définie par la relation atomique A . Rappelons que

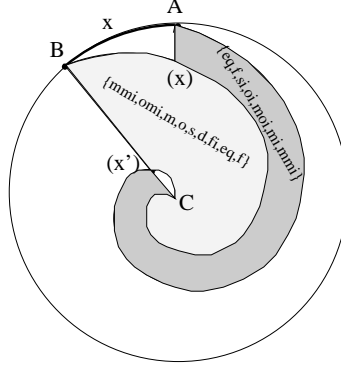


FIG. 6: Découpage du disque $\mathcal{D}(C, r)$ en zones délimitées par des spirale et des fragment de rayon.

pour tout c_intervalle $y \in \mathcal{A}(C, r)$, $A(x, y)$ ssi $\phi(y) \in region(x, A)$. Pour toute relation R , $region(x, R) = \bigcup \{region(x, A) : A \in R\}$ est la région à l'intérieur de $\mathcal{C}(C, r)$ correspondante à la relation R d'où : pour tout c_intervalle $y \in \mathcal{A}(C, r)$, $R(x, y)$ iff $\phi(y) \in region(x, R)$.

Propriété 2 Les relations convexes sont définies à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}(C, r)$ par le déplacement en spirale d'une portion du rayon r .

La figure 6 donne deux illustrations de la définition géométrique des relations convexes :

1. la relation $\{eq, f, si, oi, moi, mi, mmi\}$ obtenue par le déplacement en spirale du segment $[x^-, \phi(x)]$ jusqu'à la position $[\phi(x'), C]$ et
2. la relation $\{mmi, omi, m, o, s, d, fi, eq, f\}$ générée par le déplacement en spirale du segment $[x^+, \phi(x')]$.

4 Les opérations fondamentales

Les opérations fondamentales sont au nombre de trois : l'inverse, la composition et l'intersection. La composition des relations atomiques est définie dans la table 3. Nous notons que pour toute relation atomique A, B et pour tous les c_intervalles $x, y \in \mathcal{A}(C, r)$, il existe une relation atomique $C \in A \circ B$ tel que $C(x, y)$ si et seulement il existe un c_intervalle $z \in \mathcal{A}(C, r)$ tel que $A(x, z)$ et $B(z, y)$.

La table suivante définit les relations inverses des relations atomiques.

A	o	s	d	fi	eq	f	di	si
A^{-1}	oi	si	di	f	eq	fi	d	s
A	oi	moi	ooi	mi	mmi	omi	ppi	m
A^{-1}	o	omi	ooi	m	mmi	moi	ppi	mi

TAB. 2: La table des relations et leur inverse.

L'opération de composition des c -intervalle est définie comme suit : pour toutes les relations $R, S : R \circ S = \bigcup \{A \circ B : A \in R, B \in S\}$.

