Examen M2 IUP SI

Janvier 2008

1

1.1.

$$B_0^2(v) = \frac{2!}{0!(2-0)!} v^0 (1-v)^{2-0} = (1-v)^2$$

$$B_1^2(v) = \frac{2!}{1!(2-1)!} v^1 (1-v)^{2-1} = 2v(1-v)$$

$$B_2^2(v) = \frac{2!}{2!(2-2)!} v^2 (1-v)^{2-2} = v^2$$

$$B_0^2(1/2) = \frac{1}{4} \qquad B_1^2(1/2) = \frac{1}{2} \qquad B_2^2(1/2) = \frac{1}{4}$$

$$d_0(1/2) = B_0^2(1/2)\, S_{00} + B_1^2(1/2)\, S_{01} + B_2^2(1/2)\, B_2^2(1/2)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ 1/2 + 2/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

1.2

$$d_1(1/2) = B_0^2(1/2)\, S_{10} + B_1^2(1/2)\, S_{11} + B_2^2(1/2)\, S_{12}$$

car $d_1(1/2) = \sum_{j=0}^{2} B_j^2(v) S_{1j}$

d'où $$d_1(1/2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 + 1/2 + 1/4\\ 1/4 + 2/2 + 1/4\\ 1/2 + 2/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3/2\\1\end{pmatrix}$$

$$d_2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{j=0}^{2} B_j^2\left(\tfrac{1}{2}\right) S_{2j} = B_0^2\left(\tfrac{1}{2}\right) S_{20} + B_1^2\left(\tfrac{1}{2}\right) S_{21} + B_2^2\left(\tfrac{1}{2}\right) S_{22}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/4 + 2/2 + 2/4 \\ 1/2 \\ 1/2 + 2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3

les d_i sont 3 les directrices en v. Dans le calcul de $p(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$: $d_0(\tfrac{1}{2})$, $d_1(\tfrac{1}{2})$ et $d_2(\tfrac{1}{2})$ sont les 3 pts des directrices en v qui définissent le polygone de contrôle de la génératrice $g(u)$ dans la direction des u. $g(\tfrac{1}{2})$ sera le pt de la surface $p(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$.

$g(u)$ est une courbe de Bézier ayant 3 pts de contrôles. Elle est donc de degré 2 et son équation est :

