Examen Modélisation
M1 - IUP - SI
Janvier 2008

1]

1-1 $$h(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$$

$$h(0) = d = P_i \quad (1)$$

$$h(1) = a + b + c + d = P_f \quad (2)$$

$$h'(u) = 3au^2 + 2bu + c$$

$$h'(0) = c = V_i \quad (3)$$

$$h'(1) = 3a + 2b + c = V_f \quad (4)$$

$$\begin{array}{ll} (1),(2),(3) \Rightarrow & a + b = P_f - V_i - P_i \\ (3),(4) \Rightarrow & 3a + 2b = V_f - V_i \end{array} \Bigg\} \Leftrightarrow \begin{cases} (5) & 2a + 2b = 2P_f - 2V_i - 2P_i \\ (6) & 3a + 2b = V_f - V_i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 2P_f - 2V_i - 2P_i \longrightarrow b = P_f - V_i - P_i - a \\ a = V_f + V_i - 2P_f + 2P_i \quad (6)-(5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = P_f - V_i - P_i - V_f - V_i + 2P_f - 2P_i = 3P_f - 3P_i - 2V_i - V_f$$

on reporte a, b, c et d dans l'équation de départ :

$$h(u) = (V_f + V_i - 2P_f + 2P_i)u^3 + (3P_f - 3P_i - 2V_i - V_f)u^2 + V_i u + P_i\ d$$

on factorise en P_i, P_f, V_i et V_f :

$$h(u) = P_i\left(2u^3 - 3u^2 + 1\right) + P_f\left(-2u^3 + 3u^2\right) + V_i\left(u^3 - 2u^2 + u\right) + V_f\left(u^3 - u^2\right)$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$h(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_f \\ V_i \\ V_f \end{bmatrix} = U \cdot M_h \cdot V$$

$\boxed{1.2}$

la paramétrisation n'est pas injective car :

Comme $\overline{P_iP_f}$, V_i et V_f sont colinéaires, la courbe h est rectiligne, de plus V_i et $\overline{P_iP_f}$ étant de sens opposé, la courbe devra revenir sur elle-même, repasser en P_i pour $u \neq 0$ afin de pouvoir finir en P_f.

Donc en P_i, par exemple, il existe 2 valeurs de u ($u=0$ et $u \neq 0$) tq $p(u) = P_i$ $\Rightarrow$ la paramétrisat° n'est pas injective.

$\boxed{2}$

$\boxed{2-1}$

$$b(u) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(u)\, P_i \qquad u \in [0,1]$$

$$n=3 \Rightarrow b(u) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(u)\, P_i \Rightarrow \text{courbe de Bézier de degré } 3.$$

les polynômes de Bernstein de degré 3 sont :

$$B_0^3(u) = (1-u)^3 \qquad B_1^3(u) = 3u(1-u)^2 \qquad B_2^3(u) = 3u^2(1-u)$$
$$B_3^3(u) = u^3$$

d'où $b(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3$

$$= (1 - 3u + 3u^2 - u^3) P_0 + (3u - 6u^2 + 3u^3) P_1 + (3u^2 - 3u^3) P_2 + u^3 P_3$$

d'où $b(u) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = U \cdot M_b \cdot P$

$\boxed{2-2}$

$$b^u(u) = 3 \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u)\, \Delta P_i \qquad \text{avec } \Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$B_0^2(u) = (1-u)^2 \qquad B_1^2(u) = 2u(1-u) \qquad B_2^2(u) = u^2$$

$$b^u(u) = 3\left[(1-u)^2(P_1 - P_0) + 2u(1-u)(P_2 - P_1) + u^2(P_3 - P_2)\right]$$