	o	s	d	fi	f	di	si	oi	moi	ooi	mi	mmi	omi	ppi	m
o	oi,moi,ooi mi,mmi,o omi,ppi,m	ooi omi o	ooi,omi o,s,d	ppi,m o	o,s,d	ppi,m o,fi,di	o,fi di	o,s,d,fi eq,fi,di si,oi	d,f oi	d,f,oi moi,ooi	di,si oi	oi	oi moi ooi	di,si,oi mi,ppi	oi,mi ppi
s	ppi,m,o	s	d	ppi m,o	d	ppi,m,o fi,di	s,eq si	d,f,oi	d,f oi	d,f,oi moi,ooi	mi	mi	mi,mmi omi	ppi	ppi
d	ppi,m,o s,d	d	d	ppi m,o s,d	d	ppi,m,o s,d,fi,eq f,di,si,oi mi	d,f,oi mi,ppi	d,f,oi,mi ppi	d,f oi,mi ppi	d,f,oi,moi ooi,mi,mmi omi ppi,m,o,s	ppi	ppi	ppi m,o s,d	ppi	ppi
fi	ooi,omi o	ooi omi,o	ooi,omi o,s,d	fi	fi,eq f	di	di	di,si,oi	moi	ooi	di,si oi	moi	ooi	di,si,oi mi,ppi	moi mmi,m
f	o,s,d	d	d	fi,eq f	f	di,si,oi mi,ppi	oi,mi ppi	oi,mi ppi	moi mmi,m	ooi,omi o,s,d	ppi	m	o,s,d	ppi	m
di	ooi,omi o,fi,di	ooi omi,o fi,di	ooi,omi,o s,d,fi,eq f,di,si oi,moi	di	di,si oi moi ooi	di	di	di,si,oi moi,ooi	ooi	ooi	di,si oi moi ooi	ooi	ooi	di,si,oi,moi ooi,mi,mmi omi,ppi m,o,fi	ooi omi o,fi,di
si	o,fi,di	s,eq si	d,f,oi moi,ooi	di	oi,moi ooi	di	si	oi,moi ooi	ooi	ooi	mi,mmi omi	omi	omi	ppi,m,o fi,di	o,fi,di
oi	o,s,d,fi eq,fi,di si,oi	d,f oi	d,f,oi moi,ooi	di,si oi	oi moi ooi	di,si,oi mi,ppi	oi mi ppi	oi,moi,ooi mi,mmi,o omi,ppi,m	ooi,omi o	ooi,omi o,s,d	ppi m,o	o	o,s,d	ppi,m,o fi,di	o,fi,di
moi	di,si,oi	moi	ooi	di,si oi	ooi	di,si,oi mi,ppi	moi mmi,m	ooi,omi o	ooi omi,o	ooi,omi o,s,d	fi	fi	fi,eq f	di	di
ooi	di,si,oi moi,ooi	ooi	ooi	di,si oi,moi ooi	ooi	di,si,oi,moi ooi,mi,mmi omi,ppi m,o,fi	ooi omi o,fi,di	ooi,omi o,fi,di	ooi,omi o,fi,di	ooi,omi,o s,d,fi,eq,f di,si,oi,moi	di	di	di,si,oi moi ooi	di	di
mi	d,f,oi	d,f oi	d,f,oi moi,ooi	mi	mi,mmi omi	ppi	ppi	ppi,m,o	s	d	ppi m,o	s	d	ppi,m,o fi,di	s,eq,si
mmi	oi	moi	ooi	mi	omi	ppi	m	o	s	d	fi	eq	f	di	si
omi	oi,moi ooi	ooi	ooi	mi,mmi omi	omi	ppi,m,o fi,di	o,fi di	o,fi,di	s,eq si	d,f,oi moi,ooi	di	si	oi,moi ooi	di	si
ppi	d,f,oi,mi ppi	d,f oi mi ppi	d,f,oi,moi ooi,mmi mi,omi,ppi m,o,s	ppi	ppi m,o s,d	ppi	ppi	ppi,m,o s,d	d	d	ppi m,o s,d	d	d	ppi,m,o s,d,fi,eq f,di,si,oi mi	d,f,oi mi,ppi
m	oi,mi ppi	moi mmi,m	ooi,omi o,s,d	ppi	o,s d	ppi	m	o,s,d	d	d	fi,eq f	f	f	di,si,oi mi,ppi	oi,mi ppi

TAB. 3: table de composition des relations atomiques

Nous rappelons que pour toute relation atomique A et pour tous les c -intervalles $x, y \in A(C, r)$, $A^{-1}(x, y)$ ssi $A(y, x)$. L'inverse d'une relation atomique est défini comme suit : pour toute relation $R : R^{-1} = \bigcup \{A^{-1} : A \in R\}$.

Deux résultats importants sont démontrés par programme :

Lemme 2 *Pour tout couple de relations R, S , si les relations R et S sont convexes alors la relation $R \circ S$ est une relation convexe.*

Lemme 3 *Pour toute relation convexe R , la relation R^{-1} est aussi une relation convexe.*

De plus, le programme montre que pour toutes les relations A, B , $C(A \circ B) \supseteq C(A) \circ C(B)$ et, pour toute relation atomique A , $C(A^{-1}) = C(A)^{-1}$. En conséquence, en s'inspirant du principe de raisonnement suggéré par Ligozat [8], on a montré que :

Lemme 4 *Pour toute relation R , $C(R^{-1}) = C(R)^{-1}$.*

Lemme 5 *Pour tout couple de relations R, S , $C(R \circ S) \supseteq C(R) \circ C(S)$.*

D'un autre coté, nous avons montré que le concept de convexité n'est pas préservé par l'opération fondamentale d'intersection. En effet, si nous considérons les deux relations convexes $\{d, f, oi, moi, ooi\}$ et $\{ooi, omi, o, s, d\}$, leur intersection est une relation non convexe. Quant à la préconvéxité nous n'avons pu montrer formellement si la préconvéxité est préservée par l'opération de composition. Cependant,

Lemme 6 Pour toute relation préconvexe R , la relation R^{-1} est une relation préconvexe.