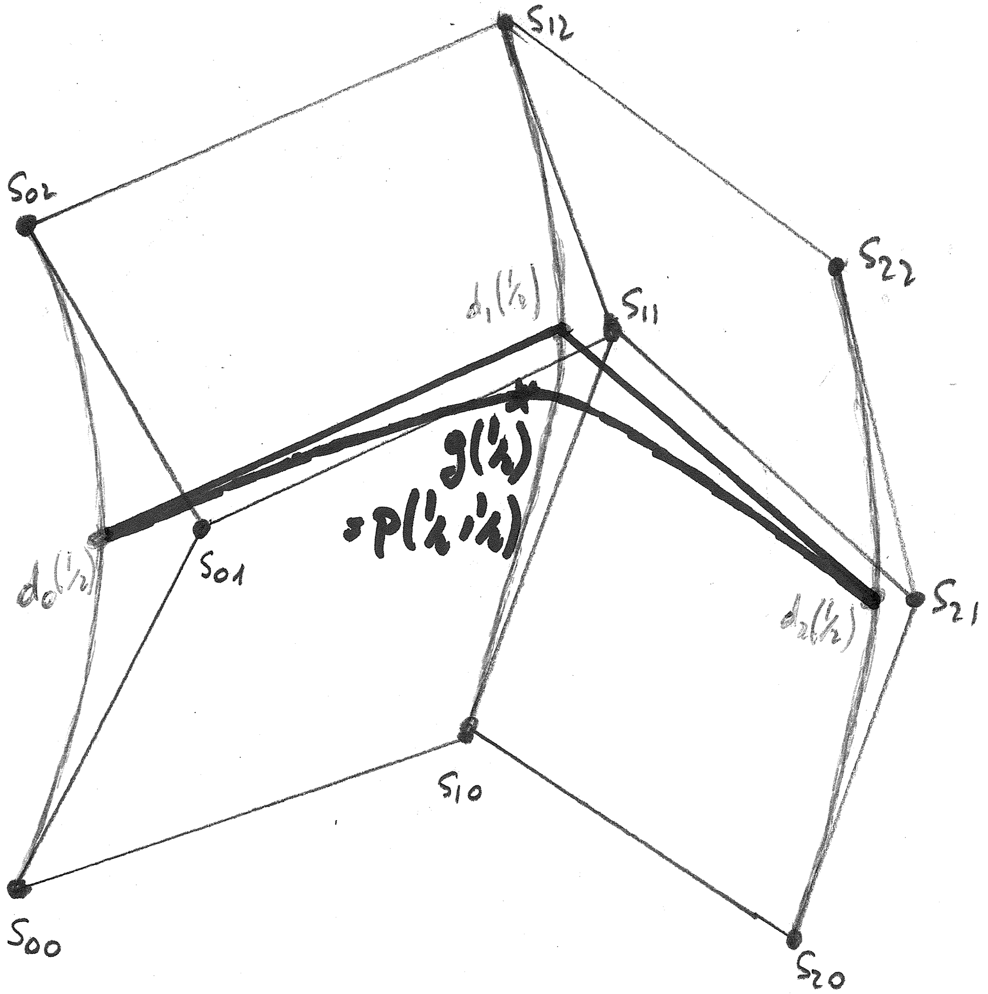
$$g(u) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u)\, d_i\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = B_0^2\left(\tfrac{1}{2}\right) d_0\left(\tfrac{1}{2}\right) + B_1^2\left(\tfrac{1}{2}\right) d_1\left(\tfrac{1}{2}\right) + B_2^2\left(\tfrac{1}{2}\right) d_2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 2/4 \\ \frac{1}{8} + 3/4 + 1/8 \\ 1/4 + 1/2 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2



$\boxed{1.4}$

$$p(u,v) = g_v(u) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u)\, d_i(v)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} B_i^2(u) \sum_{j=0}^{2} B_j^2(v)\, S_{ij}$$

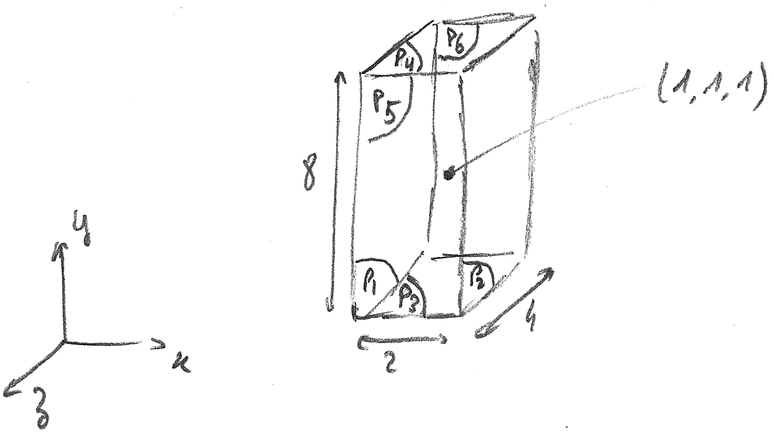
$$= \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} B_i^2(u) \cdot B_j^2(v)\, S_{ij}$$

d'où $B_{ij}^{2,2}(u,v) = B_i^2(u) \cdot B_j^2(v)$

$$B_{21}^{2,2}(u,v) = B_2^2(u) \cdot B_1^2(v) = u^2 \cdot 2v(1-v) = 2u^2v(1-v)$$

2

2.1



$P_1 : f_1(x,y,z) = -x$

$P_2 : f_2(x,y,z) = x-2$

$P_3 : f_3(x,y,z) = -3-y$

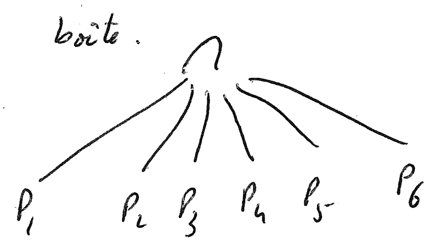
$P_4 : f_4(x,y,z) = y-5$

$P_5 : f_5(x,y,z) = z-3$

$P_6 : f_6(x,y,z) = -1-z$

pour former la boîte englobante il faut utiliser un opérateur d'intersection sur les 6 plans.

