Examen Synthèse d'Images – Modélisation Géométrique

A rendre sur une copie différente de la partie Rendu

M1 IUP SI – Janvier 2008

1h sans document

1 Soit une cubique d'Hermite h : [0,1] → R^2 contrôlée par les pts P_i (0,0) , P_f (1,0) et les vecteurs V_i (-3,0), V_f (-3,0).

1.1 A partir de l'équation d'une courbe polynomiale cubique :

$$h(u)=au^3+bu^2+cu+d, \qquad u\in[0,1]$$

retrouvez l'équation de h(u) sous forme matricielle $U.M_h.V$ avec $U=(u^3\ u^2\ u\ 1)$ et $V = (P_i\ P_f\ V_i\ V_f)^T$. Tous les calculs doivent être détaillés. **(2 pts)**

1.2 Tracez la courbe h et précisez en justifiant votre réponse si sa paramétrisation est injective. **(0,5 pt)**

2 Soit la courbe de Bézier b : [0,1] → R^2 contrôlée par les points P_0 (0,0) , P_1 (-1,0) , P_2 (2,0), P_3 (1,0)**.** Il est rappelé que l'équation d'une courbe de Bézier de degré n est :

$$b(u)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u)P_i, \qquad u\in[0,1]$$

et sa dérivée est :

$$b^u(u)=n\sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(u)\Delta P_i, \qquad \Delta P_i=P_{i+1}-P_i, \qquad u\in[0,1]$$

où les B_i^n (u) sont les polynômes de Bernstein de degré n.

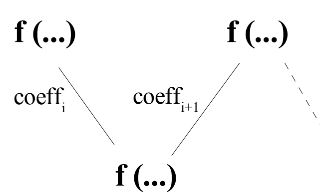
2.1 Donnez en détaillant les calculs la forme matricielle $U.M_b.P$ de b avec $U=(u^3\ u^2\ u\ 1)$ et $P = (P_0\ P_1\ P_2\ P_3)^T$. **(2 pts)**

2.2 Calculez $V_0 = b^u(0)$ et $V_3 = b^u(1)$ en fonction des P_i (i=0..3), puis calculez les coordonnées de ces deux vecteurs. En détaillant les calculs, exprimez maintenant b en fonction de P_0 , P_3 , V_0 et V_3 puis donnez la forme matricielle de b sous la forme U.M.N avec $N = (P_0\ P_3\ V_0\ V_3)^T$. En justifiant votre réponse, que peut-on dire de h et b ? **(2 pts)**

3 Soit une courbe B-spline s : D → R^2 contrôlée par les points P'_1 (0,0) , P'_2 (-1,0) , P'_3 (2,0), P'_4 (1,0), d'ordre k=4 et de vecteur nodal ouvert uniforme commençant par 0 et finissant par 1.

3.1 Donnez le degré m de l'équation de s, son vecteur nodal et son intervalle de définition D. **(0,5 pt)**

3.2 Faîtes le schéma du calcul de s(u) en utilisant la floraison pour u ∈ [0,1]. Au niveau de chaque branche de l'arbre de calcul, donnez le coefficient (en fonction de u et en utilisant les valeurs numériques du vecteur nodal) servant à calculer le noeud correspondant (voir schéma ci-dessous). **(1 pt)**



3.3 A partir de votre arbre de calcul de floraison, donnez, en détaillant les calculs, l'équation de s en fonction des P_i (1=1..4). En déduire s sous la forme matricielle $U.M_s.B$ avec $B = (P'_1\ P'_2\ P'_3\ P'_4)^T$. En justifiant votre réponse, que peut-on dire de s et b ? **(2 pts)**