Preuve Ce résultat est une conséquence directe des lemmes 3 et 4.

A propos de la préservation des relations simplement préconvexes. Nous annonçons le résultat important suivant :

Lemme 7 Pour toutes les relations simplement préconvexes R, S, T , la relation $R \cap (S \circ T)$ est une relation simplement préconvexe.

La preuve de ce résultat est faite par programme.

5 Le réseaux de contraintes

Après avoir défini les notions de base de l'algèbre des arcs, nous essayerons d'adapter les techniques de propagation proposées pour les intervalles [1, 13, 3] pour résoudre des réseaux de contraintes entre c-intervalles. Le réseau de contraintes entre c-intervalles est

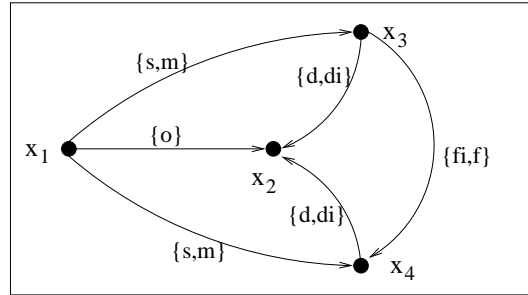


FIG. 7: Exemple d'un réseau chemin-consistant et non consistant.

une structure de la forme (n, R) où $n \geq 1$ et R est une fonction définie de $(n) \times (n)$ vers l'ensemble des relations entre c-intervalles telle que, pour tout $i \in (n)$, $R_{i,i} = \{eq\}$ et, pour tout $i, j \in (n)$, $R_{j,i} = R_{i,j}^{-1}$. L'aspect le plus important est la propriété de la consistance du réseau (n, R) qui est celle de l'existence d'une fonction x de (n) vers $\mathcal{A}(C, r)$ telle que, pour tout couple $i, j \in (n)$, $R_{i,j}(x_i, x_j)$. La complexité du problème de la consistance nous a conduit à nous intéresser à la propriété de chemin-consistance du réseau (n, R) : pour tout couple $i, j \in (n)$, $R_{i,j} \neq \emptyset$ et, pour tous $i, j, k \in (n)$, $R_{i,j} \subseteq R_{i,k} \circ R_{k,j}$. Il est prouvé que :

Lemme 8 Pour tout réseau (n, R) , si (n, R) est consistant alors il peut être transformé en un réseau chemin-consistant par l'exécution de l'algorithme de chemin-consistance qui consiste à remplacer la relation $R_{i,j}$ par la relation $R_{i,j} \cap (R_{i,k} \circ R_{k,j})$ pour tout $i, j, k \in (n)$.

L'inverse, par contre, n'est pas exacte comme le montre la figure 7.

Lemme 9 Le problème de la consistance d'un réseau est NP-dur.

La recherche d'un fragment décidable en temps polynomial en utilisant l'algorithme de chemin-consistance nous a conduit à définir la classe des réseaux simplement préconvexes.

Définition 4 Un réseau (n, R) est simplement préconvexe ssi pour tout couple $i, j \in (n)$, $R_{i,j}$ est une relation simplement préconvexe, et pour tous les indices $i, j, k \in (n)$, si $i \neq j$, $i < k$ et $j < k$ alors $R_{i,k}$ est une relation préconvexe de dimension 0 ou 1 ou $R_{j,k}$ est une relation préconvexe de dimension 0 et 1.

Il est important de noter que :

Lemme 10 *Le concept de préconvexité simple est préservé par l'exécution de l'algorithme de chemin-consistance.*

Preuve Ce résultat est une conséquence directe du lemme 7.