$V_0 = b'(0) = 3(P_1 - P_0)$ $\qquad$ $V_3 = b'(1) = 3(P_3 - P_2)$

$= 3\begin{pmatrix}-1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ $\qquad$ $= 3\begin{pmatrix}1-2\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} V_0 = 3(P_1 - P_0) \\ V_3 = 3(P_3 - P_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3P_1 = V_0 + 3P_0 \\ 3P_2 = 3P_3 - V_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{3}V_0 + P_0 \\ P_2 = P_3 - \frac{1}{3}V_3 \end{cases}$$

d'où : $b(u) = (1 - 3u + 3u^2 - u^3)P_0 + (3u - 6u^2 + 3u^3)P_1 + (3u^2 - 3u^3)P_2 + u^3 P_3$

↑ d'après question 2-1

$$= (1 - 3u + 3u^2 - u^3)P_0 + (3u - 6u^2 + 3u^3)\left(\frac{V_0}{3} + P_0\right) + (3u^2 - 3u^3)\left(P_3 - \frac{V_3}{3}\right) + u^3 P_3$$

$$= (1 - 3u^2 + 2u^3)P_0 + (u - 2u^2 + u^3)V_0 + (3u^2 - 2u^3)P_3 + (-u^2 + u^3)V_3$$

$$= (2u^3 - 3u^2 + 1)P_0 + (-2u^3 + 3u^2)P_3 + (u^3 - 2u^2 + u)V_0 + (u^3 - u^2)V_3$$

$$b(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ V_0 \\ V_3 \end{bmatrix} = U.M.N$$

$$\left.\begin{aligned} h(u) &= U.M_h.V \\ b(u) &= U.M.N \end{aligned}\right\}$$

Or : $M_h = M$ et $P_0 = P_i$, $P_3 = P_f$, $V_0 = 3(P_1 - P_0) = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = V_i$

$V_3 = 3(P_3 - P_2) = \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = V_f$

donc $M_h = M$ et $V = N$ donc $h(u) = b(u) \Rightarrow$ les courbes sont identiques

$\boxed{3}$

$\boxed{3-1}$ $m = 4 - 1 = 3$

vecteur nodal : $(0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1) = (u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5\ u_6\ u_7\ u_8)$

intervalle de définition : $u \in [u_4, u_5] = [0,1]$

$\boxed{3-2}$

l'ordre de la B-spline est $k = 4$ donc 4 points de controle interviennent dans le calcul de $s(u)$. Ce sont donc les pts P_1, P_2, P_3 et P_4 $\forall u \in [0,1]$

