

Examen
M2 Pro I2N - UE4 - Modélisation Géométrique
supports de cours non autorisés

A. Surfaces implicites (10pts)

1. Donnez deux avantages à utiliser des surfaces implicites plutôt que des surfaces paramétriques. **(1pt)**
2. Quelle différence fondamentale faites-vous entre des fonctions potentiel à support compact et des fonctions potentiel à support global ? **(0.5pt)**
3. Soit une fonction potentiel f_i définie par :

$$f_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x, y, z) \rightarrow f_i(P) = \begin{cases} \frac{1}{R_i^4} (d_i^2 - R_i^2)^2 & \text{si } d < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où d_i est la distance euclidienne entre les point P et un point C_i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) .

- a. Tracez sur un graphique f_i en fonction de d_i . Que représente R pour cette fonction potentiel ? **(1pt)**
- b. Le volume implicite V_i est défini par $\{P \in \mathbb{R}^3 \mid f_i(P) \geq 0.5\}$. Positionnez r_i , le rayon de la surface, sur votre graphique. Exprimez R_i en fonction de r_i . En quoi cela sert-il ? **(1.5pts)**
- c. Soient trois points C_1, C_2 et C_3 qui sont les sommets d'un triangle équilatéral de côtés de longueur 4. Les rayons r_i ($i=1,2,3$) sont égaux à 2. Tracez sur un schéma la surface implicite définie par $f = \max(f_1, f_2, f_3) = 0.5$ puis sur un autre schéma la surface implicite définie par $f' = f_1 + f_2 + f_3 = 0.5$. Justifiez vos réponses. **(1pt)**
- d. Donnez une fonction d'inclusion de la fonction puissance deux, puis une de la somme de deux intervalles, une de la somme d'un intervalle avec un réel et enfin une de la différence entre un intervalle et un réel. Utilisez ces fonctions pour proposer une fonction d'inclusion de la fonction distance euclidienne au carré d_i^2 entre un point P (x,y,z) quelconque de \mathbb{R}^3 et un point $C_i(x_i, y_i, z_i)$ donné. **(2pts)**
- e. Utilisez la variation (croissante, décroissant, constante, ...) de la fonction f_i en fonction de d_i pour proposer une fonction d'inclusion optimale pour f_i . **(1pt)**
- f. Soient les points $C_1 (0,0,0)$ et $C_2 (4,0,0)$, et les rayons $r_1 = 2$ et $r_2 = 2$. En utilisant l'arithmétique d'intervalle, positionnez le volume ${}_1P[0,1],[0,1],[0,1]$ par rapport à V_1 puis par rapport à V_2 . Justifiez votre réponse par le calcul. Utilisez ce résultat et les opérateurs logiques pour positionner ${}_1P$ par rapport à l'union de V_1 et V_2 puis positionnez ${}_1P$ par rapport au mélange de V_1 et V_2 par somme. **(2pts)**

B. Représentations paramétriques (10pts)

1. Rappeler trois familles de courbes/surfaces paramétrées utilisées en modélisation géométrique. Pour chacune de ces familles, donner un avantage de cette représentation et un cas d'utilisation où cette représentation est appropriée et meilleure que les deux autres (répondre brièvement – 15 lignes max.) **(2pts)**
2. Soit une courbe de Bézier de points de contrôle $P_0 = (-1,1), P_1 = (1,-1), P_2 = (-1,-1), P_3 = (1,1)$
 - a. Justifier pourquoi la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. **(0.5pt)**
 - b. Quelle est la continuité de la fonction? **(0.5pt)**
 - c. Sachant que les points de contrôle de la courbe dérivée (hodographe) sont donnés par la différence de deux points de contrôle consécutifs, multipliée par le degré: $n(P_{i+1} - P_i)$
Dessinez et déterminez la valeur de la dérivée au paramètre $t=1/2$. **(1pt)**
 - d. Que pouvez vous en déduire pour la paramétrisation. Pouvez-vous justifier que la courbe est lisse? **(1pt)**
3. En cours, vous avez calculé les coefficients de la subdivision pour des schémas de subdivision binaires, c'est à dire, à chaque étape le nombre de points de contrôle est double, en passant du vecteur de noeuds Z au vecteur de noeuds Z/2 à l'aide des floraisons. On souhaite maintenant faire de la subdivision ternaire, c'est à dire de passer du vecteur de noeuds Z au vecteur de noeuds Z/3. On s'intéresse à une courbe de degré 2.
 - a. Montrez qu'il y a trois sortes de points différents, c'est à dire, trois ensemble de coefficients à calculer. **(0.5pt)**
 - b. Calculer les coefficients de subdivision pour le degré 2. **(4pts)**
 - c. Illustrer un pas de cette subdivision sur une polygone fermé simple à 5 ou 6 cotés. **(0.5pt)**