6 La tractabilité

Nous considérons, dans cette section, la question de la recherche d'un fragment tractable de l'algèbre des c -intervalles.

Lemme 11 *Pour tout c -intervalle x_1, \dots, x_K et pour toute relation préconvexe R_1, \dots, R_K de dimension 0 ou 1, si pour tout couple $i, j \in (K)$, $region(x_i, R_i) \cap region(x_j, R_j) \neq \emptyset$ alors $\bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_k) \neq \emptyset$.*

Preuve Supposons (1) qu'il existe $l \in (K)$ tel que $R_l = \{eq\}$. Dans ce cas, $region(x_l, R_l) = \{\phi(x_l)\}$ et, pour tout $k \in (K)$, en utilisant l'hypothèse, $region(x_k, R_k) \cap region(x_l, R_l) \neq \emptyset$, on déduit que $\phi(x_l) \in region(x_k, R_k)$. En conséquence, $\bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_k) = \{\phi(x_l)\}$. Supposons maintenant, (2) qu'il existe $l \in (K)$ tel que $R_l = \{mmi\}$. Ce cas n'est pas très différent du cas (1). Supposons, maintenant, (3) que pour tout $l \in (K)$, $R_l \neq \{eq\}$ et $R_l \neq \{mmi\}$. Premièrement, prenons le cas où, (3.1) pour tout $l \in (K)$, $R_l \subseteq \{s, eq, si\}$ où $R_l \subseteq \{moi, mmi, m\}$. En conséquence, en utilisant l'hypothèse que, pour tout couple $i, j \in (K)$, $region(x_i, R_i) \cap region(x_j, R_j) \neq \emptyset$, ceci montre qu'il existe un rayon $\mathcal{C}(C, r)$ qui contient $region(x_k, R_k)$, pour tout $k \in (K)$, et, en appliquant le théorème de Helly [4] sur le rayon, on déduit que $\bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_k) \neq \emptyset$.

Deuxièmement, considérons le cas où, (3.2) pour tout $l \in (K)$, $R_l \subseteq \{fi, eq, f\}$ ou $R_l \subseteq \{mi, mmi, omi\}$. Il n'y a essentiellement pas de différence entre ce cas et le cas (3.1).

Troisièmement, considérons le cas (3.3) il existe un couple $i, j \in (K)$ tel que $R_i \subseteq \{s, eq, si\}$ or $R_i \subseteq \{moi, mmi, m\}$ et $R_j \subseteq \{fi, eq, f\}$ ou $R_j \subseteq \{mi, mmi, omi\}$. En conséquence, en considérant l'hypothèse $region(x_i, R_i) \cap region(x_j, R_j) \neq \emptyset$, on déduit qu'il existe $X \in \mathcal{D}(C, r)$ telle que $region(x_i, R_i) \cap region(x_j, R_j) = \{X\}$. Pour tout $k \in (K)$, $X \in region(x_k, R_k)$, on déduit que $\bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_k) = \{X\}$.

De même,

Lemme 12 *Pour tout c -intervalle x , pour tout c -intervalle x_1, \dots, x_K , pour toute relation convexe R de dimension 2 contenant au plus 2 relations atomiques et pour toute relation préconvexe R_1, \dots, R_K de dimension 0 ou 1, si, pour tout $i \in (K)$, $region(x, R) \cap region(x_i, R_i) \neq \emptyset$ et, pour tout $i, j \in (K)$, $region(x_i, R_i) \cap region(x_j, R_j) \neq \emptyset$ alors $region(x, R) \cap \bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_k) \neq \emptyset$.*

Ceci nous amène, logiquement, à la conclusion :

Théorème 1 *La résolution du problème d'un réseau simplement préconvexe est décidable en un temps polynomial en utilisant l'algorithme de chemin-consistance.*

Preuve En considérant le lemme 10, le concept de préconvexité simple est préservé par l'utilisation de l'algorithme de chemin-consistance. En conséquence, il reste à démontrer, ici, que tout réseau simplement préconvexe et chemin-consistant est consistant. Premièrement, soit le réseau simplement préconvexe et chemin-consistant (n, R) . Etant donné