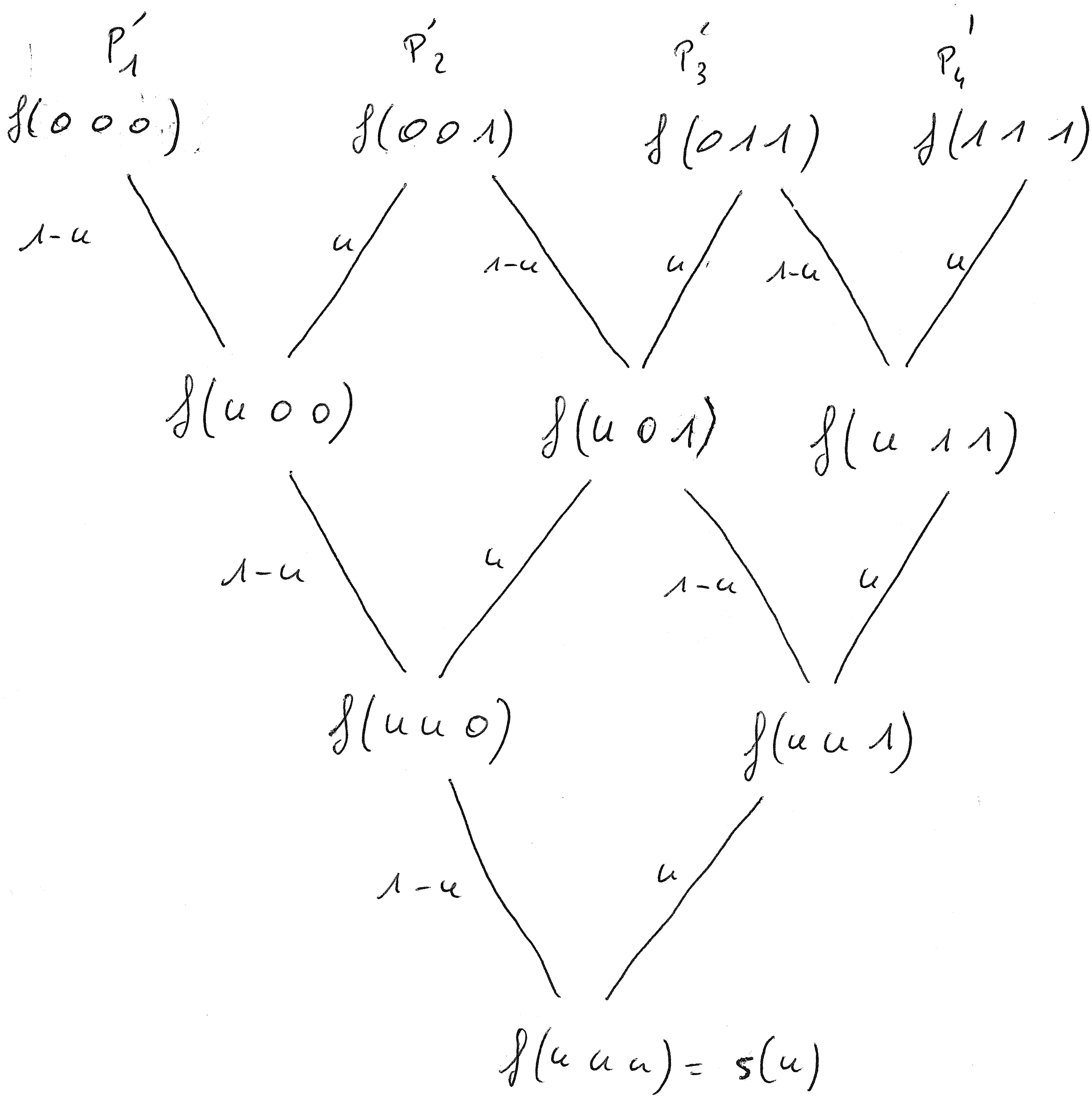
soit f la floraison. On a $m = 3$ donc f a trois arguments et

$P_1' = f(u_2\ u_3\ u_4) = f(0\,0\,0)$

$P_2' = f(u_3\ u_4\ u_5) = f(0\,0\,1)$

$P_3' = f(u_4\ u_5\ u_6) = f(0\,1\,1)$

$P_4' = f(u_5\ u_6\ u_7) = f(1\,1\,1)$



$\boxed{3\text{-}3}$

$$s(u) = f(uuu) = (1-u)\,f(uu0) + u\,f(uu1)$$

$$= (1-u)\left[(1-u)\,f(u00) + u\,f(u01)\right] + u\left[(1-u)\,f(u01) + u\,f(u11)\right]$$

$$= (1-u)\left[(1-u)\big((1-u)P_1' + uP_2'\big) + u\big((1-u)P_2' + uP_3'\big)\right]$$

$$+\, u\left[(1-u)\big((1-u)P_2' + uP_3'\big) + u\big((1-u)P_3' + uP_4'\big)\right]$$

4

$$s(u) = (1-u)^3 P_1' + 3u(1-u)^2 P_2' + 3u^2(1-u) P_3' + u^3 P_4'$$

$$s(u) = (1-3u+3u^2-u^3) P_1' + (3u-6u^2+3u^3) P_2' + (3u^2-3u^3) P_3' + u^3 P_4'$$

$$s(u) = \left[u^3 \; u^2 \; u \; 1\right] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = U . M_s . B$$

$$\left.\begin{array}{l} b(u) = U . M_b . P \\ s(u) = U . M_s . B \end{array}\right\}$$ hors $M_b = M_s$ et comme $P_1' = P_0$, $P_2' = P_1$, $P_3' = P_2$, $P_4' = P_3$, alors $P = B$

d'où $b(u) = s(u)$ et les 2 courbes sont identiques.