arbre CSG :



$\boxed{2-2}$

$${}_{[]}f_1\left({}_{[]}X, {}_{[]}Y, {}_{[]}Z\right) = {}_{[]}- \; {}_{[]}X$$

$${}_{[]}f_2\left(\underline{\qquad\qquad}\right) = {}_{[]}X \;{}_{[]R}- \; 2$$

$${}_{[]}f_3\left(\underline{\qquad\qquad}\right) = -3 \;{}_{R[]}- \; {}_{[]}Y$$

$${}_{[]}f_4\left(\underline{\qquad\qquad}\right) = {}_{[]}Y \;{}_{[]R}- \; 5$$

$${}_{[]}f_5\left(\underline{\qquad\qquad}\right) = {}_{[]}Z \;{}_{[]R}- \; 3$$

$${}_{[]}f_6\left(\underline{\qquad\qquad}\right) = -1 \;{}_{R[]}- \; {}_{[]}Z$$

pour positionner ${}_{[]}V$ on regarde le résultat ${}_{[]}b_1$ retourné par l'opérateur relationnel ${}_{[]R}<$ donc :

$${}_{[]}b_1 = \left({}_{[]}f_1({}_{[]}V) \;{}_{[]R}< 0\right)$$

si ${}_{[]}b_1 = [0,0]$ (faux) : ${}_{[]}V$ est à l'extérieur de P_1

si ${}_{[]}b_1 = [1,1]$ (vrai) : ${}_{[]}V$ est à l'intérieur de P_1

si ${}_{[]}b_1 = [0,1]$ (indéterminé) : ${}_{[]}V$ est sécant à P_1 : ici, on peut conclure que ${}_{[]}V$ est sécant car la fonction d'inclusion du plan est "au plus juste" : si $0 \in {}_{[]}f_1({}_{[]}V)$ alors il existe un point $P(x,y,z)$ dans ${}_{[]}V$ tel que $f_1(P) = 0$.

$$[\,]b_7 = [\,]\text{et}\left([\,]b_1, [\,]b_2, [\,]b_3, [\,]b_4, [\,]b_5, [\,]b_6\right)$$

$$[\,]b_1 = \left([\,]f_1([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

$$[\,]b_2 = \left([\,]f_2([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

$$[\,]b_3 = \left([\,]f_3([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

$$[\,]b_4 = \left([\,]f_4([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

$$[\,]b_5 = \left([\,]f_5([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

$$[\,]b_6 = \left([\,]f_6([\,]V)_{[\,]\mathbb{R}} < 0\right)$$

2.3

$[\,]f_1([\,]V_1) = [-1, 1]$

$[\,]f_2([\,]V_1) = [-3, -1]$

$[\,]f_3([\,]V_1) = [-5, -3]$

$[\,]f_4([\,]V_1) = [-5, -3]$

$[\,]f_5([\,]V_1) = [-4, -1]$

$[\,]f_6([\,]V_1) = [-3, -2]$

$[\,]b_1 = [0, 1]$

$[\,]b_2 = [\,]b_3 = [\,]b_4 = [\,]b_5 = [\,]b_6 = [1, 1]$

d'où $[\,]b_7 = [\,]\text{et}\left([0,1], [1,1], [1,1], [1,1], [1,1], [1,1]\right) = [0,1]$

$[\,]b_7 = [0,1]$ (indéterminé) donc $[\,]V_1$ est sécant à la boîte.