$K \in (n - 1)$, considérons maintenant la fonction x de (K) vers $\mathcal{A}(C, r)$ telle que, pour tout couple $i, j \in (K)$, $R_{i,j}(x_i, x_j)$. Donc, étant donné que (n, R) est chemin-consistant, pour tout couple $i, j \in (K)$, Il existe un c-intervalle x_{K+1} tel que $R_{i,K+1}(x_i, x_{K+1})$ et $R_{j,K+1}(x_j, x_{K+1})$. Ceci montre que, pour tout $i, j \in (K)$, $region(x_i, R_{i,K+1}) \cap region(x_j, R_{j,K+1}) \neq \emptyset$ et, en considérant les lemmes 11 et 12, $\bigcap_{k \in (K)} region(x_k, R_{k,K+1}) \neq \emptyset$. En conclusion, il existe un c-intervalle x_{K+1} tel que, pour tout $k \in (K)$, $R_{k,K+1}(x_k, x_{K+1})$. Une illustration de ce résultat de tractabilité est donnée par la figure 8.

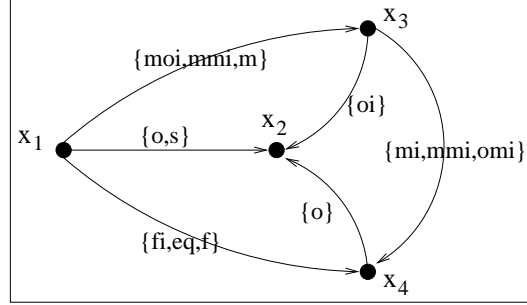


FIG. 8: Exemple d'un réseau simplement préconvexe et chemin-consistant.

7 Conclusion

Nous avons exposé, dans cet article, l'algèbre des c-intervalles comme un ensemble de relations et un ensemble d'opérations fondamentales de composition, d'inverse et d'intersection. Nous avons, également, introduit le concept de préconvexité et nous avons montré que ce concept est préservé par l'application des opérations fondamentales de composition et d'inversion de l'algèbre. En utilisant les techniques de propagation de contraintes développées pour les intervalles, nous avons montré que la résolution du problème de consistance dans l'algèbre des c-intervalles est NP-complet. Nous avons, en conclusion, proposé une classe de réseaux : les réseaux simplement préconvexes et nous avons démontré que les problèmes de consistance de cette classe peuvent être résolus en un temps polynomial par l'utilisation de l'algorithme de chemin-consistance.

Références

- [1] J.F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the Association for Computing Machinery (ACM-83)*, 26 :832–843, 1983.
- [2] P. Balbiani, J.-F. Condotta, L. Fariñas del Cerro, et A. Osmani. Reasoning about generalized intervals. In *Lecture Notes in Artificial Intelligence(1480)*, pages 50–61. Springer, International Conference on Artificial Intelligence : Methodology, Systems, Applications (AIMSA-98), 1998.
- [3] B.Nebel et H.-J. Bürckert. Reasoning about temporal relations : a maximal tractable subset of Allen's interval algebra. *Journal of the Association for Computing Machinery (ACM-83)*, 42 :43–66, 1995.
- [4] V. Chvátal. *Linear Programming*. 1983.
- [5] Z. Cui, A.G. Cohn, et D.A. Randell. Qualitative simulation based on a logical formalism of space and time. In *Proceedings of the AAAI-92*, pages 679–684, 1992.
- [6] P. Ladkin. Time representation : A taxonomy of interval relations. In *Proceedings of the AAAI-86*, pages 360–366, 1986.

- [7] G. Ligozat. On generalized interval calculi. In *Proceedings of the AAAI-91*, pages 234–240, 1991.
- [8] G. Ligozat. A new proof of tractability for ORD-HORN relations. In *Proceedings of the AAAI-96*, pages 395–401, 1996.
- [9] R. A. Morris, W. D. Shoaff, et L. Khatib. Path consistency in a network of non-convex intervals. In *Proceedings of the IJCAI-93*, pages 655–660, 1993.
- [10] P. van Beek. *Exact et approximate reasoning about qualitative temporal relations*. Phd thesis, University of Waterloo, 1990.
- [11] P. van Beek et R. Dechter. On the minimality and global consistency of row-convex constraint networks. *Journal of the Association for Computing Machinery (ACM-83)*, 42 :543–561, 1995.
- [12] M. Vilain et H. Kautz. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. In *Proceedings of the AAAI-86*, pages 377–382, 1986.
- [13] M. Vilain, H. Kautz, et P. Van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning : A revised report. In D. S. Weld et J. de Kleer, editors, *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems*, pages 373–381. Kaufmann, 1990.

Convex relations

- 1 : mmi mi moi oi si di f eq fi d s o m
2 : mi oi si di f eq fi d s o m
3 : ooi moi oi si di f eq fi d s o m
4 : moi oi si di f eq fi d s o m
5 : oi si di f eq fi d s o m
6 : si di eq fi s o m
7 : di fi o m
8 : f eq fi d s o m
9 : eq fi s o m
10 : fi o m
11 : d s o m
12 : s o m
13 : o m 14 : m
15 : mi oi si di f eq fi d s o m ppi
16 : ooi moi oi si di f eq fi d s o m ppi
17 : moi oi si di f eq fi d s o m ppi
18 : oi si di f eq fi d s o m ppi
19 : si di eq fi s o m ppi
20 : di fi o m ppi
21 : f eq fi d s o m ppi
22 : eq fi s o m ppi
23 : fi o m ppi
24 : d s o m ppi
25 : s o m ppi
26 : o m ppi
27 : m ppi 28 : ppi
29 : ppi mi oi si di f eq fi d s o omi
30 : mmi mi moi oi si di f eq fi d s o omi
31 : mi oi si di f eq fi d s o omi
32 : moi oi si di f eq fi d s o omi
33 : oi si di f eq fi d s o omi
34 : si di eq fi s o omi
35 : di fi o omi
36 : f eq fi d s o omi
37 : eq fi s o omi
38 : fi o omi
39 : d s o omi
40 : s o omi
41 : o omi 42 : omi
43 : mi moi oi si di f eq fi d s o m omi mmi
44 : mi oi si di f eq fi d s o m omi mmi
45 : moi oi si di f eq fi d s o m omi mmi
46 : oi si di f eq fi d s o m omi mmi
47 : si di eq fi s o m omi mmi
48 : di fi o m omi mmi
49 : f eq fi d s o m omi mmi
50 : eq fi s o m omi mmi
51 : fi o m omi mmi
52 : d s o m omi mmi
53 : s o m omi mmi
54 : o m omi mmi
55 : m mmi
56 : omi mmi 57 : mmi
58 : moi oi si di f eq fi d s o m ppi omi mmi mi
59 : oi si di f eq fi d s o m ppi omi mmi mi
60 : si di eq fi s o m ppi omi mmi mi
61 : di fi o m ppi omi mmi mi
62 : f eq fi d s o m ppi omi mmi mi
63 : eq fi s o m ppi omi mmi mi
64 : fi o m ppi omi mmi mi
65 : d s o m ppi omi mmi mi
66 : s o m ppi omi mmi mi
67 : o m ppi omi mmi mi
68 : m ppi mmi mi
69 : ppi mi
70 : omi mmi mi
71 : mmi mi 72 : mi
73 : ppi mi oi si di f eq fi d s o omi ooi
74 : mi oi si di f eq fi d s o omi ooi
75 : moi oi si di f eq fi d s o omi ooi
76 : oi si di f eq fi d s o omi ooi
77 : si di eq fi s o omi ooi
78 : di fi o omi ooi
79 : f eq fi d s o omi ooi
80 : eq fi s o omi ooi
81 : fi o omi ooi
82 : d s o omi ooi
83 : s o omi ooi
84 : o omi ooi
85 : omi ooi 86 : ooi
87 : mi oi si di f eq fi d s o m omi mmi ooi moi
88 : oi si di f eq fi d s o m omi mmi ooi moi
89 : si di eq fi s o m omi mmi ooi moi
90 : di fi o m omi mmi ooi moi
91 : f eq fi d s o m omi mmi ooi moi
92 : eq fi s o m omi mmi ooi moi
93 : fi o m omi mmi ooi moi
94 : d s o m omi mmi ooi moi
95 : s o m omi mmi ooi moi
96 : o m omi mmi ooi moi
97 : m mmi moi
98 : omi mmi ooi moi
99 : mmi moi
100 : ooi moi 101 : moi
102 : di fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
103 : eq fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
104 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
105 : d s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
106 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
107 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi
108 : m ppi mmi mi moi oi
109 : ppi mi oi
110 : omi mmi mi ooi moi oi
111 : mmi mi moi oi
112 : mi oi
113 : ooi moi oi
114 : moi oi 115 : oi
116 : eq fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si
117 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si
118 : d s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si
119 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si

120 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si
121 : m ppi mmi mi moi oi si
122 : ppi mi oi si
123 : omi mmi mi ooi moi oi si
124 : mmi mi moi oi si
125 : mi oi si
126 : ooi moi oi si
127 : moi oi si
128 : oi si 129 : si
130 : eq fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di
131 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di
132 : d s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di
133 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di
134 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di
135 : m ppi mmi mi moi oi si di
136 : ppi mi oi si di
137 : omi mmi mi ooi moi oi si di
138 : mmi mi moi oi si di
139 : mi oi si di
140 : ooi moi oi si di
141 : moi oi si di
142 : oi si di
143 : si di 144 : di
145 : di fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f
146 : eq fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f
147 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f
148 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f
149 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f
150 : m ppi mmi mi moi oi f
151 : ppi mi oi f
152 : omi mmi mi ooi moi oi f
153 : mmi mi moi oi f
154 : mi oi f
155 : ooi moi oi f
156 : moi oi f
157 : oi f 158 : f
159 : fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq
160 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq
161 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq
162 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq
163 : m ppi mmi mi moi oi si f eq
164 : ppi mi oi si f eq
165 : omi mmi mi ooi moi oi si f eq
166 : mmi mi moi oi si f eq
167 : mi oi si f eq
168 : ooi moi oi si f eq
169 : moi oi si f eq
170 : oi si f eq
171 : si eq
172 : f eq 173 : eq
174 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di f eq fi
175 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di f eq fi
176 : m ppi mmi mi moi oi si di f eq fi
177 : ppi mi oi si di f eq fi
178 : omi mmi mi ooi moi oi si di f eq fi
179 : mmi mi moi oi si di f eq fi
180 : mi oi si di f eq fi
181 : ooi moi oi si di f eq fi
182 : moi oi si di f eq fi
183 : oi si di f eq fi
184 : si di eq fi
185 : di fi
186 : f eq fi
187 : eq fi 188 : fi
189 : di fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f d
190 : eq fi s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f d
191 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f d
192 : s o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f d
193 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi f d
194 : m ppi mmi mi moi oi f d
195 : ppi mi oi f d
196 : omi mmi mi ooi moi oi f d
197 : mmi mi moi oi f d
198 : mi oi f d
199 : ooi moi oi f d
200 : moi oi f d
201 : oi f d
202 : f d 203 : d
204 : fi o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq d s
205 : o m ppi omi mmi mi ooi moi oi si f eq d s
206 : m ppi mmi mi moi oi si f eq d s
207 : ppi mi oi si f eq d s
208 : omi mmi mi ooi moi oi si f eq d s
209 : mmi mi moi oi si f eq d s
210 : mi oi si f eq d s
211 : ooi moi oi si f eq d s
212 : moi oi si f eq d s
213 : oi si f eq d s
214 : si eq s
215 : f eq d s
216 : eq s
217 : d s 218 : s
219 : m ppi omi mmi mi ooi moi oi si di f eq fi d s o
220 : m ppi mmi mi moi oi si di f eq fi d s o
221 : ppi mi oi si di f eq fi d s o
222 : omi mmi mi ooi moi oi si di f eq fi d s o
223 : mmi mi moi oi si di f eq fi d s o
224 : mi oi si di f eq fi d s o
225 : ooi moi oi si di f eq fi d s o
226 : moi oi si di f eq fi d s o
227 : oi si di f eq fi d s o
228 : si di eq fi s o
229 : di fi o
230 : f eq fi d s o
231 : eq fi s o
232 : fi o
233 : d s o
234 : s o 235 : o